

非対称荷重を受ける多層厚肉回転対称殻のクリープ変形*

竹園茂男**, 右田康治***

The Creep of Multi-Layered Moderately Thick Shells of Revolution
under Asymmetrical Loading

Shigeo TAKEZONO and Kohji MIGITA

The paper describes an analytical formulation and a numerical solution of the creep problems of multi-layered moderately thick shells of revolution under asymmetrical loads with application to a cylindrical shell. The equilibrium equations and the strain-displacement relations are derived from the Reissner-Naghdi theory in elastic shells with given consideration to the effect of shear deformation. It is assumed that the total strain rates are composed of an elastic part and a part due to creep. The elastic strains are proportional to the stresses by Hooke's law. For the constitutive equations in the creep range, McVetty's equation is employed. As a numerical example, the creep of a two-layered cylindrical shell composed of mild steel and stainless steel subjected to locally distributed loads is analyzed. Numerical computations have been carried out for three cases of the ratio of the thickness of the stainless steel layer to the shell thickness. It is found from the computations that the stress distributions and the deformation are significantly varied depending on the ratio.

Key Words: Structural Analysis, Multi-Layered Thick Shells, Creep Deformation, Asymmetrical Loads, Shear Deformation, FDM

1. 緒言

軸対称殻のクリープ変形問題に関しては、従来から、球殻、円すい殻および円筒殻などの特定の殻のクリープ変形ばかりでなく、一般の任意形状の軸対称殻の解法を述べたものも多数報告されている⁽¹⁾⁻⁽⁷⁾。また薄肉の殻ばかりでなく、比較的厚い殻についても二、三の研究がなされている⁽⁸⁾⁽⁹⁾。しかしながら、これらの研究は、単一材質から成るものを対象としており、近年広く実用されている異種材質から成る殻のクリープに関する研究は、まだあまり行われていないようである。

そこで、著者らはこの研究に着手し、すでに薄肉の多層回転殻に非対称荷重が作用する場合について解析を行ってきたが⁽¹⁰⁾、本研究では、中程度の厚さの多層軸対称殻に一般の非対称な荷重が作用する場合のクリープ変形問題を取扱った。クリープの構成関係には、温度効果をアレニウスの式で表した McVetty の式を用い⁽¹¹⁾、厚肉の場合に考慮すべきせん断変形には、Reissner-Naghdi の理論⁽¹²⁾⁽¹³⁾を適用して基礎式を導

き、これを差分法によって数値解析した。

数値例として、実用上重要な2層構造の円筒殻に、局所的分布荷重が作用する問題を取り上げ、変形および内力の時間的変化の様子を解析した。

2. 解法

2.1 基礎式 図1に示すように、対称軸から殻の中央面上の任意点Pまでの距離を r とし、殻の中央面の形を $r=r(s)$ で与えると、中央面の点Pにおける無次元曲率 $\omega_s(=a/R_s)$ 、 $\omega_0(=a/R_0)$ および無次元半径 $\rho(=r/a)$ の間にはつぎの関係が成立する。ただし、 s は殻の中央面において子午線に沿って測った長さであり、 a は代表長さである。

$$\left. \begin{aligned} \omega_s &= (\gamma' + \gamma^2)/\omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{1 - (\rho')^2}/\rho \\ \omega_0' &= \gamma(\omega_s - \omega_0), \quad \rho''/\rho = -\omega_s\omega_0 \\ \gamma &= \rho'/\rho, \quad \xi = s/a, \quad (\quad)' = d(\quad)/d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

また、殻の任意点Qを表すのに、直交座標 (ξ, θ, ζ) を用いる。ここに、 θ は円周方向の角であり、 ζ は中央面から外向きに測った長さである。

さて Reissner の殻理論⁽¹²⁾による平衡方程式を軸対称殻に適用し、時間または時間とともに単調に変化する量について微分すると、つぎのようになる。

* 昭和61年10月7日 第64期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和61年4月21日。

** 正員、豊橋技術科学大学 (〒440 豊橋市天伯町字雲雀ヶ丘1-1)。

*** 学生員、熊本大学大学院 (〒860 熊本市黒髪2-39-1)。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{N}_\xi}{\partial \xi} + \gamma(N_\xi - \dot{N}_\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{N}_{\theta\xi}}{\partial \theta} + \omega_\xi \dot{Q}_\xi + a\dot{P}_\xi &= 0 \\ \frac{\partial \dot{N}_{\xi\theta}}{\partial \xi} + \gamma(N_{\xi\theta} + \dot{N}_{\theta\xi}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{N}_\theta}{\partial \theta} + \omega_\theta \dot{Q}_\theta + a\dot{P}_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \dot{Q}_\xi}{\partial \xi} + \gamma \dot{Q}_\xi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{Q}_\theta}{\partial \theta} - (\omega_\xi \dot{N}_\xi + \omega_\theta \dot{N}_\theta) + a\dot{P}_\xi &= 0 \\ \dot{Q}_\xi - \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \dot{M}_\xi}{\partial \xi} + \gamma(\dot{M}_\xi - \dot{M}_\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{M}_{\theta\xi}}{\partial \theta} \right] &= 0 \\ \dot{Q}_\theta - \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \dot{M}_{\theta\xi}}{\partial \xi} + \gamma(\dot{M}_{\theta\xi} + \dot{M}_{\theta\xi}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{M}_\theta}{\partial \theta} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $N_\xi, N_\theta, N_{\xi\theta}, N_{\theta\xi}, Q_\xi, Q_\theta$ および $M_\xi, M_\theta, M_{\xi\theta}, M_{\theta\xi}$ は図2に示すように殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントであり、 P_ξ, P_θ, P_ξ は殻の単位面積当たりの分布荷重の ξ, θ, ζ 方向成分である。

つぎに中央面のひずみ $\epsilon_{\xi m}, \epsilon_{\theta m}$ および $\epsilon_{\xi\theta m}$ を ξ, θ, ζ 方向の変位 U_ξ, U_θ, U_ζ で表すと、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\xi m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \omega_\xi U_\zeta \right] \\ \epsilon_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \gamma U_\xi + \omega_\theta U_\zeta \right] \\ \epsilon_{\xi\theta m} &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\xi}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial \xi} - \gamma U_\theta \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $\epsilon_{\xi\theta m}$ は工学上のせん断ひずみの 1/2 である。

また、曲率の変化量 $\kappa_\xi, \kappa_\theta, \kappa_{\xi\theta}, \kappa_{\theta\xi}$ と変位成分との関係はつぎのようになる。

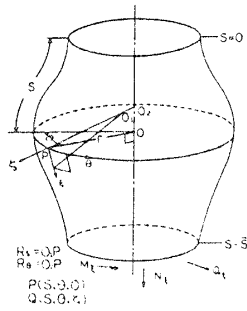
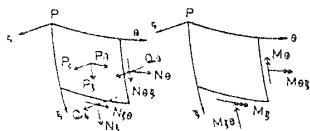
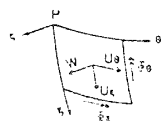


図1 殻の形状と座標



(a) 合応力 (b) 合モーメント



(c) 変位と回転

図2 内力と変位

$$\left. \begin{aligned} \dot{\kappa}_\xi &= \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{\Phi}_\xi}{\partial \xi}, \dot{\kappa}_\theta = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{\Phi}_\theta}{\partial \theta} + \gamma \dot{\Phi}_\xi \right) \\ \dot{\kappa}_{\xi\theta} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{\partial \dot{\Phi}_\theta}{\partial \xi} - 2\omega_\xi \dot{\Phi}_\theta \right), \\ \dot{\kappa}_{\theta\xi} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{\Phi}_\xi}{\partial \theta} - \gamma \dot{\Phi}_\theta + 2\omega_\theta \dot{\Phi}_\xi \right) \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

ここに、 $\Phi_\xi, \Phi_\theta, \Phi_n$ は中央面の回転を示し、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}_\xi &= \frac{1}{a} \left(-\frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \xi} + \omega_\xi \dot{U}_\xi \right) + 2\dot{\epsilon}_{\xi\zeta m} \\ \dot{\Phi}_\theta &= \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \theta} + \omega_\theta \dot{U}_\theta \right) + 2\dot{\epsilon}_{\theta\zeta m} \\ \dot{\Phi}_n &= \frac{1}{2a} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \xi} + \gamma \dot{U}_\theta \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

殻厚中央面から ζ の距離にある点 Q のひずみ成分は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_\xi &= (\dot{\epsilon}_{\xi m} + \zeta \dot{\kappa}_\xi) / L_\xi, \dot{\epsilon}_\theta = (\dot{\epsilon}_{\theta m} + \zeta \dot{\kappa}_\theta) / L_\theta \\ \dot{\epsilon}_{\xi\theta} &= \left\{ \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{\xi\theta m} + \dot{\Phi}_n) + \zeta (\dot{\kappa}_{\xi\theta} + \dot{\Phi}_n / R_\xi) \right\} / L_\xi \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{\xi\theta m} - \dot{\Phi}_n) + \zeta (\dot{\kappa}_{\theta\xi} - \dot{\Phi}_n / R_\theta) \right\} / L_\theta \\ \dot{\epsilon}_{\xi\zeta} &= \dot{\epsilon}_{\xi\zeta m} / L_\xi, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta} = \dot{\epsilon}_{\theta\zeta m} / L_\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 $L_\xi = 1 + \zeta / R_\xi, L_\theta = 1 + \zeta / R_\theta$

本研究では、与えられた時間増分に対する全ひずみ増分が、弾性ひずみ増分とクリープひずみ増分の和から成るものとする。弾性ひずみ速度は、フックの法則によるものとする、全ひずみ速度は次式で表される。

$$\{\dot{\epsilon}\} = [D]^{-1} \{\dot{\sigma}\} + \{\dot{\epsilon}^T\} + \{\dot{\epsilon}^c\} \dots\dots\dots (7)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{\epsilon}\} &= \{\dot{\epsilon}_\xi, \dot{\epsilon}_\theta, \dot{\epsilon}_{\xi\theta}, \dot{\epsilon}_{\xi\zeta}, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta}\}^T \\ \{\dot{\sigma}\} &= \{\dot{\sigma}_\xi, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_{\xi\theta}, \dot{\sigma}_{\xi\zeta}, \dot{\sigma}_{\theta\zeta}\}^T \\ \{\dot{\epsilon}^T\} &= \{\alpha \dot{T}_\xi, \alpha \dot{T}_\theta, 0, 0, 0\}^T \\ \{\dot{\epsilon}^c\} &= \{\dot{\epsilon}_\xi^c, \dot{\epsilon}_\theta^c, \dot{\epsilon}_{\xi\theta}^c, \dot{\epsilon}_{\xi\zeta}^c, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta}^c\}^T \\ [D] &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 E, ν, α は縦弾性係数、ポアソン比、線膨張係数である。また T_0 は基準温度 T_0 からの温度変化で、殻の任意点の温度を T とすると次式となる。

$$T_\xi(\xi, \theta, \zeta, t) = T(\xi, \theta, \zeta, t) - T_0 \dots\dots\dots (9)$$

さて、一定の単軸応力下におけるクリープひずみが、応力と時間に関しては McVetty の式に、また温度依存性についてはアレニウスの式によるものとする、

$$\dot{\epsilon}^c = A e^{-B/T} \sigma^m (1 - e^{-qt} + ct) \dots\dots\dots (10)$$

式(10)に、ミーゼス・ミーゼス形のクリープ理論を用いると、時間硬化則に基づく各ひずみ速度成分はつぎのようになる。

$$\{\dot{\epsilon}^c\} = A e^{-\beta/T} \sigma_e^{m-1} (q e^{-q\epsilon} + c) [B] \{\sigma\} \dots \dots (11)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \dots \dots (12)$$

ここに、 A, m, q, c, β は材料の特性値、 T は絶対温度である。 σ_e は相当応力で次式で表される。

$$\sigma_e = (\sigma_\xi^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_\xi \sigma_\theta + 3\sigma_{\xi\theta}^2 + 3\sigma_{\xi\zeta}^2 + 3\sigma_{\theta\zeta}^2)^{1/2} \dots (13)$$

式(7)に式(6)を代入し、応力について解くと、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_\xi &= \frac{E}{1-\nu^2} \{ (\dot{\epsilon}_{\xi m} + \zeta \dot{\kappa}_\xi) / L_\xi + \nu (\dot{\epsilon}_{\theta m} + \zeta \dot{\kappa}_\theta) / L_\theta \} \\ &\quad - \dot{\sigma}_\xi^c - \dot{\sigma}^T \\ \dot{\sigma}_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \{ (\dot{\epsilon}_{\theta m} + \zeta \dot{\kappa}_\theta) / L_\theta + \nu (\dot{\epsilon}_{\xi m} + \zeta \dot{\kappa}_\xi) / L_\xi \} \\ &\quad - \dot{\sigma}_\theta^c - \dot{\sigma}^T \\ \dot{\sigma}_{\xi\theta} &= \frac{E}{1+\nu} \left[\left\{ \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{\xi\theta m} + \dot{\Phi}_n) + \zeta (\dot{\kappa}_{\xi\theta} + \frac{\dot{\Phi}_n}{R_s}) \right\} / L_\xi \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{\xi\theta m} - \dot{\Phi}_n) + \zeta (\dot{\kappa}_{\theta\xi} - \frac{\dot{\Phi}_n}{R_\theta}) \right\} / L_\theta \right] - \dot{\sigma}_{\xi\theta}^c \\ \dot{\sigma}_{\xi\zeta} &= \frac{E}{1+\nu} \dot{\epsilon}_{\xi\zeta m} / L_\xi - \dot{\sigma}_{\xi\zeta}^c \\ \dot{\sigma}_{\theta\zeta} &= \frac{E}{1+\nu} \dot{\epsilon}_{\theta\zeta m} / L_\theta - \dot{\sigma}_{\theta\zeta}^c \end{aligned} \right\} \dots \dots (14)$$

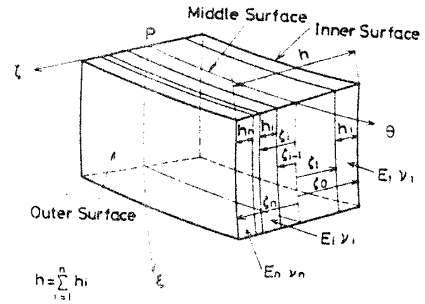


図 3 多層シェル要素

ここに、

$$\{\dot{\sigma}^c\} = [D] \{\dot{\epsilon}^c\}, \{\dot{\sigma}^T\} = [D] \{\dot{\epsilon}^T\} \dots \dots (15)$$

殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントは、式(14)を用い、かつ近似

$$\frac{L_\theta}{L_\xi} \approx 1 - \left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \zeta + \frac{1}{R_s} \left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \zeta^2 \dots \dots (16)$$

を用いると(図3)、

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{N} \\ \dot{M} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} [L] \begin{Bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\sigma}^* \zeta \end{Bmatrix} d\zeta \\ &= [A] \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_m \\ \dot{\kappa} \\ \dot{\Phi}_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{N}^c \\ \dot{M}^c \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{N}^T \\ \dot{M}^T \end{Bmatrix} \dots \dots (17) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \{\dot{N}\} &= \{\dot{N}_\xi, \dot{N}_\theta, \dot{N}_{\xi\theta}, \dot{N}_{\theta\xi}, \dot{Q}_\xi, \dot{Q}_\theta\}^T \\ \{\dot{M}\} &= \{\dot{M}_\xi, \dot{M}_\theta, \dot{M}_{\xi\theta}, \dot{M}_{\theta\xi}\}^T \\ [L] &= \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix}, [L_1] = \begin{bmatrix} L_\theta & & & \\ & L_\xi & 0 & \\ & & L_\theta & \\ & & & L_\xi \end{bmatrix}, [L_2] = \begin{bmatrix} L_\theta & 0 \\ & L_\xi \\ & & L_\theta \\ 0 & & & L_\xi \end{bmatrix} \\ \{\dot{\epsilon}_m\} &= \{\dot{\epsilon}_{\xi m}, \dot{\epsilon}_{\theta m}, \dot{\epsilon}_{\xi\theta m}, \dot{\epsilon}_{\theta\xi m}, \dot{\epsilon}_{\xi\zeta m}, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta m}\}, \{\dot{\kappa}\} = \{\dot{\kappa}_\xi, \dot{\kappa}_\theta, \dot{\kappa}_{\xi\theta}, \dot{\kappa}_{\theta\xi}\} \\ \{\dot{N}^c\} &= \{\dot{N}_\xi^c, \dot{N}_\theta^c, \dot{N}_{\xi\theta}^c, \dot{N}_{\theta\xi}^c, \dot{Q}_\xi^c, \dot{Q}_\theta^c\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} [L_1] \{\dot{\sigma}^c\} d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_1] [D_i] \{\dot{\epsilon}^c\} d\zeta \\ \{\dot{M}^c\} &= \{\dot{M}_\xi^c, \dot{M}_\theta^c, \dot{M}_{\xi\theta}^c, \dot{M}_{\theta\xi}^c\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} [L_2] \{\dot{\sigma}^c\}^* \zeta d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_2] [\bar{D}_i] \{\dot{\epsilon}^c\}^* \zeta d\zeta \\ \{\dot{N}^T\} &= \{\dot{N}_\xi^T, \dot{N}_\theta^T, \dot{N}_{\xi\theta}^T, \dot{N}_{\theta\xi}^T, \dot{Q}_\xi^T, \dot{Q}_\theta^T\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} [L_1] \{\dot{\sigma}^T\} d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_1] [D_i] \{\dot{\epsilon}^T\} d\zeta \\ \{\dot{M}^T\} &= \{\dot{M}_\xi^T, \dot{M}_\theta^T, \dot{M}_{\xi\theta}^T, \dot{M}_{\theta\xi}^T\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} [L_2] \{\dot{\sigma}^T\}^* \zeta d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_2] [\bar{D}_i] \{\dot{\epsilon}^T\}^* \zeta d\zeta \end{aligned} \dots \dots (18)$$

$$[\bar{D}_i] = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu_i \end{bmatrix} \quad \left((a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)^T \right)^* = (a_1, a_2, a_3)^T$$

$$[A] = \sum_{i=1}^n [E_i][A_i] \dots\dots\dots (19)$$

$$[E_i] = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} [1, 1, 1-\nu_i, 1-\nu_i, 1-\nu_i, 1-\nu_i, 1, 1, 1-\nu_i, 1-\nu_i] : (\text{対角行列}) \dots\dots\dots (20)$$

$$[A_i] = \begin{bmatrix} \zeta_{1,i}^* & \nu_i \zeta_{1,i} & 0 & 0 & 0 & \zeta_{2,i}^* & \nu_i \zeta_{2,i} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_i \zeta_{1,i} & \zeta_{1,i}^{**} & 0 & 0 & 0 & \nu_i \zeta_{2,i} & \zeta_{2,i}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\zeta_{1,i}^* + \zeta_{1,i}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{2,i}^* & \zeta_{2,i} & (a) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\zeta_{1,i}^{**} + \zeta_{1,i}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{2,i} & \zeta_{2,i}^{**} & (b) \\ 0 & 0 & 0 & c_i \zeta_{1,i}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_i \zeta_{1,i}^{**} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_{2,i}^* & \nu_i \zeta_{2,i} & 0 & 0 & 0 & \zeta_{3,i}^* & \nu_i \zeta_{3,i} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_i \zeta_{2,i} & \zeta_{2,i}^{**} & 0 & 0 & 0 & \nu_i \zeta_{3,i} & \zeta_{3,i}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\zeta_{2,i}^* + \zeta_{2,i}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{3,i}^* & \zeta_{3,i} & (c) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\zeta_{2,i}^{**} + \zeta_{2,i}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{3,i} & \zeta_{3,i}^{**} & (d) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

$$(a) = \frac{1}{2}(\zeta_{1,i}^* - \zeta_{1,i}) + \frac{\omega_\varepsilon}{a}\zeta_{2,i}^* - \frac{\omega_\theta}{a}\zeta_{2,i}, \quad (b) = \frac{1}{2}(\zeta_{1,i} - \zeta_{1,i}^{**}) + \frac{\omega_\varepsilon}{a}\zeta_{2,i} - \frac{\omega_\theta}{a}\zeta_{2,i}^{**}$$

$$(c) = \frac{1}{2}(\zeta_{2,i}^* - \zeta_{2,i}) + \frac{\omega_\varepsilon}{a}\zeta_{3,i}^* - \frac{\omega_\theta}{a}\zeta_{3,i}, \quad (d) = \frac{1}{2}(\zeta_{2,i} - \zeta_{2,i}^{**}) + \frac{\omega_\varepsilon}{a}\zeta_{3,i} - \frac{\omega_\theta}{a}\zeta_{3,i}^{**}$$

$$\zeta_{n,i} = \frac{1}{n}(\zeta_i^n - \zeta_{i-1}^n) \quad (n=1, 2, \dots, 5)$$

$$\zeta_{n,i}^* = \zeta_{n,i} - \frac{1}{a}(\omega_\varepsilon - \omega_\theta)\zeta_{n+1,i} + \frac{\omega_\varepsilon}{a^2}(\omega_\varepsilon - \omega_\theta)\zeta_{n+2,i}, \quad \zeta_{n,i}^{**} = \zeta_{n,i} - \frac{1}{a}(\omega_\theta - \omega_\varepsilon)\zeta_{n+1,i} + \frac{\omega_\theta}{a^2}(\omega_\theta - \omega_\varepsilon)\zeta_{n+2,i} \quad (n=1, 2, 3) \dots\dots\dots (22)$$

c_i, \bar{c}_i はせん断剛性に関する修正係数であり、次式となる。

$$c_i = \left(\frac{\sum_{j=1}^n G_j d_j}{\sum_{j=1}^n G_j e_j f_j / h_j} \right)^2 \frac{e_i}{h_i}, \quad d_i = \frac{h^2}{4}\zeta_{1,i} + \frac{h^2}{4a}(\omega_\varepsilon - \omega_\theta)\zeta_{2,i} + \left\{ \frac{h^4 \omega_\varepsilon}{4a^2}(\omega_\varepsilon - \omega_\theta) - 1 \right\} \times \zeta_{3,i} + \frac{1}{a}(\omega_\varepsilon - \omega_\theta) \left(\zeta_{4,i} - \frac{\omega_\varepsilon}{a}\zeta_{5,i} \right)$$

$$e_i = \frac{h^2}{16}\zeta_{1,i} + \frac{h^4}{16a}(\omega_\theta - 2\omega_\varepsilon)\zeta_{2,i} - \frac{h^2}{2} \left\{ \frac{h^2}{8a^2}\omega_\varepsilon(2\omega_\theta - 3\omega_\varepsilon) + 1 \right\} \zeta_{3,i} - \frac{h^2}{2a}(\omega_\theta - 2\omega_\varepsilon)\zeta_{4,i}$$

$$+ \left\{ \frac{h^2}{2a^2}\omega_\varepsilon(2\omega_\theta - 3\omega_\varepsilon) + 1 \right\} \zeta_{5,i} + \frac{1}{a}(\omega_\theta - 2\omega_\varepsilon)\zeta_{6,i} - \frac{\omega_\varepsilon}{a}(2\omega_\theta - 3\omega_\varepsilon)\zeta_{7,i}$$

$$f_i = \zeta_{1,i} - \frac{1}{a}(\omega_\varepsilon - \omega_\theta)\zeta_{2,i} + \frac{\omega_\varepsilon}{a^2}(\omega_\varepsilon - \omega_\theta)\zeta_{3,i}, \quad h_i = \zeta_{1,i} + \frac{1}{a}(\omega_\theta - 2\omega_\varepsilon)\zeta_{2,i} - \frac{\omega_\varepsilon}{a^2}(2\omega_\theta - 3\omega_\varepsilon)\zeta_{3,i} \dots\dots\dots (23)$$

\bar{c}_i は、上式で ω_ε と ω_θ を互いに置き換えることによって得られる。

以上で 55 個の独立変数 $\dot{N}_\varepsilon, \dot{N}_\theta, \dot{N}_{\varepsilon\theta}, \dot{N}_{\theta\varepsilon}, \dot{M}_\varepsilon, \dot{M}_\theta, \dot{M}_{\varepsilon\theta}, \dot{M}_{\theta\varepsilon}, \dot{Q}_\varepsilon, \dot{Q}_\theta, \dot{N}_\varepsilon^c, \dot{N}_\theta^c, \dot{N}_{\varepsilon\theta}^c, \dot{N}_{\theta\varepsilon}^c, \dot{M}_\varepsilon^c, \dot{M}_\theta^c, \dot{M}_{\varepsilon\theta}^c, \dot{M}_{\theta\varepsilon}^c, \dot{Q}_\varepsilon^c, \dot{Q}_\theta^c, \dot{N}_\varepsilon^T, \dot{N}_\theta^T, \dot{M}_\varepsilon^T, \dot{M}_\theta^T, \dot{\sigma}_\varepsilon, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_{\varepsilon\theta}, \dot{\sigma}_{\theta\varepsilon}, \dot{\sigma}_{\varepsilon\varepsilon}^c, \dot{\sigma}_{\theta\theta}^c, \dot{\sigma}_{\varepsilon\theta}^c, \dot{\sigma}_{\theta\varepsilon}^c, \dot{\sigma}_{\varepsilon\varepsilon}^T, \dot{\sigma}_{\theta\theta}^T, \dot{\sigma}_{\varepsilon\varepsilon}^T, \dot{\sigma}_{\theta\theta}^T, \dot{\varepsilon}_\varepsilon^c, \dot{\varepsilon}_\theta^c, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta}^c, \dot{\varepsilon}_{\theta\varepsilon}^c, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\varepsilon}^T, \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^T, \dot{U}_\varepsilon, \dot{U}_\theta, \dot{U}_\varepsilon, \dot{\Phi}_\varepsilon, \dot{\Phi}_\theta, \dot{\Phi}_n, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon m}, \dot{\varepsilon}_{\theta m}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta m}, \dot{\varepsilon}_{\theta\varepsilon m}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\varepsilon m}, \dot{\varepsilon}_{\theta\theta m}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta m}, \dot{\varepsilon}_{\theta\varepsilon m}$ に対して、式(2), (3)~(5), (11), (14), (17), (18)の55個の式が得られたことになる。なお、式(18)~(23)で $n=1$ とおくと、単層の場合に帰着する⁽⁹⁾。

2.2 無次元方程式 一般に非対称問題を解析するには、各変数を θ 方向にフーリエ級数で表し、その係数を定めればよい。そこで上に示した 55 個の変数のうち、クリープひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_\varepsilon, \dot{\varepsilon}_\theta, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta}, \dot{\varepsilon}_{\theta\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\varepsilon}^c$ を除く 50 個の変数

をつぎのようにフーリエ級数で表す。

$$\begin{aligned}
 \{\dot{N}_\varepsilon, \dot{N}_\xi, \dot{N}_\tau, \dot{N}_\theta, \dot{N}_\delta, \dot{N}_\tau, \dot{Q}_\varepsilon, \dot{Q}_\xi\} &= \sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{n}_\varepsilon^{(n)}, \dot{n}_\xi^{(n)}, \dot{n}_\tau^{(n)}, \dot{n}_\theta^{(n)}, \dot{n}_\delta^{(n)}, \dot{n}_\tau^{(n)}, \dot{q}_\varepsilon^{(n)}, \dot{q}_\xi^{(n)}\} \cos n\theta \\
 \{\dot{N}_{\varepsilon\theta}, \dot{N}_{\xi\theta}, \dot{N}_{\theta\varepsilon}, \dot{N}_{\theta\xi}, \dot{Q}_\theta, \dot{Q}_\delta\} &= \sigma_0 h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{\dot{n}_{\varepsilon\theta}^{(n)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{n}_{\theta\varepsilon}^{(n)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{(n)}, \dot{q}_\theta^{(n)}, \dot{q}_\delta^{(n)}\} \sin n\theta \\
 \{\dot{M}_\varepsilon, \dot{M}_\xi, \dot{M}_\tau, \dot{M}_\theta, \dot{M}_\delta, \dot{M}_\tau\} &= \frac{\sigma_0 h_0^3}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{m}_\varepsilon^{(n)}, \dot{m}_\xi^{(n)}, \dot{m}_\tau^{(n)}, \dot{m}_\theta^{(n)}, \dot{m}_\delta^{(n)}, \dot{m}_\tau^{(n)}\} \cos n\theta \\
 \{\dot{M}_{\varepsilon\theta}, \dot{M}_{\xi\theta}, \dot{M}_{\theta\varepsilon}, \dot{M}_{\theta\xi}\} &= \frac{\sigma_0 h_0^3}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \{\dot{m}_{\varepsilon\theta}^{(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{m}_{\theta\varepsilon}^{(n)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{(n)}\} \sin n\theta \\
 \{\dot{U}_\varepsilon, \dot{U}_\xi, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon m}, \dot{\varepsilon}_{\theta m}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\tau m}, \dot{\varepsilon}_{\theta\tau m}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\tau}, \dot{\varepsilon}_{\theta\tau}, \dot{\Phi}_\varepsilon\} &= \frac{\sigma_0}{E_0} \sum_{n=0}^{\infty} \{a\dot{u}_\varepsilon^{(n)}, a\dot{u}_\xi^{(n)}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon m}^{(n)}, \dot{\varepsilon}_{\theta m}^{(n)}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\tau}^{(n)}, \dot{\varepsilon}_{\theta\tau}^{(n)}, \frac{\dot{k}_\varepsilon^{(n)}}{a}, \frac{\dot{k}_\theta^{(n)}}{a}, \dot{\phi}_\varepsilon^{(n)}\} \cos n\theta \\
 \{\dot{U}_\theta, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta m}, \dot{\varepsilon}_{\theta\varepsilon m}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta}, \dot{\varepsilon}_{\theta\xi}, \dot{\Phi}_\theta, \dot{\Phi}_\tau\} &= \frac{\sigma_0}{E_0} \sum_{n=1}^{\infty} \{a\dot{u}_\theta^{(n)}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta m}^{(n)}, \dot{\varepsilon}_{\theta\varepsilon m}^{(n)}, \frac{\dot{k}_{\varepsilon\theta}^{(n)}}{a}, \frac{\dot{k}_{\theta\xi}^{(n)}}{a}, \dot{\phi}_\theta^{(n)}, \dot{\phi}_\tau^{(n)}\} \sin n\theta \\
 \{\dot{\sigma}_\varepsilon, \dot{\sigma}_\xi, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_\delta, \dot{\sigma}_{\varepsilon\varepsilon}, \dot{\sigma}_{\varepsilon\xi}, \dot{\sigma}^T\} &= \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{s}_\varepsilon^{(n)}, \dot{s}_\xi^{(n)}, \dot{s}_\theta^{(n)}, \dot{s}_\delta^{(n)}, \dot{s}_{\varepsilon\varepsilon}^{(n)}, \dot{s}_{\varepsilon\xi}^{(n)}, \dot{s}^T\} \cos n\theta \\
 \{\dot{\sigma}_{\varepsilon\theta}, \dot{\sigma}_{\xi\theta}, \dot{\sigma}_{\theta\varepsilon}, \dot{\sigma}_{\theta\xi}\} &= \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{\dot{s}_{\varepsilon\theta}^{(n)}, \dot{s}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{s}_{\theta\varepsilon}^{(n)}, \dot{s}_{\theta\xi}^{(n)}\} \sin n\theta
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

また、分布荷重と温度変化もフーリエ級数に展開する。

$$\{\dot{P}_\varepsilon, \dot{P}_\xi\} = \frac{\sigma_0 h_0}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{p}_\varepsilon^{(n)}, \dot{p}_\xi^{(n)}\} \cos n\theta, \dot{P}_\theta = \frac{\sigma_0 h_0}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{p}_\theta^{(n)} \sin n\theta, \dot{T}_e = \frac{\sigma_0}{E_0 \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{t}_e^{(n)} \cos n\theta \tag{25}$$

ただし、 σ_0 は代表応力である。なお式(24)、(25)は、 $\theta=0^\circ$ の子午線面に対して面対称な荷重が作用する場合であるが、より一般性を持たせるには、各フーリエ展開式において \sin で表されているものには \cos の級数を、 \cos で表されているものには \sin の級数を付加する。

さて、これらのフーリエ展開式を前述の基礎式に代入し、フーリエ係数に関する対応する式をつくり、これらの式から、順次未知数を消去すると、最後に平衡方程式は変位 $\dot{u}_\varepsilon, \dot{u}_\theta, \dot{u}_\tau$ および回転 $\dot{\phi}_\varepsilon, \dot{\phi}_\theta$ に関するつぎの5元連立二階微分方程式になる。なお、フーリエ級数の添字 (n) は便宜上省略する。

$$\begin{aligned}
 a_1 \dot{u}_\varepsilon'' + a_2 \dot{u}_\xi'' + a_3 \dot{u}_\theta'' + a_4 \dot{u}_\varepsilon' + a_5 \dot{u}_\theta' + a_6 \dot{u}_\tau' + a_7 \dot{u}_\tau + a_8 \dot{\phi}_\varepsilon'' + a_9 \dot{\phi}_\xi'' + a_{10} \dot{\phi}_\theta'' + a_{11} \dot{\phi}_\theta' + a_{12} \dot{\phi}_\theta &= C_1 \\
 a_{13} \dot{u}_\varepsilon'' + a_{14} \dot{u}_\xi'' + a_{15} \dot{u}_\theta'' + a_{16} \dot{u}_\theta' + a_{17} \dot{u}_\tau' + a_{18} \dot{u}_\tau + a_{19} \dot{\phi}_\varepsilon'' + a_{20} \dot{\phi}_\xi'' + a_{21} \dot{\phi}_\theta'' + a_{22} \dot{\phi}_\theta' + a_{23} \dot{\phi}_\theta &= C_2 \\
 a_{24} \dot{u}_\varepsilon'' + a_{25} \dot{u}_\xi'' + a_{26} \dot{u}_\theta'' + a_{27} \dot{u}_\theta' + a_{28} \dot{u}_\tau' + a_{29} \dot{u}_\tau + a_{30} \dot{\phi}_\varepsilon'' + a_{31} \dot{\phi}_\xi'' + a_{32} \dot{\phi}_\theta'' &= C_3 \\
 a_{33} \dot{u}_\varepsilon'' + a_{34} \dot{u}_\xi'' + a_{35} \dot{u}_\theta'' + a_{36} \dot{u}_\theta' + a_{37} \dot{u}_\tau' + a_{38} \dot{u}_\tau + a_{39} \dot{\phi}_\varepsilon'' + a_{40} \dot{\phi}_\xi'' + a_{41} \dot{\phi}_\theta'' + a_{42} \dot{\phi}_\theta' + a_{43} \dot{\phi}_\theta + a_{44} \dot{\phi}_\theta &= C_4 \\
 a_{45} \dot{u}_\varepsilon'' + a_{46} \dot{u}_\xi'' + a_{47} \dot{u}_\theta'' + a_{48} \dot{u}_\theta' + a_{49} \dot{u}_\tau' + a_{50} \dot{u}_\tau + a_{51} \dot{\phi}_\varepsilon'' + a_{52} \dot{\phi}_\xi'' + a_{53} \dot{\phi}_\theta'' + a_{54} \dot{\phi}_\theta' + a_{55} \dot{\phi}_\theta &= C_5
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

ここで $a_1 \sim a_{55}$ は殻の形状と各層の弾性係数 E_i, ν_i とから定まる係数であり、 $c_1 \sim c_5$ は殻の形状のほか、分布荷重、温度負荷およびクリープによるみかけの内力成分から定まる定数で、次式によって与えられる。

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \dot{n}_\varepsilon' + \dot{n}_\tau' + \gamma(\dot{n}_\varepsilon + \dot{n}_\tau - \dot{n}_\theta - \dot{n}_\delta) + \frac{n}{\rho} \dot{n}_{\varepsilon\theta} + \omega_\varepsilon \dot{q}_\varepsilon - \dot{p}_\varepsilon \\
 c_2 &= \dot{n}_{\varepsilon\theta}' + \gamma(\dot{n}_{\varepsilon\theta} + \dot{n}_{\theta\varepsilon}) - \frac{n}{\rho}(\dot{n}_\theta + \dot{n}_\delta) + \omega_\theta \dot{q}_\theta - \dot{p}_\theta \\
 c_3 &= \dot{q}_\varepsilon' + \gamma \dot{q}_\xi + \frac{n}{\rho} \dot{q}_\delta - \omega_\varepsilon(\dot{n}_\varepsilon + \dot{n}_\tau) - \omega_\theta(\dot{n}_\theta + \dot{n}_\delta) - \dot{p}_\tau \\
 c_4 &= \dot{q}_\xi - \lambda^2(\dot{m}_\varepsilon' + \dot{m}_\tau') - \lambda^2 \gamma(\dot{m}_\varepsilon + \dot{m}_\tau) + \lambda^2 \gamma(\dot{m}_\theta + \dot{m}_\delta) - \lambda^2 \frac{n}{\rho} \dot{m}_{\theta\varepsilon} \\
 c_5 &= \dot{q}_\theta - \lambda^2 \dot{m}_{\varepsilon\theta}' - \lambda^2 \gamma(\dot{m}_{\varepsilon\theta} + \dot{m}_{\theta\varepsilon}) + \lambda^2 \frac{n}{\rho}(\dot{m}_\theta + \dot{m}_\delta)
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

ここに、 $\lambda = h/a$ である。

式(27)のクリープに伴う内力成分の変化率の各フーリエ係数は、式(15)、(18)、(24)、(25)から、それぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{n}_{\xi}^{c(n)}, \dot{n}_{\theta}^{c(n)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{c(n)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{c(n)}, q_{\xi}^{c(n)}, q_{\theta}^{c(n)} \} [A_n] &= \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} [L_1][D_i](\dot{\epsilon}^c) d\xi \\ \frac{\sigma_0 h_0^3}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{m}_{\xi}^{c(n)}, \dot{m}_{\theta}^{c(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{c(n)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{c(n)} \} [B_n] &= \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} [L_2][\bar{D}_i](\dot{\epsilon}^c) * \xi d\xi \\ [A_n] &= [\cos n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta, \sin n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta] \\ [B_n] &= [\cos n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta, \sin n\theta] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

ここに $[A_n], [B_n]$ は対角行列で、式(28)の右辺のクリープひずみ速度は、応力値から式(11)によって計算できる。また、積分にはシンプソンの1/3則を用いる。

3. 数値計算法

ある任意の計算段階における変位と回転の変化率は式(26)を適当な境界条件のもとで解けば得られ、任意の時刻の解は、各段階の解の増分を積分することによって得られる。しかしながら、式(26)を厳密に理論解析することは困難であるから、差分法によって数值的に解を求める。この数値解法は著者らがすでに発表した単層殻の場合⁽⁹⁾とほぼ同様であるので、ここでは紙面の都合もあり省略する。

4. 数値例

数値例として、両端可動支持で、内側にステンレス鋼(SUS 316)を、外側にボイラ用炭素鋼(SB 42)を配した2層構造の円筒殻に、局部的分布荷重が作用する問題を取扱った(図4)。ステンレス鋼の殻厚に対する比 h_1/h は、 $h_1/h=0, 0.1, 0.3$ の三とおりとした。

問題の対称性から、計算は円筒殻の1/8形状についてのみ行えば十分である。円筒殻の形状寸法はつぎの

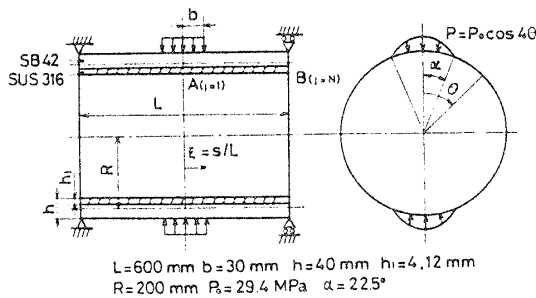


図4 円筒殻

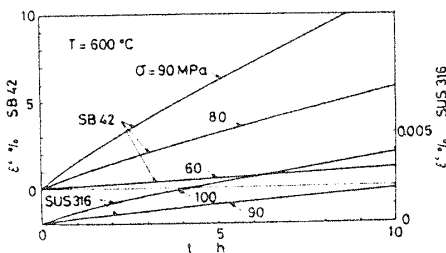


図5 クリープ曲線

ようになる。

$$\left. \begin{aligned} a=L, \xi=s/L, \rho=\frac{1}{3}, \rho'=0, \gamma=0 \\ \omega_{\theta}=3, \omega_{\xi}=\omega_{\xi'}=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

また ξ の差分間隔 Δ は、差分点の数を N として、

$$\Delta=1/2(N-1) \dots\dots\dots (30)$$

となる。

境界条件は、点Aでは対称性により、

$$\dot{U}_{\xi}=\dot{U}_{\xi'}=\dot{\phi}_{\xi}=\dot{N}_{\xi\theta}=\dot{M}_{\xi\theta}=0 \dots\dots\dots (31)$$

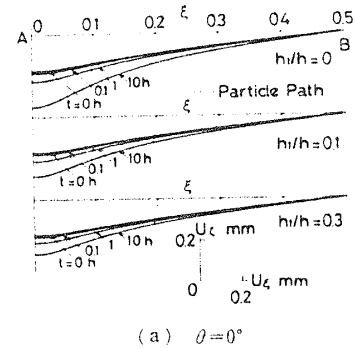
ただし、 $t=0$ のときは()を取り除くものとする。

点Bでは、単純可動支持の条件を用いて、

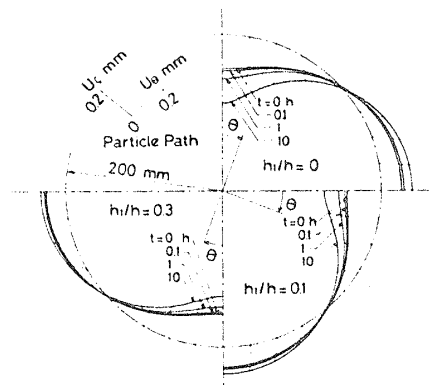
$$\dot{U}_{\theta}=\dot{U}_{\xi}=\dot{M}_{\xi}=\dot{\phi}_{\theta}=\dot{N}_{\xi}=0 \dots\dots\dots (32)$$

なお、式(24)の σ_0 は本計算では $\sigma_0=1$ とした。

SUS 316とSB 42の材料定数は、実験より求めた次のものを用いた(図5)。



(a) θ=0°



(b) ξ=0

図6 変形

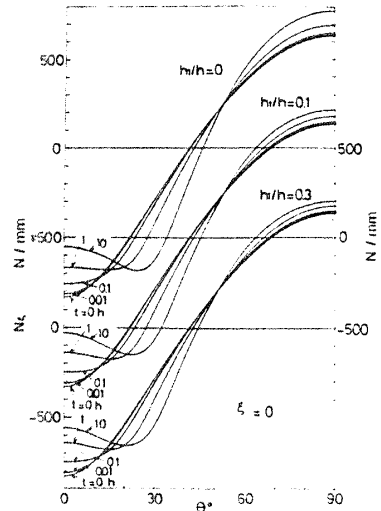
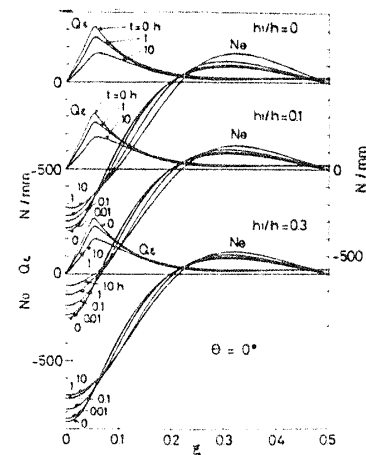
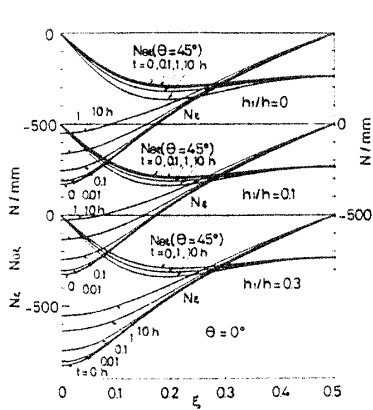


図 7 合応力 N_e , N_{oe} の子午線方向分布 図 8 合応力 N_{oe} , Q_e の子午線方向分布 図 9 合応力 N_e の円周方向分布

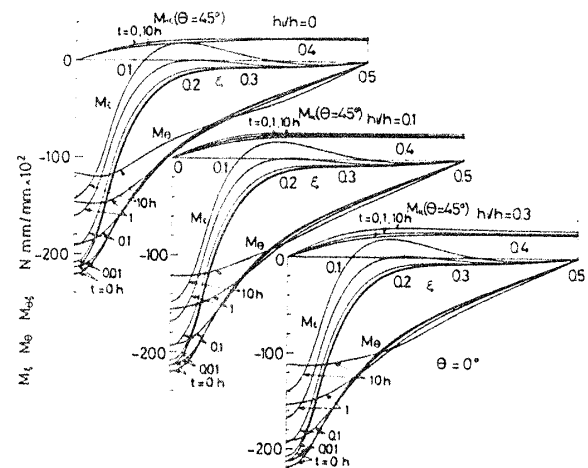
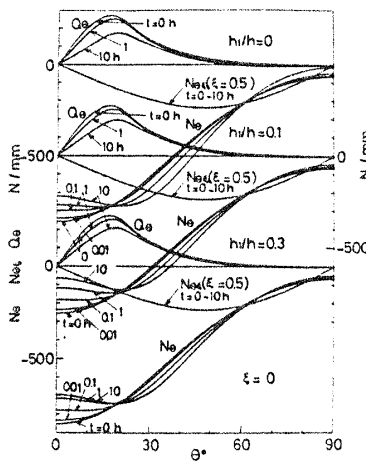


図 10 合応力 N_{oe} , Q_{oe} の円周方向分布

図 11 合モーメント M_s , M_o , M_{oe} の子午線方向分布

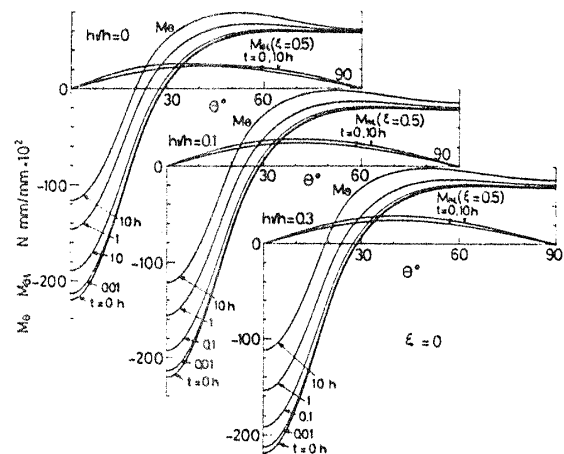
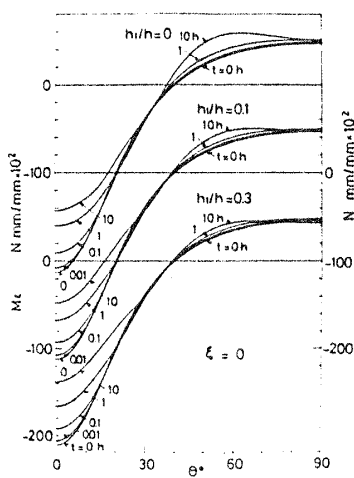
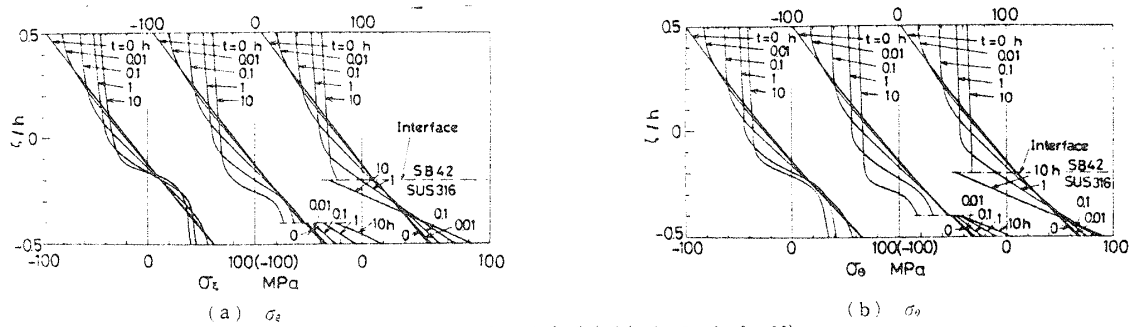


図 12 合モーメント M_e の円周方向分布

図 13 合モーメント M_o , M_{oe} の円周方向分布

図 14 殻厚方向の応力分布(点 A, $\xi=0, \theta=0^\circ$)

$$\begin{aligned}
 \text{SUS 316: } & E_1=164 \text{ GPa}, \nu_1=0.3 \\
 & m_1=6.69, A_1=A_1 e^{-\beta_1/T} \\
 & =2.8 \times 10^{-19} \text{ MPa}^{-m_1} \\
 & c_1=0.51 \text{ h}^{-1}, q=0.9 \text{ h}^{-1} \\
 \text{SB 42: } & E_2=155 \text{ GPa}, \nu_2=0.3 \\
 & m_2=5.53, A_2=A_2 e^{-\beta_2/T} \\
 & =2.9 \times 10^{-13} \text{ MPa}^{-m_2} \\
 & c_2=0.5 \text{ h}^{-1}, q_2=0.39 \text{ h}^{-1}
 \end{aligned} \quad \dots (33)$$

差分点数は子午線方向に $N=101$ とし、板厚方向には各層ごとに、11 個の格子点を採用した。また、フーリエ級数の項数 [項数 $= (n+1)/2$] は $n=39$ とした。

クリープ変形中の各計算段階における時間増分 Δt は、点 A における M_z^e と U_z^e の増分が、それぞれある限界値 $M_z^e/60$, $U_z^e/15$ を超えないように制御した。ここで、 M_z^e , U_z^e は点 A での M_z と U_z の初期の弾性解である。

図 6~14 に計算結果 ($T=T_0=600^\circ\text{C}$) を例示する。

図 6 (a) は、 $\theta=0^\circ$ の子午線断面、図 6 (b) は、 $\xi=0$ の軸断面の時間的変化を示す。点 A ($\xi=0, \theta=0^\circ$) で大きく変形し、時間とともに変形が進んでいる。変形量の大きさは、 $h_1/h=0, 0.1, 0.3$ の順になっており、耐熱性の大きいステンレス鋼の層が厚くなるほど、変形が小さいことがわかる。

図 7~13 に合応力と合モーメントの主として $\theta=0^\circ$ における分布と $\xi=0$ における分布の時間的変化の様子を示す。合応力と合モーメントの分布には、 h_1/h の値による際立った差異は認められない。

図 14 (a), (b) は、それぞれ点 A における σ_r と σ_θ の板厚方向分布である。SB 42 の層では、いずれの h_1/h の値の場合にも、ほぼ同様に、中央面から外側で応力が弾性解から時間とともに大きく緩和するのに対し、SUS 316 の層では、内面付近で時間とともに増加する。とくに $h_1/h=0.1$ の場合には、SUS 316 の層全体で増加し、境界をはきんで時間とともに不連続が大きくなっていることがわかる。

本計算には、九州大学大型計算機センターの FACOM M-380 S+VP 100 を使用し、それぞれの数値例の計算時間は約 10 min である。

5. 結 言

本論文では、一般の非対称荷重が作用する中程度の厚さの多層軸対称殻のクリープ変形問題を取扱い、応力と変形の時間的変化の様子を解析する方法を示した。クリープの構成関係には、温度の効果を入れた McVetty の式を、また厚肉の場合に考慮すべきせん断変形には、Reissner-Naghdi の理論を用いた。数値解法には差分法を適用した。

数値例として、SB 42 と SUS 316 から成る二層構造の円筒殻に、局所的分布荷重が作用する場合を h_1/h の値を変えて解析した。その結果、まず変形については、当然予測されることであるが、 h_1/h が大きいほど、すなわち耐熱性の大きいステンレス鋼の層が厚くなるほど、クリープ変形が小さくなる。また合応力と合モーメントには、 h_1/h の値による大きな相違はなかったが、殻厚方向の応力分布には顕著な差異が認められた。

文 献

- (1) Penny, P. K., *J. Mech., Eng. Sci.*, 6-1(1964), 44.
- (2) 村上・鈴木, 機論, 38-316(昭47), 3048.
- (3) 竹岡・ほか2名, 機論, 38-310(昭47), 1183.
- (4) 竹岡・ほか2名, 機論, 39-327(昭48), 3304.
- (5) 竹岡・ほか2名, 機論, 41-341(昭50), 51.
- (6) 矢川・ほか3名, 機論, 41-350(昭50), 2784.
- (7) Takezono, S. and Uchida, K., *Proc. Int. Conf. Eng. Aspect of Creep*, 2(1980), 57.
- (8) Takezono, S. and Fujioka, S., *Creep in Structures*, (1981), 128, Springer-Verlag.
- (9) 竹岡・内田, 機論, 49-441 A(昭58), 618.
- (10) Takezono, S. and Migita, K., *Proc. Int. Conf. Creep*, (1986), 429.
- (11) Penny, P. K., and Marriott, D. L., *Design for creep*, (1971), 7., McGraw-Hill.
- (12) Reissner, E., *Am. J. Math.*, 63-1(1941), 177.
- (13) Naghdi, P. M., *Q. Appl. Math.*, 14-4(1957), 369.

討 論

〔質問〕 宮崎 則幸〔九州大学工学部〕

(1) クリープひずみの式として式(10)を用いているため、時間 t を消去して陽な形でひずみ硬化則の式を導出できないので、時間硬化則を用いていると考えられる。式(10)にひずみ硬化則を適用する方法としては Pugh ら^(付1)が提案しているように、(i) 式(10)とその時間微分式から数値計算によって t を消去する方法、および(ii) 1次クリープのところのみひずみ硬化則を用いる方法の二つが考えられる。物理的には、時間硬化則よりもひずみ硬化則のほうが妥当と考えられるので、ひずみ硬化則の場合も検討されたいかだろうか。

(2) 解析対象としている円筒かくはかなり厚肉($R/h=5$)であるが、用いているかく理論はどの程度の R/h の値まで適用できるか。

〔回答〕 ご指摘のように、物理的には時間硬化則よりもひずみ硬化則のほうが合理的であるが、著者らは、以前にひずみ硬化則と時間硬化則を用いてかくのクリープ解析を行い、その解析結果にあまり差がないことを確認している^(付2)ので、本論文では時間硬化則を用いた。

(2) 本理論の適用範囲を厳密に議論するには、かくを三次元体とし、しかも種々の形状のものについて計算を行い、その結果と比較しなければならない。また、適用範囲は、かくそのものの形状のみならず、実際の設計の際などには、要求される計算精度によっても異なってくる。したがって適用範囲を的確に示すことは困難であるが、著者らは「中程度の厚さのかく」の大体の目安として $1/20 < h/R < 1/5$ 程度のものを考え

ている。

〔質問〕 瀬戸口 克哉〔三菱重工(株)長崎研究所〕

この方面の精力的なご研究には敬服する。

さて、貴論文の数値例について、次の事項をご検討願えればと考えている。

(1) SB 42 材にとって 600°C はかなりの高温であるが、そのような温度を選ばれた理由は何か。

(2) SB 42 材と SUS 316 材とでは熱膨張係数が異なり、その結果かなりの熱応力が生じるものと考えられる。境界条件も含めて、この熱応力は考慮されているのか。

(3) 高温でかつ異種材の組合せの場合、熱応力が降伏応力以上になることも予想される。塑性の問題は今後の問題と考えておられるのか。

〔回答〕 (1) 数値例として、 600°C における円筒かくを選んだ特別の理由はない。この材料に関して著者らが他の研究で得た実験データを保有していたので、これを用いた次第である。

(2) 熱応力は基準温度のとり方によっていかようにも変化するものである。本計算例では基準温度が 600°C の場合を計算している。実際の設計の際には、設計条件に応じて基準温度をとることになる。

(3) 熱応力が降伏点を越える場合は、当然、熱弾塑性問題として解析しなければならない。著者らはこの問題についてもすでに研究を始めており、いずれ結果を発表する予定である。

(付1) Pugh, C. E., ほか3名, ORNL-TM-3602, (1972).

(付2) 竹岡・ほか2名, 機論, 38-310 (昭47), 1183.