

## 異方性多層厚肉回転対称殻のクリープ変形\*

竹園茂男\*<sup>1</sup>, 右田康治\*<sup>2</sup>

## The Creep of Anisotropic Multi-layered Moderately Thick Shells of Revolution

Shigeo TAKEZONO and Kohji MIGITA

The paper describes an analytical formulation and a numerical solution of the creep problems of anisotropic multi-layered moderately thick shells of revolution with application to a cylindrical shell. The analytical formulation is developed by extending the Reissner-Naghdi theory for elastic shells with consideration given to the effect of shear deformation. For the constitutive relation, Hooke's law for orthotropic materials is used in the elastic deformation, and equations based on the orthotropic creep theory derived from the orthotropic plastic theory by Hill are employed in the creep range. The creep strains are related to the stresses by McVetty's equation having the thermal effect multiplier by Arrhenius. The basic differential equations derived are numerically solved by a finite difference method. As a numerical example, the creep of a two-layered, anisotropic cylindrical shell composed of mild steel and stainless steel subjected to uniform internal pressure is analyzed. Numerical computations have been carried out for four cases of the combinations of the directions of the anisotropic principal axis. It is found from the computations that the internal force distributions and the deformation are significantly varied depending on the combinations of the directions in layers.

**Key Words:** Structural Analysis, Anisotropic Multilayered Thick Shells, Creep Deformation, Shear Deformation, FDM

## 1. 緒言

回転対称殻のクリープ変形問題に関しては、従来から、球殻、円すい殻、円筒殻などの特定の殻のクリープ変形ばかりでなく、一般の任意形状の軸対称殻の解法を述べたものも多数報告されている<sup>(1)-(7)</sup>。また薄肉の殻ばかりでなく、比較的厚い殻についても二、三の研究がなされている<sup>(8)(9)</sup>。しかしながら、これらの研究は、単一材質からなるものを対象としており、近年広く実用されている異種材質からなる殻のクリープに関する研究は、あまり行われていないようである。

そこで、著者らはこの研究に着手し、すでに薄肉の多層回転殻や中程度の厚さの多層軸対称殻に一般の非対称な荷重が作用する場合について解析を行ってきたが<sup>(10)(11)</sup>、本研究では、異方性主軸の方向の異なる層を重ねた多層回転対称殻のクリープ変形問題を取扱った。クリープの構成関係には、温度効果をアレニウスの式で表した McVetty の式<sup>(12)</sup>を、Hill の直交異方性塑性理論にならって多軸応力状態に拡張したものを用いた。厚肉の場合に考慮すべきせん断変形には、Reis-

ner-Naghdi の理論<sup>(13)(14)</sup>を適用して基礎式を導き、これを差分法によって数値解析した。

数値例として、実用上重要な二層構造の円筒殻に、一様内圧が作用する問題を取り上げ、変形および内力の時間的変化の様子を解析した。

## 2. 解法

**2.1 基礎式** 図1に示すように、対称軸から殻の中央面上の任意点Pまでの距離を  $r$  とし、殻の中央面の形を  $r=r(s)$  で与えると、中央面の点Pにおける無次元曲率  $\omega_\xi (=a/R_\xi)$ ,  $\omega_\theta (=a/R_\theta)$  および無次元半径  $\rho (=r/a)$  の間には次の関係が成立する。ただし、 $s$  は殻の子午線方向の長さであり、 $a$  は代表長さである。

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= -(\gamma' + \gamma^2)/\omega_\theta, \omega_\theta = \sqrt{1 - (\rho')^2}/\rho \\ \omega'_\theta &= \gamma(\omega_\xi - \omega_\theta), \rho''/\rho = -\omega_\xi \omega_\theta \\ \gamma &= \rho'/\rho, \xi = s/a, (\quad)' = d(\quad)/d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

また、殻の任意点を表すのに、直交座標  $(\xi, \theta, \zeta)$  を用いる。ここに、 $\theta$  は円周方向の角であり、 $\zeta$  は中央面から外向きに測った長さである。

さて、Reissner の殻理論<sup>(13)</sup>による平衡方程式を軸対称殻に適用し、時間または時間とともに単調に変化

\* 昭和63年7月15日 東海支部浜松地方講演会において講演、原稿受付 昭和62年10月22日。

\*<sup>1</sup> 正員、豊橋技術科学大学(〒440 豊橋市天伯町)。

\*<sup>2</sup> 准員、三菱重工(株)長崎造船所(〒850 長崎市飽ノ浦町)。

する量について微分すると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{N}_\xi}{\partial \xi} + \gamma(\dot{N}_\xi - \dot{N}_\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{N}_{\theta\xi}}{\partial \theta} + \omega_\xi \dot{Q}_\xi + a \dot{P}_\xi &= 0 \\ \frac{\partial \dot{N}_{\xi\theta}}{\partial \xi} + \gamma(\dot{N}_{\xi\theta} + \dot{N}_{\theta\xi}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{N}_\theta}{\partial \theta} + \omega_\theta \dot{Q}_\theta + a \dot{P}_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \dot{Q}_\xi}{\partial \xi} + \gamma \dot{Q}_\xi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{Q}_\theta}{\partial \theta} - (\omega_\xi \dot{N}_\xi + \omega_\theta \dot{N}_\theta) + a \dot{P}_\xi &= 0 \\ Q_\xi - \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial \dot{M}_\xi}{\partial \xi} + \gamma(\dot{M}_\xi - \dot{M}_\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{M}_{\theta\xi}}{\partial \theta} \right] &= 0 \\ Q_\theta - \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial \dot{M}_{\xi\theta}}{\partial \xi} + \gamma(\dot{M}_{\xi\theta} + \dot{M}_{\theta\xi}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{M}_\theta}{\partial \theta} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $N_\xi, N_\theta, N_{\xi\theta}, N_{\theta\xi}, Q_\xi, Q_\theta$  および  $M_\xi, M_\theta, M_{\xi\theta}, M_{\theta\xi}$  は図1に示すように殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントである。 $P_\xi, P_\theta, P_\xi$  は殻の中央面の単位面積当たりの分布荷重であり、殻の内外面に作用する分布荷重  $\{P_\xi^-, P_\theta^-, P_\xi^+\}, \{P_\xi^+, P_\theta^+, P_\xi^+\}$  と次の関係にある。

$$\{P_\xi, P_\theta, P_\xi\} = \{P_\xi^-, P_\theta^-, P_\xi^-\} h^- - \{P_\xi^+, P_\theta^+, P_\xi^+\} h^+ \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $P_\xi, P_\theta$  などは座標方向のものを正とし、 $P_\xi^+$  などはこれと反対方向のものを正とする。また、

$$h^\pm = 1 \pm \frac{h}{2} \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_o} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{1}{R_s R_o} \dots\dots\dots (4)$$

次に中央面のひずみ  $\epsilon_{\xi m}, \epsilon_{\theta m}$  および  $\epsilon_{\xi\theta m}$  を  $\xi, \theta, \zeta$  方向の変位  $U_\xi, U_\theta, U_\zeta$  で表すと、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\xi m} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \omega_\xi U_\zeta \right] \\ \epsilon_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \gamma U_\xi + \omega_\theta U_\zeta \right] \\ \epsilon_{\xi\theta m} &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\xi}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial \xi} - \gamma U_\theta \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $\epsilon_{\xi\theta m}$  は工学上のせん断ひずみの1/2である。  
また、曲率の変化量  $\chi_\xi, \chi_\theta, \chi_{\xi\theta}, \chi_{\theta\xi}$  と変位成分との関係は次のようになる。

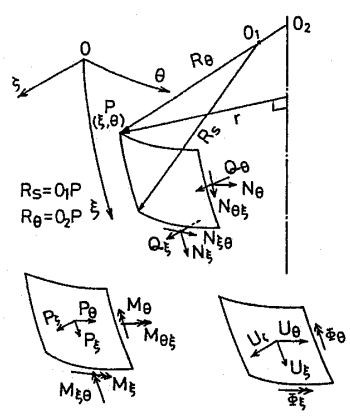


図1 諸記号

$$\left. \begin{aligned} \dot{\chi}_\xi &= \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{\Phi}_\xi}{\partial \xi}, \dot{\chi}_\theta = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{\Phi}_\theta}{\partial \theta} + \gamma \dot{\Phi}_\xi \right) \\ \dot{\chi}_{\xi\theta} &= \frac{1}{2a} \left( \frac{\partial \dot{\Phi}_\theta}{\partial \xi} - 2\omega_\xi \dot{\Phi}_n \right) \\ \dot{\chi}_{\theta\xi} &= \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{\Phi}_\xi}{\partial \theta} - \gamma \dot{\Phi}_\theta + 2\omega_\theta \dot{\Phi}_n \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\Phi_\xi, \Phi_\theta, \Phi_n$  は中央面の回転を示し、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}_\xi &= \frac{1}{a} \left( -\frac{\partial \dot{U}_\zeta}{\partial \xi} + \omega_\xi \dot{U}_\xi \right) + 2\dot{\epsilon}_{\xi\zeta m} \\ \dot{\Phi}_\theta &= \frac{1}{a} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{U}_\zeta}{\partial \theta} + \omega_\theta \dot{U}_\theta \right) + 2\dot{\epsilon}_{\theta\zeta m} \\ \dot{\Phi}_n &= \frac{1}{2a} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \xi} + \gamma \dot{U}_\theta \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

殻厚中央面から  $\zeta$  の距離にある点 Q のひずみ速度成分は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_\xi &= (\dot{\epsilon}_{\xi m} + \zeta \dot{\chi}_\xi) / L_\xi, \dot{\epsilon}_\theta = (\dot{\epsilon}_{\theta m} + \zeta \dot{\chi}_\theta) / L_\theta \\ \dot{\epsilon}_{\xi\theta} &= \left\{ \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{\xi\theta m} + \dot{\Phi}_n) + \zeta (\dot{\chi}_{\xi\theta} + \dot{\Phi}_n / R_s) \right\} / L_\xi \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{\theta\xi m} - \dot{\Phi}_n) + \zeta (\dot{\chi}_{\theta\xi} - \dot{\Phi}_n / R_o) \right\} / L_\theta \\ \dot{\epsilon}_{\xi\zeta} &= \dot{\epsilon}_{\xi\zeta m} / L_\xi, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta} = \dot{\epsilon}_{\theta\zeta m} / L_\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $L_\xi = 1 + \zeta / R_s, L_\theta = 1 + \zeta / R_o$

本研究では、殻の各層の材料は直交異方性を有し、異方性主軸(1, 2)の方向は、一般に殻の座標軸 ( $\xi, \theta$ ) 方向と異なるものとする (図2)。

今、各層の全ひずみ速度が、弾性ひずみ速度とクリープひずみ速度との和から成るものとする、全ひずみ速度は、次式で表される。ただし、殻厚方向の垂直応力は省略する。

$$\{\dot{\epsilon}\} = [D]^{-1} \{\dot{\sigma}\} + \{\dot{\epsilon}^c\} + \{\dot{\epsilon}^t\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{\epsilon}\} &= \{\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_{12}, \dot{\epsilon}_{13}, \dot{\epsilon}_{23}\}^T \\ \{\dot{\sigma}\} &= \{\dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2, \dot{\sigma}_{12}, \dot{\sigma}_{13}, \dot{\sigma}_{23}\}^T \\ \{\dot{\epsilon}^c\} &= \{\dot{\epsilon}_1^c, \dot{\epsilon}_2^c, \dot{\epsilon}_{12}^c, \dot{\epsilon}_{13}^c, \dot{\epsilon}_{23}^c\}^T \\ \{\dot{\epsilon}^t\} &= \{\alpha_1 \dot{T}_e, \alpha_2 \dot{T}_e, 0, 0, 0\}^T \\ [D]^{-1} &= \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/2G_{12} & 0 & 0 \\ & & & 1/2G_{13} & 0 \\ \text{Sym.} & & & & 1/2G_{23} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

上式で、 $E_1, E_2$  は縦弾性係数、 $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  はせん断弾性係数、 $\nu_{12}$  はポアソン比、 $\alpha_1, \alpha_2$  は線膨張係数である。また  $T_e$  は基準温度  $T_0$  からの温度変化で、殻の任意点の温度を  $T$  とすると次式となる。

$$T_e(\xi, \theta, \zeta, t) = T(\xi, \theta, \zeta, t) - T_0 \dots\dots\dots (11)$$

さて、一定の単軸応力下におけるクリープひずみが、

応力と時間に関しては McVetty の式に、また温度依存性についてはアレニウスの式によるものとする、

$$\epsilon^c = Ae^{-\beta/T} \sigma^m (1 - e^{-qt} + ct) \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $A, m, q, c, \beta$  は材料の特性値、 $T$  は絶対温度である。

上式を、Hill の直交異方性理論を用いて、直交異方性の場合に拡張すると、時間硬化則に基づく各ひずみ速度成分は次のようになる。ただし、殻厚方向の垂直応力は省略する。

$$\{\dot{\epsilon}^c\} = Ae^{-\beta/T} \bar{\sigma}^{m-1} (qe^{-qt} + c) [B] \{\dot{\sigma}\} \dots\dots (13)$$

ここに、

$$[B] = \frac{3}{2} \frac{1}{F+G+H} \begin{bmatrix} G+H & -H & 0 & 0 & 0 \\ -H & F+H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

$\bar{\sigma}$  は相当応力で、次式で表される。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2(F+G+H)} [(G+H)\sigma_1^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 + (F+H)\sigma_2^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{12}^2]} \dots\dots\dots (15)$$

式(14)、(15)において、 $F, G, H, L, M, N$  は材料の異方性パラメータであり、等方性の場合には、 $F=G=H=1, L=M=N=3$  となる。

次に、式(9)を殻の座標  $(\xi, \theta, \zeta)$  に変換する。変換マトリックスを  $[M]$  とすると、

$$\{\bar{\epsilon}\} = [\bar{D}]^{-1} \{\bar{\sigma}\} + \{\bar{\epsilon}^c\} + \{\bar{\epsilon}^t\} \dots\dots\dots (16)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \{\bar{\epsilon}\} &= [M] \{\epsilon\} \\ \{\bar{\epsilon}^c\} &= [M] \{\epsilon^c\} \\ \{\bar{\epsilon}^t\} &= [M] \{\epsilon^t\} \\ \{\bar{\sigma}\} &= [M] \{\sigma\} \\ [\bar{D}]^{-1} &= [M][D]^{-1}[M]^{-1} \end{aligned}$$

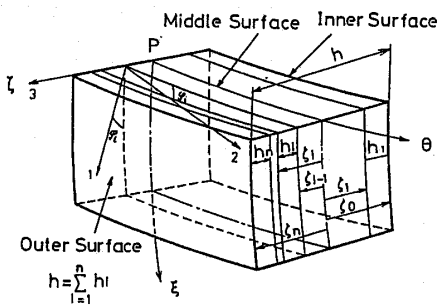


図 2 異方性多層殻要素

$$[M] = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & 2\alpha\beta & 0 & 0 \\ \beta^2 & \alpha^2 & -2\alpha\beta & 0 & 0 \\ -\alpha\beta & \alpha\beta & \alpha^2 - \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos \varphi, \beta = \sin \varphi \\ \{\bar{\epsilon}\} &= \{\epsilon_\xi, \epsilon_\theta, \epsilon_{\xi\theta}, \epsilon_{\theta\xi}, \epsilon_{\theta\xi}\}^T \\ \{\bar{\epsilon}^c\} &= \{\epsilon_\xi^c, \epsilon_\theta^c, \epsilon_{\xi\theta}^c, \epsilon_{\theta\xi}^c, \epsilon_{\theta\xi}^c\}^T \\ \{\bar{\epsilon}^t\} &= \{\epsilon_\xi^t, \epsilon_\theta^t, \epsilon_{\xi\theta}^t, 0, 0\}^T \\ \{\bar{\sigma}\} &= \{\sigma_\xi, \sigma_\theta, \sigma_{\xi\theta}, \sigma_{\theta\xi}, \sigma_{\theta\xi}\}^T \end{aligned}$$

式(16)を応力について解くと、

$$\{\bar{\sigma}\} = [\bar{D}] \{\bar{\epsilon}\} - \{\bar{\sigma}^c\} - \{\bar{\sigma}^t\} \dots\dots\dots (18)$$

ここに、

$$\{\bar{\sigma}^c\} = [\bar{D}] \{\bar{\epsilon}^c\}, \{\bar{\sigma}^t\} = [\bar{D}] \{\bar{\epsilon}^t\} \dots\dots\dots (19)$$

殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントは、式(18)を用いると、次のようになる(図2)。なお、添字  $i$  は殻の  $i$  層を意味する。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{N} \\ \dot{M} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} [L] \begin{Bmatrix} \dot{\bar{\sigma}} \\ \dot{\bar{\sigma}}^* \zeta \end{Bmatrix} d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} [L] \begin{bmatrix} \bar{D}_i & 0 \\ 0 & \bar{D}_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon} \\ \bar{\epsilon}^* \zeta \end{Bmatrix} d\zeta - \begin{Bmatrix} \dot{N}^c \\ \dot{M}^c \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{N}^t \\ \dot{M}^t \end{Bmatrix} \end{aligned} \dots\dots\dots (20)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \{\dot{N}\} &= \{\dot{N}_\xi, \dot{N}_\theta, \dot{N}_{\xi\theta}, \dot{N}_{\theta\xi}, \dot{Q}_\xi, \dot{Q}_\theta\}^T \\ \{\dot{M}\} &= \{\dot{M}_\xi, \dot{M}_\theta, \dot{M}_{\xi\theta}, \dot{M}_{\theta\xi}\}^T \\ [L] &= \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \quad [L_1] = \begin{bmatrix} L_\theta & & & & & \\ & L_\xi & & & & \\ & & L_\theta & & & \\ & & & L_\xi & & \\ & & & & 0 & L_\theta \\ & & & & & & L_\xi \end{bmatrix} \\ [L_2] &= \begin{bmatrix} L_\theta & & & & & \\ & L_\xi & & & & \\ & & L_\theta & & & \\ & & & L_\xi & & \\ & & & & 0 & L_\theta \\ & & & & & & L_\xi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\})^* = \{a_1, a_2, a_3\}^T$$

また、

$$\begin{aligned} \{\dot{N}^c\} &= \{\dot{N}_\xi^c, \dot{N}_\theta^c, \dot{N}_{\xi\theta}^c, \dot{N}_{\theta\xi}^c, \dot{Q}_\xi^c, \dot{Q}_\theta^c\}^T \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} [L_1] \{\bar{\sigma}^c\} d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} [L_1] [\bar{D}_i] \{\bar{\epsilon}^c\} d\zeta \\ \{\dot{N}^t\} &= \{\dot{N}_\xi^t, \dot{N}_\theta^t, \dot{N}_{\xi\theta}^t, \dot{N}_{\theta\xi}^t, 0, 0\}^T \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} [L_1] \{\bar{\sigma}^t\} d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} [L_1] [\bar{D}_i] \{\bar{\epsilon}^t\} d\zeta \\ \{\dot{M}^c\} &= \{\dot{M}_\xi^c, \dot{M}_\theta^c, \dot{M}_{\xi\theta}^c, \dot{M}_{\theta\xi}^c\}^T \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} [L_2] \{\bar{\sigma}^c\}^* \zeta d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} [L_2] [\bar{D}_i] \{\bar{\epsilon}^c\}^* \zeta d\zeta \\ \{\dot{M}^t\} &= \{\dot{M}_\xi^t, \dot{M}_\theta^t, \dot{M}_{\xi\theta}^t, \dot{M}_{\theta\xi}^t\}^T \end{aligned}$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} [L_2] \{ \dot{\sigma}^t \}^* \zeta d\zeta$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_2] [D_i] \{ \dot{\varepsilon}^i \}^* \zeta d\zeta$$

ここに,

$$[D_i] = \begin{bmatrix} \bar{D}_i & 0 & 0 \\ 0 & \bar{d}_{44i} & \bar{d}_{45i} \\ 0 & \bar{d}_{54i} & \bar{d}_{55i} \end{bmatrix}, [D_i] = \begin{bmatrix} \bar{d}_{11i} & \bar{d}_{12i} & \bar{d}_{13i} \\ \bar{d}_{21i} & \bar{d}_{22i} & \bar{d}_{23i} \\ \bar{d}_{31i} & \bar{d}_{32i} & \bar{d}_{33i} \end{bmatrix}$$

.....(21)

要素  $\bar{d}_{11i}$  などは殻の各層の弾性定数, 各層の異方性主軸(1, 2)と殻の座標軸( $\xi, \theta$ )とのなす角  $\varphi_i$  から求

められる.

式(20)に式(8)を代入し, 積分の際, 近似,

$$\frac{L_\theta}{L_\xi} \approx 1 - \left( \frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \zeta + \frac{1}{R_s} \left( \frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \zeta^2 \quad (22)$$

を用いると, 式(20)は

$$\begin{Bmatrix} \dot{N} \\ \dot{M} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_m \\ \dot{\chi} \\ \dot{\phi}_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{N}^c \\ \dot{M}^c \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{N}^t \\ \dot{M}^t \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(23)$$

ここに,

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_m \\ \dot{\chi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{\xi m}, \dot{\varepsilon}_{\theta m}, \dot{\varepsilon}_{\xi\theta m}, \dot{\varepsilon}_{\theta\xi m}, \dot{\varepsilon}_{\theta\xi m} \\ \dot{\chi}_\xi, \dot{\chi}_\theta, \dot{\chi}_{\xi\theta}, \dot{\chi}_{\theta\xi} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(24)$$

$$[A] = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \bar{d}_{11i} \zeta_{1,i}^* & \bar{d}_{12i} \zeta_{1,i} & (1/2) \bar{d}_{13i} (\zeta_{1,i}^* + \zeta_{1,i}) & 0 & 0 & \bar{d}_{11i} \zeta_{2,i}^* & \bar{d}_{12i} \zeta_{2,i} & \bar{d}_{13i} \zeta_{2,i}^* & \bar{d}_{13i} \zeta_{2,i} & \bar{d}_{13i} \times (a) \\ \bar{d}_{21i} \zeta_{1,i} & \bar{d}_{22i} \zeta_{1,i}^{**} & (1/2) \bar{d}_{23i} (\zeta_{1,i}^{**} + \zeta_{1,i}) & 0 & 0 & \bar{d}_{21i} \zeta_{2,i} & \bar{d}_{22i} \zeta_{2,i}^{**} & \bar{d}_{23i} \zeta_{2,i} & \bar{d}_{23i} \zeta_{2,i}^{**} & \bar{d}_{23i} \times (b) \\ \bar{d}_{31i} \zeta_{1,i}^* & \bar{d}_{32i} \zeta_{1,i} & (1/2) \bar{d}_{33i} (\zeta_{1,i}^* + \zeta_{1,i}) & 0 & 0 & \bar{d}_{31i} \zeta_{2,i}^* & \bar{d}_{32i} \zeta_{2,i} & \bar{d}_{33i} \zeta_{2,i}^* & \bar{d}_{33i} \zeta_{2,i} & \bar{d}_{33i} \times (a) \\ \bar{d}_{31i} \zeta_{1,i} & \bar{d}_{32i} \zeta_{1,i}^{**} & (1/2) \bar{d}_{33i} (\zeta_{1,i}^{**} + \zeta_{1,i}) & 0 & 0 & \bar{d}_{31i} \zeta_{2,i} & \bar{d}_{32i} \zeta_{2,i}^{**} & \bar{d}_{33i} \zeta_{2,i} & \bar{d}_{33i} \zeta_{2,i}^{**} & \bar{d}_{33i} \times (b) \\ 0 & 0 & 0 & (5/6) \bar{d}_{44i} \zeta_{1,i}^* & (5/6) \bar{d}_{45i} \zeta_{1,i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (5/6) \bar{d}_{54i} \zeta_{1,i} & (5/6) \bar{d}_{55i} \zeta_{1,i}^{**} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{d}_{11i} \zeta_{2,i}^* & \bar{d}_{12i} \zeta_{2,i} & (1/2) \bar{d}_{13i} (\zeta_{2,i}^* + \zeta_{2,i}) & 0 & 0 & \bar{d}_{11i} \zeta_{3,i}^* & \bar{d}_{12i} \zeta_{3,i} & \bar{d}_{13i} \zeta_{3,i}^* & \bar{d}_{13i} \zeta_{3,i} & \bar{d}_{13i} \times (c) \\ \bar{d}_{21i} \zeta_{2,i} & \bar{d}_{22i} \zeta_{2,i}^{**} & (1/2) \bar{d}_{23i} (\zeta_{2,i}^{**} + \zeta_{2,i}) & 0 & 0 & \bar{d}_{21i} \zeta_{3,i} & \bar{d}_{22i} \zeta_{3,i}^{**} & \bar{d}_{23i} \zeta_{3,i} & \bar{d}_{23i} \zeta_{3,i}^{**} & \bar{d}_{23i} \times (d) \\ \bar{d}_{31i} \zeta_{2,i}^* & \bar{d}_{32i} \zeta_{2,i} & (1/2) \bar{d}_{33i} (\zeta_{2,i}^* + \zeta_{2,i}) & 0 & 0 & \bar{d}_{31i} \zeta_{3,i}^* & \bar{d}_{32i} \zeta_{3,i} & \bar{d}_{33i} \zeta_{3,i}^* & \bar{d}_{33i} \zeta_{3,i} & \bar{d}_{33i} \times (c) \\ \bar{d}_{31i} \zeta_{2,i} & \bar{d}_{32i} \zeta_{2,i}^{**} & (1/2) \bar{d}_{33i} (\zeta_{2,i}^{**} + \zeta_{2,i}) & 0 & 0 & \bar{d}_{31i} \zeta_{3,i} & \bar{d}_{32i} \zeta_{3,i}^{**} & \bar{d}_{33i} \zeta_{3,i} & \bar{d}_{33i} \zeta_{3,i}^{**} & \bar{d}_{33i} \times (d) \end{bmatrix}$$

.....(25)

$$\left. \begin{aligned} (a) &= \frac{1}{2} (\zeta_{1,i}^* - \zeta_{1,i}) + \frac{\omega_\xi}{a} \zeta_{2,i}^* - \frac{\omega_\theta}{a} \zeta_{2,i}, (b) = \frac{1}{2} (\zeta_{1,i} - \zeta_{1,i}^{**}) + \frac{\omega_\xi}{a} \zeta_{2,i} - \frac{\omega_\theta}{a} \zeta_{2,i}^{**} \\ (c) &= \frac{1}{2} (\zeta_{2,i}^* - \zeta_{2,i}) + \frac{\omega_\xi}{a} \zeta_{3,i}^* - \frac{\omega_\theta}{a} \zeta_{3,i}, (d) = \frac{1}{2} (\zeta_{2,i} - \zeta_{2,i}^{**}) + \frac{\omega_\xi}{a} \zeta_{3,i} - \frac{\omega_\theta}{a} \zeta_{3,i}^{**} \\ \zeta_{n,i} &= \frac{1}{n} (\zeta^n - \zeta_{n-1}^n) (n=1, 2, \dots, 5) \\ \zeta_{n,i}^* &= \zeta_{n,i} - \frac{1}{a} (\omega_\xi - \omega_\theta) \tau_{n+1,i} + \frac{\omega_\xi}{a^2} (\omega_\xi - \omega_\theta) \zeta_{n+2,i}, \zeta_{n,i}^{**} = \zeta_{n,i} - \frac{1}{a} (\omega_\theta - \omega_\xi) \zeta_{n+1,i} + \frac{\omega_\theta}{a^2} (\omega_\theta - \omega_\xi) \zeta_{n+2,i} \\ &(n=1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

以上で64個の独立変数  $\dot{U}_\xi, \dot{U}_\theta, \dot{U}_t, \dot{\Phi}_\xi, \dot{\Phi}_\theta, \dot{\Phi}_n, \{\dot{N}\}, \{\dot{N}^c\}, \{\dot{N}^t\}, \{\dot{M}\}, \{\dot{M}^c\}, \{\dot{M}^t\}, \{\dot{\varepsilon}_m\}, \{\dot{\chi}\}, \{\dot{\varepsilon}^c\}, \{\dot{\varepsilon}^t\}, \{\dot{\sigma}\}, \{\dot{\sigma}^c\}, \{\dot{\sigma}^t\}$  に対し, 式(2), (5)~(7), (16), (17), (19), (21), (23)の64個の式が得られたことになる. なお上式で,  $n=1$  とおくと, 単層殻の場合に,  $\varphi_i=0$  とおくと, 直交異方性の殻の場合に, また1, 2方向の弾性係数と線膨張係数を等しく置き, クリープの異方性パラメータを  $F=G=H=1, L=M=N=3$  とすると, 等方性の場合に帰着する.

**2・2 無次元方程式** 一般に非対称問題を解析するには, 各定数を  $\theta$  方向にフーリエ級数で表し, その係数を定めればよい. そこで上に示した64個の変数のうち,  $\{\dot{\varepsilon}^c\}, \{\dot{\varepsilon}^t\}$  を除く56個の変数を次のようにフーリエ級数で表す.

$$\begin{aligned} & \{ \dot{N}_\xi, \dot{N}_\theta, \dot{N}_t, \dot{N}_\xi, \dot{N}_\theta, \dot{N}_t, \dot{N}_{\xi\theta}, \dot{N}_{\theta\xi}, \dot{N}_{\xi\theta}, \dot{N}_{\theta\xi}, \dot{N}_{\xi\theta}, \dot{N}_{\theta\xi}, \dot{N}_{\xi\theta}, \dot{N}_{\theta\xi}, \dot{Q}_\xi, \dot{Q}_\theta, \dot{Q}_\xi, \dot{Q}_\theta \} \\ & = \sigma_0 \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{n}_\xi^{(n)}, \dot{n}_\theta^{(n)}, \dot{n}_t^{(n)}, \dot{n}_\xi^{(n)}, \dot{n}_\theta^{(n)}, \dot{n}_t^{(n)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{(n)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{(n)}, \dot{q}_\xi^{(n)}, \dot{q}_\theta^{(n)}, \dot{q}_\xi^{(n)}, \dot{q}_\theta^{(n)} \} \\ & \times \cos n\theta \\ & + \sigma_0 \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{n}_\xi^{(n)}, \dot{n}_\theta^{(n)}, \dot{n}_t^{(n)}, \dot{n}_\xi^{(n)}, \dot{n}_\theta^{(n)}, \dot{n}_t^{(n)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{(n)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{(n)}, \dot{q}_\xi^{(n)}, \dot{q}_\theta^{(n)}, \dot{q}_\xi^{(n)}, \dot{q}_\theta^{(n)} \} \\ & \times \sin n\theta \\ & \{ \dot{M}_\xi, \dot{M}_\theta, \dot{M}_t, \dot{M}_\xi, \dot{M}_\theta, \dot{M}_t, \dot{M}_{\xi\theta}, \dot{M}_{\theta\xi}, \dot{M}_{\xi\theta}, \dot{M}_{\theta\xi}, \dot{M}_{\xi\theta}, \dot{M}_{\theta\xi}, \dot{M}_{\xi\theta}, \dot{M}_{\theta\xi} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\sigma_0 h_0^3/a) \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{m}_\xi^{(n)}, \dot{m}_\xi^{c(n)}, \dot{m}_\xi^{t(n)}, \dot{m}_\theta^{(n)}, \dot{m}_\theta^{c(n)}, \dot{m}_\theta^{t(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{c(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{t(n)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{(n)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{c(n)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{t(n)} \} \cos n\theta \\
 &+ (\sigma_0 h_0^3/a) \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{m}_\xi^{(n)}, \dot{m}_\xi^{c(n)}, \dot{m}_\xi^{t(n)}, \dot{m}_\theta^{(n)}, \dot{m}_\theta^{c(n)}, \dot{m}_\theta^{t(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{c(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{t(n)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{(n)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{c(n)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{t(n)} \} \sin n\theta \\
 \{ \dot{x}_\xi, \dot{x}_\theta, \dot{x}_{\xi\theta}, \dot{x}_{\theta\xi} \} &= (\sigma_0/aE_0) \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{k}_\xi^{(n)}, \dot{k}_\theta^{(n)}, \dot{k}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{k}_{\theta\xi}^{(n)} \} \cos n\theta + (\sigma_0/aE_0) \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{k}_\xi^{(n)}, \dot{k}_\theta^{(n)}, \dot{k}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{k}_{\theta\xi}^{(n)} \} \sin n\theta \\
 \{ \dot{U}_\xi, \dot{U}_\theta, \dot{U}_\zeta \} &= (\sigma_0 a/E_0) \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{u}_\xi^{(n)}, \dot{u}_\theta^{(n)}, \dot{u}_\zeta^{(n)} \} \cos n\theta + (\sigma_0 a/E_0) \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{u}_\xi^{(n)}, \dot{u}_\theta^{(n)}, \dot{u}_\zeta^{(n)} \} \sin n\theta \\
 \{ \dot{\epsilon}_{\xi m}, \dot{\epsilon}_{\theta m}, \dot{\epsilon}_{\xi\theta m}, \dot{\epsilon}_{\theta\xi m}, \dot{\epsilon}_{\xi\zeta m}, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta m}, \dot{\Phi}_\xi, \dot{\Phi}_\theta, \dot{\Phi}_n \} \\
 &= (\sigma_0/E_0) \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{e}_{\xi m}^{(n)}, \dot{e}_{\theta m}^{(n)}, \dot{e}_{\xi\theta m}^{(n)}, \dot{e}_{\theta\xi m}^{(n)}, \dot{e}_{\xi\zeta m}^{(n)}, \dot{e}_{\theta\zeta m}^{(n)}, \dot{\varphi}_\xi^{(n)}, \dot{\varphi}_\theta^{(n)}, \dot{\varphi}_n^{(n)} \} \cos n\theta \\
 &+ (\sigma_0/E_0) \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{e}_{\xi m}^{(n)}, \dot{e}_{\theta m}^{(n)}, \dot{e}_{\xi\theta m}^{(n)}, \dot{e}_{\theta\xi m}^{(n)}, \dot{e}_{\xi\zeta m}^{(n)}, \dot{e}_{\theta\zeta m}^{(n)}, \dot{\varphi}_\xi^{(n)}, \dot{\varphi}_\theta^{(n)}, \dot{\varphi}_n^{(n)} \} \sin n\theta \\
 \{ \dot{\sigma}_\xi, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_\xi, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_\xi, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_{\xi\theta}, \dot{\sigma}_{\theta\xi}, \dot{\sigma}_{\xi\zeta}, \dot{\sigma}_{\theta\zeta}, \dot{\sigma}_{\xi\zeta}, \dot{\sigma}_{\theta\zeta} \} \\
 &= \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{s}_\xi^{(n)}, \dot{s}_\xi^{c(n)}, \dot{s}_\xi^{t(n)}, \dot{s}_\theta^{(n)}, \dot{s}_\theta^{c(n)}, \dot{s}_\theta^{t(n)}, \dot{s}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{s}_{\xi\theta}^{c(n)}, \dot{s}_{\xi\theta}^{t(n)}, \dot{s}_{\theta\xi}^{(n)}, \dot{s}_{\theta\xi}^{c(n)}, \dot{s}_{\theta\xi}^{t(n)}, \dot{s}_{\xi\zeta}^{(n)}, \dot{s}_{\xi\zeta}^{c(n)}, \dot{s}_{\xi\zeta}^{t(n)}, \dot{s}_{\theta\zeta}^{(n)}, \dot{s}_{\theta\zeta}^{c(n)}, \dot{s}_{\theta\zeta}^{t(n)} \} \cos n\theta \\
 &+ \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{s}_\xi^{(n)}, \dot{s}_\xi^{c(n)}, \dot{s}_\xi^{t(n)}, \dot{s}_\theta^{(n)}, \dot{s}_\theta^{c(n)}, \dot{s}_\theta^{t(n)}, \dot{s}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{s}_{\xi\theta}^{c(n)}, \dot{s}_{\xi\theta}^{t(n)}, \dot{s}_{\theta\xi}^{(n)}, \dot{s}_{\theta\xi}^{c(n)}, \dot{s}_{\theta\xi}^{t(n)}, \dot{s}_{\xi\zeta}^{(n)}, \dot{s}_{\xi\zeta}^{c(n)}, \dot{s}_{\xi\zeta}^{t(n)}, \dot{s}_{\theta\zeta}^{(n)}, \dot{s}_{\theta\zeta}^{c(n)}, \dot{s}_{\theta\zeta}^{t(n)} \} \sin n\theta
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

また、分布荷重と温度変化（負荷）もフーリエ級数に展開する。

$$\begin{aligned}
 \{ \dot{P}_\xi, \dot{P}_\theta, \dot{P}_\zeta \} &= (\sigma_0 h_0/a) \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{p}_\xi^{(n)}, \dot{p}_\theta^{(n)}, \dot{p}_\zeta^{(n)} \} \cos n\theta + (\sigma_0 h_0/a) \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{p}_\xi^{(n)}, \dot{p}_\theta^{(n)}, \dot{p}_\zeta^{(n)} \} \sin n\theta \\
 \dot{T}_e &= (\sigma_0/E_0 \alpha_0) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \dot{t}_e^{(n)} \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{t}_e^{(n)} \sin n\theta \right)
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

ここで、 $\sigma_0, E_0, h_0, \alpha_0$  はそれぞれ代表応力、代表縦弾性係数、代表殻厚、代表線膨張係数である。

さて、これらのフーリエ展開式を前述の基礎式に代入し、フーリエ係数に関する対応する式をつくり、これらの式から、順次未知数を消去すると、最後に平衡方程式は変位  $\dot{u}_\xi, \dot{u}_\theta, \dot{u}_\zeta, \dot{u}_\xi, \dot{u}_\theta, \dot{u}_\zeta$  および回転  $\dot{\varphi}_\xi, \dot{\varphi}_\theta, \dot{\varphi}_n$  に関する次の10元連立2階微分方程式になる。なお、フーリエ級数の添字 ( $n$ ) は便宜上省略する。

$$A_1 z'' + A_2 z' + A_3 = C \tag{29}$$

ここに、

$$z = \{ \dot{u}_\xi, \dot{u}_\theta, \dot{u}_\zeta, \dot{u}_\xi, \dot{u}_\theta, \dot{u}_\zeta, \dot{\varphi}_\xi, \dot{\varphi}_\theta, \dot{\varphi}_n \}^T \tag{30}$$

$A_1 \sim A_3$  は  $10 \times 10$  のマトリックスで殻の形状、各層の弾性係数、各層の異方性主軸の方向から定まる係数である。 $C$  はこれらのほかに、分布荷重、温度負荷およびクリープによる見掛けの内力成分から定まる定数である。

温度負荷およびクリープによる見掛けの内力成分の変化率の各フーリエ係数は、式(21)、(27)から、それぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned}
 &\sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{n}_\xi^{c(n)}, \dot{n}_\theta^{c(n)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{c(n)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{c(n)}, \dot{q}_\xi^{c(n)}, \dot{q}_\theta^{c(n)} \}^T \\
 &\times \cos n\theta \\
 &+ \sigma_0 h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{n}_\xi^{c(n)}, \dot{n}_\theta^{c(n)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{c(n)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{c(n)}, \dot{q}_\xi^{c(n)}, \dot{q}_\theta^{c(n)} \}^T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\times \sin n\theta = \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} [L_1][\bar{D}_i]\{\bar{\epsilon}^i\} d\zeta \\
 &(\sigma_0 h_0^3/a) \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{m}_\xi^{c(n)}, \dot{m}_\theta^{c(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{c(n)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{c(n)} \}^T \cos n\theta \\
 &+ (\sigma_0 h_0^3/a) \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{m}_\xi^{c(n)}, \dot{m}_\theta^{c(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{c(n)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{c(n)} \}^T \\
 &\times \sin n\theta = \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} [L_2][\bar{D}_i]\{\bar{\epsilon}^i\}^* \zeta d\zeta \\
 &\sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{n}_\xi^{t(n)}, \dot{n}_\theta^{t(n)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{t(n)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{t(n)}, 0, 0 \}^T \cos n\theta \\
 &+ \sigma_0 h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{n}_\xi^{t(n)}, \dot{n}_\theta^{t(n)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{t(n)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{t(n)}, 0, 0 \}^T \\
 &\times \sin n\theta = \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} [L_1][\bar{D}_i]\{\bar{\epsilon}^i\} d\zeta \\
 &(\sigma_0 h_0^3/a) \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{m}_\xi^{t(n)}, \dot{m}_\theta^{t(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{t(n)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{t(n)} \}^T \cos n\theta \\
 &+ (\sigma_0 h_0^3/a) \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{m}_\xi^{t(n)}, \dot{m}_\theta^{t(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{t(n)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{t(n)} \}^T \\
 &\times \sin n\theta = \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} [L_2][\bar{D}_i]\{\bar{\epsilon}^i\}^* \zeta d\zeta
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

式(31)の右辺の各層のクリープひずみ速度は、式(13)と式(17)によって各層の応力値から、また各層の温度ひずみ速度は、式(10)、(17)によって温度負荷から計算できる。また、積分にはシンプソンの1/3則を用いる。

### 3. 数値計算法

ある任意の計算段階における変位と回転の変化率は式(29)を適当な境界条件のもとで解けば得られ、任意

の時刻の解は、各段階の解の増分を積分することによって得られる。しかしながら、式(29)を厳密に理論解析することは困難であるから、差分法によって数值的に解を求める。この数値解法は著者らがすでに発表した単層殻の場合<sup>(9)</sup>とほぼ同様であるので、ここでは紙面の都合もあり省略する。

4. 数 値 例

数値例として、両端単純可動支持で、内側にステンレス鋼 (SUS 316) を、外側にボイラ用炭素鋼 (SB 42) を配した二層構造の閉じた円筒殻に、一様内圧が作用する問題を取扱った (図3)。

各層とも弾性変形に対しては等方性とし、クリープ域に入って異方性が現れるものとした。また各層とも、同一応力に対する直交異方性主軸方向のひずみ速度比が  $\dot{\epsilon}_1 : \dot{\epsilon}_2 : \dot{\epsilon}_3 = 1 : 4 : 2$  の材料を仮定し、ステンレス鋼 (第1層) とボイラ用炭素鋼 (第2層) の主軸1方向と殻の  $\xi$  方向のなす角  $\varphi_1$  と  $\varphi_2$  の4とおりの組合せ ( $\varphi_1/\varphi_2 = 0^\circ/0^\circ, 45^\circ/-45^\circ, 0^\circ/90^\circ, 90^\circ/90^\circ$ ) に対して計算を行った。なおステンレス鋼の殻厚に対する比は  $h_1/h_2 = 0.3$  とした。

円筒殻の形状パラメータは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a=L, \xi=s/L, \rho=1/3, \rho'=0, \gamma=0 \\ \omega_\theta=3, \omega_\xi=\omega'_\xi=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

また、 $\xi$  の差分間隔  $\Delta$  は差分点数の数を  $N$  として、

$$\Delta=1/2(N-1) \dots\dots\dots (33)$$

となる。

境界条件は点 A では、

$$\dot{U}_\xi = \dot{U}_\eta = \dot{U}_\zeta = \dot{\phi}_\xi = \dot{\phi}_\eta = 0 \dots\dots\dots (34)$$

ただし、 $t=0$  のときは ( ) を取り除くものとする。点 B では、単純可動支持の条件を用いて、

$$\left. \begin{aligned} t=0: U_\theta = U_\xi = \phi_\theta = M_\xi = 0, \\ N_\xi = (1/2)P(R-h/2) \\ t>0: \dot{U}_\theta = \dot{U}_\xi = \dot{\phi}_\theta = \dot{M}_\xi = \dot{N}_\xi = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

なお、式(27)の  $\sigma_0$  は本計算では  $\sigma_0=1$  とした。

SUS 316 と SB 42 の材料定数は、600°C における実験より求めた次のものを用いた。

SUS 316 :

$$\left. \begin{aligned} (E_1)_1 = (E_2)_1 = 164 \text{ GPa}, (\nu_{12})_1 = (\nu_{21})_1 = 0.3 \\ (G_{12})_1 = (G_{13})_1 = (G_{23})_1 = 63.1 \text{ GPa} \\ A'_1 = A_1 e^{-\beta_1/T} = 2.8 \times 10^{-19} \text{ MPa}^{-m_1}, m_1 = 6.69 \\ c_1 = 0.51 \text{ h}^{-1}, q = 0.9 \text{ h}^{-1} \end{aligned} \right\}$$

SB 42 :

$$\left. \begin{aligned} (E_1)_2 = (E_2)_2 = 155 \text{ GPa}, (\nu_{12})_2 = (\nu_{21})_2 = 0.3 \\ (G_{12})_2 = (G_{13})_2 = (G_{23})_2 = 59.6 \text{ GPa} \\ A'_2 = A_2 e^{-\beta_2/T} = 2.9 \times 10^{-19} \text{ MPa}^{-m_2}, m_2 = 5.53 \\ c_2 = 0.5 \text{ h}^{-1}, q_2 = 0.39 \text{ h}^{-1} \end{aligned} \right\}$$

..... (36)

異方性パラメータは、 $\dot{\epsilon}_1 : \dot{\epsilon}_2 : \dot{\epsilon}_3 = 1 : 4 : 2$  とした場合、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} G_1/F_1 = 0.468, H_1/F_1 = 0.758 \\ L_1/F_1 = M_1/F_1 = N_1/F_1 = 2.23 \\ G_2/F_2 = 0.401, H_2/F_2 = 0.732 \\ L_2/F_2 = M_2/F_2 = N_2/F_2 = 2.13 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

差分点数は、子午線方向に  $N=51$  とし、板厚方向には各層ごとに、11個の格子点を採用した。

クリープ変形中の各計算段階における時間増分  $\Delta t$  は、点 A における  $M_\xi$  と  $U_\xi$  の増分が、それぞれある限界値  $M_\xi^e/50, U_\xi^e/20$  を超えないように制御した。ここで、 $M_\xi^e, U_\xi^e$  は点 A での  $M_\xi$  と  $U_\xi$  の初期の弾性解である。

図4~10に計算結果 ( $T=T_0=600^\circ\text{C}$ ) を例示する。

図4は、 $\xi=0$  における変位  $U_\xi$ 、合モーメント  $M_\xi, M_\theta$  の時間的変化を示している。変位  $U_\xi$  は、 $\varphi_1/\varphi_2 = 0^\circ/0^\circ, 45^\circ/-45^\circ, 0^\circ/90^\circ, 90^\circ/90^\circ$  の順に小さくなっており、 $45^\circ/-45^\circ$  が  $0^\circ/0^\circ$  と  $90^\circ/90^\circ$  の中間にきている。また、 $0^\circ/90^\circ$  と  $90^\circ/90^\circ$  の差は小さい。

モーメント  $M_\xi$  は、時間の経過とともに、 $\varphi_1/\varphi_2 = 0^\circ/0^\circ, 45^\circ/-45^\circ$  の場合のほうが  $\varphi_1/\varphi_2 = 90^\circ/90^\circ, 0^\circ/90^\circ$  の場合よりもやや小さくなっている (絶対値で)。

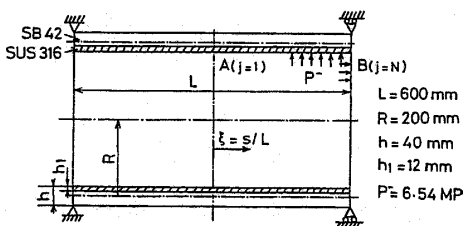


図3 異方性2層円筒殻

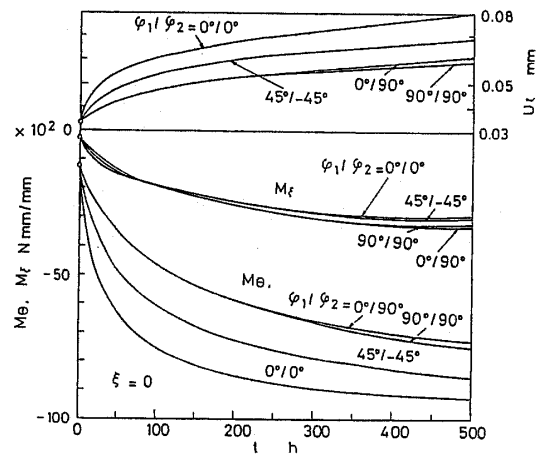


図4 変位  $U_\xi$ , 合モーメント  $M_\xi, M_\theta$  ( $\xi=0$ )

モーメント  $M_\theta$  は,  $M_\xi$  に比べて大きく, 各  $\varphi_1/\varphi_2$  による差異は大きく, 大きさの順位は  $M_\xi$  と逆になる。

図5は, 子午線断面の時間的変化を示す。  $\varphi_1/\varphi_2=0^\circ/0^\circ$  は  $\varphi_1/\varphi_2=90^\circ/90^\circ$  に比べ太短くなる。  $45^\circ/-45^\circ$  の変形はこれらのほぼ中間にくる。  $\varphi_1/\varphi_2=0^\circ/90^\circ$  と  $90^\circ/90^\circ$  は似た変形を示す。これは, クリープひずみが出やすく, 厚さの支配的な軟鋼の層の異方性主軸の方向が一致しているためである。

図6は, 合応力  $N_\theta$  の子午線方向分布の時間的変化である。一般に, 時間的変化は比較的小さいが,  $\varphi_1/\varphi_2=0^\circ/0^\circ, 45^\circ/-45^\circ, 0^\circ/90^\circ, 90^\circ/90^\circ$  の順に大きくなっている。また,  $0^\circ/90^\circ$  と  $90^\circ/90^\circ$  の場合はほぼ等しい。

図7は, せん断力  $Q_\xi$  と  $Q_\theta$  の子午線方向分布の時

間的变化である。  $\varphi_1/\varphi_2$  による  $Q_\xi$  の変化の傾向は  $N_\theta$  と類似している。

図8および図9は, それぞれ合モーメント  $M_\xi$  および  $M_\theta$  の子午線方向分布の時間的変化である。いずれも時間的変化は大きい。  $\varphi_1/\varphi_2$  による時間的変化は,  $M_\xi$  は  $0^\circ/0^\circ, 45^\circ/-45^\circ, 90^\circ/90^\circ, 0^\circ/90^\circ$  の順に大きく, また  $M_\theta$  はこの順に小さくなっている。なお  $M_\xi$  の  $0^\circ/90^\circ$  と  $90^\circ/90^\circ$  との間にはあまり差がない。

なお, 図5~9において,  $\varphi_1/\varphi_2=45^\circ/-45^\circ$  の場合には, 異方性のために, 時間の経過とともに,  $U_\theta, N_{\theta\xi}, N_{\theta\xi}, Q_\theta, M_{\theta\xi}, M_{\theta\xi}$  が現れるが, それらの値は極めて小さい。

図10は応力  $\sigma_\xi, \sigma_\theta$  の  $\xi=0$  における殻厚方向分布の時間的変化である。応力は, 時間とともに, SB 42 側では緩和しているのに対し, SUS 316 側では増加し, SB 42 と SUS 316 の境界面における不連続は大きくなる。  $\varphi_1/\varphi_2$  に対する時間的変化は,  $\sigma_\xi$  は  $0^\circ/0^\circ, 45^\circ/-45^\circ, 90^\circ/90^\circ, 0^\circ/90^\circ$  の順に大きくなっているが,  $\sigma_\theta$  はこの順に小さくなっている。また,  $0^\circ/90^\circ$  と  $90^\circ/90^\circ$  の変化量にはほとんど差がない。

本計算には, 熊本大学情報処理センターの FACOM M-360 を使用し, それぞれの数値例の計算時間は約 15 min である。

### 5. 結 言

本論文では, 各層に直交異方性があり, 異方性主軸の方向の異なる層を重ね合わせた多層回転対称殻のクリープ変形問題を取扱い, 応力と変形の時間的変化の様子を解析する方法を示した。各層のクリープの構成

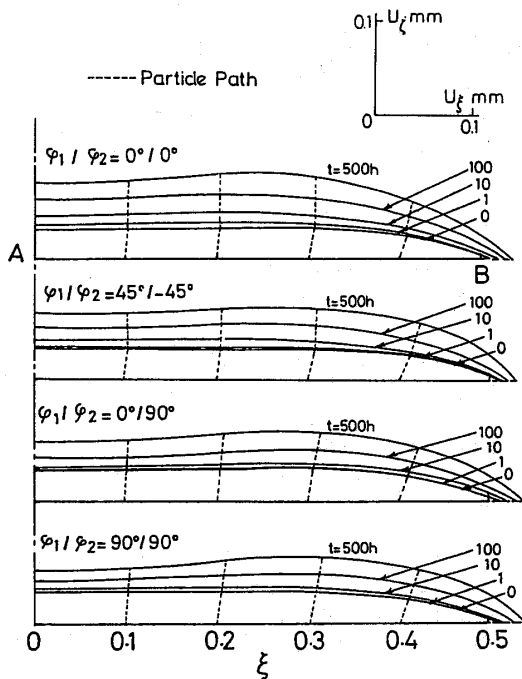


図5 子午線断面の変形

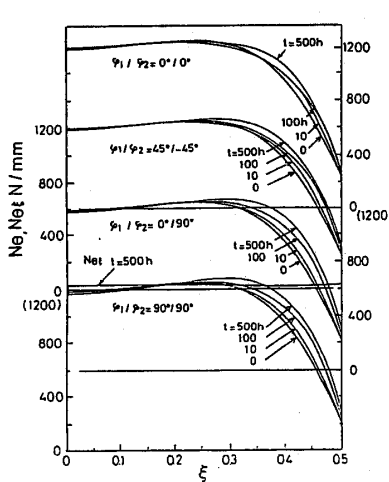


図6 合応力  $N_\theta, N_{\theta\xi}$  の子午線方向分布

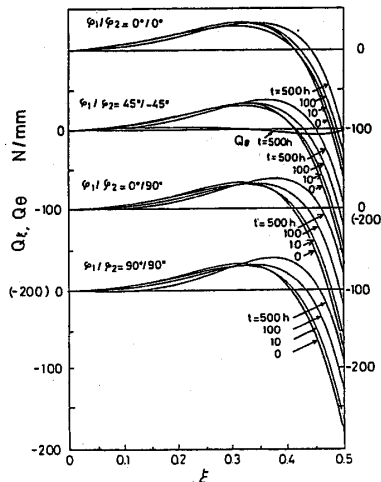


図7 合応力  $Q_\xi, Q_\theta$  の子午線方向分布

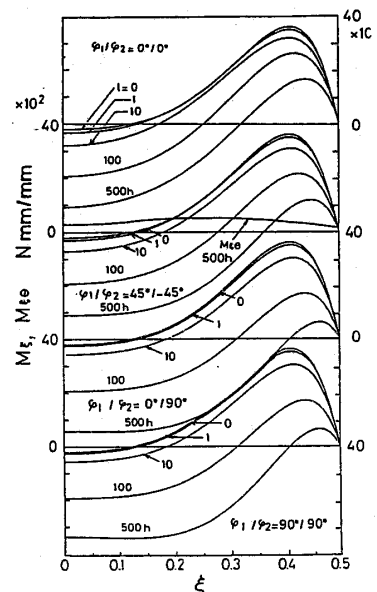


図8 合モーメント  $M_\xi, M_{\theta\xi}$  の子午線方向分布

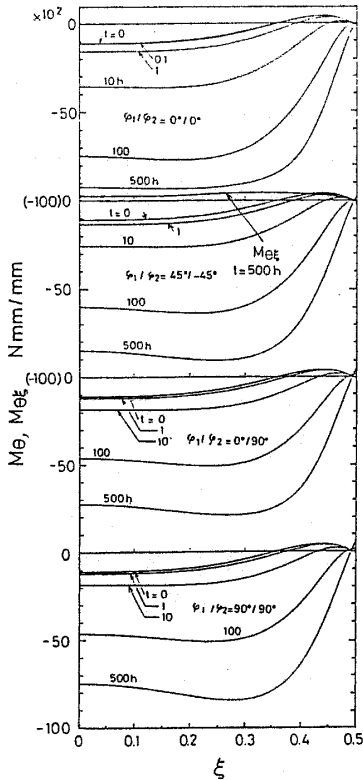
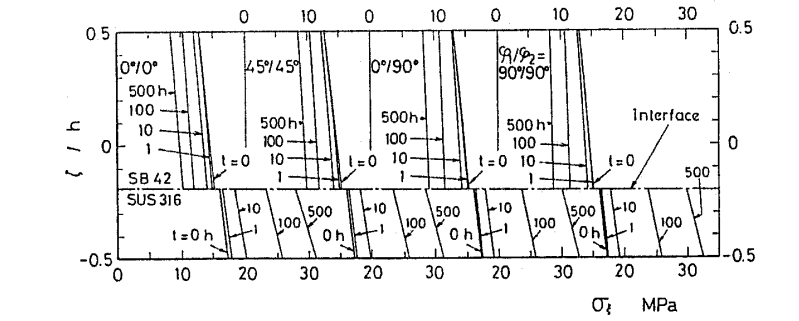
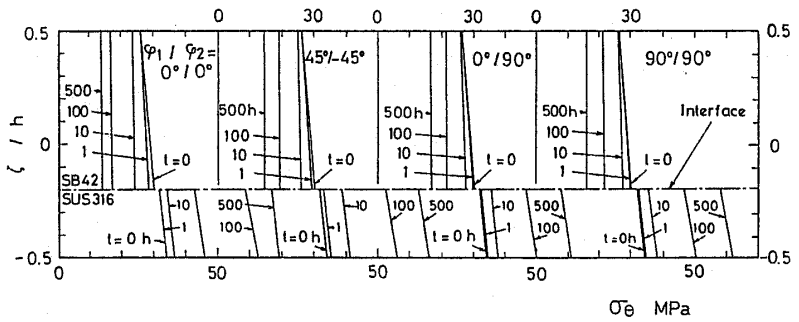


図 9 合モーメント  $M_\theta, M_{\theta\xi}$  の子午線方向分布



(a)  $\sigma_\xi$



(b)  $\sigma_\theta$

図 10 殻厚方向の応力分布 (点 A,  $\xi=0$ )

関係には、温度効果をアレニウスの式で表した McVetty の式を、Hill の直交異方性塑性理論にならって、多軸応力状態に拡張したものをを用いた。また、厚肉の場合に考慮すべきせん断変形には、Reissner-Naghdi の理論を用いた。数値解法には差分法を適用した。

数値例として、直交異方性を有する SB 42 と SUS 316 から成る二層構造の円筒殻に、一様内圧が作用する場合を  $\phi_1/\phi_2$  の値を変えて解析した。その結果、変形と内力は、 $\phi_1/\phi_2$  の値によって著しく異なることが認められた。

文 献

(1) Penny, P. K., *J. Mech. Eng. Sci.*, 6-1 (1964), 44.

(2) 村上・鈴木, 機論, 38-316 (昭 47), 3048.  
 (3) 竹園・ほか 2 名, 機論, 38-310 (昭 47), 1183.  
 (4) 竹園・ほか 2 名, 機論, 39-327 (昭 48), 3304.  
 (5) 竹園・ほか 2 名, 機論, 41-341 (昭 50), 51.  
 (6) 矢川・ほか 3 名, 機論, 41-350 (昭 50), 2784.  
 (7) Takezono, S. and Uchida, K., *Proc. Int. Conf. Eng. Aspect Creep*, 2 (1980), 57.  
 (8) Takezono, S. and Fujioka, S., *Creep in Structures*, (1981), 128, Springer-Verlag.  
 (9) 竹園・内田, 機論, 49-441, A (昭 58), 618.  
 (10) Takezono, S. and Migita, K., *Proc. Int. Conf. Creep*, (1986), 429.  
 (11) 竹園・右田, 機論, 53-485, A (昭 62), 97.  
 (12) Penny, P. K. and Marriott, D. L., *Design for creep*, (1971), 7, McGraw-Hill.  
 (13) Reissner, E., *Am. J. Math.*, 63-1 (1941), 177.  
 (14) Naghdi, P. M., *Q. Appl. Math.*, 14-4 (1957), 396.



## 討 論

〔質問〕 村上 澄 男〔名古屋大学工学部〕

殻の工学的クリープ変形問題に見られるほとんどすべての要因を考慮し、その有効な数値解析法を開発されたことに敬意を表す。以下の点につき、ご教示願いたい。

(1) 殻の層間の接続条件は、境界面をはさんでの変位の連続条件と考えてよろしいか。

(2) 2層殻の非弾性変形問題では、合応力、合モーメント、殻中央面の変位などのような平均的物理量は、各層単独の挙動からほぼ推定できると思われる。これに対して、疲労寿命の推定等のためには局所的応力分布が重要である。層間せん断応力は、図10の $\sigma_s$ 、 $\sigma_\theta$ と比べてどの程度の大きさか。

(3) 図10から判断して、一定荷重を受ける2層殻がクリープのような非線形性の強い変形を示す場

合、弱いほうの構造は有効に寄与しないと解釈してよろしいか。

(4) この種の問題の数値解析に対して、この論文の方法と有限要素法等との優劣を比較するとどのようになるか。

〔回答〕 (1) 境界面でひずみが連続であると考えている。

(2) 層間せん断応力は図10の $\sigma_s$ 、 $\sigma_\theta$ の1~2割程度である。

(3) 殻厚全体の強度に対する各層の寄与は、一般に、各層の強度のほかに厚さと配置によっても異なるものと考えられる。

(4) 同じ例題を有限要素法で解析していないので、計算機の必要容量、計算時間、計算精度等の優劣を比較することは困難である。