

多軸状態における粘-塑性変形に対する構成式*

大橋義夫**, 大野信忠***, 金山真司****
Yoshio OHASHI, Nobutada OHNO, Shinji KANAYAMA

1. 緒言

著者らは、前報⁽¹⁾において Al 合金の薄肉円管試験片に 200°C で軸力と内圧を作用させることにより、高温での多軸状態における粘-塑性変形挙動を、ひずみ経路が直線 2 分枝からなる場合に実験的に調べた。この結果、高温でもひずみ経路の折れ点後しばらくの間は、ひずみ異方性の効果として、偏差応力テンソルの主方向が非弾性ひずみ速度テンソルのそれから遅れること、また折れ点直後に偏差応力の大きさが急激に減少すること、さらにひずみ経路の折れ点後に部分除荷過程を含む場合には、折れ点後のひずみ弧長が十分に大きくなっても、材料は単軸引張試験の結果に比べて軟化することがわかった。また、上述の偏差応力テンソルの主方向の遅れ現象および多軸状態におけるひずみ硬化特性は、ひずみ速度の影響を受け、ひずみ速度が速い程顕著となることが明らかになった。

このように、多軸状態における粘-塑性変形挙動は、単軸試験の結果からは類推することのできない複雑な現象を呈する。ところが、粘-塑性変形に対する従来の理論^{(2)~(4)}では、単軸変形における材料の硬化を表すために導入された内部変数を、簡単な数学的仮定に基づいて多軸状態に拡張しているために、それによって上述の多軸状態における粘-塑性変形挙動を十分に精度よく表すことはできない。

本研究では、多軸状態におけるひずみ異方性に対する新しい連続体力学的表現およびそれを用いた粘-塑性構成式の形式化について述べる。すなわち、多軸状態のひずみ履歴は一般に複雑であるから、この効果を表現するために内部状態が一つのスカラ変数と有限個の二階対称偏差テンソルによって表されることを仮定する。つづいて、これらの内部変数と応力テンソルの関数として粘-塑性ひずみ速度を規定し、内部変数を用いた従来の構成式によって表し得ないひずみ異方性の表現について議論する。このようにして導かれた

構成式は、四階テンソルをひずみ異方性に対する表現として含むから、その五次元偏差ベクトル空間⁽⁵⁾における表示を検討し、得られた構成式をこの空間で表示する。次に、本理論による等ひずみ速度面を計算し、多軸状態におけるひずみ異方性の効果について検討する。最後に、五次元偏差ベクトル空間を用いて得られた上述の著者らの実験結果と本理論によるそれを比較し、本理論の妥当性について述べる。

2. 構成式の仮定

粘-塑性変形は一般に先行する変形履歴に依存するから、材料の内部状態を記述する変数は、このような変形履歴依存性の効果を十分な精度で表現するものでなければならない。例えば、図 1 に示すような引張り後の圧縮変形過程の途中にある点 B での内部変数は、初期状態から点 A までの引張り変形および点 A から点 B までの圧縮変形の効果を表さなければならない。このような変数として、引張りおよび圧縮変形のどちらにおいても発達する等方硬化変数 ξ 、引張り変形において発達し、圧縮変形においては履歴減衰の効果によって減少する変数 $\alpha^{(t)}$ 、およびその逆の変化をする $\alpha^{(c)}$ が考えられる。このような性質をもつ $\alpha^{(t)}$ と $\alpha^{(c)}$ は、初期状態を除いて両方ともに 0 になること

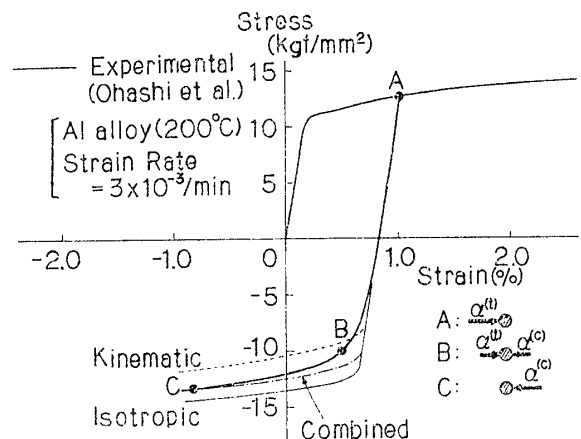


図 1 従来の理論と実験値⁽¹⁾との比較*1

* 昭和 55 年 3 月 21 日 東海支部第 29 期総会講演会において論文講演として講演，原稿受付 昭和 54 年 10 月 29 日。

** 正員，名古屋大学工学部 (〒464 名古屋千種区不老町)。

*** 正員，豊橋技術科学大学。

**** 学生員，名古屋大学大学院。

*1 実験値は、圧縮変形後に引張り変形を行って得られたものであるが、便利のためその応力の符号は正負入れ換えてある。

はない。したがって、いったん粘-塑性変形が生じれば、内部変数の値は初期状態のそれにもどることはない(図1)。ところが、ひずみ異方性を一つの変数によって表す従来の理論^{(2)~(4)}では、それが0になると、材料の内部状態は等方硬化変数を除いて初期状態にもどることになる。したがって、単軸変形に対して $\alpha^{(1)}$ と $\alpha^{(2)}$ の二つを導入すれば、材料の内部状態はより精密に記述される。

上述の変数 $\alpha^{(1)}$ と $\alpha^{(2)}$ の例としては、Gittus⁽⁵⁾が応力符号の反転を伴うクリープ変形を記述するために導入した、引張りおよび圧縮変形に対する可動転位密度がある。すなわち彼は、種々の障害物にたい積し不動化していた転位が、応力の符号が反転すると可動化する効果を表すために、このような変数の変化を規定している。しかしながら、本論文で扱う粘-塑性変形における材料の硬化および軟化の微視的機構は複雑であり、また完全に解明されてもいない。したがって本論文では、内部変数に対する解釈および粘-塑性構成式の形式化は、特定の微視的機構に基づくのではなくて現象論的に行うことにする。

次に多軸状態の変形は、一般に単軸変形よりも複雑なひずみあるいは応力経路に沿うから、この場合の粘-塑性変形の変形履歴依存性を表現するためにはさらに多くの内部変数が必要となる。本研究ではこのような内部変数として、等方硬化変数 ξ と有限個の二階対称テンソル $\alpha^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, N$)を仮定する。例えば図2の場合、考える点Pに先行するひずみ経路は近似的に OP_1, P_1P_2, P_2P のように分割され、各ひずみ区間の影響はそれぞれ $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}$ によって記述される。

粘-塑性変形を粘性変形と時間に依存しない瞬間的な塑性変形に分離する仮定がしばしば用いられるが、

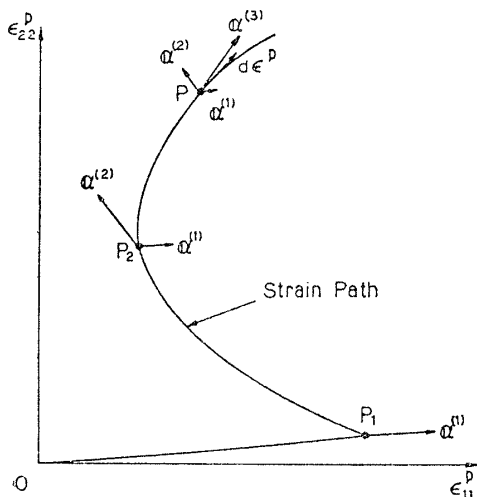


図2 多軸変形に対する内部変数

ここではこのような分離を行わず⁽⁷⁾、粘-塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^P$ は、考える瞬間の応力 σ 、温度 θ および上述の内部変数によって定まると仮定する。ここで (\cdot) は時間 t に関する物質導関数を示す。なお、本研究は温度 θ の変化に伴う $\dot{\epsilon}^P$ の変化を記述することを目的としていないから、以下においては温度 θ に対する依存性を陽に示さないことにする。このとき、 $\dot{\epsilon}^P$ は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}^P &= f(\sigma, \alpha^{(i)}, \xi) F(\sigma, \alpha^{(i)}, \xi) / |\mathbf{F}| \\ |\dot{\epsilon}^P| &= f(\sigma, \alpha^{(i)}, \xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

のように書ける。上式の $|\cdot|$ はノルムを示すが、ここでは $|\dot{\epsilon}^P| = \sqrt{\text{tr} \dot{\epsilon}^P \dot{\epsilon}^P}$ のように定義する。また \mathbf{F} は、粘-塑性変形の生じる方向を示す二階対称偏差テンソル関数である。次に、内部変数の変化速度 $\dot{\alpha}^{(i)}$ と $\dot{\xi}$ も、 $\dot{\epsilon}^P$ と同様、一般に $\sigma, \alpha^{(j)}, \xi$ に依存すると考えられるから、次のように仮定できる。

$$\dot{\alpha}^{(i)} = A^{(i)}(\sigma, \alpha^{(j)}, \xi) \dots\dots\dots(2)$$

$$\dot{\xi} = g(\sigma, \alpha^{(j)}, \xi) \dots\dots\dots(3)$$

ここで、 $A^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, N$)および g はそれぞれ二階対称偏差テンソル関数およびスカラー関数である。

3. 構成式的具体化

2章で述べた構成式を具体化するために、まず $\dot{\epsilon}^P$ に対する式(1)について考える。初期状態からの比例変形のような簡単な変形は、内部変数として等方硬化変数および背応力(back stress)を考える従来の構成式^{(2)~(4)}によって記述できると仮定する。このとき、 $\dot{\epsilon}^P$ は式(1)の特別な形

$$\dot{\epsilon}^P = f(|\sigma_D^*|, \xi) \mathbf{F}(\sigma_D^*, \xi) / |\mathbf{F}| \dots\dots\dots(4)$$

によって表される。ここで、 σ_D^* は偏差有効応力テンソルを示し、次式によって定義される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_D^* &= \sigma - c\alpha \\ \sigma_D &= \sigma - (1/3)(\text{tr} \sigma) \mathbf{I} \\ \alpha &= \sum_i \alpha^{(i)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

上式の \mathbf{I} は単位テンソルを示す。また係数 c は一般に ξ の関数である。

式(4)は、一定ひずみ速度試験に対しては等方硬化と移動硬化を組合わせた式として解釈できるが、一般の変形過程はこの式によって必ずしも十分な精度で表されない。例えば、図1に示した引張り後の圧縮変形において、圧縮変形がある程度進行した部分の実験結果を表すために、等方硬化と移動硬化の組合せを仮定すれば(図1の一点鎖線)、遷移域における材料の軟化は表現されない。このような軟化は、偏差有効応力 σ_D^* が現在生じている内部変数 $\alpha^{(i)}$ と反転したり、あるいはずれたときに生ずる。このような効果は、式(4)を式(1)のように一般化することによって表

現されるから, いま式(4)を

$$\dot{\epsilon}^P = f[\mu(\sigma_D^*, \alpha^{(i)}, \xi), \xi] \mathbf{F}(\sigma_D^*, \alpha^{(i)}, \xi) / |\mathbf{F}|, \quad \mu(\sigma_D^*, \alpha^{(i)}, \xi) \geq |\sigma_D^*| \dots\dots\dots(6)$$

と修正する. 上式の関数 μ はひずみ経路の方向の変化に伴う材料の軟化を表し, 等号が成立するのは生じているすべての $\alpha^{(i)}$ が σ_D^* と同じ方向を向いているときである.

式(6)の関数 μ の効果は, σ_D^* の $-\alpha^{(i)}$ 方向への成分および $\alpha^{(i)}$ に垂直な成分, すなわち $\eta^{(i)} \text{tr} \sigma_D^* \mathbf{n}^{(i)}$ および $\{|\sigma_D^*|^2 - (\text{tr} \sigma_D^* \mathbf{n}^{(i)})^2\}^{1/2}$ が存在するときに生ずる. ここで $\mathbf{n}^{(i)}$ および $\eta^{(i)}$ は

$$\mathbf{n}^{(i)} = \alpha^{(i)} / |\alpha^{(i)}| \dots\dots\dots(7)$$

$$\eta^{(i)} = \begin{cases} 0 & (\text{tr} \sigma_D^* \mathbf{n}^{(i)} \geq 0) \\ 1 & (\text{tr} \sigma_D^* \mathbf{n}^{(i)} < 0) \end{cases} \dots\dots\dots(8)$$

のように定義される. いま, μ^2 が σ_D^* の二次関数であり, しかも上述の二つの応力成分が $\alpha^{(i)}$ の大きさに比例して μ^2 に寄与すると仮定すれば, μ^2 は

$$\mu^2 = |\sigma_D^*|^2 + \sum_i |\alpha^{(i)}| [k_1 \eta^{(i)} (\text{tr} \sigma_D^* \mathbf{n}^{(i)})^2 + k_2 \{|\sigma_D^*|^2 - (\text{tr} \sigma_D^* \mathbf{n}^{(i)})^2\}] \dots\dots\dots(9)$$

と書ける. ここで k_1 と k_2 は一般に ξ の関数である. 上式はまた, 式の簡単な形に書き直すことができる.

$$\mu^2 = \text{tr} \sigma_D^* \mathbf{M} [\sigma_D^*], \quad \mathbf{M} = \mathbf{I}_N + \sum_i |\alpha^{(i)}| [k_1 \eta^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} + k_2 (\mathbf{I}_N - \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)})] \dots\dots\dots(10)$$

上式の \mathbf{M} は4階のテンソルであり, $\mathbf{M}[\sigma_D^*]$ は, $M_{ijkl}(\sigma_D^*)_{kl}$ のように成分表示される. また \otimes はテンソル積を示し, さらに \mathbf{I}_N は二階対称偏差テンソルに対する恒等変換であって, その成分は

$$(\mathbf{I}_N)_{ijkl} = -(1/3)\delta_{ij}\delta_{kl} + (1/2)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \dots\dots\dots(11)$$

と表される. ここで, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである.

粘-塑性ひずみ速度の流れ方向を規定するテンソル \mathbf{F} は, 式(6)によれば一般に σ_D^* , $\alpha^{(i)}$, ξ の関数である. \mathbf{F} の $\alpha^{(i)}$ への依存性は, ひずみ経路の曲折によって, σ_D^* と $\dot{\epsilon}^P$ が非共軸になる効果を表す. 一方, \mathbf{F} の ξ への依存性は, 等方硬化の発達に伴う \mathbf{F} の $\alpha^{(i)}$ への依存性の変化を示す. このような効果は, 等方テンソル関数に対する表現定理によって \mathbf{F} をテンソル多項式に展開すれば一般的に表現できるが, ここでは簡単のためにそれは式(10)の \mathbf{M} によって表されると仮定する. このとき, 式(6)は次のように書ける.

$$\dot{\epsilon}^P = f(\mu, \xi) \mathbf{M}[\sigma_D^*] / |\mathbf{M}[\sigma_D^*]| \dots\dots\dots(12)$$

材料の硬化を表す内部変数の変化は, 一般にひずみ硬化, 非弾性変形の進行に伴う履歴減衰効果としての回復および熱作用による軟化としての回復からなる⁽⁴⁾. ただし, 考える瞬間の粘-塑性ひずみ増分 $d\epsilon^P$ によって発達する $\alpha^{(I)}$ (図2の点 P では $\alpha^{(3)}$) 以外の $\alpha^{(k)}$ は, 上述の二つの回復効果によってしだいに減少する. したがって, 内部変数の変化は次のように規定できる.

$$d\alpha^{(I)} = \mathbf{H}^{(I)} [d\epsilon^P] - \mathbf{R}_1^{(I)} |d\epsilon^P| - \mathbf{R}_2^{(I)} dt \dots\dots\dots(13 \cdot a)$$

$$d\alpha^{(k)} = -\mathbf{R}_1^{(k)} |d\epsilon^P| - \mathbf{R}_2^{(k)} dt \quad (k \neq I) \dots\dots\dots(13 \cdot b)$$

$$d\xi = h |d\epsilon^P| - r_1 |d\epsilon^P| - r_2 dt \dots\dots\dots(14)$$

上式の各係数は σ_D^* , $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(N)}, \xi$ の関数である

が, $\mathbf{H}^{(I)}$ ($I=1, 2, \dots, N$) は $H_{pprs}^{(I)} = H_{pqrr}^{(I)} = 0$, $H_{pqrs}^{(I)} = H_{qprs}^{(I)}$ および $H_{pqrs}^{(I)} = H_{pqsr}^{(I)}$ を満足する四階テンソル関数, $\mathbf{R}_1^{(i)}, \mathbf{R}_2^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, N$) は二階対称偏差テンソル関数, さらに h, r_1, r_2 はスカラー関数である.

図2のひずみ経路における点 P_1, P_2 のように, ひずみ経路の方向が大きく変化するとき, 式(13 \cdot a)によって規定される $\alpha^{(I)}$ として, 新しい $\alpha^{(i)}$ あるいは考える瞬間に値をもつ $\alpha^{(i)}$ のうち $d\epsilon^P$ との方向のずれのわずかなものを選ばなければならない. このような $\alpha^{(I)}$ の交替条件としては, 例えば $\alpha^{(I)}$ と $d\epsilon^P$ のなす角, すなわち $\cos^{-1}(\text{tr} d\epsilon^P \alpha^{(I)} / |d\epsilon^P| |\alpha^{(I)}|)$ がある規定された値になった時を考えることができる.

これまで, 内部状態を等方硬化変数と背応力によって表す構成式の精密化を考えてきた. しかし式(12)は, 背応力を考えないで偏差有効応力 σ_D^* を偏差応力 σ_D によって置き換えた形

$$\dot{\epsilon}^P = f\{\mu(\sigma_D, \alpha^{(i)}, \xi), \xi\} \mathbf{M}[\sigma_D] / |\mathbf{M}[\sigma_D]| \dots\dots\dots(15)$$

であっても, μ および \mathbf{M} によってひずみ異方性のある程度表現し得る. 比例変形に対しては, 前に述べた μ と \mathbf{M} の性質によって $\mu(\sigma_D, \alpha^{(i)}, \xi) = |\sigma_D|$, $\mathbf{M} = \mathbf{I}_N$ となるから, 上式は内部変数として ξ だけを含む等方硬化形の式となる. したがって, 上式に $\alpha^{(i)}$ が陽に現れるのはひずみ経路の方向が変化するときである. このように, 式(15)を用いると $\alpha^{(i)}$ の効果は分離され, 7章において述べるように $\alpha^{(i)}$ の時間的变化はひずみ経路の折れ曲がる試験から

容易に定められることになる。ただし、単軸変形における除荷時には応力の方向(符号)は変わらないから、この際生じるひずみ異方性の効果は、式(15)によっては表されない。しかし、このような効果は通常あまり顕著ではないから、これを無視してもそれほど大きな誤差にはならない。

先行ひずみ経路の方向が変化していても、その後のひずみ経路が直線的であれば、式(15)はしだいにきだけを含む形、すなわち等方硬化を仮定した結果に漸近する。しかし、著者らの粘-塑性試験の結果⁽¹⁾によると、ひずみ経路の折れ点に部分除荷過程を含む場合には、折れ点後のひずみ弧長が十分に大きくなっても、材料は等方硬化の結果に比べて軟化することがわかっている。このような材料の軟化を表すために、 $d\epsilon^P$ の方向が変化した後しばらくの間は ξ が発達しないと仮定すると、式(14)は特に

$$d\xi = h d\lambda (d\epsilon^P, \alpha^{(i)}, \xi) - r_1 |d\epsilon^P| - r_2 dt, \quad |d\epsilon^P| \geq d\lambda (d\epsilon^P, \alpha^{(i)}, \xi) \geq 0 \quad (16)$$

と書ける。ここで、 $d\lambda = |d\epsilon^P|$ となるのは、すべての $\alpha^{(i)}$ が $d\epsilon^P$ と同じ方向を向いているときである。

いま、議論を簡単にするために、図1の点Aのように $\alpha^{(i)}$ が $\alpha^{(1)}$ 一つだけからなる場合について考える。このとき、上述の多軸状態におけるひずみ硬化特性によって、粘-塑性ひずみ増分 $d\epsilon^P$ のうち $-\alpha^{(1)}$ の方向(除荷方向)に生じた成分は $d\lambda$ に寄与しないと考えられるから、 $d\lambda$ は例えば

$$d\lambda = \sqrt{\text{tr } d\epsilon^P N [d\epsilon^P]}, \quad N = I_N - \frac{q \eta^{(1)'} |\alpha^{(1)}| n^{(1)} \otimes n^{(1)}}{1 + q |\alpha^{(1)}|} \quad (17)$$

のように表される。ここで係数 q は一般に ξ に依存する。また $\eta^{(1)'}$ は、 $d\epsilon^P$ と $\alpha^{(1)}$ に関して式(8)のように定義される。式(17)から、 $\text{tr } d\epsilon^P \alpha^{(1)} \geq 0$ のとき $N = I_N$ となり、 $d\lambda$ は $\alpha^{(1)}$ の影響を受けないことがわかる。一方、 $\text{tr } d\epsilon^P \alpha^{(1)} < 0$ 、かつ $q |\alpha^{(1)}| \gg 1$ のとき、 $\text{tr } d\epsilon^P N [d\epsilon^P] = |d\epsilon^P|^2 - (\text{tr } d\epsilon^P n^{(1)})^2$ となり、 $d\epsilon^P$ の $-\alpha^{(1)}$ 方向への成分は $d\lambda$ に寄与しないことが示される。次に、 $\alpha^{(i)}$ が N 個からなるとき、式(17)第2式は次のように一般化できる。

$$N = I_N - \sum_i \frac{q \eta^{(i)'} |\alpha^{(i)}| n^{(i)} \otimes n^{(i)}}{1 + q |\alpha^{(i)}| / \omega^{(i)}}, \quad \omega^{(i)} = \frac{\eta^{(i)'} (\text{tr } d\epsilon^P n^{(i)})^2}{\sum_j \eta^{(j)'} (\text{tr } d\epsilon^P n^{(j)})^2} \quad (18)$$

ここで、 $\omega^{(i)}$ は、 $d\lambda^2 < 0$ とならないように各 $\alpha^{(i)}$ に割り当てられた重み関数である。

4. 五次元偏差ベクトル空間における表示

多軸状態における実験結果は、イリュージョン⁽⁵⁾によって提案された五次元偏差ベクトル空間によって議論されることが多い。ところで3章の構成式は、いくつかの四階のテンソルを含むが、それらのこの空間での表示についてはまだ議論されていない。したがって本章では、このような議論を行うことによって、3章の結果を五次元偏差ベクトル空間で表示する。

二階対称の偏差テンソル A_{ij} ($i, j=1, 2, 3$)に対して、五次元偏差ベクトル \bar{A}_α ($\alpha=1, 2, \dots, 5$)は、次式

$$\bar{A}_\alpha \bar{A}_\alpha = \nu_A^2 A_{ij} A_{ij} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_1 &= \sqrt{3/2} \nu_A A_{11}, & \bar{A}_2 &= \sqrt{2} \nu_A (A_{22} + A_{11}/2) \\ \bar{A}_3 &= \sqrt{2} \nu_A A_{12}, & \bar{A}_4 &= \sqrt{2} \nu_A A_{23}, & \bar{A}_5 &= \sqrt{2} \nu_A A_{13} \end{aligned} \right\} \quad (20 \cdot a)$$

によって定義される。ここで、 ν_A は A_{ij} に関して定められる定数であり、また $(-)$ は五次元偏差ベクトル空間に関する量を示す。いま、式(20・a)を簡単に

$$\bar{A}_\alpha = \nu_A \Gamma_{\alpha ij} A_{ij} \quad (21)$$

と書く。 A_{ij} は偏差テンソルであるから、 $\Gamma_{\alpha ij}$ は $\Gamma_{\alpha ii}$ の任意性を除いて定められる。そこで、 $\Gamma_{\alpha ii} = 0$ となるように $\Gamma_{\alpha ij}$ を定めると、式(20・a)は

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_1 &= \nu_A (\sqrt{3/2} A_{11} - \sqrt{1/6} A_{ii}), & \bar{A}_2 &= \nu_A \{ \sqrt{2} (A_{22} + A_{11}/2) - \sqrt{1/2} A_{ii} \} \\ \bar{A}_3 &= \sqrt{1/2} \nu_A (A_{12} + A_{21}), & \bar{A}_4 &= \sqrt{1/2} \nu_A (A_{23} + A_{32}), & \bar{A}_5 &= \sqrt{1/2} \nu_A (A_{31} + A_{13}) \end{aligned} \right\} \quad (20 \cdot b)$$

と書き直される。この結果、 $\Gamma_{\alpha ij}$ の0でない成分は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{111} &= \sqrt{6}/3, & \Gamma_{122} &= \Gamma_{133} = -\sqrt{1/6}, & \Gamma_{222} &= -\Gamma_{233} = \sqrt{1/2} \\ \Gamma_{312} &= \Gamma_{321} = \Gamma_{423} = \Gamma_{432} = \Gamma_{513} = \Gamma_{531} = \sqrt{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

上式を用いると、式(21)は A_{ij} に関して解くことができ、次式

$$A_{ij} = (1/\nu_A) \Gamma_{\alpha ij} \bar{A}_\alpha \quad (23)$$

が成立することがわかる。次に、式(21)と(23)を用いると、次の関係

$$\Gamma_{aij}\Gamma_{ars}=(I_N)_{ijrs}, \quad \Gamma_{aij}\Gamma_{\beta ij}=\delta_{\alpha\beta} \dots\dots\dots(24)$$

が得られる。ここで $(I_N)_{ijrs}$ は、すでに式 (11) で定義されている。

次に、関係

$$A_{ij}=K_{ijkl}B_{kl} \dots\dots\dots(25)$$

を考える。ここで、 A_{ij} 、 B_{kl} は二階対称の偏差テンソル、また K_{ijkl} は $K_{iikl}=K_{ijkk}=0$ 、 $K_{ijkl}=K_{jikl}$ および $K_{ijkl}=K_{ijlk}$ を満足する四階のテンソルである。上式に式 (23) および式 $B_{kl}=(1/\nu_B)\Gamma_{\beta kl}\bar{B}_\beta$ を代入し、式 (24) を用いれば次式が得られる。

$$\bar{A}_\alpha=(\nu_A/\nu_B)\bar{K}_{\alpha\beta}\bar{B}_\beta \dots\dots\dots(26)$$

$$\bar{K}_{\alpha\beta}=\Gamma_{aij}\Gamma_{\beta rs}K_{ijrs}, \quad K_{ijrs}=\Gamma_{aij}\Gamma_{\beta rs}\bar{K}_{\alpha\beta} \dots\dots\dots(27)$$

したがって、四階のテンソル \mathbf{K} は五次元偏差ベクトル空間では二階のテンソル $\bar{\mathbf{K}}$ となることが示された。特に、式 (11) の \mathbf{I}_N は五次元偏差ベクトル空間では次のようになる。

$$(\bar{\mathbf{I}}_N)_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta} \dots\dots\dots(28)$$

以上の結果を用いると、3章で導いた構成式は五次元偏差ベクトル空間では次のように表示される。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P=f(\bar{\mu}, \xi)\bar{\mathbf{M}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_D^*/|\bar{\mathbf{M}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_D^*| \dots\dots\dots(29)$$

$$\bar{\mu}^2=\dot{\boldsymbol{\sigma}}_D^*\cdot\bar{\mathbf{M}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_D^*, \quad \bar{\mathbf{M}}=\bar{\mathbf{I}}_N+\sum_i|\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(i)}|[k_1\eta^{(i)}\bar{\mathbf{n}}^{(i)}\otimes\bar{\mathbf{n}}^{(i)}+k_2(\bar{\mathbf{I}}_N-\bar{\mathbf{n}}^{(i)}\otimes\bar{\mathbf{n}}^{(i)})] \dots\dots\dots(30)$$

$$\left. \begin{aligned} d\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(I)}&=\bar{\mathbf{H}}^{(I)}d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P-\sqrt{3/2}\bar{\mathbf{R}}_1^{(I)}|d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P|-\bar{\mathbf{R}}_2^{(I)}dt \\ d\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)}&=-\sqrt{3/2}\bar{\mathbf{R}}_1^{(k)}|d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P|-\bar{\mathbf{R}}_2^{(k)}dt \quad (k \neq I) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

$$d\xi=\bar{h}(d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P\cdot\bar{\mathbf{N}}d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P)^{1/2}-\bar{r}_1|d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P|-\bar{r}_2dt \dots\dots\dots(32)$$

$$\bar{\mathbf{N}}=\bar{\mathbf{I}}_N-\sum_i\frac{\bar{q}\eta^{(i)}|\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(i)}|\bar{\mathbf{n}}^{(i)}\otimes\bar{\mathbf{n}}^{(i)}}{1+\bar{q}|\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(i)}|/\omega^{(i)}} \dots\dots\dots(33)$$

ここで、式 (21) の係数 ν_A の値は、 $\boldsymbol{\sigma}$ 、 $\boldsymbol{\sigma}_D^*$ に対しては $\sqrt{3/2}$ 、 $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ 、 $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ 、 $\mathbf{R}_1^{(i)}$ 、 $\mathbf{R}_2^{(i)}$ に対しては $\sqrt{2/3}$ 、 $\mathbf{n}^{(i)}$ に対しては 1 と選んだ。さらに $f(\bar{\mu}, \xi)=\sqrt{2/3} \times f(\mu, \xi)$ 、また $\bar{\mu}$ 、 \bar{k}_1 、 \bar{k}_2 、 \bar{h} 、 \bar{r}_1 および \bar{q} の値は (-) のないその $\sqrt{3/2}$ 倍である。

5. 等ひずみ速度面の形状

従来、多軸状態に対する実験の多くは、薄肉円管に引張りとなじりの複合負荷を与えることによって行われてきた。したがってここでは、この場合の応力状態に対して等ひずみ速度面を示すことにする。

このとき、0 でない $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_D^*$ の成分は、 $(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_D^*)_1(=\sigma_{11}$

$-3c\alpha_{11}/2$) と $(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_D^*)_3(=\sqrt{3}\sigma_{12}-\sqrt{3}c\alpha_{12})$ である。したがって、等ひずみ速度面を表す式 (30) は、この場合

$$\bar{\mu}^2=\bar{M}_{11}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_D^*)_1^2+2\bar{M}_{13}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_D^*)_1(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_D^*)_3 +\bar{M}_{33}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_D^*)_3^2 \dots\dots\dots(34)$$

となる。簡単な場合として、図 1 の点 A のように、 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(i)}$ が $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)}$ だけからなり、しかも $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)}$ が $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)}$ だけを 0 でない成分として持つ場合を考える。このとき $\bar{\mathbf{M}}$ の成分は、 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_D^*\cdot\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)} \geq 0$ のとき $\bar{M}_{11}=1$ 、 $\bar{M}_{13}=0$ 、 $\bar{M}_{33}=1+\bar{k}_2\bar{\alpha}_1^{(1)}$ となり、一方 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_D^*\cdot\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)} < 0$ のとき $\bar{M}_{11}=1+\bar{k}_1\bar{\alpha}_1^{(1)}$ 、 $\bar{M}_{13}=0$ 、 $\bar{M}_{33}=1+\bar{k}_2\bar{\alpha}_1^{(1)}$ となる。このような場合に、 $\bar{k}_1\bar{\alpha}_1^{(1)}$ と $\bar{k}_2\bar{\alpha}_1^{(1)}$ のいくつかの組合せに対して等ひずみ速度面を計算したのが図 3 である。この図から、等ひずみ速度面は $-\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)}$ 方向の曲率が $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)}$ 方向のそれに比べて小さい形であり、ひずみ異方性の効果は $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_D^*$ が $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)}$ の方向からずれるほど大きくなることわかる。なお、このような等ひずみ速度面の形状は、常温の塑性変形に対してひずみ異方性の効果として得られた等ひずみ面の形⁽⁸⁾⁽⁹⁾と類似している。

6. 実験結果による検討

ここでは、緒論で述べた著者らの粘-塑性試験の結果⁽¹⁾を用いて本理論の妥当性について検討することにする。なお、粘-塑性変形に対して背応力を考える理論では、材料定数の決定に応力減少試験などの複雑な

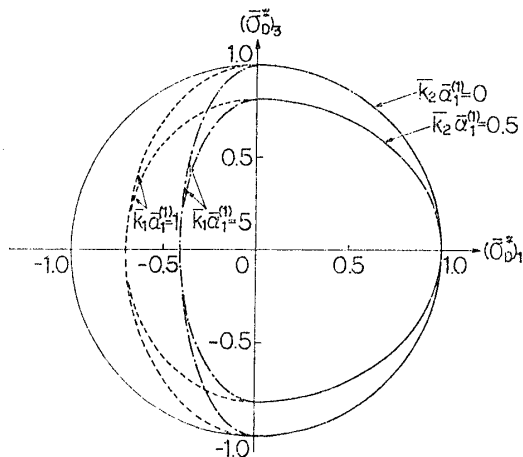


図 3 等ひずみ速度面の形状

試験が必要となる⁽³⁾。したがって本章では、 $c=0$ と置いた式 (15) を用いて、背応力によらないで実験結果を記述することを試みる。

図 4 に示す一定ひずみ速度の単軸引張りおよび圧縮試験においては、粘-塑性ひずみ速度は降伏応力を越えて生じる粘塑性ひずみ速度と降伏応力に関係な粘性ひずみ速度からなると考えられる。さらに、圧縮試験において、ひずみ 1% および 2% でひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ を $3 \times 10^{-5}/\text{min}$ から $3 \times 10^{-3}/\text{min}$ に増加した実験結果 (記号 \blacktriangle , \triangle) は、 $\dot{\epsilon}=3 \times 10^{-3}/\text{min}$ の一定ひずみ速度試験結果に漸近している。したがって図 4 の実験に対しては、SUS 304 の場合⁽¹⁰⁾ と同様、非弾性ひずみをひずみ硬化の測度として取り得ることがわかる。以上の考察から、単軸引張り変形に対する式としては、次式を用いた。

$$\epsilon^P = A_1 \sinh \{ \xi^n \langle \sigma - \sigma_0 - r(\xi) \rangle / m_1 \} + A_2 \sinh \{ \langle \sigma - r(\xi) \rangle / m_2 \} \dots \dots \dots (35)$$

$$\xi = \epsilon^P \dots \dots \dots (36)$$

ここで、 ϵ^P と σ は単軸試験における粘-塑性ひずみと応力を示す。また $A_1=3.39 \times 10^{-7}/\text{min}$, $A_2=6.43 \times 10^{-7}/\text{min}$, $\sigma_0=8 \text{ kgf/mm}^2$, $m_1=3.22 \text{ kgf/mm}^2$, $m_2=1.78 \text{ kgf/mm}^2$, $n=-0.42$ である。さらに $r(\xi)$ は、 $3 \times 10^{-3}/\text{min}$ の実験結果において顕著に見られる降伏応力の減少を記述するために便宜的に導入した関数であって、 $r(\xi)=0.90 \exp(-87.9\xi) \text{ kgf/mm}^2$ である。上式の第 1 項および第 2 項はそれぞれ粘塑性ひずみ速度および粘性ひずみ速度を示し、また $\langle x \rangle = x$ ($x \geq 0$), 0 ($x < 0$) である。なお、全ひずみ ϵ は弾性ひずみと式 (35) で計算される粘-塑性ひずみの和とし、弾性ひずみに対しては Hooke の法則を仮定した。

式 (35) は式 (29) の関数 \bar{f} を規定するが、本理論を用いて多軸状態における粘-塑性変形を計算するためには、さらに $d\bar{\alpha}^{(i)}$, $d\bar{\xi}$ に対する式 (31) と (32) を具体化しなければならない。いま、式 (36)

を考慮して、これらを

$$\left. \begin{aligned} d\bar{\alpha}^{(I)} &= a d\bar{\epsilon}^P - b_1 \bar{\alpha}^{(I)} |d\bar{\epsilon}^P| - b_2 \bar{\alpha}^{(I)} dt \\ d\bar{\alpha}^{(k)} &= -b_1 \bar{\alpha}^{(k)} |d\bar{\epsilon}^P| - b_2 \bar{\alpha}^{(k)} dt \quad (k \neq I) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

$$d\bar{\xi} = (d\bar{\epsilon}^P \cdot \bar{N} d\bar{\epsilon}^P)^{1/2} \dots \dots \dots (38)$$

のような簡単な形に仮定する。ここで、 a , b_1 , b_2 は一般に ξ に依存するスカラー係数である。しかし、Al 合金に対する常温の実験結果⁽¹¹⁾⁽¹²⁾ から、ひずみ経路の折れ点までの弧長が 1% を越えればひずみ異方性はほとんど変化しないことがわかっている。したがってここでは、 a , b_1 , b_2 および式 (30), (33) の \bar{M} , \bar{N} に対する \bar{k}_1 , \bar{k}_2 , \bar{q} は定数であると仮定する。これらの定数は \bar{k}_2 を除けば、図 5 のひずみ経路折り返し試験を用いて定めることができる。すなわち、ひずみ経路折り返し後においては、式 (29) は $|\dot{\epsilon}^P| = \bar{f} \{ (\bar{M}_{11})^{1/2} |\sigma|, \bar{\xi} \}$ となる。したがって、 \bar{M}_{11} に影響する定数 \bar{k}_1 , a , b_1 , b_2 を反転直後の実験値が表されるように、また $\bar{\xi}$ の変化に効果を及ぼす \bar{q} を反転後十分に変形が進行した時点での実験値が記述されるように定めればよい。図 5 の実線は、このように材料定数をあてはめて計算した結果を示す。なお、 \bar{M} に対する式としては、式 (30) よりも $\bar{\alpha}^{(i)}$ の効果が強く現れる次の形

$$\bar{M} = [\bar{I}_V - \sum_i |\bar{\alpha}^{(i)}| \{ \bar{k}_1 \eta^{(i)} \bar{n}^{(i)} \otimes \bar{n}^{(i)} + \bar{k}_2 (\bar{I}_V - \bar{n}^{(i)} \otimes \bar{n}^{(i)}) \}]^{-1} \dots \dots \dots (39)$$

を用いた。また材料定数の値は、 $\bar{k}_1=1$, $a=236$, $b_1=320$, $b_2=3 \times 10^{-3}/\text{min}$ および $\bar{q}=375$ である。

以上の結果を用いて、図 6 に示すひずみ経路に沿う変形を計算した結果を図 7 (a), 図 8~10 に示す。なお、図 6 の $\bar{\epsilon}_1$ と $\bar{\epsilon}_2$ は、それぞれ ϵ_{11} および $\sqrt{4/3} \times (\epsilon_{11}/2 + \epsilon_{22})$ に等しく、単軸引張り試験と閉端内圧試験に対応する。ここで ϵ はひずみテンソルを示し、変形の非圧縮性を仮定すると $\bar{\epsilon}_n = \sqrt{2/3} \Gamma_{aij} \epsilon_{ij}$ となる。また、記号 ϕ はひずみ経路の第 1 分枝と第 2 分枝

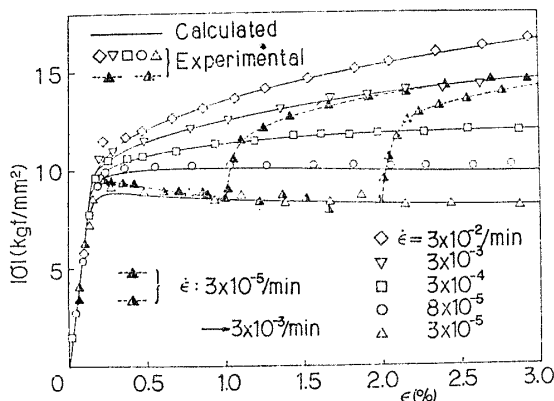


図 4 単軸試験における $|\sigma|$ - ϵ 関係

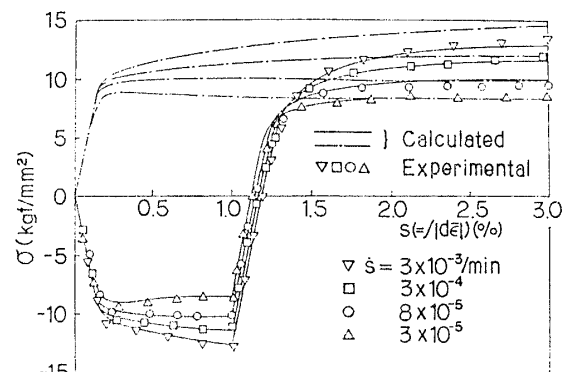


図 5 ひずみ経路折り返し試験における σ - s 関係

のなす角を示す。

図7(a)は、上述の材料定数の値を用いて偏差応力の大きさ $|\bar{\sigma}_D| (= \sqrt{3}/2 |\sigma_D|)$ とひずみ弧長 $s (= \int |d\bar{\epsilon}| = \int \sqrt{2/3} |d\epsilon|)$ の関係を計算した結果である。なお、未定の材料定数 \bar{k}_2 の値は 0.5 とした。図中の実線で示す計算値は、式(13)に関して述べた新しい $\bar{\alpha}^{(1)}$ (この場合 $\bar{\alpha}^{(2)}$) の導入をひずみ経路の折れ点で行った結果であり、一方破線は、 $\bar{\alpha}^{(2)}$ に先行する $\bar{\alpha}^{(1)}$ が条件 $\bar{\alpha}^{(1)} \cdot d\bar{\epsilon}^P = 0$ を満足したとき $\bar{\alpha}^{(2)}$ を導入した結果を示す。これらの計算値にはほとんど違

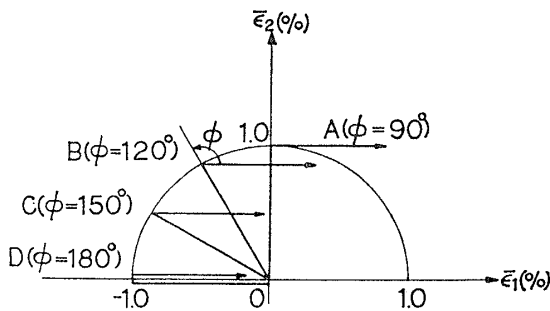
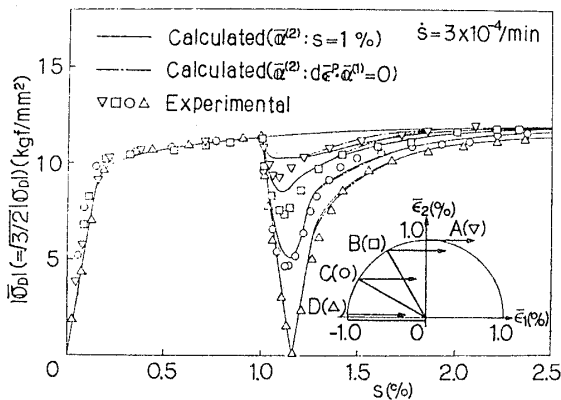
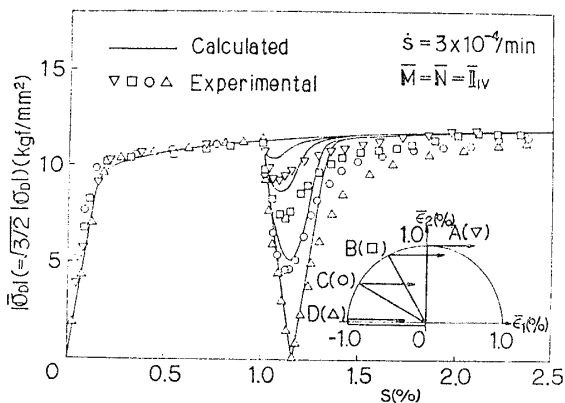


図6 折れ角をもつひずみ経路



(a) ひずみ異方性を考慮した場合



(b) ひずみ異方性を無視した場合

図7 折れ角をもつひずみ経路に対する $|\bar{\sigma}_D|$ - s 関係

いがいから、一般にひずみ経路に明確な折れ点がない場合、式(37)で規定される $\bar{\alpha}^{(1)}$ が、このような条件を満足したときに新しい $\bar{\alpha}^{(1)}$ を導入すればよいことがわかる。計算値と実験値はかなりの精度で一致しているが、 $\phi=90^\circ, 120^\circ$ に対する計算値が折れ点直後の実験値よりも大きいのは、移動硬化を無視したことと、本理論が応力緩和の効果を十分反映していないためと考えられる。一方図7(b)は、参考のために、ひずみ異方性を無視した計算結果 ($\bar{k}_1=\bar{k}_2=\bar{q}=0, \bar{M}=\bar{N}=\bar{I}_{IV}$) を示した図であって、それは当然のことながら折れ点後直ちに単軸試験の結果に追いついており、折れ点後の材料の軟化を表していない。

次に、折れ点後の変形が十分に進行したところでは、前述のように \bar{M} は \bar{I}_{IV} に近づき、 \bar{M} を介してのひずみ異方性の影響は消失する。したがって図7(a)の s の大きい部分で、折れ角のあるひずみ経路に対する $|\bar{\sigma}_D|$ が単軸引張変形のそれに比べて小さいのは、 \bar{N} を介しての $d\bar{\epsilon}$ に対するひずみ異方性の効果による。図8に、縦軸に等方硬化変数 ξ 、横軸に折れ点後の粘-塑性ひずみ弧長 Δs^P をとり、このような \bar{N} の効果を示す。この図から、式(38)に従ってひ

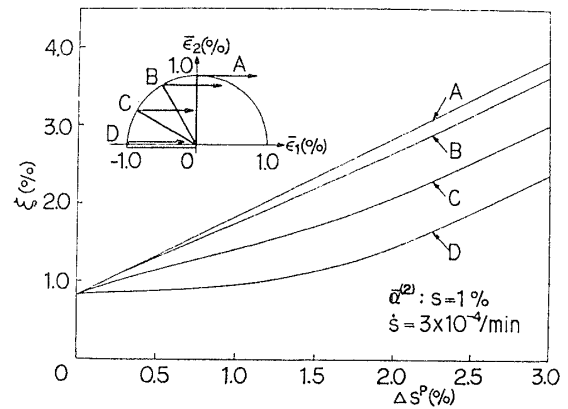


図8 折れ点後の等方硬化変数の発達

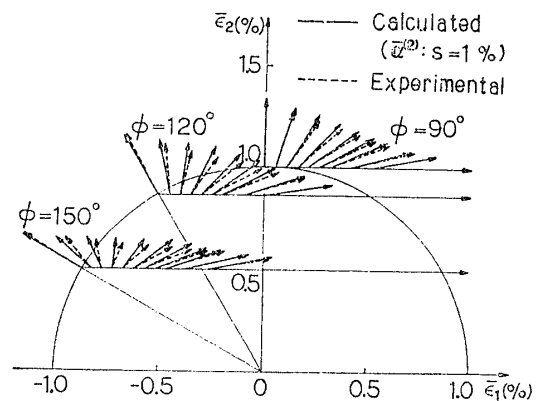


図9 折れ点後の応力ベクトルの変化

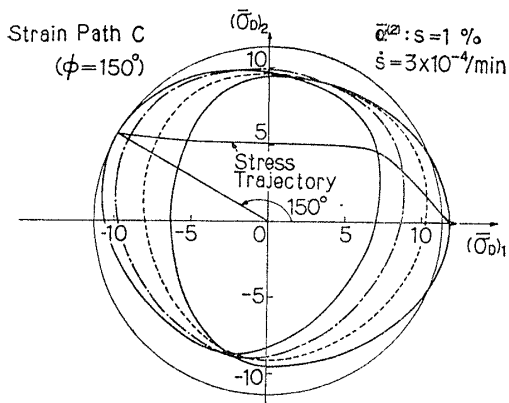


図 10 多軸応力状態での等ひずみ速度面の変化

ずみ異方性を考慮すると、ひずみ経路の折れ角 ϕ が 120° , 150° , 180° のとき、折れ点後しばらくの間 $d\bar{\xi}$ は $ds^P (= \int |d\bar{\epsilon}^P|)$ に比べて小さく、 Δs^P が大きくなるにつれて $d\bar{\xi} = ds^P$ となることわかる。この結果、ひずみ経路が部分除荷を含む場合には、等方硬化の発達が遅れる。

図 9 は、ひずみ異方性を考慮して計算した $\bar{\sigma}_D$ の変化をひずみ経路に沿って表した図である。 $\bar{\sigma}_D$ が引張り変形の進行とともに $\bar{\epsilon}_1$ 軸方向を向き、変形の複雑さを考えれば、計算結果は実験結果をかなり精度よく表していると言える。さらに図 10 は、折れ角 ϕ が 150° のひずみ経路に対する等ひずみ速度面の変化および応力経路を示したものである。この図から、等ひずみ速度面が、ひずみ経路の第 1 分枝の方向に曲率が大きい形からしだいに第 2 分枝の方向に曲率が大きい形へ遷移していることがわかる。

7. 結 言

本研究では、内部変数として一つのスカラ変数と有限個の二階対称偏差テンソル変数を仮定し、従来の内部変数理論によって表されないひずみ異方性の効果

およびそれを用いた粘-塑性構成式の形式化について述べた。このようにして得られた等ひずみ速度面は、変形方向に曲率が大きく、したがってその形状は、常温でひずみ異方性の効果として実験的に確かめられた等ひずみ面のそれに類似していることがわかった。また背応力を無視した場合に本理論を実験結果に適用したところ、本理論は多軸状態におけるひずみ硬化特性、折れ点後の応力値の減少、応力ベクトルの遅れ現象をかなりの精度で記述することがわかった。さらに、本理論は四階テンソルを異方性に対する表現として含むが、それは五次元偏差ベクトル空間では二階のテンソルとなることを示した。

最後に、この研究にあたり有益な意見ならびに検討をいただいた豊橋技術科学大学 村上澄男教授に深く感謝する。なお本研究は昭和 52 年度文部省科学研究費による研究であることを付記する。

文 献

- (1) 大橋・ほか 3 名, 機論, 46-405, A (昭 55-5), 459.
- (2) Miller, A.K., *Trans. ASME, Ser. H*, 98-2 (1976-4), 97, 106.
- (3) Krieg, R.D., ほか 2 名 (Chang, T.Y. and Krempl, E. 編), *Inelastic Behavior of Pressure Vessel and Piping Components*, PVP-PB-028, (1978), 15, ASME.
- (4) Chaboche, J.L., *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Tech.*, 25-1 (1977-1), 33.
- (5) Ильющин, А.А., *Пластичность*, Изд-во АН СССР, (1963), 9.
- (6) Gittus, J., *Trans. ASME, Ser. H*, 98-1 (1976-1), 52.
- (7) Rice, J.R., *Trans. ASME, Ser. E*, 37-3 (1970-9), 728.
- (8) 大橋・ほか 2 名, 機論, 41-342 (昭 50-2), 377.
- (9) Ohashi, Y., ほか 2 名, *J. Mech. Phys. Solids*, 23-4/5 (1975-8/10), 277.
- (10) Corum, J.M., ほか 4 名, *ORNL*, 5014 (1974-12), 47.
- (11) 大橋・川島, 機論, 44-379 (昭 53-3), 882.
- (12) Ohashi, Y. and Kawashima, K., *J. Mech. Phys. Solids*, 25-6 (1977-12), 409.

討 論

〔質問〕 吉田 総仁

(東京工業大学精密工学研究所)

複雑な粘-塑性変形を精度よく表す構成式の定式化に成功されたことに敬意を表す。

(1) 一般に履歴効果は古いものほど時間およびひずみ量に対し減衰すると思われるが、式 (10) [または式 (30)] では内部状態変数 $\alpha^{(k)}$ の効果を積算し、式 (13・b) [または式 (31)] では過去の履歴を表す

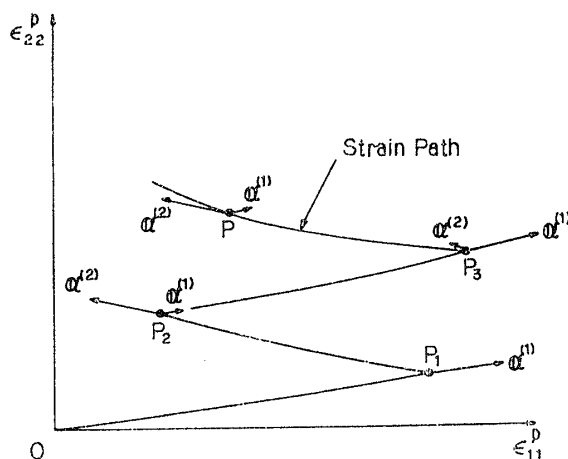
$d\alpha^{(k)}$ が時間 dt とひずみ増分 $|ds^P|$ の関数としてその順序 (k) には無関係に与えられているが、これは過去の履歴を大きく評価しすぎることはないか。とりわけ、変形方向の急変が多く繰返される場合には、その影響が大きくなると思うがいかがか。

(2) 式 (29), (30) においては μ^2 で表される等ひずみ速度面をポテンシャルと考え、式 (31)~(33) は対応する硬化則を規定したものと理解してよいか。

〔回答〕 (1) 過去において発達した内部変数 $\alpha^{(k)}$ ($k \neq I$) の変化を規定する移行式 (13・b) は, 時間増分 dt と粘-塑性ひずみ増分 $|d\epsilon^P|$ に伴う回復(履歴減衰)効果を記述する式である. このような回復効果を受ける時間およびひずみ区間は, 当然遠い過去において発達した $\alpha^{(k)}$ ($k \neq I$) ほど長くなるから, 本理論によって履歴減衰の効果は表現される.

例えば図2の場合, ひずみ区間 OP_1 では式 (13・a) によって $\alpha^{(1)}$ が発達し, 次にひずみ区間 P_1P_2 では $\alpha^{(2)}$ が式 (13・a) によって発達する一方, $\alpha^{(1)}$ は式 (13・b) によって減衰する. さらにひずみ区間 P_2P では, $\alpha^{(3)}$ が式 (13・a) によって発達し, $\alpha^{(2)}$ と $\alpha^{(1)}$ は式 (13・b) によって回復する. このように, 最初に発達した $\alpha^{(1)}$ と次に発達した $\alpha^{(2)}$ が式 (13・b) による回復作用を受けるひずみ区間は, それぞれ P_1P , P_2P ($\subset P_1P$) となり, 点 P までの減衰の割合は前者の方が大きくなる. したがって, 内部変数 $\alpha^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, N$) の現在の値で規定される式 (10) [または式 (30)] において, より遠い過去において発達した $\alpha^{(i)}$ ほどその効果が小さくなり, 過去の変形履歴を大きく評価しすぎることはない.

$\alpha^{(k)}$ ($k \neq I$) の回復に関する上述のような性質は, 変形方向の急変が多く繰返される場合にも同様に成り立つから, この場合にも過去の履歴を大きく評価しすぎることにはならない. なお, 付図1のように変形の急変が繰返される場合, 例えば点 P_2 での変形方向急変直後においては, 粘-塑性ひずみ増分 $d\epsilon^P$ と $\alpha^{(1)}$ との方向のずれはわずかである. したがって, 1442] ページ右欄下 21~19 行めで述べたように, この場合新しく $\alpha^{(3)}$ を導入する必要はない. すなわち, ひずみ区間 P_2P_3 においては, $\alpha^{(1)}$ が式 (13・a) の $\alpha^{(1)}$ として発達し, また $\alpha^{(2)}$ が式 (13・b) によって回復する.



付図1 変形方向の急変が繰返される場合の内部変数の変化

それゆえ, このような変形に対する $\alpha^{(i)}$ の個数は2個となり, 内部状態の記述が簡単になるばかりでなく, 過去の履歴を過大評価することにもならない.

(2) 式 (12) [または式 (29)] は, ご指摘のように等ひずみ速度面 μ をポテンシャルと考えた式

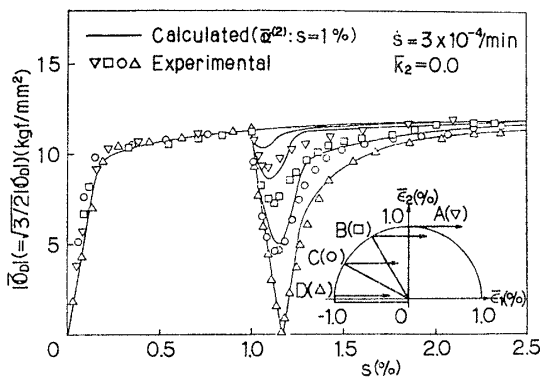
$$\dot{\epsilon}^P = f(\mu, \xi) \frac{\partial \mu / \partial \sigma}{|\partial \mu / \partial \sigma|}$$

と形式的には一致する. また, 上式の μ は一般に $\alpha^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, N$) と ξ に依存するから, それらの変化率を規定する式 (13) と (14) [または式 (31)~33)] は, 対応する硬化則と見なすこともできる.

しかし, 本理論の等ひずみ速度面は, 単なる実験結果の表示式ではなく, また移行式 (13) と (14) [または式 (31)~(33)] も, 本論文に述べたように明確な物理的意味を持っている. さらに著者らは, 内部変数 ξ と $\alpha^{(i)}$ に対応する微視的機構として, それぞれセル構造, 亜粒界などの等方不動転位配列, および種々の障害物にたい積し不動化していてもひずみ経路の曲折に伴って再び可動化し得る転位配列⁽⁶⁾を考えている. このとき式 (9) または (30) は, 偏差有効応力 σ^* がそれまでの負荷方向から反転したり, あるいはずれたときに, 上述の転位の再可動化が生じ, これによって材料が軟化する効果を表すと解釈できる. 以上のように, 本理論は単なる実験式でないことを理解されたうえで, ご指摘のような解釈をしていただきたい.

換言すれば, 本理論の目的は, 古典的な塑性ポテンシャルの概念を先験的に用いて粘-塑性変形の構成式を形式化することにはなく, 著者らの多軸粘-塑性試験結果と内部状態変数理論に基づいて, 十分な合理性と数学的一般性をもって多軸粘-塑性構成式を議論することにある. このような理論を具体化する一つの段階として, 本研究では式 (12) [または式 (29)] を仮定したにすぎない.

さらに, 塑性ポテンシャルを従来の実験的方法に従って決定するためには, 種々の応力経路に対して実験を行わなければならないばかりでなく, 適当な規定ひずみを設定する必要がある. このため, このような方法は非常に複雑となると同時に, 塑性ポテンシャルの形状が規定ひずみに大きく依存するため, それにはあいまいさもあった. 一方, 本理論の等ひずみ速度面 μ は, 1441 ページ右欄下 11~1442 ページ左欄下 27 行めにおいて述べた理論的考察に基づいており, またその変化は移行式 (13) と (14) [あるいは式 (31)~(33)] によって記述される. したがって, μ に対する材料定数は, ひずみ経路折り返し試験 ($\phi=180^\circ$) と



付図 2 $\bar{k}_2=0.0$ としてひずみ異方性を考慮した場合の $|\bar{\sigma}_D|-s$ 関係

直角折れ曲り試験 ($\phi=90^\circ$) の 2 種類によって容易に決定できる [井上氏への回答 (1) 参照]. また本理論では, 規定ひずみというあいまいな尺度を用いる必要はない.

〔質問〕 井上 達雄 (京都大学工学部)

負荷経路が著しく変化する場合の応力とひずみの非共軸性を説明するために, 非弾性変形によって変化する内部変数と回復によるものを導入して実験結果との対応をされた巧みな方法に敬服する.

(1) 式 (29)~(33) の構成式と移行式に含まれる材料パラメータはひずみ経路折り返し試験によって \bar{k}_2 以外は決定されたが, \bar{k}_2 については 0.5 とおかれている. この値を設定された理由や, 簡単な実験によって定める方法などについてご意見を伺いたい.

(2) 実際の機器の設計などでは, いわゆる低サイクル疲労などにみられるように, ひずみ経路の折り返しの繰返しにおける問題も重要だと考える. 本理論をこのような場合にそのまま適用することは可能か, ご教示願いたい.

〔回答〕 (1) \bar{k}_2 の値は次のようにして決定した. $\bar{k}_2=0.0$ に対する結果 (付図 2) と $\bar{k}_2=0.5$ に対するそれ [図 7 (a)] を比較すれば, 両理論結果の違いは, ひずみ経路の折れ角 ϕ が 90° , 120° , 150° の場合に, 単軸引張試験結果への漸近過程において顕著

に見られることがわかる. したがって本研究では, $\phi=90^\circ$, 120° , 150° に対する理論結果をいくつかの \bar{k}_2 の値について計算し, このうち実験結果をできるだけ精度よく表す \bar{k}_2 の値として, 0.5 を選んだ.

\bar{k}_2 の値は, 以上の議論から明らかなように, 薄肉円管試験片を用いた簡単なひずみ経路折れ曲り試験を $\phi=90^\circ$ あるいは 120° について 1 種類行い, その結果と理論結果を比較することによって容易に決定することができる. このようなひずみ経路折れ曲り試験として, 例えばねじり引張り ($\phi=90^\circ$), 閉端内圧引張り ($\phi=90^\circ$), 開端内圧引張り ($\phi=120^\circ$) が考えられる.

(2) 本理論の繰返し変形への適用については, 今後の課題と考えている. 繰返し変形では, 材料の硬化, 安定化, 軟化および劣化, さらに応力あるいはひずみ振幅の変更に伴う履歴依存性(付 1) などの特有な現象が現れる. したがって, 繰返し変形を記述するための内部変数としては, 一般に多軸粘-塑性変形に対するそれとは異なったものも必要になると思われる.

〔質問〕 白鳥 英亮

(東京工業大学精密工学研究所)

本理論は速度を増分と読みかえれば塑性変形だけの場合にも成り立つと思われるが, 特に粘性が含まれるときに限られる部分があるとするとの箇所か.

〔回答〕 ご指摘のように速度を増分と読みかえて, 本理論を常温での塑性変形に適用する際, 式 (13·a) の第 3 項, 式 (13·b) の第 2 項および式 (14) の第 3 項は無視できる. すなわちこれらの項は, 粘性が含まれるときに限られ, 熱軟化による内部変数の回復を表す. したがって, それらの効果は高温においてひずみ速度が小さいほど顕著となる. 著者らの多軸粘-塑性試験の結果⁽¹⁾, ひずみ速度の小なるほどひずみ異方性の効果が小さくなることが明らかにされたが, これは上述の熱軟化による回復の項によって表現される.

(付 1) Chaboche, J.L., ほか 2 名 (Jaeger, T.A. and Boley, B.A. 編), *Trans. 5th Int. Conf. on SMILT, Berlin, (1979), L11/3, North-Holland.*