

539. 434. 014 : 539. 376

## 微視的空げきによる有効面積の減少を陽に表した多軸クリープ損傷変数\*

村上澄男\*\*, 大野信忠\*\*\*  
Sumio MURAKAMI, Nobutada OHNO

## 1. 緒 言

高強度耐熱材料は通常、実用的な応力、温度、時間領域において、比較的小さなひずみ範囲でのぜい性的破断を示す。最近の高温機器の安全性は、構造の強さと変形の問題に帰着されるから、高温における金属の損傷と破壊は、現代力学の中心的な問題となりつつある。

クリープ変形における損傷の集積と破断の特徴を記述しようとする数学的理論は、最初に Kachanov<sup>(1)(2)</sup> によって研究された。彼は、材料のぜい性化を考えたクリープ破断時間を理論的に決定するため、はじめて損傷を巨視的スカラー変数で表し、その変数の変化を記述する式を与えた。このとき、彼は損傷の原因となる微視的き裂や空どうなどの発達は、クリープ変形には直接影響しないと仮定した。しかし実際には、損傷の発達によって材料は弱化し、一定応力に対してもクリープひずみ速度は増加する。このため Rabotnov<sup>(3)(4)</sup> は、類似の損傷変数を用いて、クリープ速度とクリープ損傷速度を応力、温度および損傷変数の関数として表した。

Kachanov-Rabotnov の理論は、多軸応力状態に対しても拡張されている<sup>(1)~(7)</sup>。しかし、従来の金属組織学的観察によれば、通常多結晶金属のクリープ損傷における微視的空げきは、各瞬間の応力状態に対応したある特定の優先的な面に発達する<sup>(1)(4)(8)</sup>。したがって、もっと一般的なクリープ損傷理論を展開するには、損傷の効果は等方的なスカラー変数ではなく、適当な方向性をもつ力学量で記述されなければならない。このため著者らは、Vakulenko-Kachanov<sup>(9)</sup> のき裂密度テンソルをクリープ損傷の内部状態変数としてクリープ損傷理論を展開したが<sup>(10)~(12)</sup>、クリープとクリープ損傷の進行に対するこのテンソルの直接的効果を解釈することは困難であった。

この論文では、多軸変動応力状態に対するいっそう

精密なクリープ損傷理論を展開するため、まず一般の応力状態におけるクリープ損傷の微視的構造変化の力学的表現について考え、このような効果が、Vakulenko-Kachanov とは別の二階対称テンソルで記述できることを示す。つづいてこの損傷テンソルの効果を二、三の簡単な場合について検討する。最後に、この損傷テンソルを内部状態変数として用い、有限変形におけるクリープとクリープ損傷に対する一般的構成式について述べる。

## 2. クリープ損傷の内部状態変数による表現

2.1 平面き裂によるクリープ損傷 一様応力をうける物体では、損傷ははじめ物体内で一様に進行し、したがって微視的き裂は一様に生成および成長する。損傷がある臨界状態に達すると、特定の微視的き裂だけが合体し急速に成長してその材料は破断に至る<sup>(1)(2)(8)</sup>。

微視的き裂が一様に成長するクリープ損傷過程を議論するため、まずその簡単な模型として、図1に示すような単位ベクトル  $\mathbf{n}$  に垂直なすべての平面上に一様分布する平面き裂の集合を考え、その面積密度（単位面積中に占めるき裂の面積）を  $\Omega$  とする。このとき損傷状態はベクトル  $\mathbf{n}$  の方向に均一であり、完全に二次元的であると仮定する。いま、このような平面き裂を含む物体中に、図1のように  $x_3$  軸の向きがべ

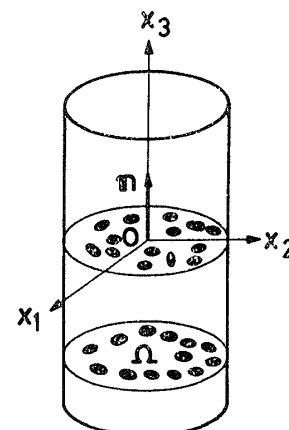


図1 一様に分布する平面き裂を含む物体

\* 昭和54年11月17日 東北支部仙台地方講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和54年7月9日。

\*\* 正員、豊橋技術科学大学。

\*\*\* 正員、名古屋大学工学部 (〒464 名古屋市千種区不老町)。

クトル  $n$  と一致する 直角座標系  $x_i (i=1, 2, 3)$  をとり、さらにこの座標系に関する四面体要素 OABC を考える (図 2)。このとき、三角形 ABC の面積および外向き単位法線ベクトルをそれぞれ  $S, \nu$  とすれば

$$S\nu = S_i e_i \dots\dots\dots (1)$$

と書ける。ここで  $e_i$  は  $x_i$  方向の単位基底ベクトル、また  $S_i = S(e_i \cdot \nu)$  である。

$x_3$  軸に垂直な面上に発達した平面き裂による損傷の効果は、 $S_1$  と  $S_2$  を一定に保ったまま、 $S_3$  を  $S_3 \Omega$  だけ減じるような有効面積の減少として表される。これは、図 2 に示すように、 $x_1$  および  $x_2$  座標を  $\sqrt{1-\Omega}$  倍し、 $x_3$  座標を  $1/\sqrt{1-\Omega}$  倍して得られる新しい仮想的配置  $OA^*B^*C^*$  を考えることにほかならない。このとき、三角形  $A^*B^*C^*$  の面積および外向き単位法線ベクトルをそれぞれ  $S^*, \nu^*$  とすると、関係

$$\begin{aligned} S^*\nu^* &= S_1 e_1 + S_2 e_2 + (1-\Omega) S_3 e_3 \\ &= S\nu - \Omega S(e_3 \otimes e_3)\nu = (I - \Omega) S\nu \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここでテンソル  $\Omega$  は、 $n = e_3$  であることに注意して

$$\Omega = \Omega n \otimes n \dots\dots\dots (3)$$

と定義されており、この論文ではこれを損傷テンソルと呼ぶことにする。なお  $I$  は恒等テンソルを示す。

以上の事実は、面素 ABC の効果はき裂の存在により面素  $A^*B^*C^*$  のそれとなり、その実質面積は式 (2) で与えられることを意味する。このとき式 (2) によれば、式 (3) で定義される二階の損傷テンソル  $\Omega$  は、任意の方位をもつ面  $S\nu$  の実質面積を  $\Omega(S\nu)$  だけ減少させる効果をもち、またテンソル  $(I - \Omega)$  は、任意の面の面積ベクトル  $S\nu$  をその実質面積ベクトル  $S^*\nu^*$  へ変換する線形変換を表すと考えることができる。なお式 (2) と (3) は、座標系に依存しない表示である

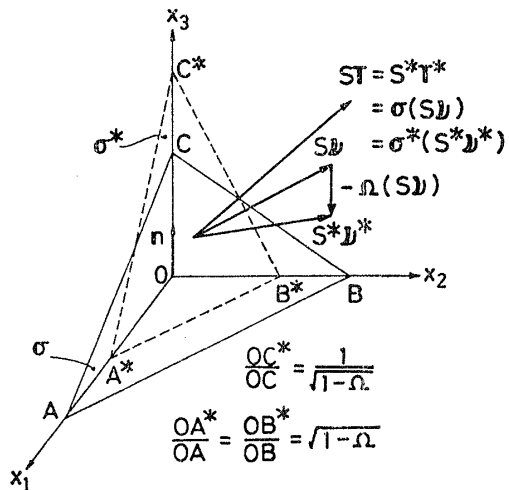


図 2 一様平面き裂場に対する実質面積ベクトルと実質応力テンソル

から、物体内の任意の方位をもつ平面き裂に対して成り立つ。

面素 ABC 上には一定の合力が作用するが、その効果は上のように定義された実質面積の減少に伴って増加する。要素 OABC に作用する応力テンソルを  $\sigma$  とすると、コーシーの公式によって、面素 ABC の合力ベクトルは

$$ST = \sigma(S\nu) \dots\dots\dots (4)$$

と書ける。ただし、 $T$  は面素 ABC の応力ベクトルである。図 2 のように、損傷のある場合の実質面積要素  $A^*B^*C^*$  にもこれと同一の合力ベクトルが作用するから、式 (2) を用いれば、

$$S^*T^* = ST = \sigma(I - \Omega)^{-1}(S^*\nu^*) = \sigma^*(S^*\nu^*) \dots\dots\dots (5)$$

となる。ここで、 $T^*$  は面素  $A^*B^*C^*$  の応力ベクトルであり、また  $\sigma^*$  は次のように定義される。

$$\sigma^* = \sigma \Phi, \quad \Phi = (I - \Omega)^{-1} \dots\dots\dots (6 \cdot a)$$

以上の結果によれば、任意の面素 ABC における応力  $\sigma$  の効果は、クリープ損傷による有効断面面積の減少によって  $\sigma^*$  のように増加し、このような  $\sigma$  から  $\sigma^*$  への変換はテンソル  $\Phi = (I - \Omega)^{-1}$  で与えられることを示す。これはまた、損傷を含む体積要素 OABC における応力  $\sigma$  の効果は、損傷の存在しない等価な配置  $OA^*B^*C^*$  における応力  $\sigma^*$  の効果と同一であるということもできる。

式 (6 \cdot a) はまた、次のような、よりめいりように損傷の効果を表す形に書き直すことができる。すなわち、関係  $(I - \Omega)^{-1} = I + (I - \Omega)^{-1}\Omega$  を用いると、式(5)は

$$\sigma^* = \sigma + (I - \Omega)^{-1}\Omega\sigma \dots\dots\dots (6 \cdot b)$$

となる。上式の第 2 項は、き裂の存在による応力の増大を表している。このように  $\sigma^*$  は、有効断面面積の減少を考慮に入れた応力テンソルであるから、実質応力テンソルと呼ぶ。また、式 (6 \cdot a) の  $\Phi$  は応力  $\sigma$  を損傷の効果によって拡大された値  $\sigma^*$  に変換するテンソルであるから、今後これを損傷効果テンソルと呼ぶことにする。

Kachanov<sup>(1)</sup> および Hayhurst-Storåkers<sup>(6)</sup> は損傷の方向性を表すため、任意の方向  $\nu$  をもつ面において、その面に固有の損傷が存在すると考えて損傷ベクトル  $\phi_\nu$  を導入した。しかしこのような考えは、ここで展開した理論と異なって、 $\nu$  面の損傷がそれと異なる方位をもつ面の応力状態に及ぼす影響は考慮することができない。

2.2 微小な空げきによるクリープ損傷 以上ののように、一つの平面上に分布する平面き裂による材料の損傷状態は、任意の方位をもつ面素の有効面積の減少

を表す式(3)の二階対称テンソル  $\Omega$  で表現でき、その効果は応力テンソル  $\sigma$  から実質応力テンソル  $\sigma^*$  への式(6)のような変換として解釈できることがわかった。しかし実際には、き裂は三次元的に分布し、しかも多結晶金属のクリープ損傷の原因となる種々の空げきの形状は完全な平面き裂ではなく、有限の厚さをもつ<sup>(8)</sup>。このような一般の損傷状態は、これらの空げきを図3のようなだ円体で近似し、物体中に分布する多数のこのようなだ円体による面積減少の効果を重ね合わせることによって近似できる。このとき、 $k$  番めのだ円体の主方向を単位ベクトル  $\mathbf{n}_i^{(k)}$ 、それに垂直な主面で切断しただ円体の切り口面積の大きさを  $\bar{\Omega}_i^{(k)}$  とする。 $\bar{\Omega}_i^{(k)}$  の密度は、考える微小体積  $V$  を主面  $\mathbf{n}_i^{(k)}$  で切断した横断面の面積  $S_i^{(k)}$  に依存するから、ここでは  $\bar{\Omega}_i^{(k)}$  をさらに正規化した量

$$\Omega_i^{(k)} = \bar{\Omega}_i^{(k)} / S_i^{(k)} \dots\dots\dots(7)$$

を考える。すると一様に分布する平面き裂に対する式(3)の損傷テンソルは、二階対称テンソル

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \int_V \rho(\mathbf{x})^{(k)} \Omega_i^{(k)} \mathbf{n}_i^{(k)} \otimes \mathbf{n}_i^{(k)} dV \\ &= \Omega_j \mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_j \\ &\quad (i=1, 2, 3 \text{ および } j=1, 2, 3 \text{ について和をとる}) \end{aligned} \dots\dots\dots(8.a)$$

に拡張できる。ここで、 $V$  と  $\rho(\mathbf{x})^{(k)}$  は微小体積と、 $V$  内の各点  $\mathbf{x}$  に対する  $k$  番めのだ円体の影響を表すある関数であり、さらにまた  $\mathbf{n}_j$  と  $\Omega_j$  はテンソル  $\Omega$  の主方向と主値である。 $\Omega$  は損傷による面積減少の割合を表すテンソルであるから、 $\Omega_j$  は次の関係を満足しなければならない。

$$0 \leq \Omega_j \leq 1 \quad (j=1, 2, 3)$$

なお、 $\Omega_1^{(k)} = \bar{\Omega}$ 、 $\Omega_2^{(k)} = \Omega_3^{(k)} = 0$ 、 $\mathbf{n}_1^{(k)} = \mathbf{n}$ 、 $\int \rho^{(k)} dV = \rho V$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) とおけば、式(8.a)は

$$\Omega = (N\rho\bar{\Omega})\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \dots\dots\dots(8.b)$$

となる。したがって式(3)は式(8.a)の特別の場合として直ちに与えられる。

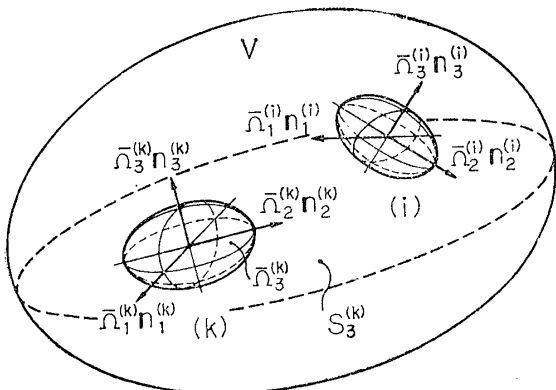


図3 だ円体形空げきを含む微小体積

Vakulenko-Kachanov は、き裂をもつ弾性体の力学を論ずる際に、き裂の中心面の各点の単位法線ベクトルとその点での中心面両側のき裂開口による相対変位ベクトルとのテンソル積を中心面に関して積分することにより、二階のき裂密度テンソルを定義し、これをき裂体の損傷の内部状態変数として用いている<sup>(9)</sup>。しかし、このようなテンソルは各き裂の形態は記述できても、材料の変形と破断の微視的機構に及ぼすそれらのき裂の力学的効果を直接表現するものではない。

式(8.a)で定義される  $\Omega$  の主軸に一致する直角座標系  $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) をとると、第  $i$  主面の有効面積は  $1 - \Omega_i$  倍となるから、面積  $S$ 、方向  $\nu$  の面積要素の面積ベクトル  $S\nu$  に対する実質面積ベクトルは

$$\begin{aligned} S^*\nu^* &= (1 - \Omega_i) S_i e_i \quad (i \text{ について和をとる}) \\ &= (\mathbf{I} - \Omega) S\nu \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

と書け、式(8.a)の  $\Omega$  に対しては2.1節で行ったと同様な解釈を行うことができ、実質応力テンソル  $\sigma^*$  は、この場合にも式(6.a)と同じく

$$\sigma^* = \sigma \Phi, \quad \Phi = (\mathbf{I} - \Omega)^{-1} \dots\dots\dots(10.a)$$

と書ける。ここで、 $\Phi$  は式(6.a)で定義された損傷効果テンソルである。

上式からわかるように、実質応力テンソル  $\sigma^*$  は一般に非対称である。したがって、解析を実行する上からは、 $\sigma^*$  のかわりに、次式のようにこれを対称化したテンソル  $S$  を用い議論を進めるのが便利である。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} [\sigma^* + (\sigma^*)^T] = \frac{1}{2} [\sigma(\mathbf{I} - \Omega)^{-1} \\ &\quad + (\mathbf{I} - \Omega)^{-1}\sigma] = \frac{1}{2} [\sigma\Phi + \Phi\sigma] \dots\dots\dots(11.a) \end{aligned}$$

一般に二階のテンソルの間の変換を規定するのは四階のテンソルであるが、式(10.a)、(11.a)は二階のテンソルによって応力テンソルを変換している。これは、ここではクリープ損傷が応力の作用する面素の面積を通じてだけ応力に影響すると仮定しており、したがって応力テンソルの二つの指標のうち変換をうけるのは一つの指標だけであるからである。しかし式(10.a)、(11.a)も

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{ijkl} &= \delta_{ik}\delta_{jl} \\ \bar{\Gamma}_{ijkl} &= \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

のような4階のテンソルを導入すれば、それぞれ次のようにも書ける。

$$\sigma_{ij}^* = \Gamma_{ijkl} \sigma_{kl} \dots\dots\dots(10.b)$$

$$S_{ij} = \bar{\Gamma}_{ijkl} \sigma_{kl} \dots\dots\dots(11.b)$$

2.3 損傷テンソルの効果 式(3)および(8.a)

で導いた損傷テンソル  $\Omega$  の効果を、二、三の簡単な場合について検討する。

まず図4のように、単位ベクトル  $n$  に垂直な平面に分布する大きさ  $\Omega$  の平面き裂をもつ平板を考える。このとき直角座標系  $x_1, x_2$  を、き裂の主方向  $n$  およびそれと垂直方向に向くようにとる。  $n = e_1$  であるから、損傷テンソル  $\Omega$  は

$$\Omega = \Omega e_1 \otimes e_1 \dots\dots\dots(13)$$

と書ける。テンソル  $\Omega, \Phi$  の  $x_i$  座標に関する成分は

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(14)$$

$$\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} 1/(1-\Omega) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(15)$$

となる。  $x_i$  座標系に関する応力テンソル  $\sigma$  の成分を  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$  とすれば、式 (10), (11) から実質応力テンソル  $\sigma^*, S^*$  の成分は次のようになる。

$$\sigma_{ij}^* = \begin{bmatrix} \sigma_{11}/(1-\Omega) & \sigma_{12} \\ \sigma_{21}/(1-\Omega) & \sigma_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(16)$$

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}/(1-\Omega) & \sigma_{12}(1-\Omega/2)/(1-\Omega) \\ \sigma_{21}(1-\Omega/2)/(1-\Omega) & \sigma_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(17)$$

ここでは、応力テンソルの成分  $\sigma_{ij}$  の第2指標でその応力成分の作用する面を表す。式 (16), (17) からわかるように、対称化しない実質応力  $\sigma^*$  を用いた場合には、き裂はその主面つまり  $x_1$  座標面に作用する応力ベクトルを  $1/(1-\Omega)$  倍に拡大するが、これと垂直な面の応力ベクトルには影響を与えないことになる。これに対して対称化した実質応力テンソル  $S$  では、いずれの座標面の応力ベクトルも拡大される。図4には、  $\sigma$  による応力ベクトル  $T^{(i)}$  と、  $\sigma^*, S$  による応力ベクトル  $T^{(i)*}, T^{(i)S}$  を図中の条件につき、式 (16), (17) から計算した結果を示す。

次に図5のように、同じ平面き裂をもつ平板について、応力  $\sigma$  の主面における実質応力成分について考える。応力の主方向に  $x_i$  座標をとり、き裂の主方向

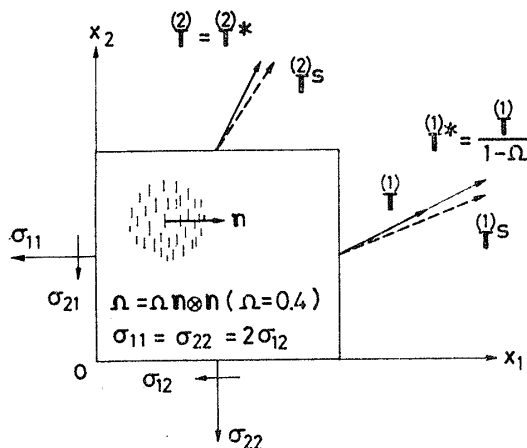


図4  $x_1$  座標面上に一様分布する平面き裂の効果

と  $x_1$  軸のなす角を  $\theta$  とする。このとき損傷テンソルは

$$\Omega = \Omega n \otimes n \dots\dots\dots(18)$$

となる。式 (10), (11) から  $x_i$  座標系に関する実質応力テンソル成分を計算すると

$$\sigma_{ij}^* = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \left(1 + \frac{\Omega}{1-\Omega} \cos^2 \theta\right) & \sigma_{11} \frac{\Omega}{2(1-\Omega)} \sin 2\theta \\ \sigma_{22} \frac{\Omega}{2(1-\Omega)} \sin 2\theta & \sigma_{22} \left(1 + \frac{\Omega}{1-\Omega} \sin^2 \theta\right) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(19)$$

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \left(1 + \frac{\Omega}{1-\Omega} \cos^2 \theta\right) & (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \frac{\Omega}{4(1-\Omega)} \sin 2\theta \\ (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \frac{\Omega}{4(1-\Omega)} \sin 2\theta & \sigma_{22} \left(1 + \frac{\Omega}{1-\Omega} \sin^2 \theta\right) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(20)$$

を得る。上式からわかるように、応力  $\sigma$  の主面においても、実質応力テンソル  $\sigma^*, S$  にはそれぞれせん断成分が生ずることに注意する必要がある。換言すれば、一般に実質応力テンソル  $\sigma^*, S$  の主方向は、クリープ損傷の効果により  $\sigma$  のそれから偏りを生ずる。図5には、図中の条件の場合に対し、  $\sigma$  による  $x_i$  座標面の応力ベクトル  $T^{(i)}$  と、式 (19), (20) から計算した  $\sigma^*, S$  による応力ベクトル  $T^{(i)*}, T^{(i)S}$  を示す。

図6のような平板内で、二つの方向  $n_1, n_2$  に垂直な平面上に大きさ  $\Omega_1, \Omega_2$  の平面き裂が存在する場合も同様に検討できる。このときの損傷テンソルは

$$\Omega = \Omega_1 n_1 \otimes n_1 + \Omega_2 n_2 \otimes n_2 \dots\dots\dots(21)$$

であり、  $\sigma^*, S$  の  $x_i$  座標系に関する成分は次のように計算できる。

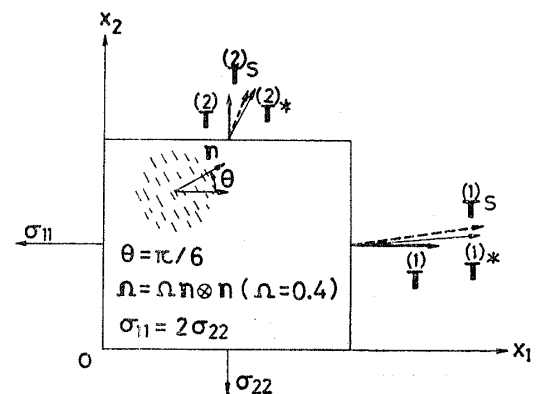


図5 主応力面と傾いた平面上に一様分布する平面き裂の効果

$$\sigma_{ij}^* = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \sigma_{11}[1 - (\Omega_1 \sin^2 \theta_1 + \Omega_2 \sin^2 \theta_2)] & \sigma_{12}[1 - (\Omega_1 \cos^2 \theta_1 + \Omega_2 \cos^2 \theta_2)] \\ + \frac{1}{2} \sigma_{12}(\Omega_1 \sin 2\theta_1 + \Omega_2 \sin 2\theta_2) & + \frac{1}{2} \sigma_{11}(\Omega_1 \sin 2\theta_1 + \Omega_2 \sin 2\theta_2) \\ \sigma_{21}[1 - (\Omega_1 \sin^2 \theta_1 + \Omega_2 \sin^2 \theta_2)] & \sigma_{22}[1 - (\Omega_1 \cos^2 \theta_1 + \Omega_2 \cos^2 \theta_2)] \\ + \frac{1}{2} \sigma_{22}(\Omega_1 \sin 2\theta_1 + \Omega_2 \sin 2\theta_2) & + \frac{1}{2} \sigma_{21}(\Omega_1 \sin 2\theta_1 + \Omega_2 \sin 2\theta_2) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \sigma_{11}[1 - (\Omega_1 \sin^2 \theta_1 + \Omega_2 \sin^2 \theta_2)] & \sigma_{12} \left[ 1 - \frac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2) \right] \\ + \frac{1}{2} \sigma_{12}(\Omega_1 \sin 2\theta_1 + \Omega_2 \sin 2\theta_2) & + \frac{1}{4}(\sigma_{11} + \sigma_{22})(\Omega_1 \sin 2\theta_1 + \Omega_2 \sin 2\theta_2) \\ \sigma_{21} \left[ 1 - \frac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2) \right] & \sigma_{22}[1 - (\Omega_1 \cos^2 \theta_1 + \Omega_2 \cos^2 \theta_2)] \\ + \frac{1}{4}(\sigma_{11} + \sigma_{22})(\Omega_1 \sin 2\theta_1 + \Omega_2 \sin 2\theta_2) & + \frac{1}{2} \sigma_{21}(\Omega_1 \sin 2\theta_1 + \Omega_2 \sin 2\theta_2) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

$$\Delta = 1 - [\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_1 \Omega_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]$$

この場合、各々の応力ベクトルの計算例を示すと図6のようになる。

なお式(8・a)からわかるように、式(21)~(23)は  $\theta_1 = \theta_2 + \pi/2$  とすれば、平均化した主方向が  $n_1, n_2$ 、平均化した主面の面積が  $\Omega_1, \Omega_2$  のようなだ円き裂の集合の場合に対してもそのまま成り立つ。

以上の議論のように、実質応力テンソルとして  $\sigma^*$  を用いるか、 $S$  を用いるかによって、若干異なった結果が得られる。2・1節で述べたように、テンソル( $I - \Omega$ )を、任意の面素の面積ベクトルから、損傷によって減少した実質面積ベクトルへの変換と解釈する限り、テンソル  $\sigma^*$  が直接的な意味をもつが、数理解析の観点からはテンソル  $S$  が便利である。これら二つのテンソルのうち、どちらのテンソルを用いるのが適当であるかは、詳しい実験的検討にまたなければならない。

### 3. 構成関数の表現と近似

以上で導いた損傷テンソル  $\Omega$  および損傷効果テンソル  $\Phi$  は、前報<sup>(10)~(12)</sup>で用いたテンソル  $\Omega, \Psi$  と

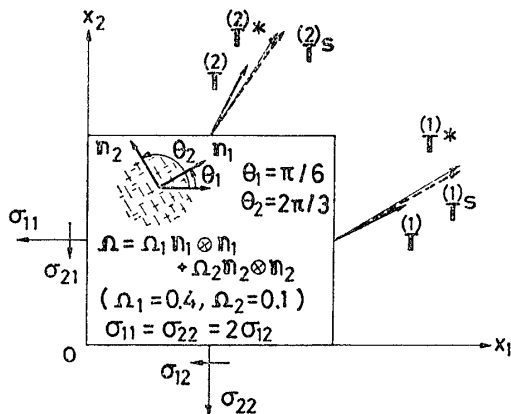


図6 二平面上に一様分布する平面き裂の効果

本質的には同一であるから、有限変形におけるクリープとクリープ損傷の構成式は前報と同様にして展開できる。ここでは、式(10)、(11)で定義される二つの実質応力テンソルのうち、 $S$  を用いて議論を進める。

クリープひずみ速度および損傷速度は、その時間での応力、温度、損傷のほか、母材の非弾性ひずみ履歴にも依存する。材料損傷の効果は、2章で議論した  $\Omega$  を内部状態変数として用いることによって表せるから、

$$D = G(\sigma, \Omega, \kappa, \theta) \dots\dots\dots (24)$$

$$\dot{\Omega} = H(\sigma, \Omega, \kappa, \theta) \dots\dots\dots (25)$$

のように規定できるものと仮定する。ここで、 $D$  は変形速度テンソルであり、また  $\kappa$  と  $\theta$  は母材の非弾性変形履歴を表す変数と温度であり、 $(\circ)$  は Jaumann の変化率を表す。

クリープにおける材料損傷の主要な影響は、前述の有効面積の減少のほか、各種の空けき周辺での応力集中が考えられる。もし、損傷の寄与が有効面積の減少だけによるものであれば、 $D$  と  $\dot{\Omega}$  は  $S, \kappa, \theta$  だけの関数として表されるはずである。しかしここでは、応力集中の効果を検討するため、さらに  $\Omega$ 、したがって  $\Phi$  の効果も含め

$$D = \bar{G}(S, \Phi, \kappa, \theta) \dots\dots\dots (26)$$

$$\dot{\Omega} = \bar{H}(S, \Phi, \kappa, \theta) \dots\dots\dots (27)$$

のように表す。

等方テンソル関数に対する表現定理<sup>(13)(17)</sup>を適用すれば、式(26)の関数  $\bar{G}$  の一般形は、次のような  $S$  と  $\Phi$  のテンソル多項式で表される。

$$D = \beta_0 I + \beta_1 \Phi + \beta_2 \Phi^2 + \beta_3 S + \beta_4 (\Phi S + S \Phi) + \beta_5 (\Phi^2 S + S \Phi^2) + \beta_6 S^2 + \beta_7 (\Phi S^2 + S^2 \Phi) \dots\dots\dots (28)$$

ここで、 $\beta_i$  ( $i=0, 1, \dots, 7$ ) は、 $\kappa, \theta$  および次に示す  $S$  と  $\Phi$  に関する10個の独立な不変量

$$\left. \begin{aligned} & \text{tr } \Phi, \text{tr } \Phi^2, \text{tr } \Phi^3, \text{tr } S, \text{tr } S^2, \text{tr } S^3 \} \\ & \text{tr } (\Phi S), \text{tr } (\Phi^2 S), \text{tr } (\Phi S^2), \text{tr } (\Phi^2 S^2) \} \\ & \dots\dots\dots(29) \end{aligned} \right\}$$

の関数である。

2章の結果によれば、式(27)の $\dot{\Omega}$ は損傷の進行による空げきの増大を表す。したがって、クリープ損傷に関する従来の実験結果<sup>(1)(6)(8)(14)(15)</sup>を考慮すれば、十分に一般的な関係

$$\dot{\Omega} = \gamma I + \sum_i M^{(i)} [\nu^{(i)} \otimes \nu^{(i)}] + \sum_j N^{(j)} [\nu_D^{(j)} \otimes \nu_D^{(j)}] \dots\dots\dots(30)$$

が導ける<sup>(10)</sup>。ここで、 $\gamma, M^{(i)}, N^{(j)}$ は $S, \Phi, \epsilon, \theta$ のスカラ関数と四階のテンソル関数であり、また $\nu^{(i)}$ と $\nu_D^{(j)}$ は実質応力テンソル $S$ とその偏差テンソル $S_D$ の正の主値に対する主方向である。さらに上式において、 $M^{(i)}[\nu^{(i)} \otimes \nu^{(i)}]$ の成分形は $M_{pqrs}^{(i)} \nu_r^{(i)} \nu_s^{(i)}$ に等しい。

#### 4. 構成式の特特殊化

式(28)、(30)を実際に用いるためには、これをさらに具体化する必要がある。

クリープ損傷がない場合に、ミーゼス形のひずみ硬化理論が成立すると仮定するならば、式(27)は例えば次のように特殊化することができる。

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{3}{2} A \epsilon^m \left( \frac{3}{2} \text{tr } S_D^2 \right)^{(n-1)/2} S_D \\ \epsilon &= \int \left( \frac{2}{3} \text{tr } D^2 \right)^{1/2} dt \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

ここで、 $A, m, n$ は定数である。

実験結果によれば、クリープ損傷が最大主応力形と八面体せん断応力形に分類できるが、それらは実際にはしばしば同時に現れる<sup>(1)(14)~(16)</sup>。いま、Sdobuirev<sup>(1)</sup>やGoel<sup>(6)</sup>と同じく、両者の線形結合を考えると、式(30)の簡単な例として

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= B \left[ \zeta S^{(1)} + (1-\zeta) \left( \frac{3}{2} \text{tr } S_D^2 \right)^{1/2} \right]^k \\ & \times [\eta \nu^{(1)} \otimes \nu^{(1)} + (1-\eta) I] \dots\dots\dots(23) \\ S^{(1)} &= \max S^{(i)} \quad (i=1, 2, 3), \quad S^{(1)} > 0 \end{aligned}$$

を考察することができる。ここで、 $B, k, \zeta, \eta$ は定数である。上式では、クリープ破断は損傷テンソル $\Omega$ の最大主値が1になったとき、その主面上で生じると仮定されている。

#### 5. 結 言

クリープ過程における材料損傷の集積を力学的変数で表現する方法について論ずるとともに、この変数を、損傷状態を表す内部状態変数と考えて、一般的応力状

態に対するクリープとクリープ損傷の構成式を定式化した。

前報ではVakulenko-Kachanovのき裂密度テンソルを用いて議論したが、そのテンソルの表現する内部状態が材料の変形と損傷の進行に及ぼす影響は必ずしも明らかではなく、このためそのようなテンソル変数で内部状態を表現することの妥当性とその限界は不明であった。これに対して、ここで導いた損傷テンソルあるいは損傷効果テンソルは、微視的構造変化の力学的効果を直接表現したものであるから、このようなあいまいさはない。

材料中の損傷の集積に対するこの論文の理論は、クリープ損傷に対してだけでなく、一般の損傷体の力学を論ずるのにも適用できる。

最後に、この研究にあたり懇切なご教示と、ゆき届いたご検討を賜った名古屋大学工学部の大橋義夫教授に深く感謝する。また本研究は、昭和53年度および54年度文部省科学研究費補助金(一般研究C、課題番号355048)の助成による研究の一部であることを付記し、謝意を表す。

#### 文 献

- (1) Kachanov, L.M. (大橋訳), 破壊力学の基礎, (昭52), 117, 森北出版.
- (2) Kachanov, L.M., *Izv. A.N. USSR, Otd. Tekhn. Nauk*, 8 (1958), 26.
- (3) Rabotnov, Yu.N. (Smith, A.I. and Nicolson, A.M. 編), *Advances in Creep Design*, (1971), 3, Applied Sci.
- (4) Rabotnov, Yu.N., *Creep Problems in Structural Members*, (1969), North-Holland.
- (5) Goel, R.P., *Trans. ASME, Ser. E*, 42-3 (1975-9), 625.
- (6) Hayhurst, D.R. and Storakers, B., *Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, 349-1658 (1976-5), 369.
- (7) Hayhurst, D.R. and Leckie, F.A., *J. Mech. Phys. Solids*, 21-6 (1973-11), 431.
- (8) Garofalo, F. (足立訳), 金属クリープの基礎, (昭43), 198, 丸善.
- (9) Vakulenko, A.A. and Kachanov, M.L., *Mekhanika Tverdogo Tela*, 4 (1971), 159.
- (10) 村上・大野, 機論, 45-392, A (昭54-4), 318.
- (11) 村上・大野, 文献(10)の327ページ.
- (12) Murakami, S. and Ohno, N. (Chang T.Y. and Krempl, E. 編), *Inelastic Behavior of Pressure Vessel and Piping Components*, PVP-PB-028, (1978), 55, ASME.
- (13) Wang, C.C., *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 36-3 (1970-3), 166.
- (14) Johnson, A.E., *Metall. Rev.*, 5-20 (1960), 447.
- (15) Johnson, A.E., ほか2名, *Engineer*, 202-5248 (1956-8), 261, 299.
- (16) Hayhurst, D.R., *J. Mech. Phys. Solids*, 20-6 (1972), 381.
- (17) Leigh, D.C. (村上訳), 非線形連続体力学, (昭50), 66, 共立出版.

## 討 論

〔質問〕 井上達雄(京都大学工学部)

前報<sup>(10)~(12)</sup>における損傷テンソルの物理的意義をさらに深く追求されたことは、有意義と思う。

(1) 緒言で述べておられるように、本理論はクリープのみでなく一般の場合にも拡張できるとあるが、クリープやある種の損傷のように、微細なポイドやき裂が物体中に一様に分布する場合には有効である。しかし塑性変形や疲労のような場合には、損傷が特に内部や逆に表面に集中することも多いわけだが、このときにはどのように考えたらよいか。

(2) また、これらの損傷は、必ずしも、応力を受け持たない空げきであるとは限らないことも多いと思う。この場合には、どのような取扱いが考えられるか。

〔回答〕 (1) ご指摘のような損傷に対しても、本論文の理論を適用できる場合が多くあるように思われる。例えば、塑性変形でのくびれの発生の場合、材料内部で多数のポイドが発生し、合体して破断に至ることが知られているが、これは材料内部で静水引張応力が大きくなることに起因している(付1)。したがって、塑性変形における損傷の発達を規定する発展式[本論文の式(25)あるいは(27)に対応]にこのような効果を反映させれば、塑性変形の場合に対しても損傷の分布を解析することができる。一方疲労に対しては、一様引張応力状態においてさえも、材料表面上でき裂が発生するが、これは材料の表面での突出しの発生に基づくものと考えられる(付1)。したがって、疲労において生ずる損傷の不均一な発達は、このような変形状態の違いを表す力学量を内部状態変数として損傷の発展式に加えることにより、原理的には本論文と同様に議論できると考えられる。

(2) 本論文では、空げきの生成は不可逆であって、いったん発達すると応力方向が逆になっても、そ

の空げきが再び接して応力を受け持つことはないとは仮定している。これは、クリープにおける空げき、あるいは上記のくびれにおけるポイドは有限の厚さを持ち、少なくともこれらが巨視的き裂に成長する損傷の最終段階を除けば、応力の方向を逆にしても閉じることはないからである(付2)。このような仮定は、岩石の損傷に対しても用いられている(付3)。

これに対し、疲労き裂のような場合には、応力の方向が変化すると空げきが閉じ、ご指摘のように応力を受け持つことはある(付1)。このときにも、き裂面は依然として存在するから、本論文で議論した損傷の力学的表現式(3)、(8)は成り立つが、実質応力テンソル $\sigma^*$ 、 $\mathbf{S}$ は、もはや空げきが応力を受け持たないとして誘導した式(6)、(10)および(11)によっては表されない。この場合実質応力テンソルとしては、例えば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ii}^* &= \sigma_{ii} \langle \Phi_i \rangle \quad (i \text{ について和をとらない}) \\ \sigma_{ij}^* &= \sigma_{ij} \Phi_j \quad (i \neq j, j \text{ について和をとらない}) \end{aligned} \right\}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^* + \sigma_{ji}^*)$$

が考えられる。ここで、 $\Phi_i$  ( $i=1, 2, 3$ )は $\Phi$ の主値であり、また $\langle \Phi_i \rangle$ は $\sigma_{ii}$  ( $i$ について和をとらない)が正のとき $\Phi_i$ 、負のとき1に等しい関数を表し、空げきが閉じたことによって圧縮応力を受け持つ効果を示す。さらに上式では、空げきが閉じてもき裂面は存在するから、せん断応力 $\sigma_{ij}$  ( $i \neq j$ )がき裂面に沿って支えられる効果は小さく、したがってせん断応力は損傷効果テンソル $\Phi$ によってそのまま拡大されると仮定してある。

なお、破断寿命に対する安全側の見積もりをする観点から、クリープにおけるサイクル負荷の場合に対しても、圧縮の際にき裂は応力を受け持たないと仮定した研究もある<sup>(1)</sup>。

(付1) Tetelman, A. S. and McEvily, A. J., Jr. (宮本訳), 構造材料の強度と破壊, (昭45), 培風館。

(付2) Garofalo, F. (足立訳), 金属クリープの基礎, (昭43), 丸善。

(付3) Dragon, A., Arch. Mech., 28-1 (1976), 13.