

複数荷重を考慮した線形弾性体の形状最適化*

(力法による体積最小設計)

下田 昌利*¹, 畔上 秀幸*²
井原 久*¹, 桜井 俊明*¹

Shape Optimization of Linear Elastic Structures Subject to Multiple Loading Conditions (A Traction Method Approach to Minimum Volume Design)

Masatoshi SHIMODA, Hideyuki AZEGAMI,
Hisashi IHARA and Toshiaki SAKURAI

This paper presents a numerical analysis technique for shape optimization of linear elastic structures subject to multiple loading conditions. The technique presented here is based on the traction method for determining the domain variation that reduces the objective functional. Using the speed method, a volume minimization problem is formulated in which the mean compliances associated with individual load cases act as constraints. The shape gradient function, which is equivalent to the shape sensitivity, for this problem is obtained using the Lagrange multiplier method. With the traction method, the domain variation is numerically analyzed using a commercial FEM code. A method is also proposed for finding the domain variation so as to satisfy equality and inequality constraints. The analytical results show the effectiveness and practical utility of the proposed method in solving shape optimization problems involving multiple loading conditions.

Key Words: Optimum Design, Computational Mechanics, Finite-Element Method, Structural Analysis, Shape Optimization, Minimum Volume Design, Multiple Loading, Traction Method, Multiconstraint

1. はじめに

構造設計の効率化や経済性の観点から、最適設計が注目され、特に軽量化支援の道具として重要視されている。本論文では種々の最適設計問題の中で、実際の設計で頻出する複数の荷重が作用する場合の形状最適化問題を扱う。ここでは複数荷重を多目的構造に対して独立に作用する荷重の集合と定義する。複数荷重が作用する場合の形状最適化問題は大きく二つに分類することができる。一つはすべての負荷条件に対して平均コンプライアンスや固有振動数等の制約条件を満たす最小重量形状を求める問題である。これは複数制約条件を有する単一目的最適化問題となる。もう一つは各負荷に対する平均コンプライアンスや固有振動数等の目的関数をそれぞれ最小化する問題である。これはパレート最適解を求める多目的最適化問題となる。

形状最適化問題において、単一荷重に対する報告は数多くなされ、概説論文等にまとめられているが⁽¹⁾⁻⁽³⁾、複数荷重を考慮した形状最適化に関する報告

は限られている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

著者らは形状最適化問題の解法として力法⁽⁶⁾に注目し、これまでに複数荷重を考慮した形状最適化において、体積制約付き多目的平均コンプライアンス最小化に関する報告を行っている⁽⁷⁾。力法では速度法⁽⁸⁾において形状こう配関数と呼ばれる領域変動に対する分布系の形状感度を利用して領域変動の支配方程式が導出される。領域変動の支配方程式は擬似弾性問題に置き換えられ、形状こう配関数を擬似的な力として設計境界に与え、そのときの変形量が領域変動量として計算される。実際の形状こう配関数や領域変動量の計算には有限要素法や境界要素法を利用することができ、また境界だけでなく領域内部も新形状に写像されることから、内部節点のリメッシュが実用上必要なく実用的な方法といえる。さらに荷重により境界を移動させるため、形状最適化において一般に問題とされる波打ち現象も問題とならないという利点もある。

本論文では上記の多目的平均コンプライアンス最小化問題の相反問題となる多制約付き体積最小化問題への力法の適用を検討する。この問題では領域変動に対して複数の制約をいかに満足させるかもキーポイントとなる。

まず、複数の平均コンプライアンス制約条件を有す

* 原稿受付 1994年12月21日。

¹ 正員, 三菱自動車工業(株) (〒444 岡崎市橋目町中新切1)。

² 正員, 豊橋技術科学大学工学部 (〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

る線形弾性体の体積最小化問題の定式化および方法の適用を示す。次に、等式および不等式制約条件を満たすような領域変動量を決定するための方法を提示する。そして、開発された最適化システムの概要を紹介する。最後に、二次元および三次元の例題の解析結果を示し、形状最適化問題に対する提案方法の有効性と実用性を示す。

2. 複数平均コンプライアンス制約付
体積最小化問題

図1のように、初期領域 Ω , 境界 $\Gamma \equiv \partial\Omega$ の線形弾性体が変動して領域 Ω_s , 境界 $\Gamma_s \equiv \partial\Omega_s$ となるものと仮定する。物体力と表面力 $f^{(m)}, P^{(m)}, m=1, 2, \dots, N$ はそれぞれ Ω_s, Γ_s に作用しているものとする。N個の荷重ケースは独立に作用することを仮定する。sは履歴を表す。荷重ケース m に対する変位を $v^{(m)}$, 平均コンプライアンスを $l(v^{(m)}) \equiv l_m$ と表すことにする。

各荷重ケースに対する平均コンプライアンスおよび状態方程式を制約条件とする体積最小化問題は次のように表される。

$$\text{Given } \Omega, f^{(m)} \text{ in } \Omega, P^{(m)} \text{ on } \Gamma, e \text{ in } \Omega, M_0 \in \mathbf{R}_+ \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{find } \Omega_s \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{that minimize } M \equiv \int_{\Omega_s} dx \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{subject to } l(v^{(m)}) - \bar{l}^{(m)} = 0, m=1, \dots, N \dots\dots\dots (4)$$

$$a(v^{(m)}, w^{(m)}) = l(w^{(m)}), v^{(m)} \in U \text{ for all } w^{(m)} \in U, m=1, \dots, N \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $M, \bar{l}^{(m)}$ は体積、第 m 番めの荷重ケースに対して設定される制約値を表す。U は変位の拘束条件を満たす適当に滑らかな関数の集合を表す。また、第 m 番めの荷重ケースに対して、変分ひずみエネルギーを与える双一次形式 $a(v^{(m)}, w^{(m)})$, 外力による変分ポテンシャルエネルギーあるいは変分平均コンプライアンス

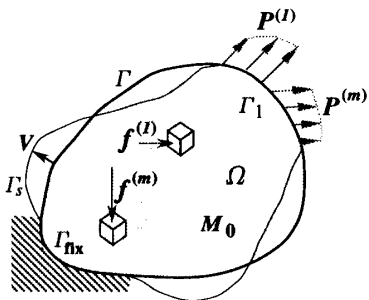


図1 弾性体の領域変動

スを与える一次形式 $l(w^{(m)})$ を次のように定義する。

$$a(v^{(m)}, w^{(m)}) = \int_{\Omega_s} e_{ijkl} v_{k,l}^{(m)} w_{i,j}^{(m)} d\Omega \dots\dots\dots (6)$$

$$l(w^{(m)}) = \int_{\Omega_s} f_i^{(m)} w_i^{(m)} d\Omega + \int_{\Gamma_1} P_i^{(m)} w_i^{(m)} d\Gamma \dots\dots\dots (7)$$

なお、 v_i, w_i はそれぞれ変位、変分変位、 e_{ijkl} は弾性テンソルを表す。記号 \mathbf{R}_+ は正の実数の集合を表す。また、 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を表す。

この問題に対するラグランジュ関数 L はラグランジュ乗数 $\Lambda^{(m)} (m=1, \dots, N)$ を用いて次のように表される。

$$L(\Omega, v^{(1)}, \dots, v^{(N)}, w^{(1)}, \dots, w^{(N)}, \Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(N)}) = M + \sum_{m=1}^N \{l(w^{(m)}) - a(v^{(m)}, w^{(m)})\} + \sum_{m=1}^N \Lambda^{(m)} \{l(v^{(m)}) - \bar{l}^{(m)}\} \dots\dots\dots (8)$$

簡単のため表面力の作用する境界は法線方向には変動しないこと ($n_i V_i = 0$ on Γ_1), 材料は均質不変であること ($e_{ijkl} = e_{ijkl} = 0$), 物体力は領域内で一定であること ($f' = 0$) を仮定すると、ラグランジュ関数の領域変動に対する導関数 \dot{L} は、領域変動に対する速度場 V を用いて次のように表される。 (\cdot) は形状導関数、 $(\dot{\cdot})$ は物質導関数を表す。

$$\dot{L} = \sum_{m=1}^N \{ \Lambda^{(m)} l(v'^{(m)}) - a(v'^{(m)}, w^{(m)}) \} + \sum_{m=1}^N \{ l(w'^{(m)}) - a(v^{(m)}, w'^{(m)}) \} + \Lambda^{(m)} \{ l(v^{(m)}) - \bar{l}^{(m)} \} + \int_{\Gamma_s} \left\{ 1 - \sum_{m=1}^N (e_{ijkl} v_{k,l}^{(m)} w_{i,j}^{(m)} - \Lambda^{(m)} f_i^{(m)} v_i^{(m)} - f_i^{(m)} w_i^{(m)}) \right\} n_i V_i d\Gamma \dots\dots\dots (9)$$

ラグランジュ関数 L の停留条件は $\dot{L} = 0$ とおいて、等式制約条件に対する停留条件を考慮すると次のようになる。

$$a(v'^{(m)}, w^{(m)}) = \Lambda^{(m)} l(v'^{(m)}) \text{ for all } v' \in U, m=1, \dots, N \dots\dots\dots (10)$$

$$a(v^{(m)}, w'^{(m)}) = l(w'^{(m)}) \text{ for all } w' \in U, m=1, \dots, N \dots\dots\dots (11)$$

$$\int_{\Gamma_s} \left\{ 1 - \sum_{m=1}^N (e_{ijkl} v_{k,l}^{(m)} w_{i,j}^{(m)} - \Lambda^{(m)} f_i^{(m)} v_i^{(m)} - f_i^{(m)} w_i^{(m)}) \right\} n_i V_i d\Gamma = 0, \text{ for all } V \in C_0 \dots\dots\dots (12)$$

$$l(v^{(m)}) - \bar{l}^{(m)} = 0, m=1, \dots, N \dots\dots\dots (13)$$

ここで、式(10)は状態方程式と一致した v の支配方程式、式(11)は随伴変位 w に関する支配方程式である。また、 C_0 は領域変動の制約条件を満たす適当に導関数が連続な関数の集合を表す。式(13)は各荷重ケース

に対する平均コンプライアンスの等式制約条件である。ラグランジュ乗数 Λ は式(13)を満たすように決定される。変位 v および w はそれぞれ式(10), (11)により決定することができる。また、式(10)の支配方程式と式(11)の随伴方程式を比較すると次の関係式が得られる。

$$w^{(m)} = \Lambda^{(m)} v^{(m)}, m=1, \dots, N \dots\dots\dots(14)$$

さらに、これらの条件で決定された v, w および Λ を用いることとすれば、ラグランジュ関数の導関数は次式で与えられることになる。

$$\dot{L} = l_c(V) \dots\dots\dots(15)$$

ここで、速度場 V の一次形式 $l_c(V)$ は次式で与えられる。

$$l_c(V) = \int_{\Gamma_s} G_i V_i d\Gamma \dots\dots\dots(16)$$

$$G = \left[1 - \sum_{m=1}^N \{ \Lambda^{(m)} (e_{ijk} v_{k,l}^{(m)} v_{i,j}^{(m)} - 2f_i^{(m)} v_i^{(m)}) \} \right] n \text{ on } \Gamma_{\text{design}} \dots\dots\dots(17)$$

なお、 G は形状感度を与え、形状こう配関数と呼ばれる。設計境界は $\Gamma_{\text{design}} \equiv \Gamma \setminus \Gamma_{\text{fix}}$ のように定義される。また、“ \setminus ” は差集合を表す。形状こう配関数が与えられれば方法を適用することが可能となる。

3. 力 法

方法は目的汎関数が減少するような領域変動量を解析するための方法であり、領域変動量を与える速度場 V を次の支配方程式に基づいて解く方法として提案されている⁽⁶⁾。

$$a(V, w) = -l_c(w) \text{ for all } w \in C_0 \dots\dots\dots(18)$$

この支配方程式は境界あるいは領域に負の形状こう配関数 $-G$ を外力として作用させたときの変位分布として領域変動を与える速度場 V が解析されることを示している。言い替えると、方法により領域変動は形状こう配関数を擬弾性問題の外力として作用させ

たときの変位場として求められる。したがって、式(18)は通常の線形弾性問題の解法を用いて解くことができる。本論文では有限要素法を用いる。

この支配方程式で決定された領域変動 V がラグランジュ関数 L を減少させることは以下のように確認できる。状態方程式(10)と制約条件式(13)が満たされているとき、ラグランジュ関数 L の摂動展開は次のように表すことができる。

$$\Delta L = l_c(\Delta s V) + O(|\Delta s|) \dots\dots\dots(19)$$

ここで、式(18)を式(19)に代入して、弾性テンソル e_{ijk} の正定値性に基づく $a(v, w)$ の正定値性

$$\exists \alpha > 0: a(\xi, \xi) \geq \alpha |\xi|^2 \text{ for all } \xi \in U \dots\dots\dots(20)$$

を考慮すると、 Δs が十分小さいとき、次の関係が得られることになる。

$$\Delta L = -a(\Delta s V, \Delta s V) < 0 \dots\dots\dots(21)$$

この関係は式(18)で決定された速度場 V を用いて領域を変形していけば、凸性が保証されている問題において、ラグランジュ関数 L は必ず減少する関係を与えている。形状こう配関数を求めるための応力解析と速度場を求めるための速度解析および形状更新を繰返すことにより、目的汎関数を最小化され、最適形状を得ることができる。方法の概念図を図2に示す。

4. 制 約 条 件 の 考 慮

著者らは以前、体積制約を有する形状最適化問題に対してPID制御の考えを導入し、方法に適用した⁽⁹⁾。平均コンプライアンス制約が一つであれば、その方法を利用できるが、複数の制約を有する今回の問題に対しては計算回数の増加等の問題が生じ、上手く機能しなかった。そこで、新たな方法を検討した。

4.1 等式制約

3章においてラグランジュ乗数 $\Lambda^{(m)}$ は制約条件を満たしているものと仮定し、方法を適用した。ここでは m 個の等式制約条件を満足する $\Lambda^{(m)}$ および速度場 V の具体的な決定方法を提示する。

本問題に方法を適用する場合、有限の変動 $\Delta s_0 V$ を発生させる外力は $\Delta s_0 G$ によって与えられる。ただし、 Δs_0 は与える力の大きさを調整、すなわち領域変動量を調整し、その値は解析者によって微小領域変動を考慮して与えられるものとする。ここで、微小変動を仮定することによる変形の線形性を考慮し、力 $\Delta s_0 G$ を一様な力 $\Delta s_0 G^u n$ と境界に分布する力 $\Delta s_0 G^{d(i)} n$ に分けて与えることにする。すなわち、

$$\Delta s_0 G = \Delta s_0 \left[1 - \sum_{m=1}^N \{ \Lambda^{(m)} (e_{ijk} v_{k,l}^{(m)} v_{i,j}^{(m)}) \} \right]$$

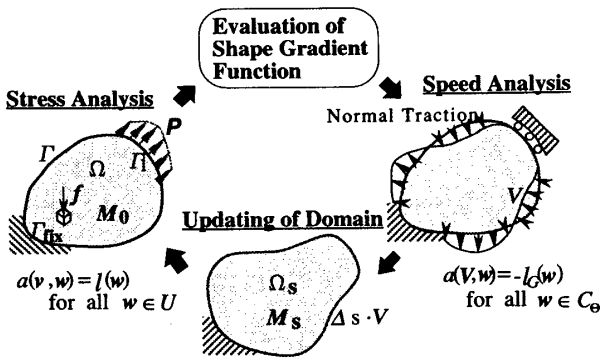


図2 方法の概念図

$$-2f_i^{(m)} v_i^{(m)} \Big] \mathbf{n} \dots\dots\dots (22)$$

$$= \Delta S_0 G^u \mathbf{n} - \Delta S_0 \sum_{m=1}^N \Lambda^{(m)} G^{d(m)} \mathbf{n} \dots\dots\dots (23)$$

$$\Delta S_0 G^u = \Delta S_0 \dots\dots\dots (24)$$

$$\Delta S_0 G^{d(m)} = \Delta S_0 \sum_{m=1}^N (e_{ijk} v_{kl}^{(m)} v_{i,j}^{(m)} - 2f_i^{(m)} v_i^{(m)}) \dots\dots\dots (25)$$

このとき、 $\Delta S_0 G^u \mathbf{n}$ を作用させて得られる形状の各平均コンプライアンスの変化を $\Delta l_1^u, \Delta l_2^u, \dots, \Delta l_N^u$ とし、同様に $\Delta S_0 G^{d(i)} \mathbf{n}$ を作用させたときの j 番めの各平均コンプライアンスの変化を $\Delta l_j^{d(i)}$ ($i=1, \dots, N, j=1, \dots, N$) とする。各制約条件を満足するようなラグランジュ乗数 $\Lambda^{(m)}$ は次の連立方程式を解くことにより決定できる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta l_1^u \\ \Delta l_2^u \\ \vdots \\ \Delta l_N^u \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta l_1^{d(1)} & \Delta l_1^{d(2)} & \dots & \Delta l_1^{d(N)} \\ \Delta l_2^{d(1)} & \Delta l_2^{d(2)} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Delta l_N^{d(1)} & \dots & \dots & \Delta l_N^{d(N)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Lambda^{(1)} \\ \Lambda^{(2)} \\ \vdots \\ \Lambda^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{\Delta l}^{(1)} \\ \overline{\Delta l}^{(2)} \\ \vdots \\ \overline{\Delta l}^{(N)} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

上式を簡単に次のように表す。

$$[\Delta l_j^{d(i)}] \{\Lambda^{(i)}\} = \{\overline{\Delta l}^{(j)}\} - \{\Delta l_j^u\} \dots\dots\dots (27)$$

ここで、 $\{\Delta l_j^u\}$ は一様な力に対する感度ベクトル、 $[\Delta l_j^{d(i)}]$ は分布力に対する感度マトリックスを表す。また、 $\{\overline{\Delta l}^{(j)}\}$ は設定した制約値と前回の繰返しの値の偏差を表す。得られた $\{\Lambda^{(i)}\}$ を式(22)に代入し、方法を適用することにより制約条件を満たしながら目的関数を減少させる領域変動量を求めることができる。なお、決定された $\{\Lambda^{(i)}\}$ が 1 より大きい場合、微小領域変動を保つため、 ΔS_0 を $\Delta s = \Delta S_0 / \max(1.0, |\Lambda^{(1)}|, |\Lambda^{(2)}|, \dots, |\Lambda^{(N)}|)$ のように変更し、スケーリングしている。

式(22)を用いる代わりに、制約を考慮した領域変動量を一様な力 $\Delta S_0 G^u \mathbf{n}$ を与えたときの領域変動量 $\Delta S_0 V^u$ と分布する力 $\Delta S_0 G^{d(i)} \mathbf{n}$ を与えたときの領域変動量 $\Delta S_0 V^{d(i)}$ から次式により求めることもできる。

$$\Delta S_0 V = \Delta S_0 V^u + \sum_{i=1}^N \Lambda^{(i)} \Delta S_0 V^{d(i)} \dots\dots\dots (28)$$

4.2 不等式制約 不等式制約の場合、制約条件は式(4)に代わり式(29)が考慮される。

$$l(v^{(m)}) - \overline{l}^{(m)} \leq 0, m=1, \dots, N \dots\dots\dots (29)$$

この場合、ラグランジュ関数の停留条件は式(10)~(12)および式(30)~(32)で与えられ、それらを満たすラグランジュ乗数の決定方法を以下に示す。

$$\Lambda^{(m)} \{l(v^{(m)}) - \overline{l}^{(m)}\} = 0, m=1, \dots, N \dots\dots\dots (30)$$

$$\Lambda^{(m)} \geq 0, m=1, \dots, N \dots\dots\dots (31)$$

$$l(v^{(m)}) - \overline{l}^{(m)} \leq 0, m=1, \dots, N \dots\dots\dots (32)$$

与えられた不等式制約条件に対して、アクティブな制約を選び、それに等式制約の場合に用いた方法を適用する。具体的には、まず等式制約の場合と同様、すべての荷重ケースに対するラグランジュ乗数を求め、正となる荷重ケースをアクティブ制約条件として選択する。また、式(32)に違反し、ラグランジュ乗数が負となる荷重条件もアクティブ制約条件として考慮する。次にアクティブ制約条件のみについて式(26)によりラグランジュ乗数を再計算することにより、不等式制約条件を満たすラグランジュ乗数を決定する。得られたラグランジュ乗数 $\Lambda^{(m)}$ により領域変動量を求める。

4.1 および 4.2 節の方法により、制約条件を満たし、目的関数を最小化する領域変動量を求めることができる。また、本方法は制約条件の一つと目的関数を入れ替えたような問題、すなわち、ある荷重に対する平均コンプライアンスを目的関数とし、他の荷重の平均コンプライアンスと体積を制約条件とする最適化問題に対しても、体積の感度を考慮することにより適用可能である。

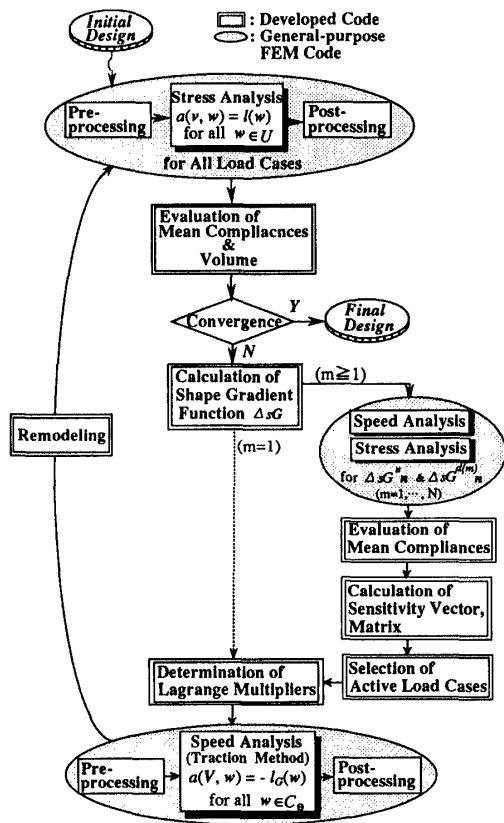


図 3 形状最適化システムの流れ

5. 形状最適化システム

方法で必要な形状こう配関数は分布系の感度であるため、離散系の感度を求める際に必要とされる剛性マトリックスの微分等が不要であり、汎用 FEM コードの応力解析の結果を利用して求めることができる。また、領域変動量を求めるときに必要な法線方向の力も汎用 FEM コードに備えられている圧力荷重で代替できる。これらのことに着目し、汎用 FEM コードを利用して本問題を解く形状最適化システムを開発した。このシステムは方法を二次元、三次元の複雑な問題に対して適用することを可能にした。本形状最適化システムの流れを図 3 に示す。システムは EWS 上で FEM コードと開発コードを組み合わせている。おもな構成要素は応力解析、形状こう配関数の計算、感度ベクトルと感度マトリックスの計算、アクティブな荷重ケースの選択、ラグランジュ乗数の計算、方法に基づく速度解析、形状更新であり、これらを順に繰返すことにより形状最適化解析が実行される。実行に際しては 1 回の領域変動量の大きさを調整する領域変動係数 Δs_0

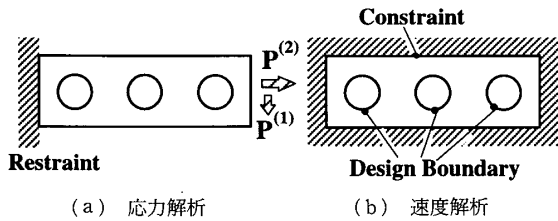


図 4 平板の孔形状最適化問題

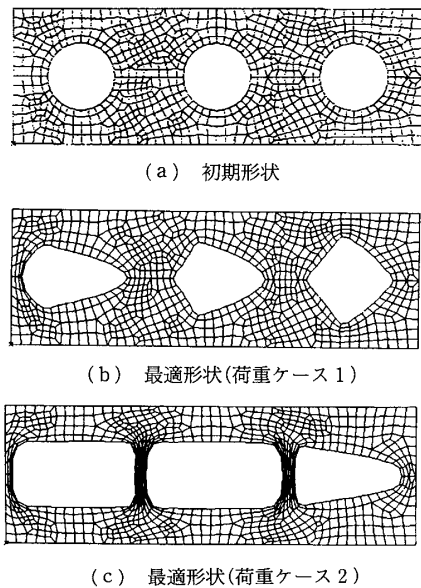


図 5 単一荷重に対する最適形状

を設定し、平均コンプライアンスの制約値、設計境界 Γ_{design} を指定する。また、与えられた初期領域に対して応力解析と速度解析の境界条件をそれぞれ独立に設定する。

6. 計算結果

開発したシステムを二次元および三次元の基本的な例題に適用し、多制約形状最適化問題に対する本手法の有効性と実用性を確認する。

二次元問題としては三つの円孔を有する平板の孔形状の最適化問題および曲りばりの外形状最適化問題、三次元問題としてはソリッド曲りばりの板厚最適化問題を例題とした。

6.1 有孔平板(等式制約)

問題設定を図 4 に示す。応力解析では図 4 (a) に示すように端部を完全拘束し、他端に荷重ケース 1 としてせん断荷重 $P^{(1)}$ および荷重ケース 2 として引張荷重 $P^{(2)}$ の 2 種類の分布

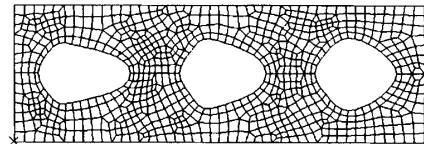


図 6 複数荷重に対する最適形状

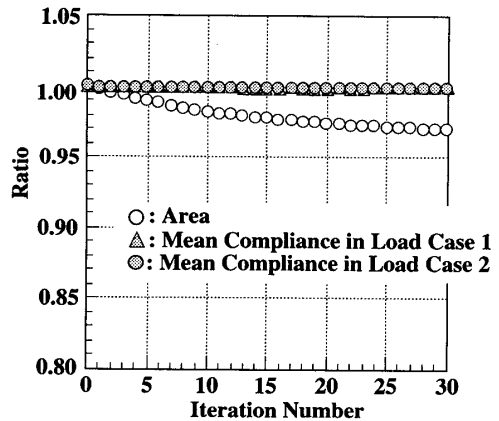


図 7 複数荷重に対する最適化履歴

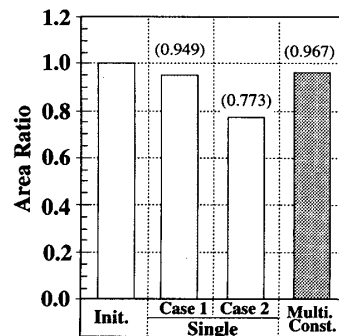
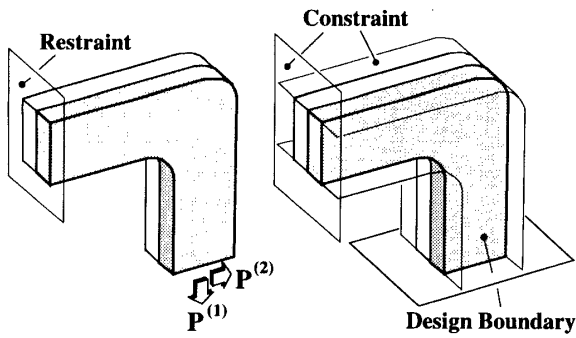
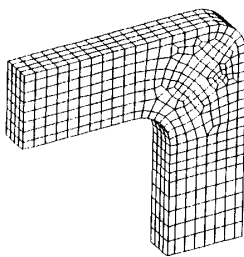


図 8 最終面積の比較

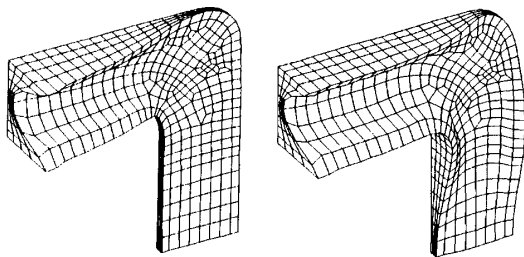


(a) 応力解析 (b) 速度解析

図 9 曲りばりの形状最適化問題



(a) 初期形状



(b) 最適形状 (荷重ケース 1) (c) 最適形状 (荷重ケース 2)

図 10 単一荷重に対する最適形状

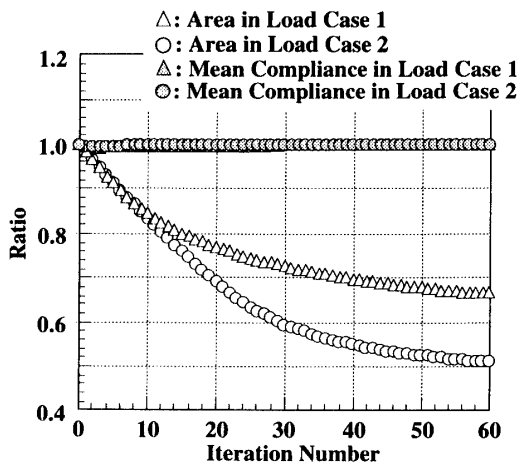


図 11 単一荷重に対する最適化履歴

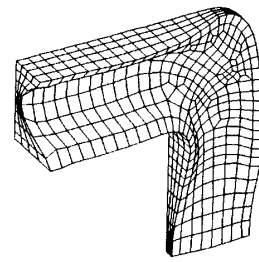


図 12 複数荷重に対する最適形状

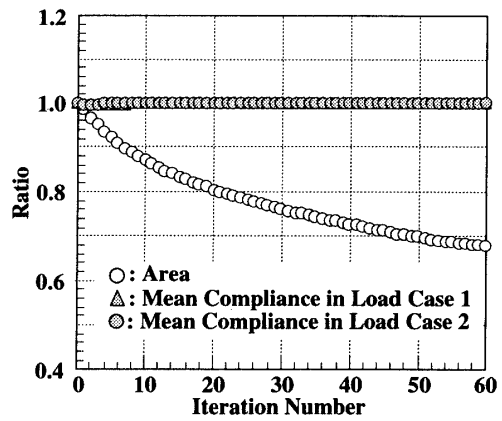


図 13 複数荷重に対する最適化履歴

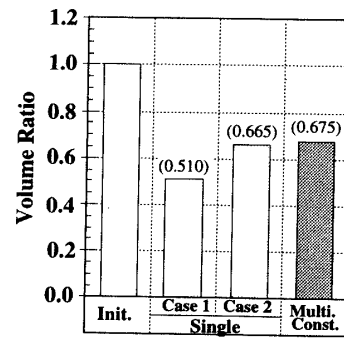
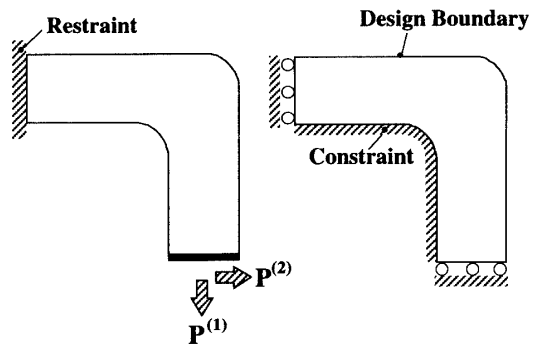


図 14 最終体積の比較



(a) 応力解析 (b) 速度解析

図 15 曲りばりの形状最適化問題

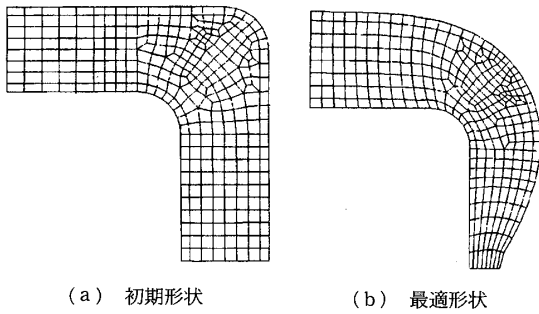


図 16 複数荷重に対する最適形状(不等式制約)

荷重を負荷した。速度解析では図 4 (b) に示すように平板の外周は変動しないものとした。また、制約は等式条件とし、平均コンプライアンス一定の条件を与えた。なお、平面応力状態を仮定し、数値解析には 4 節点定ひずみ要素を使用した。

図 5 に初期形状および比較のために計算した単一荷重 $P^{(1)}$ および $P^{(2)}$ に対する最適形状を示す。図 6 に多制約の場合の最適形状を示す。多制約の最適形状は荷重ケース 1 と荷重ケース 2 の中間的な形状になっていることがわかる。図 7 に初期の値で基準化した最適化履歴を示す。この結果から各平均コンプライアンスは一定に保たれ、目的汎関数の面積は最小化されていることがわかる。

図 8 に初期の値で基準化した面積の比較を示す。荷重ケース 1 のみの制約の場合、初期形状に比べて面積は 5.1% の減少し、荷重ケース 2 のみの制約の場合 22.7% 減少している。両方の荷重ケースに対して制約を与えた場合は 3.3% 面積が減少した。

6.2 ソリッド曲りばり(等式制約) 三次元への適用例としてソリッド体の曲りばりの問題設定を図 9 に示す。二次元問題と同様に応力解析の境界条件は図 9 (a) に示すように端部を完全拘束し、他端に $P^{(1)}$ および $P^{(2)}$ の 2 種類の分布荷重を負荷した。速度解析の制約条件は図 9 (b) に示すように外周を滑り拘束し、厚さ方法に領域変動可能な制約を与えた。また、制約は等式条件とし、平均コンプライアンス一定の条件を与えた。数値解析は 8 節点ソリッド要素を使用し、対称性を考慮した二分の一モデルで解析を行った。

図 10 と図 11 に初期形状および比較のために計算した単一荷重(単一制約)に対する最適形状と最適化履歴を示す。図 12, 13 に得られた複数荷重(多制約)に対する最適形状と履歴を示す。この問題では荷重ケース 2 が支配的であるため、多制約の最適形状は荷重ケース 2 に類似している。図 14 に体積の比較を示す。体積は初期形状の値で基準化している。これらの結果から多制約の三次元問題についても本方法により最適形状が

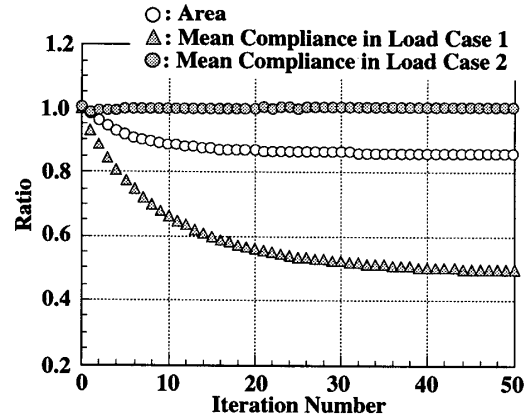


図 17 複数荷重に対する最適化履歴(不等式制約)

求められることが確認できる。

6.3 曲りばり(不等式制約) 図 15 に二次元曲りばりの問題の設定を示す。応力解析では図 15 (a) に示すように一端を完全拘束し、他端に $P^{(1)}$ および $P^{(2)}$ の 2 種類の分布荷重を負荷した。速度解析では図 15 (b) に示すように外形状を設計領域に設定した。また、制約は不等式条件とし、その最大値を初期形状の各平均コンプライアンスとした。なお、平面応力状態を仮定し、数値解析には 4 節点定ひずみ要素を使用した。

図 16 に初期形状および得られた不等式多制約の場合の最適形状を示す。また、図 17 に初期の値で基準化した最適化履歴を示す。この結果から不等式制約条件を満足し、面積が最小化された形状が得られていることがわかる。この問題の場合、荷重ケース 2 がつねにアクティブで、ケース 1 はインアクティブであった。そのため、ケース 2 の平均コンプライアンスは一定で、ケース 1 の平均コンプライアンスが約 50% 減少している。また、面積も約 15% 減少している。

7. おわりに

複数の荷重条件を考慮した形状最適化問題の数値解析法を提案した。法を用いた複数の平均コンプライ複数荷重に対する等式、不等式制約条件を満足する領域変動量を決定する方法も示した。多制約を有する最小体積形状設計を求めることに対して、提示した方法の有効性と実用性を計算例を通して示した。

文 献

- (1) Haftka, R. T. and Grandhi, R. V., Structural Shape Optimization-A Survey, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 57(1986), 91.
- (2) Ding, Y., Shape Optimization of Structures: A Literature Survey, *Comput. Struct.*, 24-6(1986), 985.

- (3) Bennett, J. A. and Botkin, M. E. 編, *The Optimum Shape-Automated Structural Design*, (1986), Plenum Press, New York.
- (4) Pedersen, P. and Jorgensen, L., Minimum Mass Design of Elastic Frames Subjected to Multiple Load Cases, *Comput. Struct.*, **18**-1(1984), 147.
- (5) 多田・瀬口・藪, 機論, **52**-473, A(1986), 233.
- (6) 畔上, 機論, **60**-574, A(1994), 165.
- (7) 下田・畔上・桜井, 機論, **61**-582, A(1995), 359.
- (8) Sokolowski, J. and Zolesio, J. P., *Introduction to Shape Optimization, Shape Sensitivity Analysis*, (1991), 49, Spriger-Verlag, New York.
- (9) 下田・呉・畔上・桜井, 機論, **60**-578, A(1994), 2418.
-