

## 横等方弾塑性構成式の三角関数表示と多孔円板 の弾塑性曲げへのその応用\*

村上澄男\*\*, 古西啓一\*\*\*  
Sumio MURAKAMI, Keiichi KONISHI

**Key Words:** Plasticity, Elastic-Plastic Material, Transverse Isotropy, Constitutive Equation, Perforated Plate, Circular Plate, Elastic-Plastic Bending

### 1. 緒言

最近の工業材料には、等方材料だけではなく、種々の材料対称性を持った材料がよく使われる。この代表的な例の一つに横等方材料がある。例えば通常の圧延材は、圧延面内の各方向に比べて、板厚の方向に著しく異なった力学的特性を持ち、その塑性加工性はこのような異方性によって強く支配される<sup>(1)</sup>。また、複合材料は一般に複雑な異方性を持つが、その板材を適当に組み合わせることによって、面内ではほぼ等方な積層材を作ることができる<sup>(2)</sup>。このほかの例として、原子炉圧力容器、熱交換器等で使用される多孔円板を均質な横等方円板で近似し、解析する方法をあげることができる<sup>(3)</sup>。

一方、等方材料の弾塑性変形、特に平面弾塑性変形の解析においては、応力成分とひずみ成分を三角関数表示すると、基礎式中の未知変数の数を減らし、したがって解析を容易にできることが知られている<sup>(4)</sup>。この方法は、特に等方円板の弾塑性曲げ問題の解析に多く適用され、種々の興味ある結果が得られている<sup>(5)~(7)</sup>。このため、本論文では、Sokolovsky によってはじめ導かれた応力成分とひずみ成分の三角関数表示を横等方材料の構成式に拡張し、その弾塑性変形に対する降伏条件について議論するとともに、導かれた構成式の応用例として、多孔円板の弾塑性曲げ変形を解析する。

なお、多孔円板の弾塑性曲げについては、すでによくつかの研究がなされているが、いずれも多孔円板を均質な等方円板で近似している<sup>(8)(9)</sup>。しかし、多孔円板において、円孔の存在が弾塑性的性質に及ぼす影響は、円板の板厚方向に比べて、面内各方向において著しいと考えられる。このことからSawczuk-O'Donnell-

Porowski<sup>(8)</sup>は、多孔円板を横等方円板で近似し、等方円板に対するトレスカの降伏曲線を横等方円板に拡張し、各種の円孔配列をもつ等価剛塑性円板の限界荷重とそのときの速度場を計算した。しかし彼らの解析では、板の断面が完全に弾性的であるか、あるいは完全に塑性的であると仮定し、取扱いを単純化しているが、実際の板では、最初に円板の表面に現れた塑性域がしだいに円板内部に進行する。本論文では、著者らの前論文<sup>(5)~(7)</sup>と同じく、断面内にも弾塑性境界を考え、多孔円板の弾塑性曲げを解析した。

### 2. 横等方材料に対する応力成分とひずみ成分の三角関数表示

Sokolovsky<sup>(4)</sup>は、等方弾塑性材料の応力成分とひずみ成分を三角関数によって表示する際に、せん断応力強さ  $S$  とせん断ひずみ強さ  $E_0$  を、それぞれ偏差応力テンソル  $s_{ij}$  と偏差ひずみテンソル  $e_{ij}$  の二次不変量の平方根として

$$S = \sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}} \dots\dots\dots (1)$$

$$E_0 = \sqrt{I_2} = \sqrt{\frac{1}{2} e_{ij} e_{ij}} \dots\dots\dots (2)$$

のように定義した。ここでHenckyの解釈によれば、せん断応力強さの二乗は、形状変化に対する弾性ひずみエネルギーにある定数因子を乗じたものに等しいことになる<sup>(4)</sup>。よって、一般的な異方性材料に対しても静水圧の影響は著しくないと仮定し<sup>(10)</sup>、形状変化に対する弾性ひずみエネルギーを求めれば、式(1)と(2)を異方性材料へ拡張することができる。

まず、形状変化に対する弾性ひずみエネルギーは、弾性コンプライアンス・テンソルを  $C_{ijkl}$  とすれば、

$$U = \frac{1}{2} C_{ijkl} s_{ij} s_{kl} \dots\dots\dots (3)$$

と書ける。ゆえに、異方性材料へ拡張したせん断応力強さ  $S$  は

\* 昭和56年3月19日 東海支部第30期講演会において講演、原稿受付 昭和56年7月23日。

\*\* 正員、豊橋技術科学大学(〒440 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

\*\*\* 学生員、豊橋技術科学大学大学院。

$$S = \sqrt{\frac{1}{2} C_{ijkl} S_{ij} S_{kl}} \dots\dots\dots (4)$$

となる。特に横等方の場合、 $C_{ijkl}$  は次式のように与えられる<sup>(11)</sup>。

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \xi (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}) + \varphi (\delta_{ik} h_k h_l + \delta_{il} h_i h_j) \\ + \theta (\delta_{ik} h_j h_l + \delta_{jk} h_i h_l + \delta_{il} h_j h_k + \delta_{jl} h_i h_k) + \gamma h_i h_j h_k h_l \dots\dots\dots (5)$$

ここで  $\lambda, \xi, \varphi, \theta, \gamma$  は弾性定数であり、また  $h_i$  は回転対称軸に対する  $x_i$  方向の方向余弦である。いま、回転対称軸を  $x_3$  軸に、 $x_1, x_2$  軸を偏差応力および偏差ひずみの主方向にとり、式(4)の根号中の二次形式を書き下ろせば

$$C_{ijkl} S_{ij} S_{kl} = 2\xi (s_{11}^2 + s_{22}^2) + (2\xi + 4\theta + \gamma) s_{33}^2 \dots\dots\dots (6.a)$$

となる。ここで  $\xi, \theta, \gamma$  のかわりに新しい定数  $\alpha$  を用いれば、式(6.a)は

$$C_{ijkl} S_{ij} S_{kl} = s_{11}^2 + s_{22}^2 + \alpha s_{33}^2 \dots\dots\dots (6.b)$$

となる。よって、横等方材料に対するせん断応力強さ  $\bar{S}$  は、次のような形に書ける。

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{1}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + \alpha s_{33}^2)} \dots\dots\dots (7)$$

同様に、横等方材料に対するせん断ひずみ強さ  $\bar{E}_0$  も、次のようになる。

$$\bar{E}_0 = \sqrt{\frac{1}{2} (e_{11}^2 + e_{22}^2 + \beta e_{33}^2)} \dots\dots\dots (8)$$

上式で、 $\alpha = \beta = 1$  とおけば、等方材料に対する式(1)、(2)と一致する。

特に、平面応力状態を考えるならば、横等方材料の弾性変形における応力  $\sigma_{ij}$  とひずみ  $\varepsilon_{ij}$  の間の関係は、直角座標系  $(x_1, x_2, x_3)$  に関して次式のように表される<sup>(12)</sup>。

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E^*} (\sigma_{11} - \nu^* \sigma_{22}), \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E^*} (\sigma_{22} - \nu^* \sigma_{11}), \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\bar{\nu}^*}{E^*} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad \sigma_{33} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $E^*$  は等方面内の縦弾性係数であり、また  $\nu^*, \bar{\nu}^*$  はそれぞれ等方面内に力が作用したとき、その面内および、それに垂直な方向の収縮を表すポアソン比である。式(9)の関係をを用いれば、平面応力状態に対するせん断応力強さ、せん断ひずみ強さは、式(7)、(8)から、それぞれ

$$\bar{S} = \frac{\sqrt{5+\alpha}}{3\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_{11}^2 - 2\frac{4-\alpha}{5+\alpha} \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22}^2} \dots\dots\dots (10)$$

$$\bar{E}_0 = \frac{\sqrt{5(1-\nu^*)^2 + 2(1-\nu^* + \bar{\nu}^*)\bar{\nu}^* + \beta(1-\nu^* + 2\bar{\nu}^*)^2}}{3\sqrt{2}(1-\nu^*)} \\ \times \sqrt{\varepsilon_{11}^2 - 2\frac{4(1-\nu^*)^2 - 2(1-\nu^* + \bar{\nu}^*)\bar{\nu}^* - \beta(1-\nu^* + 2\bar{\nu}^*)^2}{5(1-\nu^*)^2 + 2(1-\nu^* + \bar{\nu}^*)\bar{\nu}^* + \beta(1-\nu^* + 2\bar{\nu}^*)^2} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2} \dots\dots\dots (11)$$

となる。ここで、上式の  $\bar{S}$  と  $\bar{E}_0$  は互いに独立なものではなく、式(9)を用いて関係づけられなければならない。まず、式(9)の  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  を式(10)に代入すれば、せん断応力強さは

$$\bar{S} = \frac{E^*}{1+\nu^*} \frac{\sqrt{(5-8\nu^*+5\nu^{*2})+\alpha(1+\nu^*)^2}}{3\sqrt{2}(1-\nu^*)} \\ \times \sqrt{\varepsilon_{11}^2 - 2\frac{(4-10\nu^*+4\nu^{*2})-\alpha(1+\nu^*)^2}{(5-8\nu^*+5\nu^{*2})+\alpha(1+\nu^*)^2} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2} \dots\dots\dots (12)$$

の形に書くことができる。式(11)と式(12)が、すべてのひずみ状態に対して同一の比例関係を持つためには

$$\beta = \frac{2(\nu^* - \bar{\nu}^*)(1 + \bar{\nu}^*) + \alpha(1 + \nu^*)^2}{(1 - \nu^* + 2\bar{\nu}^*)^2} \dots\dots\dots (13)$$

の形に関係づけられなければならない。よって、せん断応力強さ  $\bar{S}$ 、せん断ひずみ強さ  $\bar{E}_0$  および、この両者の関係は

$$\bar{S} = \frac{\sqrt{5+\alpha}}{3\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_{11}^2 - 2\frac{4-\alpha}{5+\alpha} \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22}^2} \dots\dots\dots (14)$$

$$\bar{E}_0 = \frac{\sqrt{(5-8\nu^*+5\nu^{*2})+\alpha(1+\nu^*)^2}}{3\sqrt{2}(1-\nu^*)} \sqrt{\varepsilon_{11}^2 - 2\frac{(4-10\nu^*+4\nu^{*2})-\alpha(1+\nu^*)^2}{(5-8\nu^*+5\nu^{*2})+\alpha(1+\nu^*)^2} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2} \dots\dots\dots (15)$$

$$\bar{S} = 2G^* \bar{E}_0 \dots\dots\dots (16)$$

となる。ここで、 $G^*$  は等方面内における横弾性係数を示しており、次式で与えられる。

$$G^* = \frac{E^*}{2(1+\nu^*)} \dots\dots\dots(17)$$

次に、ポアソン比  $\nu^*$  に対して次のような新しいパラメータ  $\eta$

$$\sin \eta = \frac{3(1-\nu^*)}{\sqrt{2} \sqrt{\alpha(1+\nu^*)^2 + (5-8\nu^*+5\nu^{*2})}}, \quad \cos \eta = \frac{\sqrt{2\alpha+1}(1+\nu^*)}{\sqrt{2} \sqrt{\alpha(1+\nu^*)^2 + (5-8\nu^*+5\nu^{*2})}} \dots\dots\dots(18)$$

を導入すれば、式 (15) のせん断ひずみ強さ  $\bar{E}_0$  は、三角関数表示できて

$$\bar{E}_0 = \frac{1}{2\sin \eta} \sqrt{\epsilon_{11}^2 + 2 \cos 2\eta \epsilon_{11}\epsilon_{22} + \epsilon_{22}^2} \dots\dots\dots(19)$$

となる。したがって、ひずみ成分  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$  は、これらの  $\bar{E}_0$ ,  $\eta$  と新しい変数  $\phi$  を用いれば

$$\left. \begin{matrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \end{matrix} \right\} = \mp \bar{E}_0 \frac{\sin(\phi \mp \eta)}{\cos \eta} \dots\dots\dots(20)$$

のように書ける。また、式 (20) を式 (9) に代入すれば、応力成分  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  も次のように書き表される。

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{matrix} \right\} = 2G^* \bar{E}_0 \left( \frac{3}{\sqrt{2\alpha+1}} \cos \phi \mp \sin \phi \right) \dots\dots\dots(21)$$

一方、塑性変形状態に対しても、Hencky の全ひずみ理論を仮定すれば、以上と同様な議論を行うことができる。等方面内における弾塑性変形のせん断セカント係数を  $G^{**}$  とすれば、式 (16) あるいは式 (18)~(21) は、塑性状態に対して

$$\bar{S} = 2G^{**} \bar{E} \dots\dots\dots(22)$$

$$\sin \zeta = \frac{3(1-\nu^{**})}{\sqrt{2} \sqrt{\alpha(1+\nu^{**})^2 + (5-8\nu^{**}+5\nu^{**2})}}, \quad \cos \zeta = \frac{\sqrt{2\alpha+1}(1+\nu^{**})}{\sqrt{2} \sqrt{\alpha(1+\nu^{**})^2 + (5-8\nu^{**}+5\nu^{**2})}} \dots\dots\dots(23)$$

$$\bar{E} = \frac{1}{2\sin \zeta} \sqrt{\epsilon_{11}^2 + 2 \cos 2\zeta \epsilon_{11}\epsilon_{22} + \epsilon_{22}^2} \dots\dots(24)$$

$$\left. \begin{matrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \end{matrix} \right\} = \mp \bar{E} \frac{\sin(\omega \mp \zeta)}{\cos \zeta} \dots\dots\dots(25)$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{matrix} \right\} = 2G^{**} \bar{E} \left( \frac{3}{\sqrt{2\alpha+1}} \cos \omega \mp \sin \omega \right) \dots\dots(26)$$

と書き換えられる。ここで、 $\nu^{**}$  は、塑性変形に対する面内変形のポアソン比を表す。

### 3. 横等方材料に対する降伏条件および降伏曲線

前章で導いた横等方材料に対するせん断応力強さは、ミーゼスの降伏条件の横等方材料への拡張にはかならない。よって、この拡張された降伏条件およびその降伏曲線について検討する。

まず等方材料の場合、 $\alpha=1$  とし、単軸引張降伏応力を  $Y$  とすれば、式 (14) からせん断応力強さは

$$S = \frac{Y}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots(27)$$

となる。すなわち、降伏はせん断応力強さ  $S$  が  $Y/\sqrt{3}$  に達したときに起こる。

同様に横等方材料の場合、等方面内単軸引張りおよび等二軸引張り、すなわち等方面に垂直な方向の単軸引張りの降伏応力をそれぞれ  $Y$ ,  $Y_3$  とすれば、式 (14) から

$$\bar{S} = \frac{\sqrt{5+\alpha}}{3\sqrt{2}} Y \dots\dots\dots(28)$$

$$\bar{S} = \frac{\sqrt{1+2\alpha}}{3} Y_3 \dots\dots\dots(29)$$

の関係を導く。式 (28) によれば、横等方材料に対して降伏は、せん断応力強さ  $\bar{S}$  が  $(\sqrt{5+\alpha}/3\sqrt{2})Y$  に達したときに起こる。さらに式 (28), (29) から  $Y$  と  $Y_3$  の関係は

$$Y_3 = \sqrt{\frac{5+\alpha}{2+4\alpha}} Y \dots\dots\dots(30)$$

と書き表せる。

式 (30) によれば、材料の横等方性は、パラメータ  $\alpha$  の代わりに新しいパラメータ

$$\rho = Y/Y_3 = \sqrt{\frac{2+4\alpha}{5+\alpha}} \dots\dots\dots(31)$$

を用いても定義することができる。図1には、 $\alpha$  のいくつかの値に対する平面応力状態の降伏曲線を示す。ただし、 $\alpha$  は  $\alpha \geq -0.5$  の範囲で定義される。

Sawczuk ら<sup>(3)</sup> は多孔円板の解析において、横等方材料に拡張されたトレスカの降伏条件を用いた。この際、彼らは多孔円板を均質な円板で近似するために通常用いられるカット・アウト係数 (cut-out factor)  $\rho_0$ <sup>(13)(14)</sup> を横等方パラメータとして解釈した。ここ

で  $\rho_0$  は、円孔の存在が多孔板の塑性的性質に及ぼす影響、すなわち円孔配列に関する荷重方向の影響、あるいは板の面内における荷重の二軸性の影響を考慮するために導入され、降伏応力をその下限でおきかえるための係数として定義されている。このとき、これらの影響は板の面内方向の引張りにおいて著しく、板厚方向には単に円孔による有効面積の減少の効果にとどまると考えられており、これは等方面内の単軸引張りとそれに垂直な方向の単軸引張りの降伏応力の比とも解釈することができる<sup>(3)</sup>。したがって、この  $\rho_0$  と式(31)の  $\rho$  を等置し

$$\rho_0 = \rho = \sqrt{\frac{2+4\alpha}{5+\alpha}} \dots\dots\dots(32)$$

とすれば、横等方材料に拡張されたトレスカの降伏曲線は、図1の破線のようになる。この場合にもトレスカの降伏曲線は拡張されたミーゼスの降伏曲線に内接する。

4. 多孔円板の弾塑性曲げ

2章において、横等方材料に対する応力成分とひずみ成分の三角関数表示を得た。ここでは、その応用として、多孔円板を等価な均質横等方弾性-完全塑性材料からなる円板で近似し、その弾塑性曲げを解析する。

4.1 純弾性曲げ領域の基礎方程式 図2に示すように弾性支持され、一様分布横荷重  $P$  が働く半径  $B$ 、厚さ  $T$  の等価横等方円板を考え、その中心に原点をもつ円筒座標系  $(R, \theta, z)$  をとる。半径方向および円周方向の曲げモーメント成分、曲率成分およびひずみ成分をそれぞれ、 $M_r, M_\theta, K_r, K_\theta, \epsilon_r, \epsilon_\theta$  で表せば、薄円板の軸対称曲げの基礎式は次のように与えられる<sup>(4)-(7)</sup>。

$$\frac{dM_r}{dR} + \frac{M_r - M_\theta}{R} + \frac{PR}{2} = 0 \dots\dots\dots(33)$$

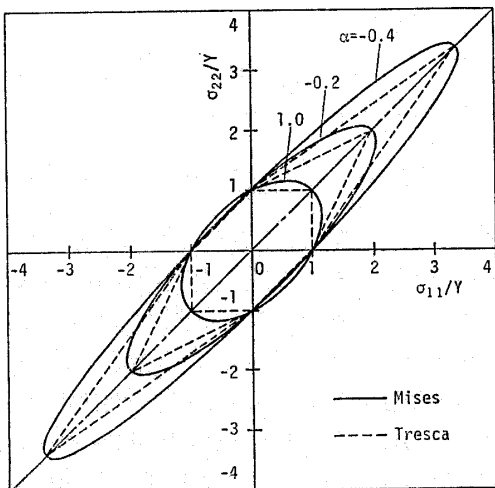


図1 種々の  $\alpha$  に対する降伏曲線

$$K_r = -\frac{d^2W}{dR^2}, \quad K_\theta = -\frac{1}{R} \frac{dW}{dR} \dots\dots\dots(34)$$

$$\frac{dK_\theta}{dR} + \frac{K_\theta - K_r}{R} = 0 \dots\dots\dots(35)$$

$$\epsilon_r = zK_r, \quad \epsilon_\theta = zK_\theta \dots\dots\dots(36)$$

ただし  $W$  は円板のたわみであって、板厚に比べて十分小さいものと仮定する。

ひずみ成分は式(36)で与えられるから、式(19)

はまた

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_0 &= |z| \bar{A}_0 \\ \bar{A}_0 &= \frac{1}{2 \sin \eta} \sqrt{K_r^2 + 2 \cos 2\eta K_r K_\theta + K_\theta^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

の形に書くことができる。この関係を式(20)に代入し、さらに式(36)を考慮すれば、 $K_r, K_\theta$  は、それぞれ新しい変数  $\psi$  と  $\bar{A}_0, \eta$  を用いて

$$\left. \begin{aligned} K_r \\ K_\theta \end{aligned} \right\} = \mp \bar{A}_0 \frac{\sin(\psi \mp \eta)}{\cos \eta} \dots\dots\dots(38)$$

のように表される。ここで、変数  $\eta$  は、等価な均質円板に対するポアソン比  $\nu^*$  を用いて、式(18)から計算することができる。

多孔円板の塑性的性質は、前述のカット・アウト係数  $\rho_0$  で表すことができ、したがって、等価な横等方円板の等方面内および、これに垂直な方向の単軸引張降伏応力は、それぞれ

$$Y = 2k\mu\rho_0 \dots\dots\dots(39)$$

$$Y_3 = 2k\mu \dots\dots\dots(40)$$

で与えられる。ここで  $\mu$  は、リガメント効率を示しており  $\mu = h/p$  で定義される<sup>(8)(9)</sup>。ただし、 $h$  は最小リガメント幅であり、 $p$  は円孔間のピッチを表す。また  $k$  は、円孔を有しない板に対する単軸引張降伏応力の  $1/2$  である。式(28)によれば式(39)で定義される  $Y$  に対し、式(14)のせん断応力強さ  $\bar{S}$  が  $(\sqrt{5+\alpha}/3\sqrt{2})Y$  に達したとき、板の各要素は弾性状態から塑性状態に移ることになる。

薄円板の弾塑性曲げでは、降伏は板の表面で開始し、横等方円板の表面におけるせん断応力強さ  $(\bar{S})_{sur}$  が  $(\sqrt{5+\alpha}/3\sqrt{2})Y$  に達しないかぎり、板は純弾性

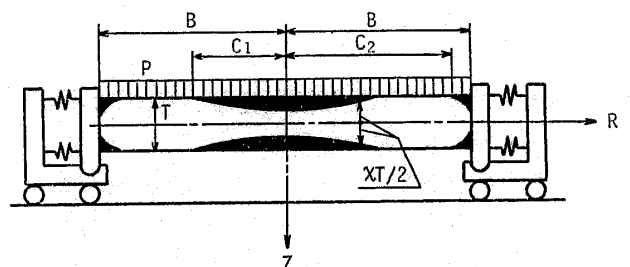


図2 一様分布横荷重を受ける横等方円板

曲げ状態にある。このことから  $(\bar{S})_{sur} = (\sqrt{5+\alpha}/3\sqrt{2})Ys (0 \leq s \leq 1)$  で定義される新しい変数  $s$  を導入し、この  $s$  によって板の表面における塑性域の出現を示すことにする<sup>(5)</sup>。式 (16) から式 (37) の  $\bar{A}_0$  は

$$\bar{A}_0 = \frac{\bar{E}_0}{|z|} = \frac{\sqrt{5+\alpha}}{3\sqrt{2}} \frac{Ys}{G^*T} \dots\dots\dots(41)$$

と書くことができる。ここで  $G^*$  は多孔円板を等価な横等方円板で近似した際の等方面内における横弾性係数を示す<sup>(15)</sup>。上式の関係式を式 (20), (21) または式 (38) に代入すれば、曲率成分、ひずみ成分、応力成分、曲げモーメント成分はそれぞれ

$$\left. \begin{matrix} K_r \\ K_\theta \end{matrix} \right\} = \mp \frac{\sqrt{5+\alpha}}{3\sqrt{2}} \frac{Ys}{G^*T} \frac{\sin(\phi \mp \eta)}{\cos \eta} \dots\dots\dots(42)$$

$$\left. \begin{matrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \end{matrix} \right\} = \mp \frac{\sqrt{5+\alpha}}{3\sqrt{2}} \frac{Yzs}{G^*T} \frac{\sin(\phi \mp \eta)}{\cos \eta} \dots\dots\dots(43)$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{2\sqrt{5+\alpha}}{3\sqrt{2}} \frac{Yzs}{T} \left( \frac{3}{\sqrt{2\alpha+1}} \cos \phi \mp \sin \phi \right) \dots\dots\dots(44)$$

$$\left. \begin{matrix} M_r \\ M_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{\sqrt{5+\alpha}}{18\sqrt{2}} YT^2s \left( \frac{3}{\sqrt{2\alpha+1}} \cos \phi \mp \sin \phi \right) \dots\dots\dots(45)$$

と表すことができる。よって、式 (42), (45) を式 (33)~式 (35) に代入すれば、平衡方程式、適合条件式、たわみ式は、それぞれ

$$\left( \frac{3}{\sqrt{2\alpha+1}} \cos \phi - \sin \phi \right) \frac{ds}{dr} - s \left( \frac{3}{\sqrt{2\alpha+1}} \sin \phi + \cos \phi \right) \frac{d\phi}{dr} = 2 \frac{s}{r} \sin \phi - 3 \sqrt{\frac{6}{5+\alpha}} r \dots\dots\dots(46)$$

$$\sin(\phi + \eta) \frac{ds}{dr} + s \cos(\phi + \eta) \frac{d\phi}{dr} = -2 \frac{s}{r} \sin \phi \cos \eta \dots\dots\dots(47)$$

$$\frac{dw}{dr} = -2 \sqrt{\frac{5+\alpha}{6}} r s \frac{\sin(\phi + \eta)}{\cos \eta} \dots\dots\dots(48)$$

となる。ただし上式では、次に示す  $R$  と  $W$  の無次元量を導入し無次元化している。

$$r = \frac{R}{T} \sqrt{\frac{\sqrt{3}P}{Y}}, \quad w = \frac{6G^*PW}{Y^2T} \dots\dots\dots(49)$$

**4.2 弾塑性曲げ領域の基礎方程式** 上記の純弾性曲げ領域に隣接し、図 2 に示す  $0 \leq R \leq C_1, C_2 \leq R \leq B$  のような弾塑性曲げ領域が存在する。この領域では板の表面は塑性状態であるが内部は弾性状態のままである。ここで円板の中央面と弾塑性境界との間の距離を  $(1/2)T\chi$  で表す。

この領域の弾性部分についての応力成分、ひずみ成分、曲率成分の表示式は、純弾性曲げ領域において行ったと同様にして導くことができる。弾塑性境界  $|z| = (1/2)T\chi$  では  $\bar{S} = (\sqrt{5+\alpha}/3\sqrt{2})Y$  であるから、 $\bar{A}_0$  は

$$\bar{A}_0 = \frac{\bar{E}_0}{|z|} = \frac{\sqrt{5+\alpha}}{3\sqrt{2}} \frac{Y}{G^*T\chi} \dots\dots\dots(50)$$

で与えられる。よって弾塑性曲げ領域の弾性部分において、曲率成分、ひずみ成分、応力成分は式 (42)~(44) と同様に

$$\left. \begin{matrix} K_r \\ K_\theta \end{matrix} \right\} = \mp \frac{\sqrt{5+\alpha}}{3\sqrt{2}} \frac{Y}{G^*T\chi} \frac{\sin(\phi \mp \eta)}{\cos \eta} \dots\dots\dots(51)$$

$$\left. \begin{matrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \end{matrix} \right\} = \mp \frac{\sqrt{5+\alpha}}{3\sqrt{2}} \frac{Yz}{G^*T\chi} \frac{\sin(\phi \mp \eta)}{\cos \eta} \dots\dots\dots(52)$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{2\sqrt{5+\alpha}}{3\sqrt{2}} \frac{Yz}{T\chi} \left( \frac{3}{\sqrt{2\alpha+1}} \cos \phi \mp \sin \phi \right) \dots\dots\dots(53)$$

一方、この領域の塑性部分に関しては式 (22)~式 (26) の関係を用いる。ひずみ成分は式 (36) で与えられているから、式 (24) は

$$\left. \begin{matrix} \bar{E} = |z|\bar{A} \\ \bar{A} = \frac{1}{2\sin \zeta} \sqrt{K_r^2 + 2\cos 2\zeta K_r K_\theta + K_\theta^2} \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(54)$$

の形で書くことができる。これらの式を式 (25) に代入すれば、曲率成分とひずみ成分は次のようになる。

$$\left. \begin{matrix} K_r \\ K_\theta \end{matrix} \right\} = \mp \bar{A} \frac{\sin(\omega \mp \zeta)}{\cos \zeta} \dots\dots\dots(55)$$

$$\left. \begin{matrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \end{matrix} \right\} = \mp \bar{A}z \frac{\sin(\omega \mp \zeta)}{\cos \zeta} \dots\dots\dots(56)$$

ここでは弾性-完全塑性材料を仮定しているから、式 (22) は

$$\bar{S} = 2G^{**}\bar{E} = \frac{\sqrt{5+\alpha}}{3\sqrt{2}} Y \dots\dots\dots(57)$$

と表される。式 (57) を式 (26) に代入すれば応力成分は

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{\sqrt{5+\alpha}}{3\sqrt{2}} Y\kappa \left( \frac{3}{\sqrt{2\alpha+1}} \cos \omega \mp \sin \omega \right) \dots\dots\dots (58)$$

となる。ここで $\kappa$ は $\kappa = \text{sgn } z$ で与えられる。式(53)あるいは式(58)はそれぞれ、弾塑性曲げ領域の弾性部分、塑性部分に対する応力成分を示し、これからこの領域における曲げモーメント成分を計算すれば

$$\left. \begin{matrix} M_r \\ M_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{\sqrt{5+\alpha}}{6\sqrt{2}} Y T^2 \left\{ \frac{\chi^2}{3} \left( \frac{3}{\sqrt{2\alpha+1}} \cos \phi \mp \sin \phi \right) + \frac{1}{2} (1-\chi^2) \left( \frac{3}{\sqrt{2\alpha+1}} \cos \omega \mp \sin \omega \right) \right\} \dots\dots\dots (59)$$

弾塑性曲げ領域における曲率成分は、弾性部分については式(51)で、また塑性部分については式(55)で与えられる。これらは同じ曲率成分に対する二つの異なった表現とみなすことができるから、変数 $\psi$ と $\omega$ は

$$\frac{\sin(\psi-\eta)}{\sin(\psi+\eta)} = \frac{\sin(\omega-\zeta)}{\sin(\omega+\zeta)}, \quad \text{または} \quad \tan \psi \tan \zeta = \tan \omega \tan \eta \dots\dots\dots (60)$$

で関係づけられなければならない。

式(51)または式(59)を式(33)~(35)に代入すれば、弾塑性曲げ領域に対する基礎方程式は

$$\begin{aligned} 2\chi \left\{ \frac{1}{3} \left( \frac{3}{\sqrt{2\alpha+1}} \cos \phi - \sin \phi \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{3}{\sqrt{2\alpha+1}} \cos \omega - \sin \omega \right) \right\} \frac{d\chi}{dr} \\ - \left\{ \frac{\chi^2}{3} \left( \frac{3}{\sqrt{2\alpha+1}} \sin \phi + \cos \phi \right) + \frac{1}{2} (1-\chi^2) \frac{\sin 2\omega}{\sin 2\phi} \right. \\ \left. \times \left( \frac{3}{\sqrt{2\alpha+1}} \sin \omega + \cos \omega \right) \right\} \frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{2}{3} \chi^2 \sin \phi + (1-\chi^2) \sin \omega \right\} - \sqrt{\frac{6}{5+\alpha}} r \dots\dots\dots (61) \end{aligned}$$

$$\sin(\psi+\eta) \frac{d\chi}{dr} - \chi \cos(\psi+\eta) \frac{d\psi}{dr} = 2\chi \cos \eta \frac{\sin \psi}{r} \dots\dots\dots (62)$$

$$\frac{dw}{dr} = -2\sqrt{\frac{5+\alpha}{6}} \frac{r}{\chi} \frac{\sin(\psi+\eta)}{\cos \eta} \dots\dots\dots (63)$$

で与えられる。ここでも式(49)で定義される無次元量を導入した。

**4.3 境界条件** 式(46)~(48)あるいは式(61)~(63)は、それぞれ独立変数を $r$ 、従属変数を $s, \psi, w$ あるいは $\chi, \phi, w$ とする1階の非線形連立常微分方程式である。これらの式は、円板の中心と周辺で境界条件が与えられれば、中心において仮定した $s$ あるいは $\chi$ の値 $s_0$ あるいは $\chi_0$ を荷重パラメータとして、円板中心から出発して数値積分できる<sup>(5)~(7)</sup>。

まず、円板の中心における式(46), (47)あるいは式(61), (62)の境界条件は、それぞれ

$$r=0 \text{ において} \quad s=s_0, \quad \psi=0 \dots\dots\dots (64)$$

$$\chi=\chi_0, \quad \phi=0 \dots\dots\dots (65)$$

で与えられる。一方、周辺における弾性支持の境界条件は

$$M_r|_{R=B} = F \frac{dW}{dR} \Big|_{R=B} \dots\dots\dots (66)$$

と書き表される。ここで $F$ は、周辺拘束係数<sup>(8)</sup>であり $F=0, F=\infty$ は、それぞれ周辺支持あるいは周辺固定を意味する。そこで無次元量

$$f = F \frac{6B}{E^* T^3} \dots\dots\dots (67)$$

を導入すると、式(66)の境界条件は周辺が純弾性曲げ領域あるいは弾塑性曲げ領域の場合について、それぞれ

$$\left( \frac{3}{\sqrt{2\alpha+1}} \cos \phi - \sin \phi \right) \cos \eta + 2f(1+\nu^*) \sin(\psi+\eta) = 0 \dots\dots\dots (68-a)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \chi^3 \left( \frac{3}{\sqrt{2\alpha+1}} \cos \phi - \sin \phi \right) + \frac{3}{2} (1-\chi^2) \chi \left( \frac{3}{\sqrt{2\alpha+1}} \cos \omega - \sin \omega \right) \right\} \cos \eta \\ + 2f(1+\nu^*) \sin(\psi+\eta) = 0 \dots\dots\dots (68-b) \end{aligned}$$

となる。これらの条件を満足する $r$ の値を $b$ とすると、中心で仮定した $s_0$ あるいは $\chi_0$ に対応する分布荷重 $P$ は、式(49)によって次のように定められる。

$$P = (Y/\sqrt{3}) \left( \frac{bT}{B} \right)^2 \dots\dots\dots (69)$$

一方、式(48), (63)に対する境界条件は次のように規定できる。与えられた荷重 $P$ に対する円板中心での $w$

の値(すなわち、積分定数)は前もって知ることはできない。したがって計算ではまず

$$r=0 \text{ において } w=0 \dots\dots\dots(70)$$

とおいて式(48)、(63)を半径  $r$  について数値積分し、周辺でのたわみの値  $w_b$  を求める。数値積分によって求めた各  $r$  でのたわみの値からこの  $w_b$  を差引けば、その値は境界条件

$$r=b \text{ において } w=0 \dots\dots\dots(71)$$

を満足し、したがって正しいたわみ分布を与える。

**4.4 計算結果および考察** 計算は、一様分布横荷重を受ける周辺支持および周辺固定円板について行ったが、その周辺条件は式(68)で  $f=10^{-10}$  および  $10^{10}$  とおいて規定した。数値積分にあたっては、積分の刻みを0.01にとり、 $\alpha=1.0, 0.2, -0.2, -0.4, -0.45, -0.47, -0.49$  の場合に対し、 $s_0=0.6, 0.8, 1.0, \chi_0=0.8, 0.6, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05, 10^{-10}$  の各値について計算を行った。なお  $\chi_0=0$  の場合は、 $\chi_0=10^{-10}$  で近似した。この近似の精度を検討するため、周辺支持等方円板の場合につき、 $\chi_0=10^{-10}$  のほか  $\chi_0=10^{-15}$  に対しても計算を行ったところ、両場合の  $PB^2/6M_0$  の値は互いに有効数字9けたまで一致した。計算に際しては、Sawczuk らの計算結果と比較検討するために弾性状態および塑性状態ともポアソン比は  $\nu^*=\nu^{**}=0.5$  と仮定した。

まず図3は、周辺支持および周辺固定円板の限界荷重と横等方性パラメータ  $\rho$  (またはカット・アウト係数  $\rho_0$ ) の関係を示す。ここでは、 $\chi_0=10^{-10}$  の時の荷重を限界荷重とみなした。図中の各実線と破線は、それぞれ本理論の結果ならびに剛塑性多孔円板に対する Sawczuk らの結果である。ここで  $PB^2/6M_0$  は無次元化した一様分布横荷重であり、 $M_0$  は  $M_0=YT^2/4$  で定義される。また  $\rho$  は式(32)で定義され、各  $\alpha$  に対して計算されたものである。図から明らかなように、等方な場合 ( $\rho=1$ ) と比較し、 $\rho$  が減少するに従

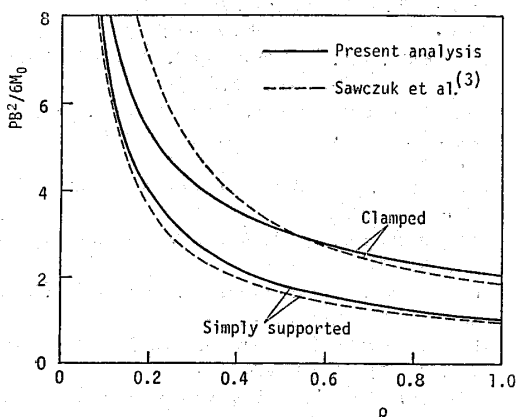
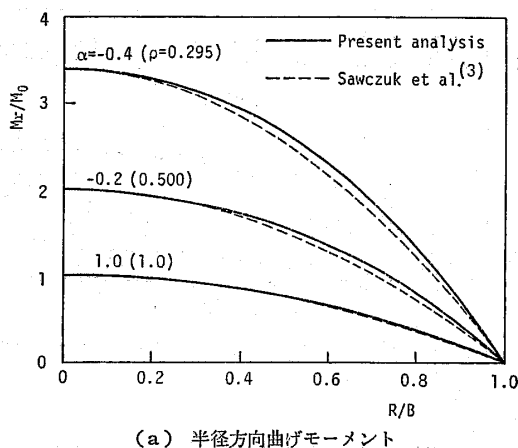


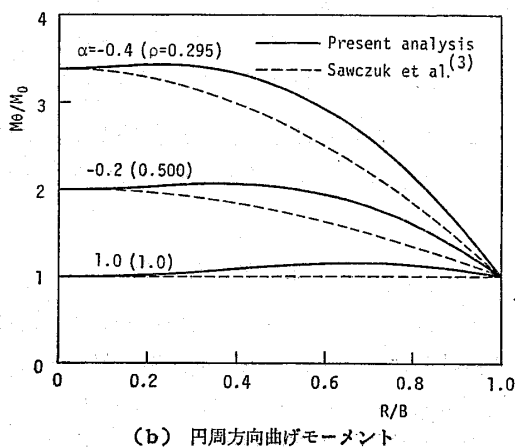
図3 横等方パラメータと限界荷重の関係

って、すなわち等方面内の降伏応力に比べて横方向の降伏応力が高くなるに従って、周辺支持および周辺固定の場合とも限界荷重が増加する。ここで前者に対しては、本計算結果と Sawczuk らの結果はほぼ一致しているが、後者に対しては横等方が顕著な場合かなりの違いを示している。このことは図4~5に示す  $\chi_0=10^{-10}$ 、すなわち限界状態での曲げモーメント分布から理解される。すなわち周辺支持の場合ほぼ同様な曲げモーメント分布になるのに対し、周辺固定の場合半径および円周方向曲げモーメント分布とも異なり、この違いは横等方性が顕著になるに従い大きくなる。これは、Sawczuk らの解析では、解析を簡単化するための円板周辺において半径および円周方向曲げモーメントを等しいと仮定したこと起因する。

次に、図6は周辺支持および周辺固定円板に対する荷重と最大たわみの関係を、それぞれ実線と一点鎖線で示したものである。ここで横軸  $[W/(6M_0B^2/E^*T^3)]_{R=0}$  はたわみを無次元量で示したものである。同図から周辺支持および周辺固定の場合とも、等方面内における降伏応力に比べて横方向の降伏応力が高くなるに従い、同一荷重に対してむしろ変形が小さくな

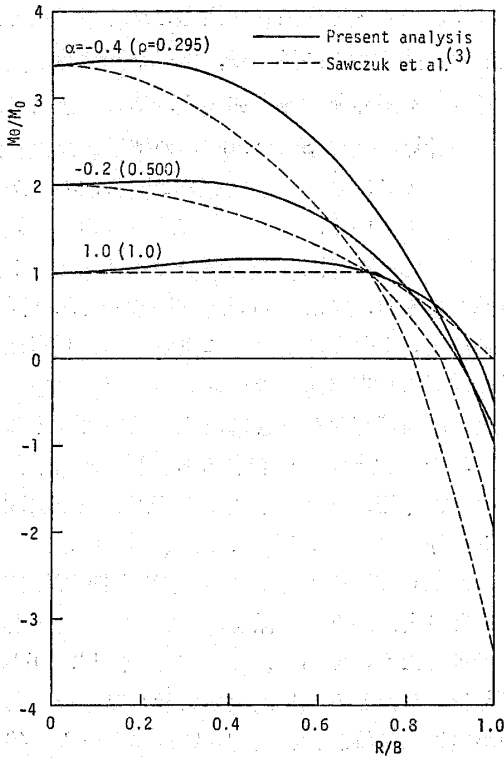


(a) 半径方向曲げモーメント

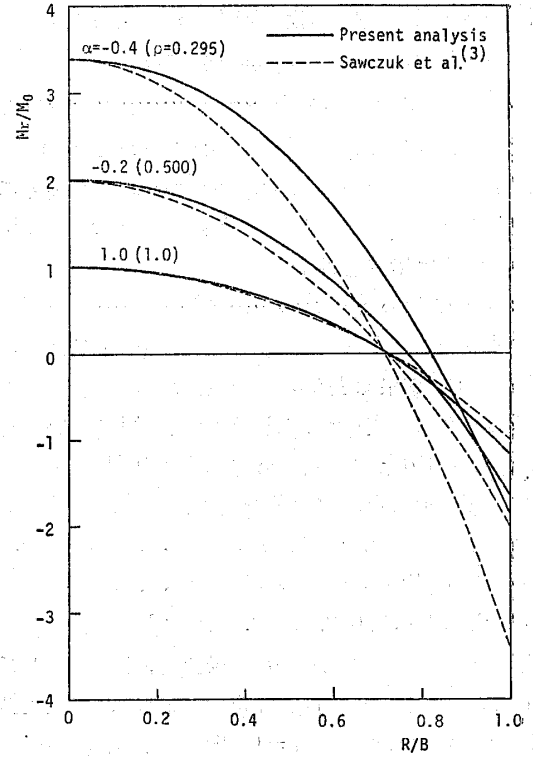


(b) 円周方向曲げモーメント

図4 限界曲げ状態における曲げモーメント分布 (周辺支持)



(a) 半径方向曲げモーメント



(b) 円周方向曲げモーメント

図 5 限界曲げ状態における曲げモーメント分布 (周辺固定)

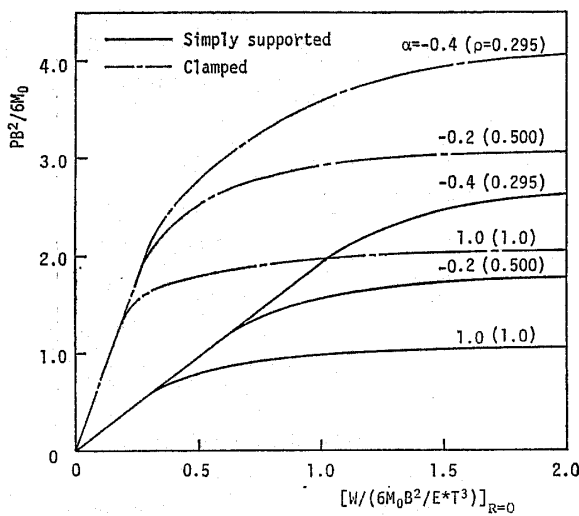


図 6 荷重と最大たわみの関係

ることがわかる。さらに、周辺支持の場合よりも周辺固定の場合の方がその傾向が強いといえる。

### 5. 結 言

本論文では、ミーゼスの降伏条件に対する Hencky の解釈を拡張することにより、横等方材料に対する弾塑性構成式の三角関数表示を導いた。ついでその応用例として、等価横等方円板で近似した多孔円板の弾塑性曲げを解析し、等価剛塑性円板に対する結果と比

較検討した。なお、この構成式は、多孔円板に限らず、広く横等方材料の平面応力問題の解析に対して有効と考えられる。

最後に、この問題の重要性を示唆された O'Donnell and Associates, Inc. の W.J. O'Donnell 博士及び J.S. Porowski 博士に深く感謝する。

### 文 献

- (1) Backofen, W.A., *Deformation Processing*, (1972), 27, Addison-Wesley.
- (2) 林, 複合材料工学, (昭 52), 550, 日科技連出版社.
- (3) Sawczuk, A., ほか 2 名, *Int. J. Mech. Sci.*, 17-6 (1975), 411.
- (4) Sokolovsky, V.V. (大橋訳), 塑性学, (昭 34), 22, 330, 朝倉書店.
- (5) 村上, 機論, 29-197 (昭 38), 103.
- (6) 大橋・村上, 機論, 31-224 (昭 40), 501.
- (7) 大橋・村上, 文献 (6) の 514 ページ.
- (8) Porowski, J.S. and O'Donnell, W.J., *Welding Res. Council. Bull.*, 180 (1973), 1.
- (9) Murakami, S., ほか 2 名, *PVRC Report*, (1979).
- (10) Hill, R. (鷲津・ほか 2 名訳), 塑性学, (昭 29), 314, 培風館.
- (11) Jaunzemis, W., *Continuum Mechanics*, (1967), 307, Macmillan.
- (12) Ambartsumyan, S.A. (神谷訳), 異方弾性板の理論, (昭 50), 11, 森北出版.
- (13) Porowski, J.S. and O'Donnell, W.J., *Trans. ASME, Ser. J*, 96-4 (1974), 234.
- (14) Porowski, J.S. and O'Donnell, W.J., *Trans. ASME, Ser. J*, 97-3 (1975), 145.
- (15) Slot, T. and O'Donnell, W.J., *Trans. ASME, Ser. B*, 93-4 (1971), 935.



討 論

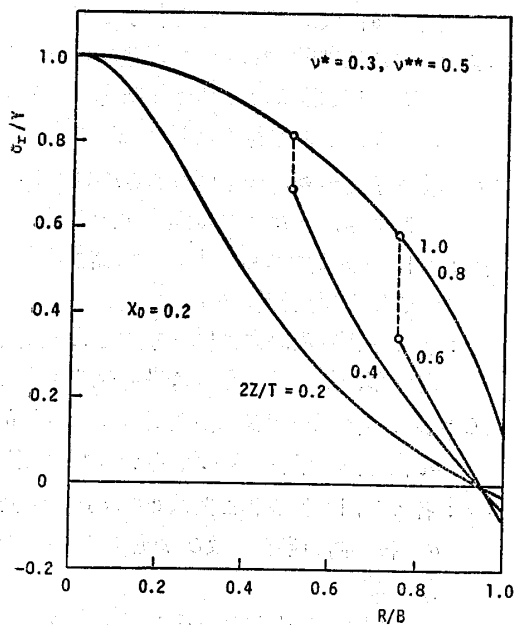
〔質問〕 守時 一 (東北大学工学部)

$\nu^* = \nu^{**} = 0.5$  として計算されているが、これらが異なる場合、応力成分の不連続が弾塑性境界で生ずると考えられる。これについての挙動を検討されていればお伺いしたい。

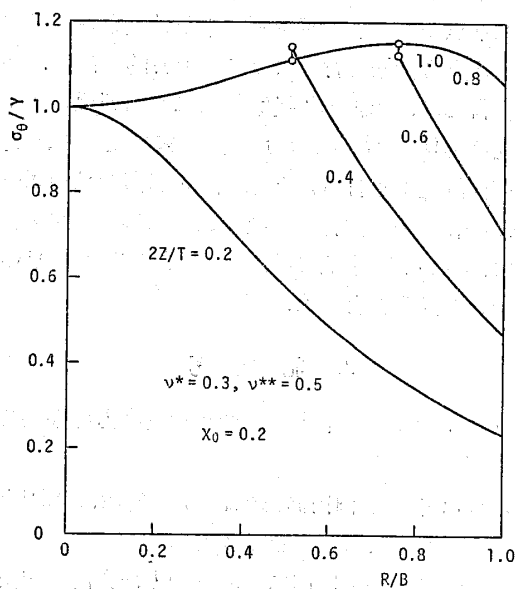
〔回答〕 この論文では、全ひずみ理論を基礎としており、しかも要素の弾性状態から塑性状態への移行に対して、せん断ひずみ強さとせん断応力強さの連続性を仮定している。特に、4章で論じた多孔板の弾塑性曲げ解析では、弾塑性曲げ領域の弾性部分と塑性部分の応力成分として、それぞれ式 (53) および (58)

を導いているが、そこでの変数  $\psi$  と  $\omega$  は弾塑性境界でのひずみ成分の連続性 [式 (60)] を仮定して関係づけられている。

このため弾性変形および塑性変形に対する面内変形のポアソン比  $\nu^*$ ,  $\nu^{**}$  が異なる場合には、ご指摘のとおり、弾塑性境界で応力成分の不連続が生じる。一例として、 $\nu^* = 0.3$ ,  $\nu^{**} = 0.5$  の場合につき、一様分布荷重をうける周辺支持等円板 ( $f=0$ ,  $\alpha=1$ ) の  $\chi_0 = 0.2$  のときの応力成分の不連続を示すと付図 1 のようになる。



(a) 半径方向の応力成分



(b) 円周方向の応力成分

付図 1 応力成分の分布