

多層複合軸対称殻の弾/粘塑性動的応答*

竹園茂男^{*1}, 埜克己^{*1}
田口智弘^{*2}, 増子卓哉^{*3}Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of Multi-Layered
Shells of RevolutionShigeo TAKEZONO, Katsumi TAO,
Toshihiro TAGUCHI, and Takuya MASHIKO

This paper is concerned with an analytical formulation and a numerical solution of the elasto/visco-plastic dynamic response of the multi-layered shells of revolution subjected to impulsive loads with application to a cylindrical shell. The equations of motion and the relations between the strains and displacements are derived by extending Sanders' theory for elastic thin shells. As the constitutive relation, Hooke's law is used in the linear elastic range, and the elasto/visco-plastic equations by Perzyna are employed in the plastic range. As a numerical example, the elasto/visco-plastic dynamic response of a fixed supported two-layered cylindrical shell composed of mild steel and titanium subjected to impulsive load is analyzed. Numerical computations are carried out for three cases of the ratio of the thickness of the titanium layer to the shell thickness. It is found from the computations that stress distributions and deformation vary significantly depending on the thickness ratio.

Key Words: Structural Analysis, Laminated Construction, FDM, Elasto/Visco-Plasticity, Dynamic Response, Shells of Revolution

1. 緒 言

殻構造物に衝撃荷重が作用する場合の弾/粘塑性動的応答問題に関しては、これまでに回転対称殻ばかりでなく、一般の非軸対称殻についても解析がなされてきた⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾。しかしながら、これらの研究は、単一材質から成る殻を対象としており、近年広く実用されている異種材質を組合せた多層複合殻に関する研究はまだあまり行われていないようである。

本論文では、一般の非対称な衝撃荷重を受ける多層複合軸対称殻の弾/粘塑性動的応答問題の解法を示した。本研究は、Sandersの単層殻の弾性変形問題の解法⁽⁷⁾を多層複合殻の弾/粘塑性動的応答問題に拡張したもので、構成関係には、塑性領域において粘性の影響を考慮したPerzynaの式⁽⁸⁾を用いている。導かれた基礎式の数値解法には、差分法を適用した。

数値例として、実用上重要な内側にチタン、外側に軟鋼の層を配した二層構造の円筒殻の問題を取り上げ

た。

2. 解 法

2.1 基礎関係式 図1に示すように、殻の中央面上に子午線方向に ξ 、円周方向に θ 、中央面から外向きに ζ の座標軸をとる。対称軸から中央面までの距離を r とし、殻の中央面の形を $r=r(\xi)$ とすると、点Pにおける無次元曲率 $\omega_\xi(=a/R_s)$ 、 $\omega_\theta(=a/R_\theta)$ および無次元半径 $\rho(=r/a)$ の間には、次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= -(\gamma' + \gamma^2)/\omega_\theta, \quad \omega_\theta = \sqrt{1 - (\rho')^2}/\rho, \\ \omega'_\theta &= \gamma(\omega_\xi - \omega_\theta) \\ \rho''/\rho &= -\omega_\xi\omega_\theta, \quad \gamma = \rho'/\rho, \quad \xi = s/a, \\ (\)' &= d(\)/d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 s は子午線方向の距離であり、 a は代表長さである。

Sandersの殻理論⁽⁷⁾による軸対称殻の平衡方程式に慣性項を加え、横せん断力 Q_ξ, Q_θ を消去すると、運動方程式は増分形式で次のようになる。ただし回転慣性の項は省略する。

* 平成元年7月14日 東海支部岐阜地方講演会において講演、原稿受付 昭和64年1月5日。

^{*1} 正員、豊橋技術科学大学 (〒440 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

^{*2} 学生員、豊橋技術科学大学大学院。

^{*3} 准員、(株)日興システムセンター (〒141 東京都品川区西五反田2-11-12)。

$$\left. \begin{aligned}
 & a \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta N_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{N}_{\xi\theta}) - \rho' \Delta N_\theta \right] + \omega_\xi \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta M_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi\theta}) - \rho' \Delta M_\theta \right] \\
 & + \frac{1}{2} (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi\theta}) + \rho a^2 \left[\Delta P_\xi - \rho_0 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta U_\xi) \right] = 0 \\
 & a \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta N_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta \bar{N}_{\xi\theta}) + \rho' \Delta \bar{N}_{\xi\theta} \right] + \omega_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta M_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta \bar{M}_{\xi\theta}) + \rho' \Delta \bar{M}_{\xi\theta} \right] \\
 & + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial \xi} [(\omega_\theta - \omega_\xi) \Delta \bar{M}_{\xi\theta}] + \rho a^2 \left[\Delta P_\theta - \rho_0 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta U_\theta) \right] = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta M_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi\theta}) - \rho' \Delta M_\theta \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta M_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta \bar{M}_{\xi\theta}) + \rho' \Delta \bar{M}_{\xi\theta} \right] \\
 & - a \rho (\omega_\xi \Delta N_\xi + \omega_\theta \Delta N_\theta) + \rho a^2 \left[\Delta P_\xi - \rho_0 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta W) \right] = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで Δ は増分を表し、慣性項に含まれる h, t, ρ_0 はそれぞれ殻厚、時間および殻厚方向の平均密度である。 $N_\xi, N_\theta, N_{\xi\theta}$ および $M_\xi, M_\theta, M_{\xi\theta}$ は、図1に示すように殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントであり、 P_ξ, P_θ, P_ξ は殻の単位面積当たりの分布荷重である。また $\bar{N}_{\xi\theta}, \bar{M}_{\xi\theta}$ は、修正面内せん断力および修正ねじりモーメントで、

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \bar{N}_{\xi\theta} &= (\Delta N_{\xi\theta} + \Delta N_{\theta\xi})/2 \\
 &+ [(1/R_\theta) - (1/R_\xi)] (\Delta M_{\xi\theta} - \Delta M_{\theta\xi})/4 \\
 \Delta \bar{M}_{\xi\theta} &= (\Delta M_{\xi\theta} + \Delta M_{\theta\xi})/2
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

で表される。

なお、殻の境界に作用する単位長さ当たりの有効面内せん断力と有効横せん断力を $\bar{N}_{\xi\theta}, \bar{Q}_\xi$ とし、次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \bar{N}_{\xi\theta} &= \Delta \bar{N}_{\xi\theta} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{R_\theta} - \frac{1}{R_\xi} \right) \Delta \bar{M}_{\xi\theta} \\
 \Delta \bar{Q}_\xi &= \frac{1}{a\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta M_\xi) + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi\theta}) - \rho' \Delta M_\theta \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

次に中央面のひずみ $\epsilon_{\xi m}, \epsilon_{\theta m}$ および $\epsilon_{\xi\theta m}$ を、 ξ, θ, ζ

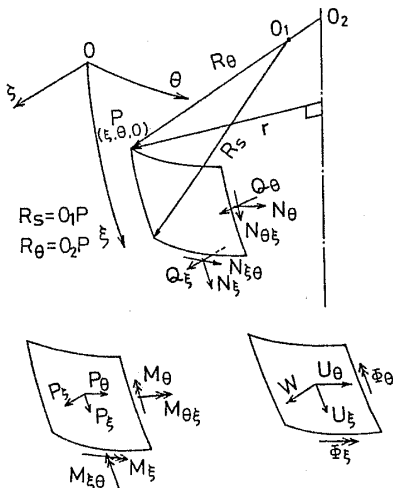


図1 座標と諸記号

方向の変位 U_ξ, U_θ, W で表すと、

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \epsilon_{\xi m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta U_\xi) + \omega_\xi \Delta W \right] \\
 \Delta \epsilon_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta U_\theta) + \gamma \Delta U_\xi + \omega_\theta \Delta W \right] \\
 \Delta \epsilon_{\xi\theta m} &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta U_\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta U_\theta) - \gamma \Delta U_\theta \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $\epsilon_{\xi\theta m}$ は工学上のせん断ひずみの1/2である。

また、曲率の変化量 $\chi_\xi, \chi_\theta, \chi_{\xi\theta}$ と変位成分との関係は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \chi_\xi &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \Phi_\xi) \\
 \Delta \chi_\theta &= \frac{1}{a} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \Phi_\theta) + \gamma (\Delta \Phi_\xi) \right] \\
 \Delta \chi_{\xi\theta} &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \Phi_\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \Phi_\theta) - \gamma (\Delta \Phi_\theta) \right. \\
 &+ \frac{1}{2a} (\omega_\xi - \omega_\theta) \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta U_\xi) \right. \\
 &\left. \left. - \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta U_\theta) - \gamma \Delta U_\theta \right\} \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 Φ_ξ, Φ_θ は中央面の回転を示し、

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \Phi_\xi &= \frac{1}{a} \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta W) + \omega_\xi \Delta U_\xi \right] \\
 \Delta \Phi_\theta &= \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta W) + \omega_\theta \Delta U_\theta \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

である。

Kirchhoff の仮説を用い、 $\zeta/R_s, \zeta/R_\theta$ は1に比較して十分小さいものとする、殻厚中央面から ζ の距離にある点のひずみ成分は、次式で表される。

$$\{\Delta \epsilon\} = \{\Delta \epsilon_m\} + \zeta \{\Delta \chi\} \dots\dots\dots (8)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 \{\Delta \epsilon\} &= \{\Delta \epsilon_\xi, \Delta \epsilon_\theta, \Delta \epsilon_{\xi\theta}\}^T \\
 \{\Delta \epsilon_m\} &= \{\Delta \epsilon_{\xi m}, \Delta \epsilon_{\theta m}, \Delta \epsilon_{\xi\theta m}\}^T \\
 \{\Delta \chi\} &= \{\Delta \chi_\xi, \Delta \chi_\theta, \Delta \chi_{\xi\theta}\}^T
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9) **1$$

さて、本研究では構成関係に塑性領域において粘性の影響を考慮した次の Perzyna の式⁽⁸⁾を用いる。

**1 { }^T は転置行列を示す。

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} = & \frac{1+\nu}{E} \dot{S}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{S} \delta_{ij} \\ & + \gamma_0 \langle \Phi(F) \rangle S_{ij} J_2^{-1/2} \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

ここで、() は時間に関する微分を示し、 S_{ij} , S および ϵ_{ij} は偏差応力、平均垂直応力およびひずみである。 E , ν および γ_0 はそれぞれ縦弾性係数、ポアソン比および粘性を表す定数であり、 J_2 は偏差応力の第2不変量である。また、 $\langle \Phi(F) \rangle$ は次の定義によるものである。

$$\langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0, & F \leq 0 \\ \Phi(F), & F > 0 \end{cases} \dots \dots \dots (11)$$

ここに、 F は

$$F = (\bar{\sigma} - \sigma^*) / \sigma^* \dots \dots \dots (12)$$

で、 $\bar{\sigma}$ は動的なミーゼスの相当応力 ($=\sqrt{3}J_2$) であり、 $F=0$ はミーゼスの降伏曲面を表す。また σ^* はひずみ速度が十分小さい通常の引張試験における応力-ひずみ関係から得られ、一般に相当塑性ひずみ ϵ^{vp} の関数となる。

式(10)は、殻の理論で通常仮定される平面応力状態において、増分形で次のようになる。

$$\{\Delta \epsilon\} = [D]^{-1} \{\Delta \sigma\} + \{\Delta \epsilon^{vp}\} \dots \dots \dots (13)$$

ただし

$$\begin{aligned} \{\Delta \sigma\} &= \{\Delta \sigma_\xi, \Delta \sigma_\theta, \Delta \sigma_{\xi\theta}\}^T \\ \{\Delta \epsilon^{vp}\} &= \{\Delta \epsilon_\xi^{vp}, \Delta \epsilon_\theta^{vp}, \Delta \epsilon_{\xi\theta}^{vp}\}^T \\ [D] &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\Delta \epsilon^{vp}\} &= \{\dot{\epsilon}^{vp}\} \Delta t \\ &= \gamma_1 \langle \Phi(F) \rangle \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \{\sigma\} \Delta t \\ \gamma_1 &= (2/\sqrt{3}) \gamma_0 \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

式(13)に式(8)を代入し、 $\{\Delta \sigma\}$ について解くと、次式が得られる。

$$\{\Delta \sigma\} = [D] \{ \{\Delta \epsilon_m\} + \zeta \{\Delta x\} - \{\Delta \sigma^{vp}\} \} \dots \dots \dots (16)$$

ここに $\{\Delta \sigma^{vp}\}$ は粘塑性ひずみによるみかけの応力増分で、次式で表される。

$$\{\Delta \sigma^{vp}\} = [D] \{\Delta \epsilon^{vp}\} \dots \dots \dots (17)$$

式(16)を用いると、多層殻の単位長さ当りの合応力および合モーメントの増分は次のようになる (図2)。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \Delta \sigma \\ \Delta \sigma \zeta \end{Bmatrix} d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \begin{Bmatrix} \Delta \sigma \\ \Delta \sigma \zeta \end{Bmatrix} d\zeta \\ &= \begin{Bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{C} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_m \\ \Delta x \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta N^{vp} \\ \Delta M^{vp} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

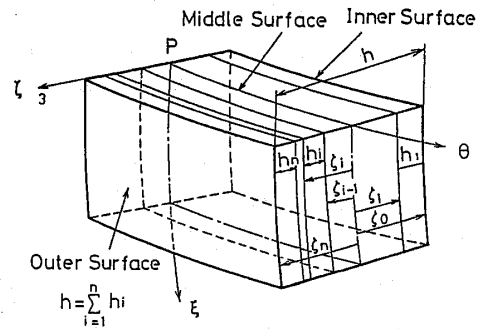


図2 多層殻要素

ここに

$$\begin{aligned} \{\Delta N\} &= \{\Delta N_\xi, \Delta N_\theta, \Delta \bar{N}_{\xi\theta}\}^T \\ \{\Delta M\} &= \{\Delta M_\xi, \Delta M_\theta, \Delta \bar{M}_{\xi\theta}\}^T \\ \{\Delta N^{vp}\} &= \{\Delta N_\xi^{vp}, \Delta N_\theta^{vp}, \Delta \bar{N}_{\xi\theta}^{vp}\}^T \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\Delta \sigma^{vp}\} d\zeta = \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \{\Delta \epsilon^{vp}\} d\zeta \\ \{\Delta M^{vp}\} &= \{\Delta M_\xi^{vp}, \Delta M_\theta^{vp}, \Delta \bar{M}_{\xi\theta}^{vp}\}^T \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\Delta \sigma^{vp}\} \zeta d\zeta = \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \{\Delta \epsilon^{vp}\} \zeta d\zeta \\ [D_i] &= \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu_i \end{bmatrix} \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \int_{-h/2}^{h/2} [D] d\zeta = \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n [D_i] (\zeta_i - \zeta_{i-1}) \\ \bar{B} &= \int_{-h/2}^{h/2} [D] \zeta d\zeta = \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \zeta d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [D_i] (\zeta_i^2 - \zeta_{i-1}^2) \\ \bar{C} &= \int_{-h/2}^{h/2} [D] \zeta^2 d\zeta = \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \zeta^2 d\zeta \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n [D_i] (\zeta_i^3 - \zeta_{i-1}^3) \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

式(18)~(20)において、添字 i は殻の内側から i 番目の層 (任意の層) を意味する。また、 ζ_i は i 番目の層と $i+1$ 番目の層の間の境界面 (接着面) の ζ 座標値である。

以上で32個の未知数 $\Delta N_\xi, \Delta N_\theta, \Delta \bar{N}_{\xi\theta}, \Delta M_\xi, \Delta M_\theta, \Delta \bar{M}_{\xi\theta}, \Delta U_\xi, \Delta U_\theta, \Delta W, \Delta \epsilon_{\xi m}, \Delta \epsilon_{\theta m}, \Delta \epsilon_{\xi\theta m}, \Delta x_\xi, \Delta x_\theta, \Delta x_{\xi\theta}, \Delta \Phi_\xi, \Delta \Phi_\theta, \Delta \sigma_\xi, \Delta \sigma_\theta, \Delta \sigma_{\xi\theta}, \Delta \sigma_\xi^{vp}, \Delta \sigma_\theta^{vp}, \Delta \sigma_{\xi\theta}^{vp}, \Delta \epsilon_\xi^{vp}, \Delta \epsilon_\theta^{vp}, \Delta \epsilon_{\xi\theta}^{vp}, \Delta N_\xi^{vp}, \Delta N_\theta^{vp}, \Delta \bar{N}_{\xi\theta}^{vp}, \Delta M_\xi^{vp}, \Delta M_\theta^{vp}, \Delta \bar{M}_{\xi\theta}^{vp}$ に対して、式(2), (5)~(7), (15)~(19)の32個の式が得られたことになる。

2.2 無次元方程式 一般に非対称問題を解析するには、各変数を θ 方向にフーリエ級数で表し、その係数を定めればよい。そこで上に示した 32 個の変数のうち、 $\Delta \varepsilon^{vp}$ を除く 29 個の変数と分布荷重をフーリエ

級数に展開する。フーリエ係数には、一般に対応する小文字を採用するが、 σ には s を用いる⁽⁶⁾。これらのフーリエ展開式を式(18)に代入し、フーリエ係数表示すると、

$$\left. \begin{aligned} \Delta n_\xi &= A_1 \Delta e_{\xi m} + A_2 \Delta e_{\theta m} + B_1 \Delta k_\xi + B_2 \Delta k_\theta - \Delta n_\xi^{vp} \\ \Delta n_\theta &= A_1 \Delta e_{\theta m} + A_2 \Delta e_{\xi m} + B_1 \Delta k_\theta + B_2 \Delta k_\xi - \Delta n_\theta^{vp} \\ \Delta \bar{n}_{\xi\theta} &= A_3 \Delta e_{\xi\theta m} + B_3 \Delta k_{\xi\theta} - \Delta \bar{n}_{\xi\theta}^{vp} \\ \Delta m_\xi &= (B_1/\lambda^2) \Delta e_{\xi m} + (B_2/\lambda^2) \Delta e_{\theta m} + C_1 \Delta k_\xi + C_2 \Delta k_\theta - \Delta m_\xi^{vp} \\ \Delta m_\theta &= (B_1/\lambda^2) \Delta e_{\theta m} + (B_2/\lambda^2) \Delta e_{\xi m} + C_1 \Delta k_\theta + C_2 \Delta k_\xi - \Delta m_\theta^{vp} \\ \Delta \bar{m}_{\xi\theta} &= (B_3/\lambda^2) \Delta e_{\xi\theta m} + C_3 \Delta k_{\xi\theta} - \Delta \bar{m}_{\xi\theta}^{vp} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

ここに、

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & 0 \\ A_2 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} = \frac{\bar{A}}{hE_0}, \quad \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & 0 \\ B_2 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{bmatrix} = \frac{\bar{B}}{ahE_0}, \quad \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 \\ C_2 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} = \frac{\bar{C}}{h^3E_0}, \quad \lambda = h/a \dots\dots\dots (22)$$

で、 E_0 は代表縦弾性係数である。なお、フーリエ係数の添字 (n) は便宜上省略する。

さらにフーリエ展開式を他の基礎式にも代入し、フーリエ級数に関する式をつくり、これらの式から順次未知数を消去すると、最後に $\Delta u_\xi, \Delta u_\theta, \Delta w, \Delta m_\xi$ に関する次の 4 元連立二階微分方程式が得られる⁽⁹⁾。

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_6 & 0 \\ 0 & a_{13} & a_{16} & 0 \\ a_{20} & a_{23} & a_{26} & a_{29} \\ 0 & 0 & a_{35} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Z}'' + \begin{bmatrix} a_2 & a_4 & a_7 & a_9 \\ a_{11} & a_{14} & a_{17} & 0 \\ a_{21} & a_{24} & a_{27} & a_{30} \\ a_{32} & 0 & a_{36} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Z}' + \begin{bmatrix} a_3 & a_5 & a_8 & a_{10} \\ a_{12} & a_{15} & a_{18} & a_{19} \\ a_{22} & a_{25} & a_{28} & a_{31} \\ a_{33} & a_{34} & a_{37} & a_{38} \end{bmatrix} \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial^2 \Delta u_\xi / \partial \tau^2 \\ \partial^2 \Delta u_\theta / \partial \tau^2 \\ \partial^2 \Delta w / \partial \tau^2 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 $\mathbf{Z} = \{\Delta u_\xi, \Delta u_\theta, \Delta w, \Delta m_\xi\}^T$ であり、 τ は無次元時間で、

$$\tau = \sqrt{E_0/\rho_0}(t/a), \quad \rho_0 = \sum_{i=1}^n \rho_i h_i / h \dots\dots\dots (24)$$

である。また、 $a_1 \sim a_{38}$ は殻の形状と材料定数の値から定まる係数であり⁽⁹⁾、 $d_1 \sim d_4$ は殻の形状の他に、荷重と粘塑性によるみかけの内力成分から定まる定数で、次式によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= -\Delta p_\xi + \Delta n_\xi^{vp'} + \gamma \Delta n_\xi^{vp} - \gamma \Delta n_\theta^{vp} + (n/\rho) \Delta \bar{n}_{\xi\theta}^{vp} - (B_1/C_1) \Delta m_\xi^{vp'} + (\gamma/C_1)(B_2 - B_1 + \lambda^2 \omega_\xi C_2) \Delta m_\xi^{vp} \\ &\quad - \lambda^2 \gamma \omega_\xi \Delta m_\theta^{vp} + (n\lambda^2/2\rho)(3\omega_\xi - \omega_\theta) \Delta \bar{m}_{\xi\theta}^{vp} \\ d_2 &= -\Delta p_\theta + \Delta \bar{n}_{\xi\theta}^{vp'} + 2\gamma \Delta \bar{n}_{\xi\theta}^{vp} - (n/\rho) \Delta n_\theta^{vp} + (n/\rho)(1/C_1)(B_2 + \lambda^2 \omega_\theta C_2) \Delta m_\xi^{vp} - (n/\rho) \lambda^2 \omega_\theta \Delta m_\theta^{vp} \\ &\quad + (\lambda^2/2)(3\omega_\theta - \omega_\xi) \Delta \bar{m}_{\xi\theta}^{vp'} + (\lambda^2/2)\{\gamma(3\omega_\theta + \omega_\xi) - \omega_\xi'\} \Delta \bar{m}_{\xi\theta}^{vp} \\ d_3 &= -\Delta p_\zeta - \omega_\xi \Delta n_\xi^{vp} - \omega_\theta \Delta n_\theta^{vp} + \lambda^2 \gamma (C_2/C_1) \Delta m_\xi^{vp'} + (1/C_1)(\omega_\xi B_1 + \omega_\theta B_2 - \lambda^2\{\omega_\xi \omega_\theta - (n^2/\rho^2)\} C_2) \Delta m_\xi^{vp} \\ &\quad - \lambda^2 \gamma \Delta m_\theta^{vp'} + \lambda^2\{\omega_\xi \omega_\theta - (n^2/\rho^2)\} \Delta m_\theta^{vp} + 2\lambda^2 (n/\rho) \Delta \bar{m}_{\xi\theta}^{vp'} + 2\lambda^2 \gamma (n/\rho) \Delta \bar{m}_{\xi\theta}^{vp} \\ d_4 &= \Delta m_\xi^{vp} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

なお、式(20)において $i=1, \xi_1=h/2, \xi_0=-h/2$ とおくと \bar{B} が零になり、式(21)、(23)は以前に著者らが導いた単層殻の諸式に一致する⁽⁶⁾。

式(23)の解 \mathbf{Z} が求められると、各層の応力は次式から計算できる。

$$\{\Delta s_i\} = \{F_i\} \mathbf{Z}' + \{H_i\} \mathbf{Z} + \{\Delta s_i^{vp}\} \dots\dots\dots (26)$$

ここに、

$$\{\Delta s_i\} = \{\Delta s_{\xi i}, \Delta s_{\theta i}, \Delta s_{\xi\theta i}\}^T$$

$$\{\Delta s_i^{vp}\} = \begin{cases} \frac{E_i}{E_0} \frac{\zeta}{a} \frac{1}{1-\nu_i^2} \frac{1}{C_1} \Delta m_\xi^{vp} - \Delta s_{\xi i}^{vp} \\ \frac{E_i}{E_0} \frac{\zeta}{a} \frac{1}{1-\nu_i^2} \frac{\nu}{C_1} \Delta m_\xi^{vp} - \Delta s_{\theta i}^{vp} \\ - \Delta s_{\xi\theta i}^{vp} \end{cases}, \quad \zeta_{i-1} \leq \zeta \leq \zeta_i \dots\dots\dots (27)$$

F_i と H_i は殻の形状、各層の材質と厚さなどから定まる係数である。

粘塑性に関する内力成分の増分のフーリエ係数は、式(17), (19)からそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 h \sum_{n=0}^{\infty} \{ \Delta m_{\xi}^{vp(n)}, \Delta m_{\theta}^{vp(n)}, \Delta \bar{m}_{\xi\theta}^{vp(n)} \} [A_n] &= \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \{ \Delta \varepsilon_{\xi}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\theta}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\xi\theta}^{vp} \} [D_i] d\xi \\ (\sigma_0 h^3/a) \sum_{n=0}^{\infty} \{ \Delta m_{\xi}^{vp(n)}, \Delta m_{\theta}^{vp(n)}, \Delta \bar{m}_{\xi\theta}^{vp(n)} \} [A_n] &= \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \{ \Delta \varepsilon_{\xi}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\theta}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\xi\theta}^{vp} \} [D_i] \zeta d\xi \\ \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \Delta s_{\xi}^{vp(n)}, \Delta s_{\theta}^{vp(n)}, \Delta s_{\xi\theta}^{vp(n)} \} [A_n] &= \{ \Delta \varepsilon_{\xi}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\theta}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\xi\theta}^{vp} \} [D_i] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

ここに、 $[A_n] = [\cos n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta]$ (対角行列) で、 σ_0 は代表応力である。右辺の粘塑性ひずみ増分は、応力値から式(15)を用いて計算できる。また積分には Simpson の 1/3 則を用いる。

3. 数値計算法

ある任意の計算段階における解は、式(23)を適当な境界条件のもとで解けば得られ、任意の時刻の解は、各段階の解の増分を積分することによって得られる。しかしながら、式(23)を厳密に理論解析することは困難であるから、差分法によって数値的に解を求める。この数値解析法は著者らがすでに発表した単層殻の場合⁽⁵⁾⁽⁶⁾とほぼ同様であるので、ここでは紙面の都合もあり省略する。

4. 数値例

計算例として、両端固定で、内側にチタンの層を、外側に軟鋼の層を配した二層構造の円筒殻を取り上げた。荷重は軸方向に一様で、円周方向には余弦状で、時間に対しては半正弦波状の衝撃外圧とした(図3)。チタン層の殻厚に対する比 h_1/h は、 $h_1/h=0, 0.2, 0.5$ の3通りとした。

問題の対称性から、計算は円筒殻の 1/4 形状についてのみ行えば十分である。円筒殻の形状パラメータは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a=L, \xi=s/L, \rho=1/3, \omega_0=3 \\ \rho'=\gamma=\omega_{\xi}=\omega_{\xi'}=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

また ξ の差分間隔 $\Delta\xi$ は、差分点の数を N として、

$$\Delta\xi=1/\{2(N-1)\} \dots\dots\dots (30)$$

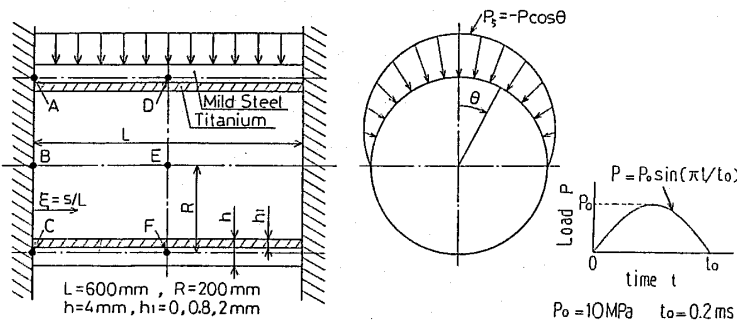


図3 円筒殻および荷重

となる。

境界条件は、点Dでは対称性により、

$$\Delta U_{\xi} = \Delta W' = \Delta M_{\xi}' = \Delta \bar{N}_{\xi\theta} = 0 \dots\dots\dots (31)$$

点Aでは固定の条件を用いて、

$$\Delta U_{\xi} = \Delta U_{\theta} = \Delta W = \Delta W' = 0 \dots\dots\dots (32)$$

なお、式(28)の σ_0 は、本計算では $\sigma_0=1$ とした。

チタンと軟鋼の材料特性は、実験より求めた次のものを用いた⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾。

チタン：

$$\left. \begin{aligned} E=91 \text{ GPa}, \nu=0.33, \rho_1=4.51 \text{ g/cm}^3 \\ \gamma_1=800 \text{ 1/s}, \sigma^*=216 \text{ MPa} \\ \Phi(F) = \{ (\bar{\sigma} - \sigma^*) / \sigma^* \}^{7.4} \end{aligned} \right\} \dots\dots (33)$$

軟鋼：

$$\left. \begin{aligned} E=200 \text{ GPa}, \nu=0.29, \rho_2=7.86 \text{ g/cm}^3 \\ \gamma_2=40.4 \text{ 1/s}, \sigma^*=262 \text{ MPa} \\ \Phi(F) = \{ (\bar{\sigma} - \sigma^*) / \sigma^* \}^{5.0} \end{aligned} \right\} \dots\dots (34)$$

差分点数は、子午線方向に $N=51$ 、殻厚方向には各層ごとに 11 個の格子点を採用した。またフーリエ級数の項数は 20 とし、時間間隔は $\Delta t=1.0 \mu\text{s}$ とした。これらの値は解の収束性と計算機の容量および計算時間を考慮して決定した。

図4~15に、計算結果を例示する。

図4は点D, E, F ($\xi=0.5, \theta=0, 90, 180^\circ$) の半径方向変位 W と円周方向変位 U_{θ} の時間的变化を示す。負荷直後まず点Dが内側に変位し、続いて点Eが、さらに遅れて点Fが外側に変位する。チタンのほうが軟鋼よりも縦弾性係数、初期降伏点とも低く、粘塑性ひ

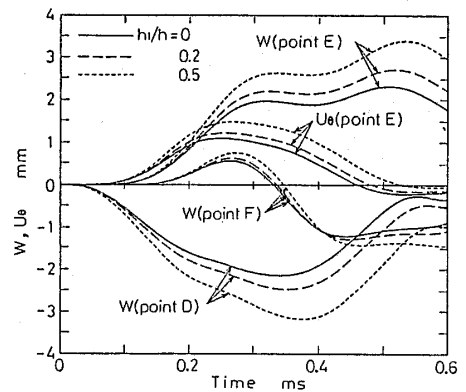


図4 W, U_θの時間的变化

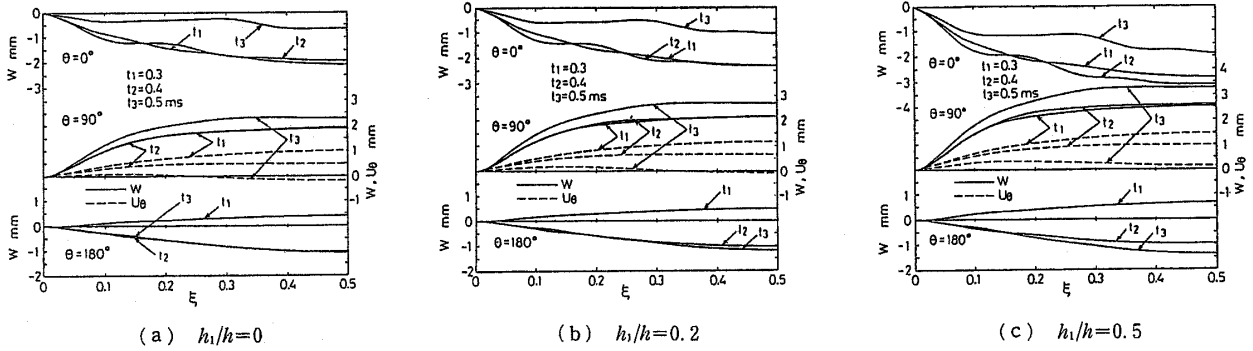


図 5 W, U_θ の子午線方向分布

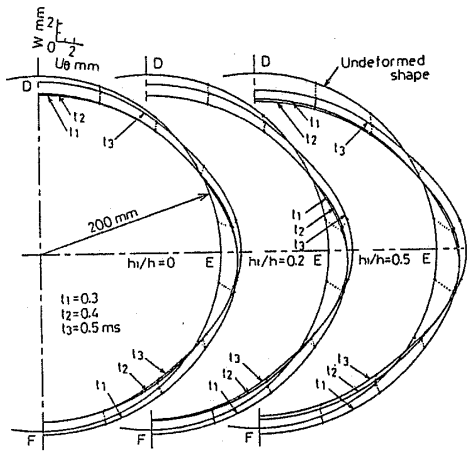


図 6 横断面 ($\xi=0.5$) の形状の時間的变化

ずみが生じやすいため、チタンの層の厚さが増すほど変形量は大きく、変動周期は長くなっている。

図 5 は時刻 $t_{1,2,3}=0.3, 0.4, 0.5$ ms における $\theta=0, 90, 180^\circ$ の W, U_θ の子午線方向分布を、図 6 は $\xi=0.5$ の軸断面の変形状態を示す。点線は変形経路を示す。 U_θ は、図には示していないが、 W のほぼ $1/20$ 程度である。図 5 および 6 から、円筒殻の変形の様子がほぼ把握できる。 $\theta=0^\circ$ の子午線上では、時間の経過とともに、小さないくつかの波状の変形が現れる。チタンの層の厚さが増すほど変形量は全般的に大きくなり、特に $\theta=0^\circ$ 付近で、チタン層の厚さによる変形量の差が顕著である。

図 7 は点 A~F の各合応力成分の時間的变化を示したものである。各点の h_1/h の値による差異は、変位成分ほど顕著ではないが、各内力成分に多少現れる。

図 8, 9 は時刻 $t_{1,2,3}$ における各合応力成分の $\theta=0, 90, 180^\circ$ の子午線方向の分布を示したものである。 $N_\xi, \bar{N}_{\xi\theta}$ は子午線に沿って単調な分布を示すが、 N_θ の分布は変動し、特に $\theta=0^\circ$ において著しい。 h_1/h の値による差異は、特に認められない。

図 10 は点 A, B, C, F の各合モーメント成分の時間的变化を示している。点 A の M_ξ は、特に大きな値

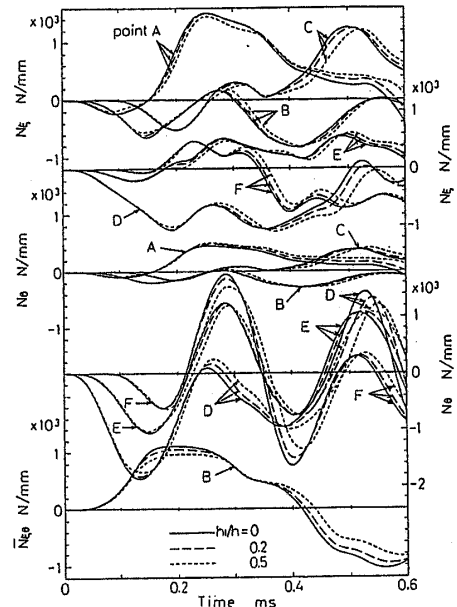


図 7 合応力の時間的变化

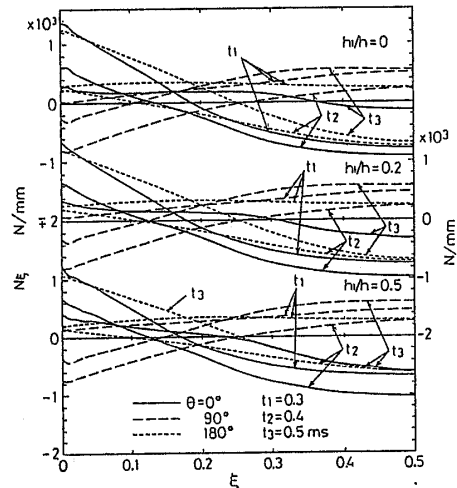


図 8 N_θ の子午線方向分布

を示し、点 F の M_ξ, M_θ 、点 B の $\bar{M}_{\xi\theta}$ とともに、 h_1/h の値による差が極めて顕著である。

図 11, 12 は時刻 $t_{1,2,3}$ における各合モーメント成分の $\theta=0, 90, 180^\circ$ の子午線上の分布を示したものであ

る。 $\theta=0^\circ$ の子午線上では、 M_ξ 、 M_θ ともに変動が著しい。 $\theta=180^\circ$ の子午線上では、 軟鋼のみの場合は固定端を除いて曲げモーメントは小さく、 ほぼ膜応力状態を示しているが、 チタン層の厚さが増すと、 曲げモーメント (特に M_θ) が大きくなる。 また $\theta=90^\circ$ の子午線上の $\bar{M}_{\xi\theta}$ も増加する。 一般に合モーメントは合応力と異なり、 h_1/h の値による差異が大きくなる傾向を示す。

次に、 点Aおよび点Fにおける σ_ξ と σ_θ の殻厚方向分布を、 それぞれ図 13、 14 に示す。 二層構造の場合には、 境界をはさんで不連続が生じ、 チタンの層では応力分布は小さくなっている。

最後に図 15 は、 $h_1/h=0$ と 0.5 の場合の塑性域の進展の様子を示したものである。 いずれも $t=0.044$ ms のとき初めて降伏するが、 その位置は異なり、 $h_1/h=0$ のときは点Aの内面で、 $h_1/h=0.5$ のときは点Aの外面である。 時間の経過とともに、 塑性領域は厚さ方向、

子午線方向および円周方向に広がるが、 点C近傍では弾性域のままである。 降伏した領域は時間の経過とともに、 部分的に除荷ならびに再降伏を繰返す。 $h_1/h=0.5$ の場合は、 $\theta=0^\circ$ の子午線付近で軟鋼の層が早く降伏し、 境界面で塑性域が不連続になる。 また二層殻では、 $\theta=90\sim 180^\circ$ の内表面で、 広い範囲にわたって弾性域が残っている。

本計算には名古屋大学大型計算機センターの FACOM M 780+VP 200 を使用し、 それぞれの数値例の計算時間は約 15 分である。

5. 結 言

本論文では、 一般の非対称荷重が作用する多層軸対称殻の弾/粘塑性動的応答問題の解法を示した。 弾/粘

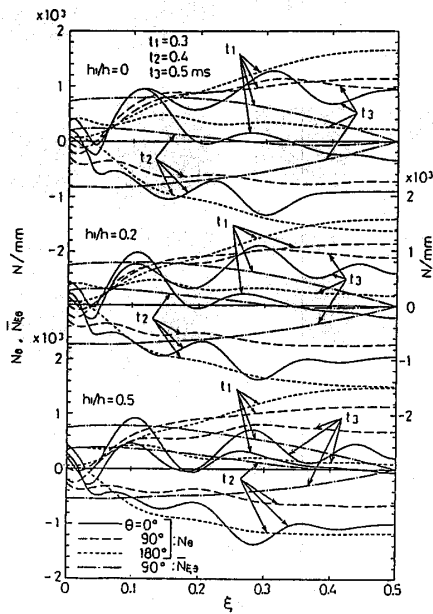


図 9 N_θ 、 $\bar{N}_{\xi\theta}$ の子午線方向分布

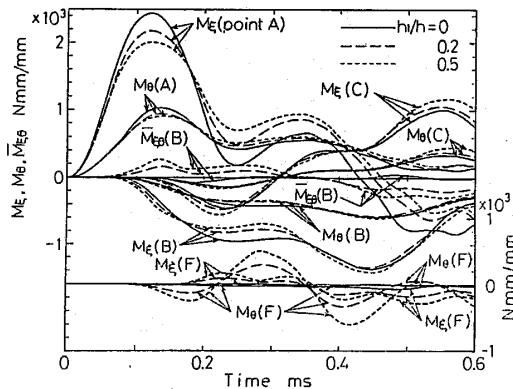


図 10 合モーメントの時間的变化

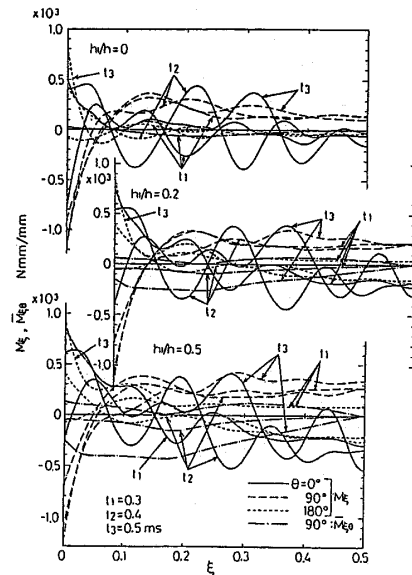


図 11 M_ξ 、 $\bar{M}_{\xi\theta}$ の子午線方向分布

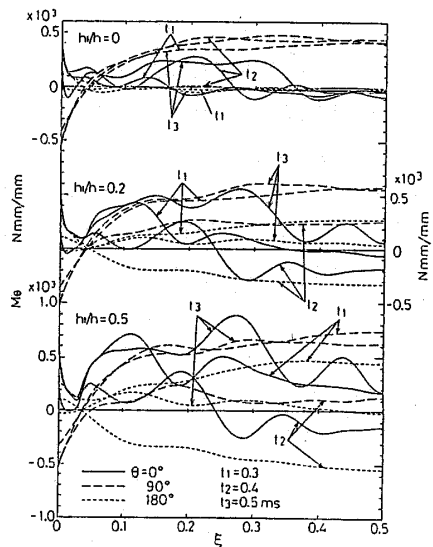


図 12 M_θ の子午線方向分布

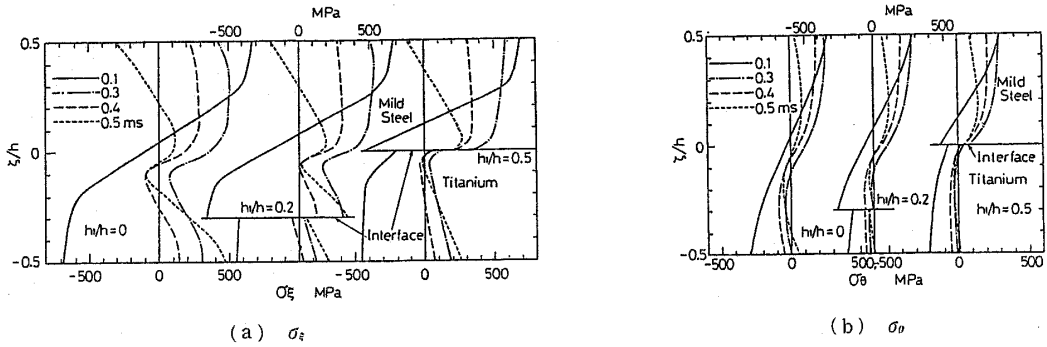


図 13 点Aの応力分布

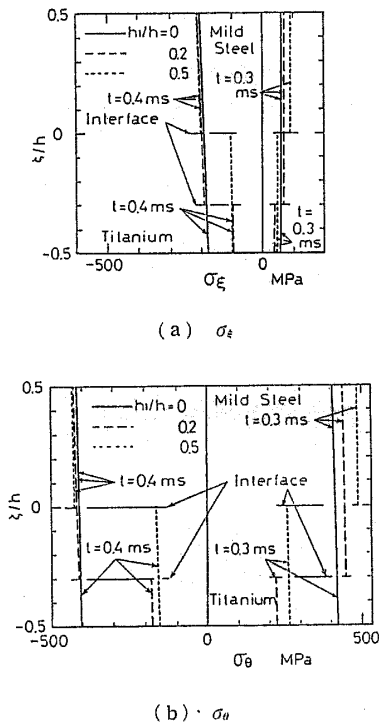


図 14 点Fの応力分布

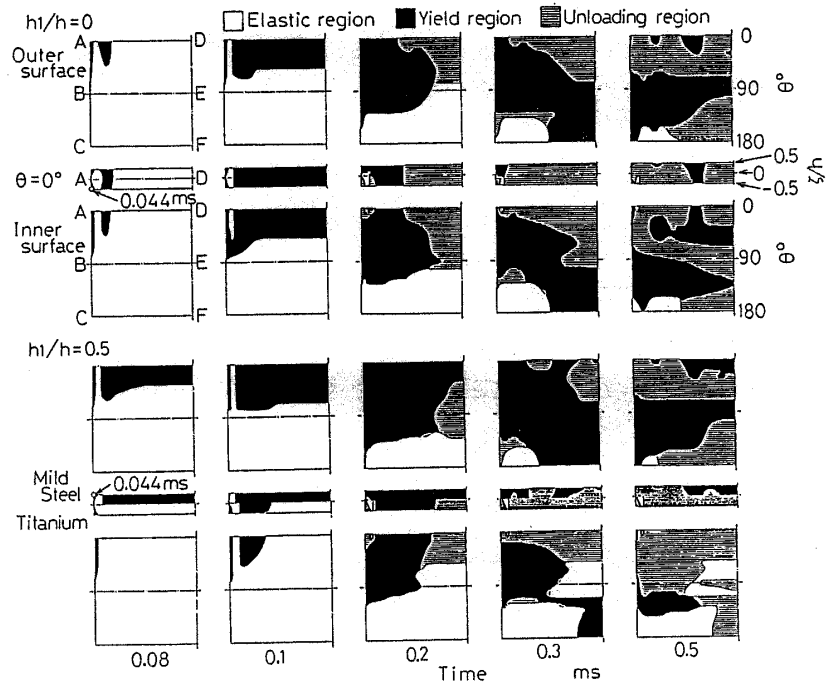


図 15 降伏領域の進展

塑性の構成関係には Perzyna の式を用い, Sanders の単層殻の弾性変形問題の解法を多層軸対称殻の弾/粘塑性動的応答問題に拡張した。導かれた基礎式の解法には, 差分法を適用した。

数値例として, 内側にチタンの層を, 外側に軟鋼の層を配した二層構造の円筒殻の半周部分に, 余弦状の衝撃外圧が作用する問題を取扱い, h_1/h の値を変えて, 内力および変形の時間的変化の様子を解析した。その結果, 変形については, チタンの層の厚さが増すほど変形量は大きく, 変動周期も長くなった。また合応力には, h_1/h の値による大きな相違は認められなかったが, 合モーメントには h_1/h の値による差異が大きく現れた。また殻厚方向の応力分布ならびに塑性域

の進展の様子にも, 差異が認められた。

文 献

- (1) Nagarajan, S. and Popov, E. P., *Int. J. Numer. Method Eng.*, 9-3(1975), 535.
- (2) 村瀬・西村, 機論, 45-400, A (1979), 1554.
- (3) 竹園・埜, 機論, 47-421, A (1981), 949.
- (4) Atkatsch, R. S., ほか 2 名, *Trans. ASME, Ser. E.* 50-1(1983), 131.
- (5) 竹園・ほか 2 名, 機論, 52-482, A (1986), 2395.
- (6) 埜・ほか 3 名, 機論, 54-503, A (1988), 1457.
- (7) Sanders, J. L., Jr., *NASA Rep.*, R-24(1959), 1.
- (8) Perzyna, P., *Adv. Appl. Mech.*, 9(1966), 243, Academic Press.
- (9) 竹園・ほか 2 名, 機論, 54-498, A (1988), 405.
- (10) 竹園・ほか 3 名, 材料, 31-350(1982), 1128.