

異方性厚肉回転対称かくの弾/粘塑性変形*

竹園 茂男**, 埜 克己**
長野 卓***, 戸高 晴男†

Elasto/Visco-Plastic Deformation of Orthotropic Moderately Thick Shells of Revolution

by Shigeo TAKEZONO, Katsumi TAO,
Suguru NAGANO, and Haruo TODAKA

This paper describes an analytical formulation and a numerical analysis of the elasto/visco-plastic problems of orthotropic moderately thick shells of revolution under axisymmetrical loads with application to a cylindrical shell, and with comparison to experimental results. The analytical formulation is developed by extending the Reissner-Naghdi theory in elastic shells with a given consideration to the effect of shear deformation. As the constitutive relation, Hooke's law for orthotropic materials is used in the elastic range, and equations based on the orthotropic visco-plastic theory derived from the orthotropic plastic theory by Hill are employed in the plastic range. The visco-plastic strain rates are related to the stresses by Perzyna's equation. In order to check the adequacy of the numerical analysis, experiments are performed on elasto/visco-plastic deformation of a titanium cylindrical shell subjected to internal axisymmetrical loads. Good agreement is obtained between the experimental results and analytical solutions.

Key Words: Structural Analysis, Elasto/Visco-Plastic Deformation, Thick Shells of Revolution, Orthotropy, Shear Deformation, FDM, Experiment on Titanium Shell

1. 結 言

回転対称かくは、強度上の利点や加工の容易さなどのため、高温高荷重の過酷な条件下で広く使用されており、これの弾塑性変形問題の一般的解法についても、数多くの研究結果が報告されている。しかしながらこれらの研究は、そのほとんどが塑性領域で材料の粘性を考慮しない従来の塑性理論に基づくものである。一般に高分子材料ばかりでなく、金属材料から成るかくにおいても、塑性領域に入ると常温でも粘性の影響によって時間依存の現象が現れることは、実験事実よりよく知られている⁽¹⁾。

著者らは以前からこの点に着目し、これまでに薄肉かくに限らず、中程度の厚さを有するかくに関して、せん断変形の影響を考慮に入れて、静的および動的な弾/粘塑性変形問題を解析してきたが^{(2)~(7)}、本論文では、材料が直交異方性を有する場合の、やや肉厚の大きい回転対称かくの弾/粘塑性変形問題を扱った。弾/粘塑性の構成関係には、Hillの直交異方性塑性

理論にならって、Perzynaの弾/粘塑性構成式⁽⁸⁾を直交異方性の場合に拡張したものを、厚肉の場合に考慮すべきせん断変形には、Reissner-Naghdiの理論⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾(ひずみ-変位関係)を採用して基礎式を導いた。基礎式の数値解析には、差分法を適用した。

材料の塑性領域において粘性の影響が現れることは、実験の際などによく観察されるところであるが、この塑性領域における粘性の影響に着目した実験例は、比較的少ないようである⁽¹⁾⁽¹¹⁾。著者らは、両端自由のチタン円筒かく中央部に軸対称荷重を加え、円筒かくの外表面のひずみの時間的変化を測定し、計算値と比較して、本解法の妥当性を検討した。

なお本解法によって得られる最終状態(定常状態)の値は、従来の粘性の影響を無視した時間を考慮しない塑性理論による結果と一致する⁽³⁾。

2. 基 礎 式

かくの中央面の形状を、図1に示すように、次のパラメータ表示で与える。

$$r = r(\xi), \quad z = z(\xi) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 ξ はかくの中央面において子午線に沿って測った長さであり、 r, z は中央面の座標である。このとき、

* 昭和59年10月17日 第62期全国大会講演会において講演。原稿受付 昭和60年2月4日。

** 正員、豊橋技術科学大学(〒440 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

*** 正員、マツダ(株)(〒735 広島市安芸郡府中町)。

† 正員、日の影町役場(〒882 宮崎県西臼杵郡日の影町)。

$$\left. \begin{aligned} r' &= \cos(\Phi - \vartheta), & z' &= \sin(\Phi - \vartheta) \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

$$(r')^2 + (z')^2 = 1$$

ただし

$$(\quad)' = d(\quad)/d\xi, \quad \Phi = \varphi + \vartheta$$

ここに、 ϑ は角変位である。

かくの微小部分の平衡方程式は、変化率の形で次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_v + r\dot{p}_v &= 0, & \dot{\phi}_H - \dot{N}_\theta + r\dot{p}_H &= 0 \\ (r\dot{M}_\theta)' - \dot{M}_\theta \cos \Phi + \dot{\vartheta} M_\theta \sin \Phi - r\dot{Q} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

ただし

$$\dot{\phi} = \dot{\vartheta}, \quad \dot{\phi}_H = r\dot{H}, \quad \dot{\phi}_v = r\dot{V} \dots\dots(4)$$

また、 $(\quad)'$ は時間もしくは荷重に対する微分を表す。 M_θ および M_ϕ はそれぞれ子午線方向および円周方向の単位長さ当たりの曲げモーメントを示す。 p_H と p_v はかくの中央面の単位面積当たりの分布荷重の、半径方向成分と軸方向成分であり、かくの内外面 ($\eta = \pm h/2$) に作用する分布荷重 $\{p_H^+, p_v^+\}, \{p_H^-, p_v^-\}$ と次の関係にある。

$$p_H = p_H^+ h^+ - p_H^- h^-, \quad p_v = p_v^+ h^+ - p_v^- h^- \dots\dots(5)$$

ただし

$$h^\pm = 1 \mp \frac{h}{2} \left(\frac{1}{R_\theta} + \frac{1}{R_\phi} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{1}{R_\theta R_\phi} \dots\dots(6)$$

R_θ, R_ϕ は、中央面上の点における子午線方向および円周方向の曲率半径である。

また変形中のかくの単位長さ当たりの各内力成分間には、次の関係が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} r\dot{N}_\theta &= \dot{\phi}_H \cos \Phi + \dot{\phi}_v \sin \Phi \\ &\quad - (\phi_H \sin \Phi - \phi_v \cos \Phi) \dot{\vartheta} \\ r\dot{Q} &= -\dot{\phi}_H \sin \Phi + \dot{\phi}_v \cos \Phi \\ &\quad - (\phi_H \cos \Phi + \phi_v \sin \Phi) \dot{\vartheta} \end{aligned} \right\} \dots\dots(7)$$

中央面のひずみ $\epsilon_{\theta m}, \epsilon_{\phi m}, \epsilon_{\theta \eta m}$ および曲率の変化量 $\dot{\kappa}_\theta, \dot{\kappa}_\phi$ は、半径方向変位 u 、軸方向変位 w 、および角変

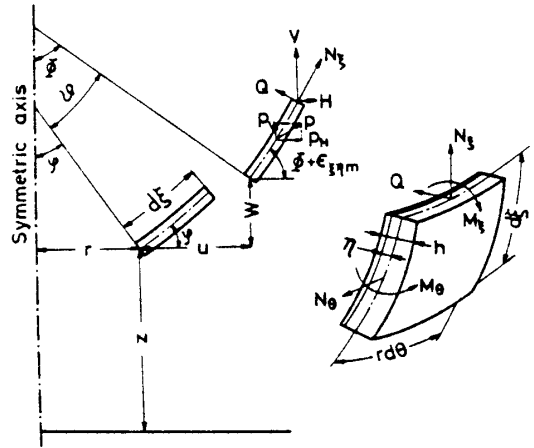


図 1 回転対称かくの記号

位 ϑ によって次のように表される⁽¹⁰⁾。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\theta m} &= u' \cos \Phi + w' \sin \Phi \\ &\quad + \dot{\vartheta} (w' \cos \Phi - u' \sin \Phi - \sin \Phi) \\ \epsilon_{\phi m} &= u'/r \\ 2\epsilon_{\theta \eta m} &= w' \cos \Phi - u' \sin \Phi \\ &\quad - \dot{\vartheta} (w' \sin \Phi + u' \cos \Phi + \cos \Phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

$$\dot{\kappa}_\theta = \dot{\vartheta}', \quad \dot{\kappa}_\phi = \dot{\vartheta}' \cos \Phi / r \dots\dots(9)$$

ここに $\epsilon_{\theta \eta m}$ は工学上のせん断ひずみの 1/2 である。

かく厚中央面から内側に η 離れた点のひずみ成分、 $\epsilon_\theta, \epsilon_\phi, \epsilon_{\theta \eta}$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\theta &= (\epsilon_{\theta m} - \eta \dot{\kappa}_\theta) / (1 - \eta/R_\theta) \\ \epsilon_\phi &= (\epsilon_{\phi m} - \eta \dot{\kappa}_\phi) / (1 - \eta/R_\phi) \\ \epsilon_{\theta \eta} &= \epsilon_{\theta \eta m} / (1 - \eta/R_\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

ただし

$$R_\theta = 1/\Phi', \quad R_\phi = r/\sin \Phi$$

次に、Hill の直交異方性理論を用いて、Perzyna の弾/粘塑性構成式⁽⁸⁾を直交異方性の場合に拡張する。異方性の主軸を ξ, θ, η とし、かく厚方向の垂直応力を省略すると、相当応力 $\bar{\sigma}$ は次の式で与えられる。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2(F+G+H)}} [(G+H)\sigma_\xi^2 - 2H\sigma_\xi\sigma_\theta + (F+H)\sigma_\theta^2 + 2M\sigma_{\xi\theta}^2]^{1/2} \dots\dots(11)$$

ここで、 F, G, H, M は材料の異方性パラメータである。式(11)の $\bar{\sigma}$ を塑性ポテンシャルとするときのこう配は、

$$\left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \right] = \frac{3}{2\bar{\sigma}} [S_\xi, S_\theta, 2S_{\xi\theta}] = \frac{3}{2\bar{\sigma}} S_{ij} \dots\dots(12)$$

ただし

$$S_\xi = \frac{(G+H)\sigma_\xi - H\sigma_\theta}{F+G+H}, \quad S_\theta = \frac{(F+H)\sigma_\theta - H\sigma_\xi}{F+G+H}, \quad S_{\xi\theta} = \frac{M\sigma_{\xi\theta}}{F+G+H} \dots\dots(13)$$

全ひずみを弾性ひずみと粘塑性ひずみの和で表すと、直交異方性の場合の応力-ひずみ関係式は、次のようになる。

$$\dot{\sigma}_\xi = \frac{E_\xi}{1 - \nu_{\theta\xi}\nu_{\theta\xi}} [\dot{\epsilon}_\xi + \nu_{\theta\xi}\dot{\epsilon}_\theta - (\dot{\epsilon}_\xi^{VP} + \nu_{\theta\xi}\dot{\epsilon}_\theta^{VP})], \quad \dot{\sigma}_\theta = \frac{E_\theta}{1 - \nu_{\xi\theta}\nu_{\xi\theta}} [\nu_{\xi\theta}\dot{\epsilon}_\xi + \dot{\epsilon}_\theta - (\nu_{\xi\theta}\dot{\epsilon}_\xi^{VP} + \dot{\epsilon}_\theta^{VP})],$$

$$\dot{\sigma}_{e\eta} = 2G_{e\eta} [\dot{\epsilon}_{e\eta} - \dot{\epsilon}_{e\eta}^{VP}] \dots\dots\dots (14)$$

ここに、粘塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{e\eta}^{VP}$ は、Perzyna の式⁽⁶⁾より、

$$\dot{\epsilon}_{e\eta}^{VP} = \gamma \langle \Psi(f) \rangle \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right] = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \gamma \langle \Psi(f) \rangle S_{ij} \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $\langle \cdot \rangle$ は時間に関する微分を示し、 $E_e, E_o, G_{e\eta}$ は弾性係数、 ν_{eo}, ν_{oe} はポアソン比、 γ は粘性パラメータである。また、 $\Psi(f)$ は次の定義によるものである。

$$f \leq 0 \text{ のとき } \langle \Psi(f) \rangle = 0; f > 0 \text{ のとき } \langle \Psi(f) \rangle = \Psi(f) \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 f は

$$f = (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^*) / \bar{\sigma}^* \dots\dots\dots (17)$$

で、 $f=0$ は Hill の降伏曲面を表す。 $\bar{\sigma}^*$ は、ひずみ速度が十分小さい通常の引張試験における応力-ひずみ関係から得られ、一般に次の相当粘塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^{VP}$ の関数となる。

$$\bar{\epsilon}^{VP} = \sqrt{\frac{2}{3}} (F+G+H) \int \left\{ \frac{(F+H)d\bar{\epsilon}_e^{VP} + 2Hd\bar{\epsilon}_e^{VP} \cdot d\bar{\epsilon}_e^{VP} + (G+H)d\bar{\epsilon}_o^{VP} + 2d\bar{\epsilon}_e^{VP}}{FG+GH+HF} + \frac{2d\bar{\epsilon}_e^{VP}}{M} \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (18)$$

かくの単位長さ当たりの合応力、合モーメントは、次のようになる。

$$\{ \dot{N}_e, \dot{Q}, \dot{M}_e \} = \int_{-h/2}^{h/2} \{ \dot{\sigma}_e, \dot{\sigma}_{e\eta}, \dot{\sigma}_{e\eta} \} (1-\eta/R_o) d\eta, \{ \dot{N}_o, \dot{M}_o \} = \int_{-h/2}^{h/2} \{ \dot{\sigma}_o, \dot{\sigma}_{o\eta} \} (1-\eta/R_e) d\eta \dots\dots\dots (19)$$

式(10)および式(14)を式(19)に代入し積分すると、合応力および合モーメントは、次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \dot{N}_e \\ \dot{N}_o \\ \dot{Q} \\ \dot{M}_e \\ \dot{M}_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Tc_e & T\nu_{oe}c_e & 0 & -D_e\lambda & 0 \\ T\nu_{eo}c_o & Tc_o & 0 & 0 & D_o\lambda \\ 0 & 0 & \frac{5}{6}G_{e\eta}h & 0 & 0 \\ D_e\lambda & 0 & 0 & -D_e & -\nu_{oe}D_e \\ 0 & -D_o\lambda & 0 & -\nu_{eo}D_o & -D_o \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{e\eta} \\ \dot{\epsilon}_{o\eta} \\ 2\dot{\epsilon}_{e\eta} \\ \dot{\epsilon}_e \\ \dot{\epsilon}_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{N}_e^{VP} \\ \dot{N}_o^{VP} \\ \dot{Q}^{VP} \\ \dot{M}_e^{VP} \\ \dot{M}_o^{VP} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

ここに

$$c_e = E_e h, \quad c_o = E_o h, \quad D_e = \frac{E_e h^3}{12(1-\nu_{eo}\nu_{oe})}, \quad D_o = \frac{E_o h^3}{12(1-\nu_{eo}\nu_{oe})}, \quad \lambda = \frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_o}, \quad T = \frac{1}{1-\nu_{eo}\nu_{oe}}$$

また、 $\dot{N}_e^{VP}, \dot{N}_o^{VP}, \dot{Q}^{VP}$ および $\dot{M}_e^{VP}, \dot{M}_o^{VP}$ はそれぞれ粘塑性によるみかけの合応力、合モーメントの変化率であり、次式によってみかけの応力変化率から計算できる。

$$\{ \dot{N}_e^{VP}, \dot{Q}^{VP}, \dot{M}_e^{VP} \} = \int_{-h/2}^{h/2} \{ \dot{\sigma}_e^{VP}, \dot{\sigma}_{e\eta}^{VP}, \dot{\sigma}_e^{VP} \} (1-\eta/R_o) d\eta, \{ \dot{N}_o^{VP}, \dot{M}_o^{VP} \} = \int_{-h/2}^{h/2} \{ \dot{\sigma}_o^{VP}, \dot{\sigma}_{o\eta}^{VP} \} (1-\eta/R_e) d\eta \dots\dots\dots (21)$$

以上の諸式を用いて、 $\dot{\theta}$ および $\dot{\psi}_H$ に関する次の2階連立微分方程式を導くことができる。

$$\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} + \begin{Bmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \begin{Bmatrix} a_5 & a_6 \\ b_5 & b_6 \end{Bmatrix} \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}_H \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 $a_1 \sim a_6, b_1 \sim b_6$ および d_1, d_2 は次のように表される。

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - k\lambda^2, & a_2 &= \frac{\nu_{oe}\lambda}{c_o} \\ a_3 &= \frac{(rD_e)'}{rD_e} (1 - k\lambda^2) - (k'\lambda^2 + 2k\lambda\lambda') + \frac{\nu_{oe}}{r} (1 - k\lambda^2) \cos \Phi - \frac{\lambda}{rc_e} (\psi_v \cos \Phi \\ &\quad - \psi_H \sin \Phi) - \frac{\nu_{eo}D_o}{rD_e} (1 - k\lambda^2) \cos \Phi \\ a_4 &= -\frac{\lambda}{rc_e} \cos \Phi + \frac{\nu_{oe}}{D_e} \left(\frac{D_e\lambda}{c_o} \right)' + \frac{\nu_{oe}\lambda}{c_o} \frac{r'}{r} - \frac{\lambda}{rc_e} \cos \Phi \\ a_5 &= \frac{\nu_{oe}}{rD_e} (D_e \cos \Phi)' (1 - k\lambda^2) - \frac{\nu_{oe}}{r} (k'\lambda^2 + 2k\lambda\lambda') \cos \Phi \\ &\quad - \frac{(k\lambda)'}{rD_e} (\psi_v \cos \Phi - \psi_H \sin \Phi) - \frac{\lambda}{rc_e} [\psi_v' \cos \Phi + \psi_v (\cos \Phi)' - \psi_H' \sin \Phi - \psi_H (\sin \Phi)'] \\ &\quad - \frac{D_o}{D_e} (1 - k\lambda^2) \frac{\cos^2 \Phi}{r^2} + \frac{D_o\lambda\nu_{eo}}{r^2 D_e c_e} (\psi_v \cos^2 \Phi - \psi_H \sin \Phi \cos \Phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{rD_e}(\psi_v \sin \Phi + \psi_H \cos \Phi) - \frac{1}{rD_e}M_o \sin \Phi \\
 a_0 = & -\frac{(k\lambda)'}{rD_e} \cos \Phi - \frac{\lambda}{rc_e}(\cos \Phi)' + \frac{D_o\lambda\nu_{eo}}{D_e c_e} \frac{\cos^2 \Phi}{r^2} - \frac{\sin \Phi}{(rD_e)}, \quad b_1 = -\nu_{eo}D_o\lambda, \quad b_2 = 1 \\
 b_3 = & -\frac{\nu_{eo}C_o}{rc_e}(\psi_v \cos \Phi - \psi_H \sin \Phi) - \frac{\nu_{eo}C_o}{r}(k\lambda r)' - \frac{2\lambda D_o}{r} \cos \Phi, \\
 b_4 = & -\frac{\nu_{eo}C_o}{rc_e} \cos \Phi + \frac{(r/c_o)'}{(r/c_o)} + \frac{\nu_{oe}}{r} \cos \Phi \\
 b_5 = & -\frac{\nu_{eo}C_o}{r} \left(\frac{1}{c_e}\right)' (\psi_v \cos \Phi - \psi_H \sin \Phi) - \frac{\nu_{eo}C_o}{rc_e} [\psi_v' \cos \Phi + \psi_v (\cos \Phi)' - \psi_H' \sin \Phi - \psi_H (\sin \Phi)'] \\
 & - \frac{C_o}{r} (k\lambda \cos \Phi)' - \frac{C_o}{rc_e} \left(\psi_v \frac{\cos^2 \Phi}{r} - \psi_H \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{r}\right) - \lambda D_o \nu_{oe} \left(\frac{\cos \Phi}{r}\right)^2 - \frac{6C_o}{5G_{eq}h} \left[\psi_v \left(\frac{\sin \Phi}{r}\right)^2 \right. \\
 & \left. + \psi_H \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{r^2}\right] + \frac{C_o}{r} \varepsilon_{em} \sin \Phi + \frac{C_o}{r} 2\varepsilon_{eqm} \cos \Phi + \frac{C_o}{r} \sin \Phi \\
 b_6 = & -\frac{\nu_{eo}C_o}{r} \left(\frac{1}{c_e}\right)' \cos \Phi - \frac{\nu_{eo}C_o}{rc_e} (\cos \Phi)' - \frac{C_o}{c_e} \left(\frac{\cos \Phi}{r}\right)^2 - \frac{6C_o}{5G_{eq}h} \left(\frac{\sin \Phi}{r}\right)^2 \\
 d_1 = & \frac{\lambda}{rc_e} \sin \Phi \cdot \dot{\psi}_v + \left\{ \left[\frac{(k\lambda)'}{rD_e} \sin \Phi + \frac{\lambda}{rc_e} (\sin \Phi)' \right] - \frac{D_o\lambda\nu_{eo}}{D_e c_e} \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{r^2} - \frac{\cos \Phi}{rD_e} \right\} \dot{\psi}_v \\
 & - \frac{\nu_{oe}}{D_e} \left(\frac{D_e\lambda}{c_o}\right)' (r\dot{p}_H) - \frac{\nu_{oe}\lambda}{c_o} (2r'\dot{p}_H + r\dot{p}_H) + \frac{(k\lambda r \dot{N}_e^{VP})'}{rD_e} - \frac{\nu_{oe}}{rD_e} \left(\frac{D_e\lambda}{c_o} r \dot{N}_e^{VP}\right)' - \frac{(r \dot{M}_e^{VP})'}{rD_e} \\
 & + \frac{\lambda}{c_e} \cos \Phi \cdot \dot{p}_H - \frac{D_o\lambda\nu_{eo}}{rc_e D_e} \cos \Phi \cdot \dot{N}_e^{VP} + \frac{\lambda}{rc_e} \cos \Phi \cdot \dot{N}_e^{VP} + \frac{\cos \Phi}{rD_e} \dot{M}_e^{VP} \\
 d_2 = & \frac{\nu_{eo}C_o}{rc_e} \sin \Phi \cdot \dot{\psi}_v + \left[\frac{\nu_{eo}C_o}{r} \left(\frac{1}{c_e}\right)' \sin \Phi + \frac{\nu_{eo}C_o}{rc_e} (\sin \Phi)' + \frac{C_o}{c_e} \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{r^2} \right. \\
 & \left. - \frac{6C_o}{5G_{eq}h} \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{r^2} \right] \dot{\psi}_v \\
 & - \left[\frac{(r/c_o)'}{(r/c_o)} + \frac{\nu_{oe}}{r} \cos \Phi \right] (r\dot{p}_H) - r'\dot{p}_H - r\dot{p}_H + \frac{C_o}{r} \left(\frac{\nu_{eo}\lambda}{c_e} \dot{N}_e^{VP}\right)' - \frac{C_o}{r} \left(\frac{r}{c_o} \dot{N}_e^{VP}\right)' + \frac{C_o}{c_e} \frac{\cos \Phi}{r} \dot{N}_e^{VP} \\
 & - \nu_{oe} \frac{\cos \Phi}{r} \dot{N}_e^{VP} - \frac{6C_o}{5G_{eq}h} \frac{\sin \Phi}{r} \dot{Q}^{VP}
 \end{aligned}$$

ただし, $k = D_e/c_e = D_o/c_o$.

式(22)が異方性厚肉回転対称かくの弾/粘塑性問題の基礎微分方程式である。式(22)において, c_e と c_o , D_e と D_o , ν_{eo} と ν_{oe} をそれぞれ等しくすると, 著者らが以前に導いた等方性の厚肉かくに対する基礎式となる⁽⁷⁾。

3. 数値計算法

ある任意の時刻と荷重段階における内力と変位の変化率は, 式(22)を適当な境界条件のもとで解けば得られることになる。式(22)の右辺の値は, 荷重速度と粘塑性ひずみ速度から求めることができるので, ある計算段階の解がわかっているならば, 方程式の係数はすべて既知となり, この結果, 基礎式は線形化され, $\dot{\psi}$ と $\dot{\psi}_H$ に関する2階連立線形微分方程式として解くことができる。式(22)の数値解法には差分法を用い, 次の近似式を用いて差分近似した。

$$\begin{aligned}
 x_j' = \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2\delta}, \quad x_j'' = \frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{\delta^2} \\
 \dots\dots\dots(23)
 \end{aligned}$$

ここに, x_j はかくの中央面において, 子午線方向に微小間隔 δ で格子点をとったときの, j 番目の点における諸量を表す。なお, かくの両端の点 ($j=1, N$) に対しては, その誤差が式(23)と同程度になるように, つぎに示す三点の境界差分式を用いる。

$$\left. \begin{aligned}
 x_1' &= \frac{-3x_1 + 4x_2 - x_3}{2\delta} \\
 x_N' &= \frac{3x_N - 4x_{N-1} + x_{N-2}}{2\delta}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

これらの差分式を式(22)および境界条件式に用いると, x_j に関する N 元一次連立方程式が得られる。

まず, $j=1, N$ の境界を除く差分点に対しては, 式(22)に式(23)を代入して, マトリックス表示すると, 次式が得られる。

$$A_j x_{j-1} + B_j x_j + C_j x_{j+1} = d_j \quad \dots\dots\dots(25)$$

また、かくの端の点 $j=1$ および N における境界条件式は、式(24)を用いて一般に次のように書き表される。

$$\left. \begin{aligned} A_1 \dot{x}_1 + B_1 \dot{x}_2 + C_1 \dot{x}_3 &= d_1 \\ A_N \dot{x}_{N-2} + B_N \dot{x}_{N-1} + C_N \dot{x}_N &= d_N \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

式(25), (26)において A_j, B_j, C_j および d_j は、それぞれ $(2 \times 2), (2 \times 1)$ のマトリックスであり、ある計算段階における解がわかっているならば、既知である。式(25), (26)は $\dot{x}_j (j=1 \sim N)$ に関する N 元連立方程式となり、これらを解けば θ_j, ψ_{Hj} が求められる。なお式(21)の積分には、かく厚方向に等間隔に K 個の点を取って、シンプソンの $1/3$ 則を適用する。

以上は、ある任意の時刻と荷重段階における内力と変位の変化率の計算法であるが、ある任意の時刻と荷重段階における解は、これらを時間と荷重に対して積分することによって得られる。

4. 実験

ここでは、形状が単純で、実験の容易な両端自由の円筒かくについて実験を行い、計算結果と実験結果を比較する。

4.1 試験片と材料定数 実験に用いた円筒試験

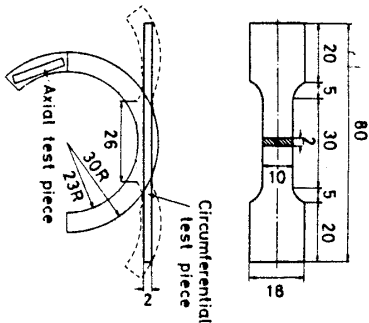


図2 単軸引張試験片

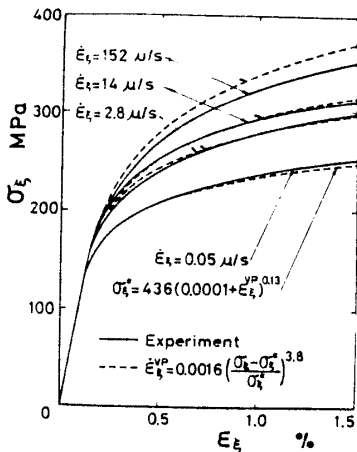


図3 単軸引張試験 ($\sigma_\epsilon - \epsilon_\epsilon$)

片は、外径 60 mm、内径 46 mm のチタン引抜管から、内外面を切削して仕上げた。形状寸法は、平均半径 $R=25.5$ mm、厚さ $h=3$ mm、長さ $L=86$ mm とし、寸法比 R/h は 8.5 である (図4)。

一方、この材料の材料特性を知るため、まずこの引抜管から軸方向、円周方向および 45° 方向の3方向の単軸引張試験片 (図2) を切り出す。引抜管の外径が 60 mm、厚さが 7 mm であるから、軸方向の試験片は簡単に採取できるが、円周方向、 45° 方向の試験片はそのままでは切り出せないで、次のようにした。

円周方向の試験片については、まず図2に細線で示す幅 20 mm の円環の内面の一部を、点線のように切削した。次にその平坦部分 (後に引張試験片の標点間の中央部になる) の内外面に、当て金を当てて、バイスで十分強固に固定した後、左右の両端部を破線のように曲げ、これから切削によって太線で示すような試験片を作製した。左右の両端部を曲げるとき、塑性変形は主として、固定されていない厚さの小さい部分に限定されるので、固定部への影響は小さいと考えられる。実際に、固定部にひずみゲージを貼って変形の影響を調べたが、曲げによる永久ひずみは、ほとんどみられなかった。なお、 45° 方向の試験片の場合には、引抜管から円環を切り出す際、軸線に対して 45° 傾けたほかは、上述の方法と全く同様である。

このようにして得られた試験片について、各々種々のひずみ速度 ($\dot{\epsilon}=0.05 \sim 300 \mu/s$) で引張試験を行った。軸方向試験片による結果を、図3に例示する。円周

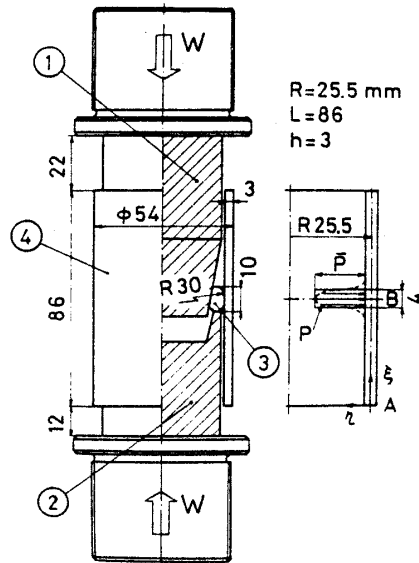


図4 実験装置および円筒かく試験片

*1 当て金に溝を設け、ひずみゲージを圧迫しないようにした。

方向, 45° 方向の引張試験の結果も考慮して, 次のように材料定数の値を定めた.

$$\begin{aligned}
 & \text{ヤング率 } E_e = E_s = 107 \text{ GPa} \\
 & \text{ポアソン比 } \nu_{ee} = \nu_{ss} = 0.35 \\
 & \text{静的応力-ひずみ関係式} \\
 & \quad \bar{\sigma}^* = 482(9.18 \times 10^{-5} + \bar{\varepsilon}^{VP})^{0.13} \text{ MPa} \\
 & \text{初期降伏応力 } \sigma_Y = 144 \text{ MPa} \\
 & \text{粘性パラメータ } \gamma = 0.0015 \text{ 1/s} \\
 & \Psi(f) = [(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^*) / \bar{\sigma}^*]^{3.8} \\
 & \text{異方性パラメータ } G/F = 1.59, H/F = 2.20, \\
 & \quad N/F = 6.30
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

図3において, 破線は上記の材料定数の値を用いて計算した $\sigma_e - \varepsilon_e$ の関係を示す. 実験結果が, 全域にわたってほぼ近似できていることがわかる.

4.2 実験方法 実験装置の概略を図4に示す. 上下シリンダ①, ② (S 45 C) に, 電気油圧サーボ式試験機によって軸圧縮力 W を加えると, グリース潤滑を

施した①のテーパ部によって, 12分割した黄銅リング③が押し広げられ, チタン円筒かく試験片④に, 半径方向の軸対称荷重 (接触部の平均内圧 \bar{P}) が加わる. 試験片外表面にひずみゲージを貼り, 試験片外表面の軸方向ひずみ ε_e , 円周方向ひずみ ε_s の軸方向分布を計測した.

荷重は図5に示すように, 時間に対して階段状 ($\bar{P} = 27.0 \sim 135 \text{ MPa}$) に負荷し, 負荷直後から定常状態に至るまで, 5分ごとにひずみの測定を行った. それぞれの荷重段階において, 最大のひずみの増加が, 5分間に 15μ 以下になったとき, これを定常状態とみなし, 次の荷重段階に移行した. 図中, \bar{P}_0 は初期降伏荷重 (計算値) を示す. なお, W と荷重 \bar{P} との関係は, あらかじめ理論解のある内圧円環のひずみを測定することによって, キャリブレーションしておいた.

4.3 実験値と計算値の比較 円筒かくの中央部に作用する圧力の分布は, 分割リング③と試験片④の間にはさんだ圧力判別シートの色の変化から, 円周方向にはほぼ一様で, 軸方向に 4 mm の分布幅を有することがわかった. 本解析では, $39 \leq \xi \leq 41, 41 \leq \xi \leq 43 \text{ mm}$ の範囲を, それぞれ次の ξ の4次式で表して計算を行った.

$$\begin{aligned}
 39 \leq \xi \leq 41 \text{ mm} : p_{\bar{h}} = P &= [(\bar{P}/2)/2^*](\xi - 39)^4 \\
 41 \leq \xi \leq 43 \text{ mm} : p_{\bar{h}} = P &= \bar{P} \\
 &- [(\bar{P}/2)/2^*](\xi - 43)^4
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

荷重増分 ΔP は一定値 (1 MPa) とした. これは線形弾性解による弾性限の, およそ $1/31$ となる.

ひずみ速度は時間とともに変化するるので, 時間間隔

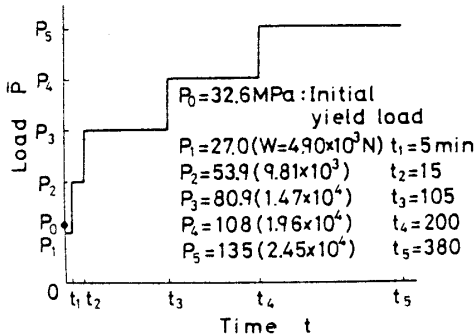


図5 荷重

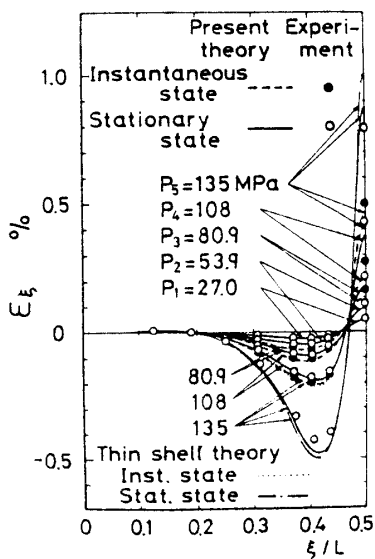


図6 ε_e の軸方向分布

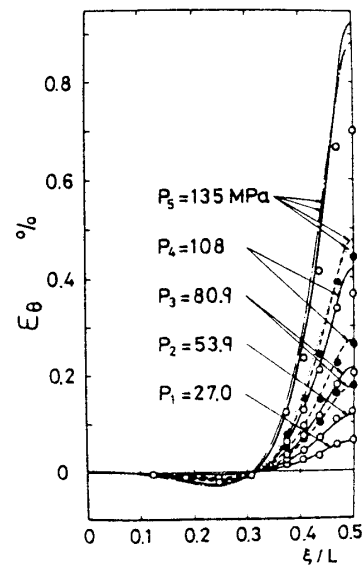


図7 ε_s の軸方向分布

$(\Delta t)_i$ の選び方によっては、計算の無駄や誤差が大きくなる。本計算では、Zienkiewicz および Corneau⁽¹²⁾による時間間隔の安定限界

$$(\Delta t)_i \leq \frac{4}{3} \frac{(1+\nu)}{\gamma E} \left(\frac{\bar{\sigma}^*}{\Psi'} \right)_i = \Delta t_0 \dots\dots\dots (29)$$

(ここで、 $\Psi' = d\Psi/df$, i =計算段階)

を参照にし、 $(\Delta t)_i = 0.9\Delta t_0$ を用いた。

境界条件は、自由端の点 A ($j=1$) において

$$\dot{M}_A = 0, \quad \dot{\psi}_H = 0 \dots\dots\dots (30)$$

また点 B ($j=N$) では、対称性により、

$$\dot{\psi} = 0, \quad \dot{\psi}_H = 0 \dots\dots\dots (31)$$

となる。

差分点数 N は子午線方向に $N=216$ とし、かく厚

方向の格子点数 K は $K=19$ とした。これらの数値は、これを種々変化させたときの解の収束性と、利用した計算機的能力 (FACOM M-382) を考慮して決定した。

異方性パラメータ M については、かく厚方向の試験片採取が困難なこと、またその影響が小さいことのために、 $S_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}$ (式(13)) とみなし、 $M/F=4.79$ とした。

次に実験値と計算値の比較について述べる。

図 6, 7 は、それぞれ外表面の軸方向ひずみ ϵ_z と円周方向ひずみ ϵ_θ の軸方向分布を示す。図中、黒円と破線は、負荷の瞬間の実験値と計算値であり、白円と実線は、定常状態のものである。点線および一点鎖線は、かく厚方向のせん断変形を考慮しない場合 (薄肉理論) の計算値で、負荷瞬間と定常状態の値を、荷重段階 P_0 についてのみ示している。

図から、荷重が大きくなるに従って、粘塑性ひずみの増加が顕著になっているのがわかる。また薄肉理論による解と、せん断変形の影響を考慮した本理論による解との間には、少し差が見られる。その差は中央部で大きい。実験値と計算値は、荷重が直接作用する円筒かく中央部を除いて、軸方向分布、時間的变化とも

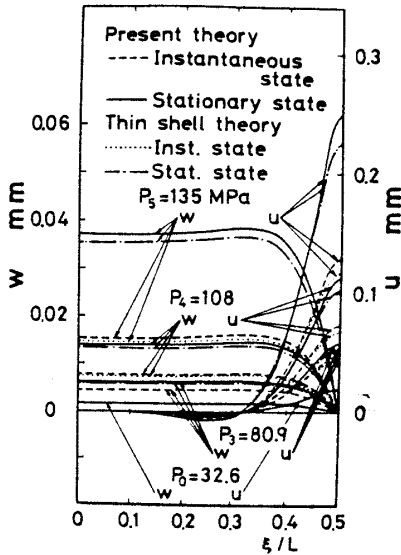


図 8 u, w の軸方向分布

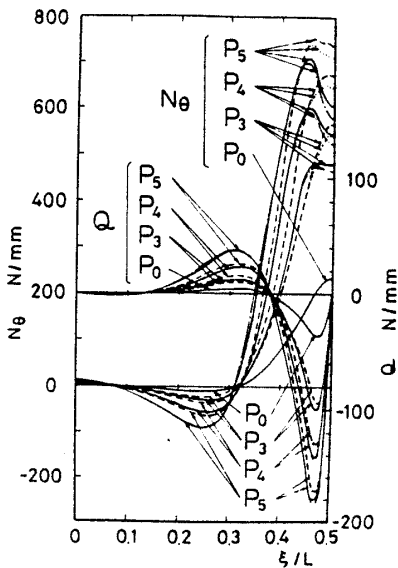


図 9 N_θ, Q の軸方向分布

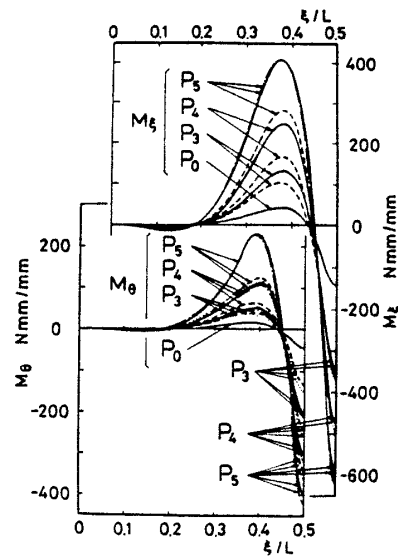


図 10 M_ξ, M_θ の軸方向分布

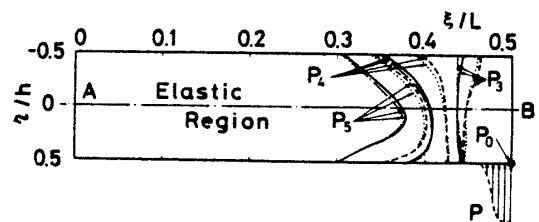


図 11 降伏領域の進展

によく一致しており、本解法の妥当性がうかがえる。

なお薄肉理論では、せん断ひずみ $\epsilon_{\theta z}$ の影響は無視しているが、 $\bar{\sigma}$ を計算する際、せん断応力 $\sigma_{\theta z}$ は考慮に入れている。

図8～図11に、計算による変位成分、内力成分の分布、ならびに降伏領域の進展の様子を示す。図には初期降伏荷重 P_0 、および $P_3 \sim P_5$ の各荷重段階における負荷時と定常時のものを、それぞれ破線と実線で示す。本解法と比較するため、せん断変形の影響を考慮しない薄肉理論による解も合わせ示す。

図8は、半径方向変位 u 、ならびに軸方向変位 w の分布である。荷重が大きくなり、変形が進むにつれて、せん断変形の影響が顕著になり、本理論による解が、せん断変形を無視した解に比べて、大きな値となる。また荷重が大きくなり、塑性領域が広がってくると、負荷瞬間の状態と定常状態の間に、次第に大きな差が現れる。

図9は、円周方向の面内力 N_θ およびせん断力 Q の分布を示す。円筒かく中央部付近で、両理論による解に、多少の差が見られる。また N_θ は、負荷瞬間から時間とともにかなり変動して、定常状態に至る。

図10は、軸方向および円周方向の曲げモーメント成分 M_x, M_θ の分布である。 $\xi/L=0.4$ 付近で、負荷時から定常状態に至るまでの時間的変化が顕著である。せん断変形の影響は、 M_x, M_θ とも円筒かく中央部で多少見られる。

図11に、降伏領域の進展の様子を示す。 $\bar{P}=P_0$ のとき、円筒かく中央部の内表面において、はじめて降伏する。 P_0 の値は、本理論では 32.6 MPa、せん断変形の影響を無視した薄肉理論では、33.8 MPa である。塑性領域は荷重 P とともに広がり、またその時間的変動も大きくなる。

以上図8～図11に見るように、荷重が大きくなると、解の時間的変動が顕著になり、また両理論による結果の差も大きくなる。

5. 結 言

本論文では、直交異方性材料から成る、軸対称荷重を受ける回転対称かくの、弾/粘塑性変形問題の解法を示した。弾/粘塑性の構成関係には、Hillの直交異方性塑性理論にならって、Perzynaの式を直交異方性の場合に拡張したものを用い、厚肉の場合に考慮すべきせん断変形には、Reissner-Naghdiの理論(ひずみ-変位関係)を採用した。導かれた基礎式の解法には、差分法を適用した。

またチタン円筒かくによる実験を行って、計算結果と比較検討したところ、かなりよい一致を見た。

なお本理論による結果と、せん断変形の影響を無視した薄肉理論による結果とを比較すると、荷重が大きくなり、変形が進むにつれて、その差が大きく現れることがわかった。また負荷時から定常時までの時間的変動も、荷重が大きいとき顕著になる。

計算には、九州大学大型計算機センターのFACOM M-382を使用した。本計算例の計算時間は、およそ36秒である。

文 献

- (1) Findlay, G. E., ほか2名, *J. Strain Analysis*, 6-3 (1971-7), 147.
- (2) 竹園・埜, 機論, 44-381 (昭53), 1478.
- (3) 竹園・ほか2名, 機論, 45-396, A (昭54), 908.
- (4) 竹園・埜, 機論, 46-402, A (昭55), 227.
- (5) Takezono, S., ほか2名, *Trans. ASME, J. Pressure Vessel Technol.*, 102-3 (1980), 257.
- (6) 竹園・埜, 機論, 47-421, A (昭56), 949.
- (7) 竹園・ほか2名, 機論, 47-423, A (昭56), 1165.
- (8) Perzyna, P., *Adv. Appl. Mech.*, 9 (1966), 243, Academic Press.
- (9) Naghdi, P. M., *Q. Appl. Math.*, 14-4 (1957), 369.
- (10) Reissner, E., *Progress in Applied Mechanics, The Prager Anniversary Volume*, (1963), 171.
- (11) Takezono, S., ほか2名, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 47-3 (1980), 741.
- (12) Zienkiewicz, O. C. and Corneau, I. C., *Int. J. Numerical Methods Eng.*, 8 (1974), 821.

討 論

〔質問〕 川嶋 紘一郎〔名古屋工業大学〕

以下の二点についてご教示願いたい。

(1) 緒言の最後に述べておられるように、本論文で扱われた問題の定常状態を対象とする限り、従来の塑性理論で十分であるとすると、粘性を考慮した解析が必要となるのはどのような問題とお考えか。

(2) 図3には軸方向の引張試験結果のみが示され

ているが、他の円周あるいは45°方向についてもひずみ速度の影響は同じか。またこれと関連して、静的異方降伏面と粘塑性ひずみに対する異方ポテンシャル面が相似であると考えてよいのか。

〔回答〕 (1) 定常状態を対象とする限り、従来の粘性の影響を考慮しない塑性理論で十分である。粘性を考慮した解析が必要になるのは、定常状態に至る

までの遷移状態の様子を知りたい場合である。拙論はこの遷移状態を対象としたものである。

(2) 式(15)によると、材料の塑性異方性パラメータがわかれば、各方向の粘塑性ひずみ速度は同一の粘性パラメータ γ および関数 $\Psi(f)$ によって決定されることになる。例えば ξ, θ 方向の単軸引張りの場合には、粘塑性ひずみ速度はそれぞれ次式のようになる。

$$\dot{\varepsilon}_i^{VP} = \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{G+H}{F+G+H}} \left\langle \Psi \left(\frac{\sigma_i - \sigma_i^*}{\sigma_i^*} \right) \right\rangle$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta^{VP} = \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{F+H}{F+G+H}} \left\langle \Psi \left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_\theta^*}{\sigma_\theta^*} \right) \right\rangle$$

本研究では、実験用円筒かくを直交異方性とみなし、軸方向、円周方向および 45° 方向の引張試験片から静的引張試験によって塑性異方性パラメータを求め、これをもとに各ひずみ速度に対する実験結果を考慮して粘性パラメータ γ および Ψ の関数形を式(27)のように決定した。式(27)の各定数値を用いて、 $\sigma_\theta - \varepsilon_\theta$ の関係、および本文には紙面の都合で示さなかったが、 $\sigma_\theta - \varepsilon_\theta, \sigma_{45^\circ} - \varepsilon_{45^\circ}$ (45° 方向)の関係を求めて実験結果と比較し、いずれの方向に対しても、実験したひずみ速度の範囲で実験結果がほぼ近似できていることを確認した。なお他の材料に対しても、このような方法が妥当であるか否かについては、検討の余地があるものとする。

〔質問〕 村瀬勝彦〔名城大学理工学部〕

(1) 本論で取扱っている程度の異方性の場合、それらを平均的に扱った等方性理論との差は大きいのか。また、粘塑性域における異方性効果について一定の判断を示すことはできないか。

(2) 本論はひずみ速度が小さい場合を対象とされており、図5の増分荷重もその点を考慮していると思われる。より大きな増分荷重に適用は可能か。また、本論のひずみ速度に対する限界はどの程度か。

(3) 式(27)の異方性パラメータの数値の決定法を具体的にお示し願いたい。

〔回答〕 (1) 本理論では異方性の程度について、特に制限を設けていない。ご質問は実験例に関するものと思われるが、平均的な等方性として解析していないので、比較できない。ただし、著者の一人が直交異方性回転対称かくのクリープ変形問題に関して、異方性パラメータの値を種々変えて計算しているので(付1)、なんらかの参考になるかと思う。またご質問の後半はどの程度の異方性まで平均等方性として処理していいかという質問かと思うが、これに関しては、かくの形状、荷重条件、境界条件さらに実際の使用の際には設計条件などによっても異なるので、材料の異方性のみから一定の判断基準を示すことは非常に困難であるとする。

(2) 式(27)の材料定数の値は、実験に用いた円筒かくに現れるひずみ速度との関連から、 $\dot{\varepsilon} = 0.05 \sim 300 \mu/s$ の引張試験によって決定したが、式(27)の材料定数の値をもっと広範囲のひずみ速度の試験から求めれば、本理論はより広範囲のひずみ速度の問題に適用可能である。本理論のひずみ速度に対する適用限界はとくにないが、実際問題として、荷重に大きな時間的な変化がある場合には、慣性項を考慮した動的問題として解析しなければならない。

(3) 円筒の軸方向、円周方向および 45° 方向から採取した単軸試験片(図2)に、試験片の引張軸方向と直角方向にひずみゲージ(ゲージ長2mm)を貼付し、静的引張試験($\dot{\varepsilon} = 0.05 \mu/s$)によって、引張軸方向のひずみ増分 $d\varepsilon_i^p$ と幅方向のひずみ増分 $d\varepsilon_\theta^p$ を求めると、幅方向と厚さ方向のひずみ増分の比 $r (= d\varepsilon_\theta^p / d\varepsilon_i^p)$ は、それぞれ、

$$r_{0^\circ} = \frac{H}{G}, \quad r_{90^\circ} = \frac{H}{F}, \quad r_{45^\circ} = \frac{2N - F - G}{2(F + G)}$$

F を基準とするこの形で表すと、

$$\frac{H}{F} = r_{90^\circ}, \quad \frac{G}{F} = \frac{r_{90^\circ}}{r_{0^\circ}}, \quad \frac{N}{F} = \left(r_{45^\circ} + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{r_{90^\circ}}{r_{0^\circ}} \right)$$

(付1) Takezono, S. and Hirakawa, H., *Trans. 7th Int. Conf. Structural Mechanics in Reactor Technology*, Vol. L (1983), 453.