

線形弾性問題における領域最適化解析* (力法によるアプローチ)

畔上 秀幸*¹, 呉 志 強*²

Domain Optimization Analysis in Linear Elastic Problems (Approach Using Traction Method)

Hideyuki AZEGAMI and Zhi Chang WU

We present a numerical analysis method and results using the traction method for optimization problems of domains in which linear elastic problems are defined. In this paper we consider the application of the traction method which was proposed as a solution to domain optimization problems in elliptic boundary value problems. The minimization problems of the mean compliance were treated. Using the Lagrange multiplier method, we obtain the shape gradient functions for these domain optimization problems from the optimality criteria. In this drawing process we consider the variation of the surface force acting on the boundary and the variation of the stiffness function and the body force distributed in the domain. We show successful solutions of the problem of an infinite plate with a hole and of the problems of a rectangular plate clamped at both ends.

Key Words: Optimum Design, Computer-Aided Design, Numerical Analysis, Computational Mechanics, Finite-Element Method, Domain Optimization, Linear Elastic Problem, Gradient Method, Traction Method

1 はじめに

線形弾性体の領域形状を設計変数にした領域最適化問題は固体構造物を設計する際に現出する普遍的な問題である。本論文では、この問題に対する実用的な数値解析の方法について検討を加えてみたい。

この領域最適化問題に対する実用的なアプローチの一つは最適化問題の定式化に先立って線形弾性体を有限自由度のモデルに置き換えておく方法である。このモデルを基礎にすれば、領域最適化問題の設計空間が有限次元ベクトル空間で与えられることになることから、通常の寸法最適化問題と同様、数値計画法を利用することによって数値解析を行うことが可能になる。線形弾性体を有限要素法の手続きでモデル化して、その境界上節点の座標を設計変数にする方法は古くから試みられてきた⁽¹⁾。この方法を用いた場合に現われる境界の波打ち現象はアダプティブ有限要素法を用いたメッシュの再分割によってある程度抑えられることが調べられている⁽²⁾。線形弾性体の境界をスプライン関数で表現して、スプライン関数の自由度に置き換える方法も研究されている⁽³⁾。しかし、これらの方法ではモデル自

由度数の増加は設計空間次元数の増加に対応するために最適解の探索が急激に困難になるという問題を抱えている。

この領域最適化問題に対するもう一つのアプローチは、領域最適化問題を連続体のままで定式化しておいて、分布系の最適化理論を適用することによって導出される領域変動の支配方程式を基礎にする方法である。数値解析法はこの支配方程式を解くための方法として定式化される。著者の一人⁽⁴⁾が楕円型境界値問題における領域最適化問題の解法として提案した力法 (traction method) はこの方法の一つである。この方法では、領域変動の支配方程式を線形弾性問題の境界値問題に置き換えて解くために、有限要素法や境界要素法などが利用できるという点で実用的である。支配方程式に現われる形状勾配関数も有限要素法や境界要素法などを利用して解析することが可能である。

本論文では、線形弾性体の領域最適化問題に対してこの方法を適用してみたい。本論文の目標は次の2つである。一つは線形弾性体の領域最適化問題の一つとして平均コンプライアンス最小化問題を取り上げて、その定式化とこの問題に対する最適性規準とそれに基づく形状勾配関数を明らかにすることである。この場合に、表面力が作用する境界が変動する場合や、物体

* 原稿受付 平成5年12月3日。

*¹ 正員, 豊橋技術科学大学 (〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

*² 正員, 豊橋技術科学大学院。

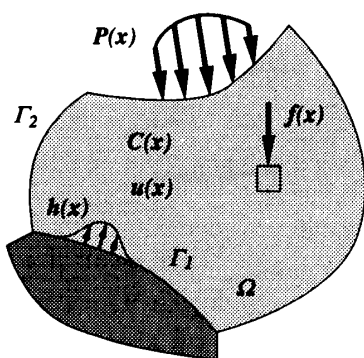


図1 線形弾性問題

力や剛性が一様でない分布をもつ場合も考慮する。もう一つの目標は、最適形状の解析解が得られている問題や表面力が作用する境界が変動する問題に対する力法の適用を通して、この数値解法や先に示した形状勾配関数の妥当性を検討することである。これらの準備として、線形弾性問題と領域変動の表記法を最初にまとめておく。その後で、平均コンプライアンス最小化問題の定式化とこの問題に対する最適性規準と形状勾配関数を導出する。力法はその後で示すことにする。最後に、数値解析を通じた検討結果を紹介する。

2 線形弾性問題

線形弾性問題に関する表記法を簡単にまとめておくことにしよう。

図1のような閉領域 $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ を占める線形弾性連続体の変位 $u \in \mathbb{R}^n$ in $\bar{\Omega}$ を解く問題を考える。開領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ には物体力 $f \in \mathbb{R}^n$ が作用し、境界 $\partial\Omega = \Gamma$ の一部 Γ_1 には強制変位 $h \in \mathbb{R}^n$ が存在し、残りの境界 Γ_2 には表面力 $P \in \mathbb{R}^n$ が作用している状態を仮定する。 \mathbb{R} は実数を表す。

この境界値問題に対する弱形式あるいは変分形式は次のように表すことができる。

$$a(v, w) = l(w) - l_h(w) \\ v = u - h \in H_{\Gamma_1} \quad \forall w \in H_{\Gamma_1} \quad (1)$$

ただし、双一次形式 $a(v, w)$ と一次形式 $l(w)$, $l_h(w)$ は次のように定義する。

$$a(v, w) = \int_{\Omega} C_{ijkl} v_{k,l} w_{i,j} dx \quad (2)$$

$$l(w) = \int_{\Omega} f_i w_i dx + \int_{\Gamma_2} P_i w_i d\Gamma \quad (3)$$

$$l_h(w) = \int_{\Omega} C_{ijkl} h_{k,l} w_{i,j} dx \quad (4)$$

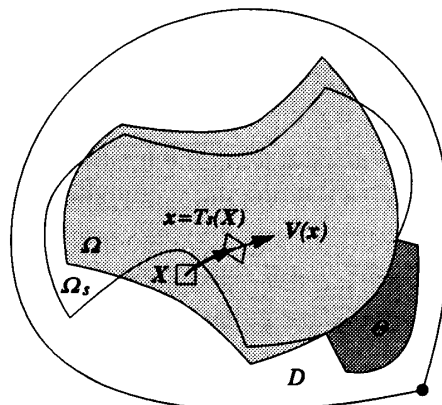


図2 領域変動

また、

$$H_{\Gamma_1} = \{v \in H^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n) \mid v = 0 \text{ on } \Gamma_1\} \quad (5)$$

Hooke 剛性 $C \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^4)$ は次のような対称性と正定値性を仮定する。

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (6)$$

$$\exists \alpha > 0 : C_{ijkl} \xi_{kl} \xi_{ij} \geq \alpha \xi_{ij} \xi_{ij}, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji} \\ \forall \xi \in \mathbb{R}^2 \text{ in } \Omega \quad (7)$$

$f \in H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $h \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $P \in H^{-1/2}(\Gamma_2; \mathbb{R}^n)$ を仮定する。なお、本論文のテンソル表示では Einstein 総和規約と偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用する。また、 $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ は有界可積分 Lebesgue 関数空間、 $H^m(\Omega; \mathbb{R}^n)$ は Sobolev 関数空間を表す。

3 領域変動

領域最適化問題を定式化する前に、領域変動の表現方法をまとめておこう⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

図2のような変動が許されているすべての領域を含む固定された開領域を許容領域 D と定義する。許容領域の境界 ∂D は区分的に滑らかであると仮定する。領域の変動は初期領域 $\bar{\Omega}$ を含む \bar{D} を定義域とし、変動後の領域 $\bar{\Omega}_s$ を含む \bar{D} を値域とする次のような1対1写像 $T_s(X)$ を用いて表現することができる。

$$T_s(X) : \bar{D} \ni X \mapsto x(s) \in \bar{D} \quad (8)$$

ただし、 D を変動させないために、境界 ∂D 上の特異点は変動しないことにする。この特異点を含めて変動を拘束する領域 Θ では次の関係を仮定する。

$$T_s(X) = I(X) \quad \forall X \in \Theta \subset \bar{D} \quad (9)$$

ここで、 s は変動の履歴を表す。また、 $X \in \bar{\Omega}$ は Lagrange 座標系あるいは物質座標系、 $x \in \bar{\Omega}_s$ は Euler 座標系あるいは実座標系と呼ばれる。

領域の微小変動は次のように表すことができる。

$$T_{s+\Delta s}(X) = T_s(X) + \Delta s V + O(|\Delta s|) \quad (10)$$

ただし、写像 $T_s(X)$ の Euler 導関数を与える速度場 V は次のように定義される。

$$\frac{\partial T_s}{\partial s} \circ T_s^{-1}(x) = V(x) \quad (11)$$

$$V \in C_\theta = \{V \in C^1(\bar{D}; \mathbb{R}^n) \mid n_i V_i = 0 \text{ on } \partial D, V = \mathbf{0} \text{ in } \Theta \subset \bar{D}\} \quad (12)$$

なお、 $z \circ y(x)$ は $x \mapsto y(x) \mapsto z(y(x))$ の関係を表す。 $C^k(\bar{D}; \mathbb{R}^n)$ は k 級の連続関数空間を表す。また、 $\Delta s O(|\Delta s|) \rightarrow 0$ ($\Delta s \rightarrow 0$) の関係を仮定する。

領域変動に伴う分布関数の導関数について考えてみよう。領域が変動することを仮定すると、分布関数は Lagrange 表示 $\phi^s(X)$, $X \in \Omega$ と Euler 表示 $\phi_s(x)$, $x \in \Omega_s$ を持つことになる。両者は写像 $T_s(X)$ を用いて次式で関連づけられる。

$$\phi^s(X) = \phi_s \circ T_s(X) \quad \forall X \in \Omega \quad (13)$$

式(10)の関係を用いると、Euler 導関数あるいは物質導関数 $\dot{\phi}_s$ と形状導関数 ϕ'_s の間に次の関係が成立する。

$$\dot{\phi}_s = \phi'_s + \phi_{s,i} V_i \quad (14)$$

ただし、 $\dot{\phi}_s$ と ϕ'_s は次式で定義される。

$$\dot{\phi}_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} (\phi^{s+\Delta s} - \phi^s) \quad (15)$$

$$\phi'_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} (\phi_{s+\Delta s} - \phi_s) \quad (16)$$

汎関数の導関数は次のように得られる。汎関数 J が分布関数 ϕ_s の領域積分

$$J = \int_{\Omega_s} \phi_s dx \quad (17)$$

で与えられている場合、導関数 \dot{J} は式(10)の関係を用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \int_{\Omega_s} \dot{\phi}_s dx + \int_{\Gamma_s} \phi_s v_n d\Gamma \\ &= \int_{\Omega_s} (\dot{\phi}_s + \phi_{s,i} V_i) dx \end{aligned} \quad (18)$$

ただし、 $v_n = n_i V_i$ を表している。

汎関数 J が分布関数 ϕ_s の境界積分

$$J = \int_{\Gamma_s} \phi_s d\Gamma \quad (19)$$

で与えられている場合、導関数 \dot{J} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \int_{\Gamma_s} \{\dot{\phi}_s + (\phi_{s,i} n_i + \phi_{s,\kappa}) v_n\} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_s} (\dot{\phi}_s + \phi_{s,\kappa} v_n) d\Gamma \end{aligned} \quad (20)$$

ただし、 κ は領域が 2 次元の場合曲率、3 次元の場合平均曲率を表している。

4 平均コンプライアンス最小化問題

線形弾性連続体の領域最適化問題を具体的に考えてみよう。本論文では、平均コンプライアンスを目的汎関数に選ぶことにする。この場合、後で示すように、領域最適化問題が自己随伴問題となり、形状勾配関数が線形弾性問題の解である変位だけによって評価できることになる。この意味で、平均コンプライアンスは力学的に単純な目的汎関数であると考えられる。

4.1 定式化 平均コンプライアンス最小化問題を定式化しよう。まず、分布関数 C, f, h, P は領域変動に対して一意に決定されるものと仮定する。例えば、次のような条件を考えることができる。

$$\text{空間固定 } (\cdot) = (\cdot), V_i; (\cdot)' = \mathbf{0} \quad \text{in } \bar{\Omega} \quad (21)$$

$$\text{物質固定 } \begin{cases} (\cdot) = \mathbf{0}; (\cdot)' + (\cdot),_i V_i = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\ (\cdot) = \mathbf{0}; (\cdot)' + (\cdot),_i n_i v_n = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{物質共変 } \begin{cases} (\cdot) + (\cdot) V_{i,i} = \mathbf{0}; \\ (\cdot)' + \{(\cdot) V_i\},_i = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\ (\cdot) + (\cdot) \kappa v_n = \mathbf{0}; \\ (\cdot)' + \{(\cdot),_i n_i + (\cdot) \kappa\} v_n = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (23)$$

線形弾性体領域の大きさ

$$m = \int_{\Omega_s} dx \quad (24)$$

に対して制約を設けることにする。この場合、平均コンプライアンス最小化問題は次のように定式化される。

▷ 問題：式(11)と(12)を仮定した領域変動に対して、一意に決定される $C \in C^1(\bar{D}; \mathbb{R}^{n^2})$, $f, h, P \in C^1(\bar{D}; \mathbb{R}^n)$ と領域の大きさに対する上限値 $M \in \mathbb{R}_+$ が与えられているとき、

$$\text{平均コンプライアンス } l(u) \quad (25)$$

が最小となる領域 Ω_s を求めよ。ただし、状態方程式

$$\begin{aligned} a(v, w) &= l(w) - l_h(w) \\ v &= u - h \in H_{\Gamma_1} \quad \forall w \in H_{\Gamma_1} \end{aligned} \quad (26)$$

と質量制約

$$m - M \leq 0 \quad (27)$$

は満たしていなければならない。◁

なお、 \mathbb{R}_+ は正の実数を表す。

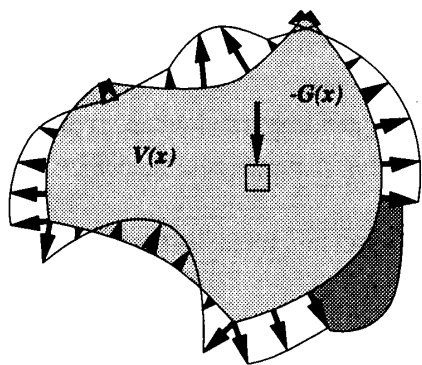


図3 力法

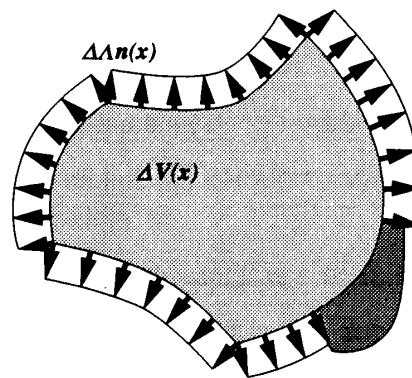


図4 一様引張り

4.2 最適性規準 この問題に Lagrange 乗数法を適用して、最適性規準を導出してみよう。

等式制約条件式 (26) の Lagrange 乗数には w を利用して、不等式制約条件式 (27) の Lagrange 乗数には Λ を用いることにすると、上の問題は Lagrange 関数

$$L = l(v) - l_h(v) - a(v, w) + l(w) - l_h(w) + \Lambda(m - M) \quad w \in H_{\Gamma_1} \quad \Lambda \in \mathbb{R}_+ \quad (28)$$

の停留化問題に書き換えることができる。

Lagrange 関数 L の領域変動に対する導関数 \dot{L} は、3章の公式を用いて、次式で表すことができる。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & \int_{\Omega_s} (f'_i v_i + f'_i v'_i) dx + \int_{\Gamma_s} f_i v_i n_j V_j d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{s2}} \{P'_i v_i + P_i v'_i \\ & + (P_{i,j} n_j v_i + P_i v_{i,j} n_j + P_i v_i \kappa) n_k V_k\} d\Gamma \\ & - \int_{\Omega_s} (C'_{ijkl} h_{k,l} v_{i,j} + C_{ijkl} h'_{k,l} v_{i,j} \\ & + C_{ijkl} h_{k,l} v'_{i,j}) dx - \int_{\Gamma_s} C_{ijkl} h_{k,l} v_{i,j} n_m V_m d\Gamma \\ & - \int_{\Omega_s} (C'_{ijkl} v_{k,l} w_{i,j} + C_{ijkl} v'_{k,l} w_{i,j} \\ & + C_{ijkl} v_{k,l} w'_{i,j}) dx - \int_{\Gamma_s} C_{ijkl} v_{k,l} w_{i,j} n_m V_m d\Gamma \\ & + \int_{\Omega_s} (f'_i w_i + f_i w'_i) dx + \int_{\Gamma_s} f_i w_i n_j V_j d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{s2}} \{P'_i w_i + P_i w'_i \\ & + (P_{i,j} n_j w_i + P_i w_{i,j} n_j + P_i w_i \kappa) n_k V_k\} d\Gamma \\ & - \int_{\Omega_s} (C'_{ijkl} h_{k,l} w_{i,j} + C_{ijkl} h'_{k,l} w_{i,j} \\ & + C_{ijkl} h_{k,l} w'_{i,j}) dx - \int_{\Gamma_s} C_{ijkl} h_{k,l} w_{i,j} n_m V_m d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_s} \Lambda n_i V_i d\Gamma + \dot{\Lambda}(m - M) \\ = & l(v') - l_h(v') - a(v', w) + l(w') \\ & - l_h(w') - a(v, w') + \dot{\Lambda}(m - M) + l_G(V) \quad (29) \end{aligned}$$

ただし、

$$l_G(V) = \int_{\Gamma_s} \{f_i (v_i + w_i) - C_{ijkl} (v_{k,l} w_{i,j} + h_{k,l} v_{i,j}$$

$$\begin{aligned} & + h_{k,l} w_{i,j}) + \Lambda\} n_m V_m d\Gamma \\ & + \int_{\Omega_s} \{f'_i (v_i + w_i) - C'_{ijkl} (v_{k,l} w_{i,j} + h_{k,l} v_{i,j} \\ & + h_{k,l} w_{i,j}) + C_{ijkl} (h'_{k,l} v_{i,j} + h'_{k,l} w_{i,j})\} dx \\ & + \int_{\Gamma_{s2}} \{P'_i v_i + P'_i w_i + (P_{i,j} n_j v_i + P_i v_{i,j} n_j \\ & + P_i v_i \kappa + P_{i,j} n_j w_i + P_i w_{i,j} n_j \\ & + P_i w_i \kappa) n_k V_k\} d\Gamma \quad (30) \end{aligned}$$

ここで、 C, f, h, P が領域変動に対して一意であれば、 $l_G(V)$ はベクトル関数 G を係数関数とする速度場 V の一次形式で次式のように与えられることになる。

$$l_G(V) = \int_{\Omega_s} G_i V_i dx \quad (31)$$

G は、領域変動を与える速度場に対する目的汎関数の感度係数を与えるベクトル関数という意味で、形状勾配関数 (shape gradient function) と呼ばれる。ここで、いくつかの場合を想定して、 G を具体的に求めてみよう。 C, f, h が空間固定で $h = \mathbf{o}$ in \bar{D} の場合を仮定しよう。さらに、 P も空間固定 $P' = \mathbf{o}$ のときには、 G は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} G = & \gamma_{\Gamma_s} ((f_i u_i + f_i w_i - C_{ijkl} u_{k,l} w_{i,j} + \Lambda) n) \\ & + \gamma_{\Gamma_{s2}} ((P_{i,j} n_j u_i + P_i u_{i,j} n_j + P_i u_i \kappa \\ & + P_{i,j} n_j w_i + P_i w_{i,j} n_j + P_i w_i \kappa) n) \quad (32) \end{aligned}$$

また、物質固定 $\dot{P} = \mathbf{o}$ のときには次のようになる。

$$\begin{aligned} G = & \gamma_{\Gamma_s} ((f_i u_i + f_i w_i - C_{ijkl} u_{k,l} w_{i,j} + \Lambda) n) \\ & + \gamma_{\Gamma_{s2}} ((P_{i,j} u_{i,j} n_j + P_i u_i \kappa + P_i w_{i,j} n_j \\ & + P_i w_i \kappa) n) \quad (33) \end{aligned}$$

さらに、物質共変 $\dot{P} + P \kappa v_n = \mathbf{o}$ のときには次のようになる。

$$\begin{aligned} G = & \gamma_{\Gamma_s} ((f_i u_i + f_i w_i - C_{ijkl} u_{k,l} w_{i,j} + \Lambda) n) \\ & + \gamma_{\Gamma_{s2}} ((P_{i,j} u_{i,j} n_j + P_i w_{i,j} n_j) n) \quad (34) \end{aligned}$$

これらの場合はいずれも G は境界上だけに分布した法線ベクトルの関数となる。

なお、トレース作用素 $\gamma_{\Gamma_s} \in \mathcal{L}(H^m(\Omega_s; \mathbb{R}^n); H^{m-1/2}(\Gamma_s; \mathbb{R}^n))$ は、領域 Ω_s で定義された関数 $\phi \in H^m(\Omega_s; \mathbb{R}^n)$ からその境界 Γ_s 上の成分だけを取り出した関数 $\psi = \gamma_{\Gamma_s}(\phi) \in H^{m-1/2}(\Gamma_s; \mathbb{R}^n)$, $\psi = \phi$ on Γ_s を与える線形作用素 \mathcal{L} を表す。

Lagrange 関数 L の停留条件は、式 (29) に基づいて、次のようになる。

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}') = l(\mathbf{w}') - l_h(\mathbf{w}') \quad \forall \mathbf{w}' \in H_{\Gamma_1} \quad (35)$$

$$a(\mathbf{v}', \mathbf{w}) = l(\mathbf{v}') - l_h(\mathbf{v}') \quad \forall \mathbf{v}' \in H_{\Gamma_1} \quad (36)$$

$$l_G(\mathbf{V}) = 0 \quad \forall \mathbf{V} \in C_{\Theta} \quad (37)$$

$$\Lambda(m - M) = 0 \quad (38)$$

$$m - M \leq 0 \quad (39)$$

式 (35) から (39) を詳しく見てみよう。式 (35) は状態方程式 (1) と一致した \mathbf{v} の支配方程式になっている。また、式 (36) は \mathbf{w} についての支配方程式になっている。両方程式を比較すると次の関係を得る。

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \quad (40)$$

通常、 \mathbf{w} は随伴関数、式 (36) は随伴方程式と呼ばれる。したがって、この問題は状態方程式と随伴方程式が一致した自己随伴問題になっていることが示されたことになる。一方、式 (38) と (39) について見てみると、両式は不等式制約式 (27) と Λ の支配方程式になっている。不等式制約に対するこのような条件式は Kuhn-Tucker 条件式と呼ばれる。

これらの関係を用いると、式 (35) によって $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ を解き、式 (38) と (39) によって Λ を決定することができる。これらの結果を用いれば、Lagrange 関数の導関数 \dot{L} は次のように簡単に与えられることになる。

$$\dot{L} = l_G(\mathbf{V}) \quad (41)$$

5 力法

Lagrange 関数の導関数 \dot{L} が形状勾配関数 G を係数関数とする速度場 \mathbf{V} の一次形式で与えられたので、力法の適用が可能となる。力法を簡単にまとめてみよう⁽⁴⁾。

初期領域 Ω から k 回目の領域変動を行うことを考えよう。力法はそのときの領域変動を表す速度場 $\mathbf{V}^{(k)}$ を次の支配方程式に基づいて解析する方法である。

$$a(\mathbf{V}^{(k)}, \mathbf{w}) = -l_G^{(k)}(\mathbf{w}) \quad \mathbf{V}^{(k)} \in C_{\Theta} \quad \forall \mathbf{w} \in C_{\Theta} \quad (42)$$

この支配方程式で決定された領域変動 $\mathbf{V}^{(k)}$ は Lagrange 関数 L を減少させることを確認してみよう。状

態方程式 (35) と Kuhn-Tucker 条件式 (38), (39) が満たされているとき、Lagrange 関数 L の k 回目写像 $T_{s(k)}(\mathbf{X})$ 周りでの摂動展開は次のように表すことができる。

$$\Delta L^{(k)} = l_G^{(k)}(\Delta s \mathbf{V}^{(k)}) + O(|\Delta s|) \quad (43)$$

ここで、式 (42) を式 (43) に代入して、式 (7) に基づく $a(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ の正定値性

$$\exists \alpha > 0: a(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \geq \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in H^1(\Omega_s; \mathbb{R}^n) \quad (44)$$

を考慮すると、 Δs が十分小さいとき、次の関係が得られることになる。

$$\Delta L^{(k)} = -a(\Delta s \mathbf{V}^{(k)}, \Delta s \mathbf{V}^{(k)}) < 0 \quad (45)$$

この関係は式 (42) で決定された速度場 $\mathbf{V}^{(k)}$ を用いて領域を変形していけば、凸性が保証されている問題において、Lagrange 関数 L は必ず減少する関係を与えている。

領域変動解析の支配方程式 (42) は、境界あるいは領域に力 $-G$ を作用させたときの変位分布として領域変動を与える速度場 \mathbf{V} が解析されることを示している。図 3 はそれを模式的に表している。したがって、速度場 $\mathbf{V}^{(k)}$ の数値解析法は式 (42) の解法になっていけば任意の方法を適用できることになる。本論文では、有限要素法を用いて式 (42) を解くことにする。

なお、Kuhn-Tucker 条件式 (38), (39) は Lagrange 乗数 Λ を次のように決定することによって成立させることができる。力 $-G$ の中で $\Lambda \mathbf{n}$ は一様な表面力として含まれている。この一様な表面力の変化 $\Delta \Lambda \mathbf{n}$ による速度場 \mathbf{V} の変化 $\Delta \mathbf{V}$ と領域の大きさ m の変化 Δm は、次のような境界に一様な大きさ $\Delta \Lambda \mathbf{n}$ の表面力を作用させたときの弾性変形解析によって得られることになる。

$$a(\Delta \mathbf{V}, \mathbf{w}) = \Delta \Lambda \int_{\Gamma_s} n_i w_i d\Gamma \quad \Delta \mathbf{V} \in C_{\Theta} \quad \forall \mathbf{w} \in C_{\Theta} \quad (46)$$

$$\Delta m = \int_{\Gamma_s} \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\Gamma \quad (47)$$

図 4 はそれを模式的に表している。 $\Delta \mathbf{V}$ と Δm の線形性に着目すれば、次のような Λ と \mathbf{V} の更新方法を考えることができる。

$$\Lambda_{(\text{new})} = \begin{cases} \max[0, \Lambda_{(\text{old})} + \Delta \Lambda \frac{m_{(\text{old})} - M}{\Delta m}] \\ \quad (\Lambda_{(\text{old})} > 0, m_{(\text{old})} - M \neq 0) \\ \Delta \Lambda \frac{m_{(\text{old})} - M}{\Delta m} \\ \quad (\Lambda_{(\text{old})} = 0, m_{(\text{old})} - M > 0) \\ 0 \\ \quad (\Lambda_{(\text{old})} = 0, m_{(\text{old})} - M \leq 0) \end{cases} \quad (48)$$

$$\mathbf{V}_{(\text{new})} = \mathbf{V}_{(\text{old})} \frac{\Lambda_{(\text{new})} - \Lambda_{(\text{old})}}{\Delta \Lambda} \quad (49)$$

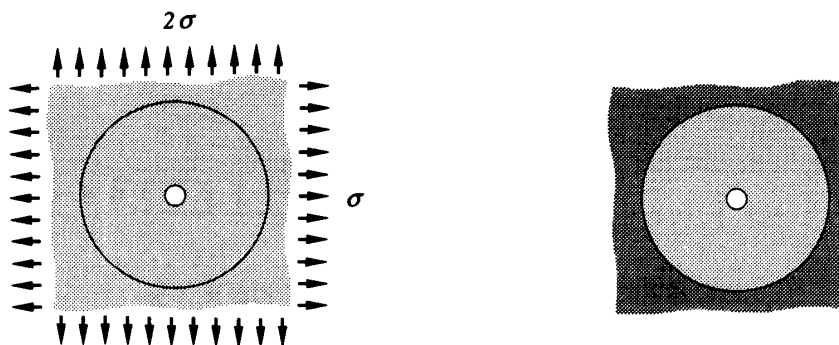


図5 孔の空いた無限平板問題：弾性変形(左) / 領域変動(右)

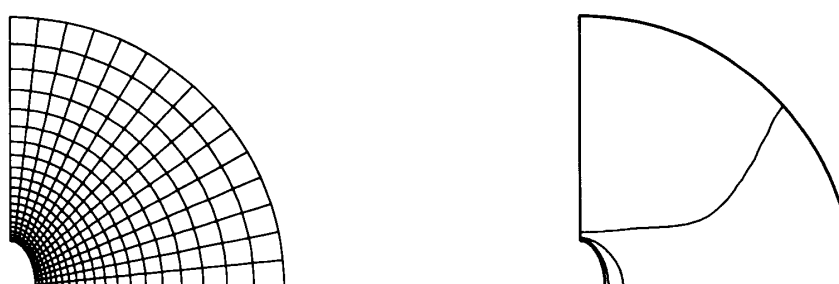


図6 孔の空いた無限平板の解析結果：要素分割(左) / ひずみエネルギー密度分布(右)

6 数値解析

基本的な問題に対して方法を適用した場合の結果を紹介する。最初に、最適形状の解析解が知られている問題に方法を適用して、この数値解法の妥当性を検討する。次に、表面力が作用する境界が変動する問題に対する適用を通して、4章で示したこの問題に対する形状勾配関数の妥当性を検討する。

6.1 孔の空いた無限平板問題 最適形状の解析解が得られている問題として、孔の空いた無限平板の領域最適化問題を取り上げた。問題設定を図5に示す。無限遠方直交2方向に1:2の一様な引張り力が作用する平面応力状態に対する最適孔形状は1:2の長短軸を持つ楕円であることが知られている⁽⁷⁾。本解析の弾性変形問題では、無限遠方直交2方向に1:2の一様な引張り力が作用する平面応力状態を想定した。実際の解析では、問題の対称性を考慮して、孔から十分離れた円形領域の1/4を解析領域として、円孔の場合の解析解から計算される表面力を外側円形境界に作用させた。領域変動解析では、外側円形境界を完全に拘束した。形状勾配関数 G の計算は、自由境界だけを変動させることから、式(32)における $\gamma_{r_i}((\cdot)n)$ の項だけで

行った。物体力 $f = \mathbf{o}$ である。なお、本論文の数値解析では8節点アイソパラメトリック要素を使用した。

この問題に対する解析結果を図6に示す。この解析結果は孔の初期形状を円形にした場合の収束結果である。この収束結果は最適解である1:2の長短軸を持つ楕円と一致している。初期形状を変化させても同一の形状に収束することが確認された。収束までに要した領域変動回数は、速度場に掛ける定数 Δs の大きさに依存するが、図5の場合には5回であった。

6.2 両端固定平板問題 次に、表面力が作用する境界も変動する問題として、両端固定平板の領域最適化問題を取り上げてみた。図7に初期領域に対する問題設定を示す。上下境界に作用させた表面力 P は空間で一様に分布した下向き力と仮定した。したがって、空間固定 $P' = \mathbf{o}$ と物質固定 $\dot{P} = \mathbf{o}$ の違いはなく、表面力は境界が移動しても下向き一様に作用することになる。それに対して、物質共変 $\dot{P} + P\kappa v_n = \mathbf{o}$ では境界の拡大率に反比例させて表面力の大きさは変化することになる。

表面力空間固定 $P' = \mathbf{o}$ あるいは物質固定 $\dot{P} = \mathbf{o}$ の場合の解析結果を図8に示す。また、物質共変 $\dot{P} + P\kappa v_n = \mathbf{o}$ の場合の解析結果を図9に示す。それぞれの場合の

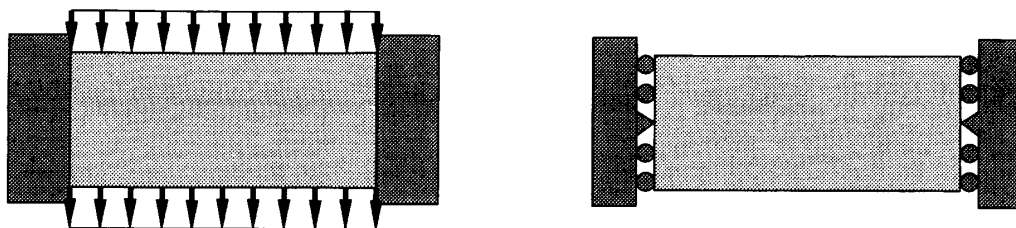
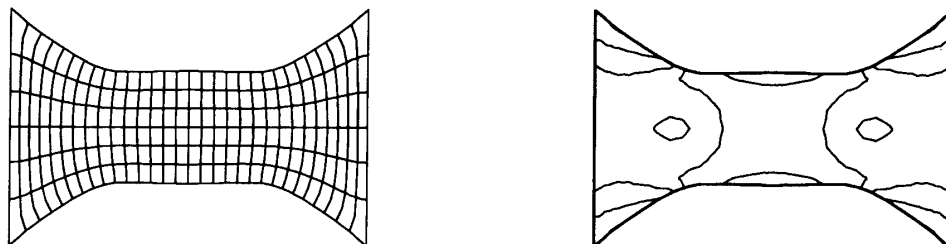
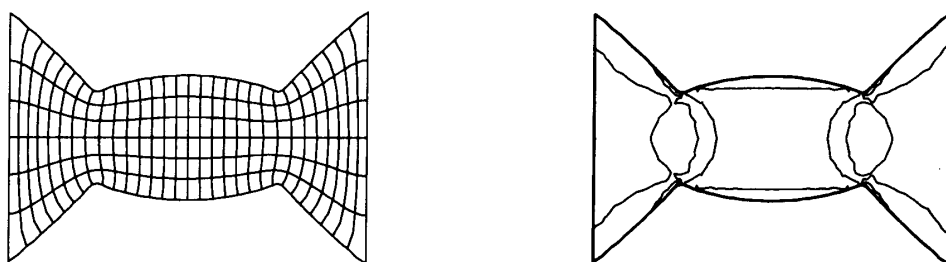


図7 両端固定平板問題：弾性変形(左) / 領域変動(右)

図8 両端固定平板の解析結果(表面力空間固定 $P' = 0$ あるいは物質固定 $\dot{P} = 0$): 要素分割(左) / ひずみエネルギー密度分布(右)図9 両端固定平板の解析結果(物質共変 $\dot{P} + P\kappa_{v_n} = 0$): 要素分割(左) / ひずみエネルギー密度分布(右)

形状勾配関数 G は式(33)と(34)に基づいて計算した。どちらの場合においても、表面力の変動方式に対応した G の式を用いた場合の収束結果の方が、対応しない式を用いた場合の収束結果よりも平均コンプライアンスが下回る結果を得た。この比較結果を通して、4章で示した形状勾配関数の妥当性を確認することができた。

7 おわりに

本論文では、平均コンプライアンスを目的汎関数にした領域最適化問題を取り上げて、その定式化とこの問題に対する最適性規準とそれに基づく形状勾配関数を明らかにした。この形状勾配関数を用いた方法を最適形状の解析解が得られている孔の空いた無限平板問題に適用して、この数値解法の妥当性を確認した。次に、表面力が作用する境界が変動する問題に方法を適

用して、表面力が作用する境界が変動する場合の形状勾配関数の妥当性を確認した。

文 献

- (1) Zienkiewicz, O. C. and Campbell, J. S., *Optimum Structural Design - Theory and Applications*, edited by Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C., (1973), John Wiley & Sons, 109.
- (2) Kikuchi, N., Chung, K. Y., Torigaki, T. and Taylor, J. E., *The Optimum Shape, Automated Structural Design*, edited by Bennett, J. A. and Botkin, M. E., (1985), Plenum Press, 139.
- (3) Braibant, V. and Fleury, C., *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 44 (1984), 247.
- (4) 畔上, 機論, 60, 574, A (1994) (No. 93-1346).
- (5) Sokolowski, J. and Zolésio, J. P., *Introduction to Shape Optimization, Shape Sensitivity Analysis*, (1991), Springer-Verlag.
- (6) Arora, J. S., *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 105 (1993), 41.
- (7) Kristensen, E. S. and Madsen, N. F., *International J. Numerical Methods Eng.*, 10 (1976), 1007.