

## クリープ損傷状態の力学的表現とその実験的検討\*

村上 澄 男\*\*, 今 泉 敏 幸\*\*\*  
Sumio MURAKAMI, Toshiyuki IMAIZUMI**Key Words:** Strength of Materials, Creep, Creep Damage, Anisotropy, Constitutive Equation, Mechanical Representation, Tensor Variable

## 1. 緒 言

多結晶金属材料のクリープ損傷は、おもに粒界上での空けきの発生と成長によって引き起こされることが知られている<sup>(1)~(3)</sup>。これらの空けきの発達には通常、最大主応力に垂直な粒界上で最も著しく、したがってその効果は決して等方的ではない。このため最近では、材料の内部損傷状態の方向性を表現する目的から、これをテンソル変数で記述しようとする試みがいくつか報告されている<sup>(4)~(9)</sup>。

例えば Chaboche<sup>(4)(5)</sup> は、材料の内部損傷状態はその変形特性の変化によって記述できると考え、損傷材料の弾性係数から導かれる4階のテンソルを損傷の内部状態変数として用い、材料損傷の系統的理論を展開した。この理論では材料の損傷状態を大域的な変形量で規定しようとしているが、このような内部状態変数によっては損傷の局所的状態、すなわち空けきの配置状態は十分に記述し得ないという難点を持つ。一方、Leckie と Onat<sup>(6)</sup> も粒界での空洞成長による材料損傷をテンソル変数で表現するクリープ損傷理論を展開した。彼らは、方位ベクトル  $n$  に垂直な粒界での空洞体積密度  $V(n)$  と  $n$  のシアド積  $n_i, n_j, n_i n_j, n_i n_j n_k, \dots$  とのモーメントを、全立体角について積分することによって、空洞体積の分布密度テンソルを定義した。しかしこの理論も、ある方位を持つ粒界上の空洞体積だけを問題とし、その形状は考慮しないということのほか、このようなテンソルが実際の微視的構造変化にどのような寄与をするのか明らかでないという欠点を持つ。これに対して村上と大野<sup>(7)~(9)</sup>は、上で述べたクリープ損傷の微視的機構を考慮し、一般的応力状態におけるクリープ損傷状態は、特定の三つの主面における空けき密度で規定される2階対称な損傷テンソル  $\Omega$  で記述できることを示した。このテンソルは、材料内部の任意の面素の初期状態における面積ベ

クトルから、損傷によって減少した実質面積ベクトルへの線形変換 ( $I - \Omega$ ) を定義するものと解釈できる。ただし  $I$  は単位テンソルである。つづいて彼らは、この2階のテンソルにより、損傷発展式および構成式に対する実質応力テンソルを定義した。しかし厳密には、これらの実質応力テンソルは、損傷速度のように、主として実質面積の変化に強く支配される現象に対してだけ有効である。

本論文では、著者らの以前の理論<sup>(7)~(9)</sup>をさらに発展させ、損傷の発展式に対する上述の実質応力テンソルとは別に、損傷材料のクリープ構成式に対しては損傷テンソルから構成した4階のテンソルにより新しい実質応力テンソルを導入するとともに、この理論の妥当性を実験的に検討する。すなわち実験では、損傷材料を種々の円孔配列を持つ多孔板でモデル化し、このような材料の力学的状態、すなわち破壊ならびに変形特性が上述の損傷テンソルと実質応力テンソルで表現できるかどうかを検討する。このとき、損傷テンソル、損傷発展式およびクリープ構成式に対する二つの実質応力テンソルのテンソル的特性は、負荷方向に対して円孔配列の傾き角度を種々に変化させた多孔板の破断応力と応力-塑性ひずみ関係を調べることににより、すなわち損傷状態の方向性を検討することによって議論する。このほか、損傷の大きさが、損傷変数のテンソル的性質に、どのような影響を与えるかについても検討する。

## 2. クリープ損傷変数とクリープ損傷方程式

2.1 損傷テンソルと損傷発展式 村上と大野<sup>(7)~(9)</sup>は、材料の内部損傷状態を2階のテンソル変数によって表現し、一般的応力状態に対する多結晶金属材料のクリープ損傷理論に関する一連の研究を行った。

まず、材料の内部損傷の主要な機構として粒界における空けきの発達を考えると、材料の内部損傷状態は2階対称な損傷テンソル

$$\Omega = \sum_{j=1}^3 \Omega_j n_j \otimes n_j \dots \dots \dots (1)$$

\* 昭和56年3月19日 東海支部第30期総会講演会において講演、原稿受付 昭和56年7月25日。

\*\* 正員、豊橋技術科学大学(〒440 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

\*\*\* 学生員、豊橋技術科学大学大学院。

によって記述できる。ここで、 $n_j$  と  $\Omega_j$  は空げきの配置で定まる損傷テンソルの主方向と対応する主値であって、特に  $\Omega_j$  は、主方向  $n_j$  に垂直な平面上での空げき密度と解釈できる。

次に、内部損傷の力学的効果を、空げきの存在による有効面積の減少と解釈すると、コーシーの応力テンソル  $\sigma$  は次のような実質応力テンソルに拡大される。

$$S = [\sigma\Phi + \Phi\sigma]/2, \quad \Phi = (I - \Omega)^{-1} \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 $\Phi$  は材料損傷による応力  $\sigma$  の拡大を定義するから、これを損傷効果テンソルと呼ぶ。

材料の損傷の発達には、各瞬間での応力、損傷状態、温度のほか、材料母材の非弾性ひずみ履歴にも依存する。しかし、損傷の進行に対する応力と損傷の効果は、式 (2) の  $S$  と  $\Phi$  を通じてだけ現れるとすると、クリープ損傷の発展式は次のように書ける。

$$\dot{\Omega} = H(S, \Phi, \kappa, T) \dots \dots \dots (3)$$

ここで、 $\kappa$  と  $T$  は母材の非弾性変形履歴を表す変数と温度であり、また  $(\cdot)$  は時間に関する偏微分を表す。

2.2 クリープ構成式に対する実質応力テンソル

一般に、2階のテンソルの間の変換を規定するのは4階のテンソルであるが、式 (2) は2階の損傷効果テンソル  $\Phi$  によって応力を変換している。これは、上記の理論では、クリープ損傷が応力の作用する面素の実質面積の変化を通じてだけ影響すると仮定しており、したがって応力テンソルの二つの指標のうち変換をうけるのは一つの指標だけであるからである。このため、式 (2) で定義された実質応力テンソル  $S$  は、空げきの成長速度のように、主として物体内の各面素の実質面積の変化に強く支配される現象に対してだけ有効である。

これに対して、空げきの発達によって損傷をうけた材料の変形は、考える面素の実質面積の減少だけでなく、空げき配置そのものに強く影響されるから、厳密には式 (2) の実質応力は適用できない。一般に、材料の変形特性は応力テンソルをひずみテンソルへ変換する4階のテンソルで規定される。このことは、損傷材料の構成式に対する実質応力テンソル  $S^*$  は、損傷状態で規定される4階のテンソルにより、

$$S^* = \bar{\Gamma}(\Omega)\sigma = \Gamma(\Phi)\sigma \dots \dots \dots (4 \cdot a)$$

のように定義する必要のあることを意味する。ここで、 $\bar{\Gamma}(\Omega)$ 、 $\Gamma(\Phi)$  は損傷テンソル  $\Omega$  あるいは損傷効果テンソル  $\Phi$  を引数とする4階のテンソル関数である。上式からわかるように、実質応力テンソル  $S^*$  は一般には非対称である。したがって、解析を実行する上からは、 $S^*$  のかわりに、次式のようにこれを対称化したテンソル  $\bar{S}$  を用い議論を進めるのが便利で

ある。

$$\bar{S} = [S^* + (S^*)^T]/2 = [\Gamma\sigma + (\Gamma\sigma)^T]/2 \dots (4 \cdot b)$$

損傷発展式 (3) の場合の議論と同様に、クリープ変形に対する応力と損傷の効果が、式 (4 \cdot b) の  $\bar{S}$  と式 (2) の  $\Phi$  を通じてだけ現れるとすると、クリープ変形の構成式は次のように書ける。

$$\dot{\epsilon}^c = G(\bar{S}, \Phi, \kappa, T) \dots \dots \dots (5)$$

ここで、 $\dot{\epsilon}^c$  はクリープ速度テンソルである。

関数  $\Gamma(\Phi)$  は等方テンソル関数であるから、Rivlin-Ericksen<sup>(10)</sup> の表現定理によれば、その一般的表現は、等方テンソル  $\delta_{ij}$  と損傷効果テンソル  $\Phi_{ij}$  から作られる4階の基本テンソルの線形結合で表され、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijkl} = & \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \phi\delta_{ij}\Phi_{kl} \\ & + \pi\Phi_{ij}\delta_{kl} + \rho(\delta_{ik}\Phi_{jl} + \delta_{il}\Phi_{jk} + \delta_{jk}\Phi_{il} \\ & + \delta_{jl}\Phi_{ik}) + A\Phi_{ij}\Phi_{kl} + B\delta_{ij}\Psi_{kl} + C\Psi_{ij}\delta_{kl} \\ & + D(\delta_{ik}\Psi_{jl} + \delta_{il}\Psi_{jk} + \delta_{jk}\Psi_{il} + \delta_{jl}\Psi_{ik}) \\ & + G\Phi_{ij}\Psi_{kl} + H\Psi_{jl}\Phi_{ki} + K\Psi_{ij}\Psi_{kl} \dots \dots \dots (6 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\Psi_{ij} = \Phi_{ip}\Phi_{pj} \dots \dots \dots (6 \cdot b)$$

ここで、 $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\phi$ 、 $\pi$ 、 $\rho$  は定数であり、また、 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $G$ 、 $H$ 、 $K$  はテンソル  $\Phi_{ij}$  のスカラー不変量の多項式である。したがって、式 (5) に含まれる実質応力テンソル  $\bar{S}$  は、この式と式 (4) によって具体的に計算できる。

特に、式 (6 \cdot a) において右辺第5項だけをとり、 $\rho = 1/4$  とおけば

$$\bar{\Gamma}_{ijkl} = (\delta_{ik}\Phi_{jl} + \delta_{il}\Phi_{jk} + \delta_{jk}\Phi_{il} + \delta_{jl}\Phi_{ik})/4 \dots \dots \dots (7 \cdot a)$$

となる。このとき式 (4 \cdot b) は

$$\bar{S} = [\bar{\Gamma}\sigma + (\bar{\Gamma}\sigma)^T]/2 = [\Phi\sigma + \sigma\Phi]/2 \dots \dots (7 \cdot b)$$

となり、式 (2) で定義された損傷発展式に対する実質応力テンソルが得られる。

3. クリープ損傷の力学的表現に対する実験的検討

3.1 損傷材料の多孔板による模型化と実験方法

前節で述べたクリープ損傷理論の妥当性は、材料損傷の効果が、式 (1)、(2) および式 (4)~(6) で定義された損傷テンソル  $\Omega$ 、損傷効果テンソル  $\Phi$ 、実質応力テンソル  $S$ 、 $\bar{S}$  によって十分記述できるかどうかを調べることによって検証できる。

つぎに、損傷材料を図1のような多孔板によって模型化し、これらの損傷変数の有効性ならびにクリープ変形に対する空げき密度、空げき配置等の影響を実験的に検討する。材料の内部状態を円孔で模型化した理由は、一般に高温低応力における多結晶材料のクリー

ブ損傷はおもにほぼ円形のいわゆる  $r$  形空洞の発達によって進行するということのほか、模型における応力集中の影響を少なくし、力学的解釈を明確にするためである。また、同一の直径の円孔を規則正しく配列したのも、これと同じ理由からである。

図1のように、試験片は幅 80 mm、厚さ 1 mm の多孔板であり、直交する二方向の円孔配列における短辺のピッチ  $a$  は 4 mm とし、一方長辺のピッチ  $b$  は、8 mm および 10 mm の 2 種とした。また、円孔の直径  $d$  は損傷の大きさの影響を調べるために、0.5 mm から 2.5 mm まで 0.5 mm 間隔で 5 種を用いた。試験片の軸方向に対する円孔配列の傾き角度  $\theta$  は、 $0^\circ$  から  $90^\circ$  まで  $15^\circ$  間隔で 7 種類の値を選んだ。ただし、円孔直径が 0.5 mm と 1.5 mm の試験片に対しては、 $0^\circ$ 、 $45^\circ$  および  $90^\circ$  の 3 種とした。今後の議論では、図1のように  $x_1'$ 、 $x_2'$  軸が試験片の軸方向とそれに垂直な方向に一致する直角座標系を用い、また円孔配列の主方向のうち面積減少の大きな方を  $n_1$ 、それと直交する方向を  $n_2$  で表す。試験片材料は、破壊が局所的な応力集中に支配されないような適当な延性をもつことと、逆に形状変化の影響を少なくするため破断ひずみ、したがって延性が大きすぎないという条件から、第3種 6.4 黄銅板 1/4 H (JIS C 2801) を採用した。

実験に際しては、図1に示す試験片の  $x_1'$  軸方向に引張荷重を加え、その時の弾塑性ひずみと破断荷重を測定する。なお、試験片材料の初期異方性の影響を除去するために、試験片は負荷方向が常に材料中の一定

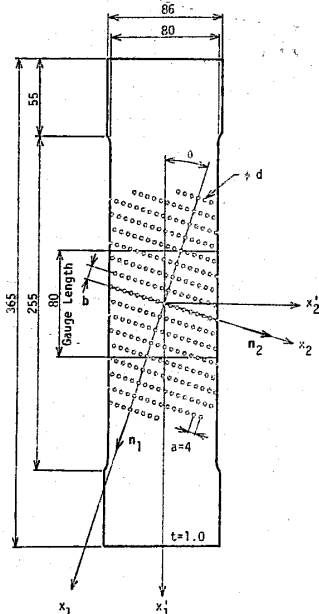


図1 多孔板模型†

方向に一致するように切り出した。図2は試験片伸び測定装置を示す。

**3.2 損傷効果テンソル  $\Phi$  と実質応力テンソル  $S$  の検討** 式(2)は、空げきの発達に伴う実質面積の減少により、コーシーの応力テンソル  $\sigma$  が実質応力テンソル  $S$  まで拡大されることを示す。一方、式(3)では、損傷の発達、すなわち破壊の進行は、主としてこのような実質応力テンソル  $S$  で規定されると仮定している。このことは、図3(a)に示すように、損傷材料に応力  $\sigma$  が作用したときの損傷速度  $(\dot{\Omega})_D$  は、同一形状の非損傷材料に応力  $S$  が作用したときの損傷速度  $(\dot{\Omega})_U$  と同じであることを意味する。

この実験の目的は、多孔板模型によって前述の損傷発展式そのものを検証することではなく、損傷発展式の引数である実質応力テンソル  $S$  と損傷効果テンソル  $\Phi$  の概念の妥当性、つまり損傷の発達を支配する材料の内部状態がこのようなテンソル変数で表現しうるかどうかを検討することにある。すでに述べたよう

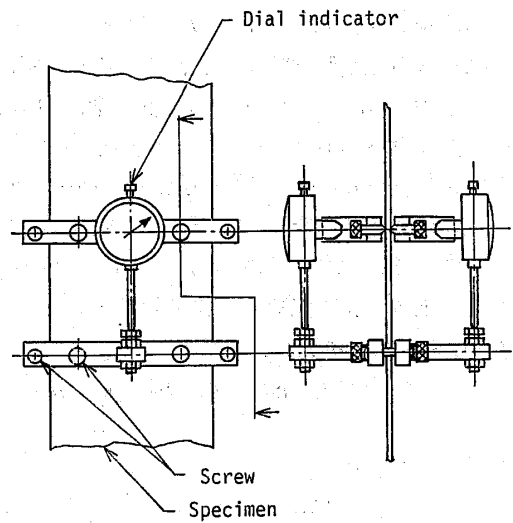
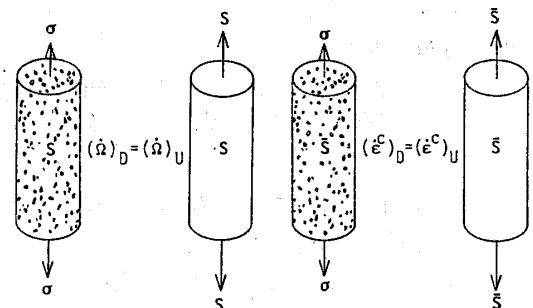


図2 試験片伸び測定装置



(a) 損傷速度に対する実質応力  $S$  (b) 変形に対する実質応力  $\bar{S}$

図3 実質応力  $S$  および  $\bar{S}$  の概念

† 猪狩氏と瀬戸口氏の指摘により標線距離を記入した。

に、損傷効果テンソル  $\Phi$  による応力拡大の効果は、空げきによる面積減少だけに起因している。瞬間的な破断現象を損傷速度が無限大の極限の状態と考えれば、このような効果は多孔板の破断現象において観察される効果と同じものであり、損傷効果テンソル  $\Phi$  のテンソル的特性は多孔板の破断試験によって検討することができる。すなわち図3(a)によれば、多孔板がコーシーの応力テンソル  $\sigma$  で破断するとすれば、孔のない平板（非損傷材料）は応力  $S=(\Phi\sigma+\sigma\Phi)/2$  で破断することになる。したがって、特定の円孔配列を持つ多孔板の破断応力と孔のない平板の破断応力から、その多孔板の損傷効果テンソル  $\Phi$  を定めることができる。

いま、座標軸を損傷効果テンソルの主方向（すなわち  $n_i$  方向）に選べば、式(2)は

$$S_{ii}=\Phi_i\sigma_{ii} \quad (i=1,2; i \text{ について和をとらない。}) \quad \dots\dots\dots(8)$$

となる。ただし  $\Phi_i$  は  $n_i$  に対応する損傷効果テンソルの主値である。したがって、 $n_1$  および  $n_2$  方向の単軸引張試験、すなわち図1の  $\theta=0^\circ$  および  $\theta=90^\circ$  の場合につき単軸引張試験を行い、それぞれ破断時のコーシー応力  $(\sigma_{11})_B, (\sigma_{22})_B$  を実験的に測定すれば、 $n_1, n_2$  方向の損傷効果テンソルの成分は式(8)から

$$\Phi_1=S_B/(\sigma_{11})_B, \quad \Phi_2=S_B/(\sigma_{22})_B \quad \dots\dots\dots(9)$$

のように決定できる。ただし、 $S_B$  は孔のない平板の破断応力である。この式によれば、図1の  $\theta=0^\circ$  のような円孔配列を持つ試験片の損傷効果テンソルは、

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 n_1 \otimes n_1 + \Phi_2 n_2 \otimes n_2 \\ &= \{S_B/(\sigma_{11})_B\} n_1 \otimes n_1 + \{S_B/(\sigma_{22})_B\} n_2 \otimes n_2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(10)$$

のように表される。

次に、図1のように、円孔配列を  $\theta$  だけ時計方向に回転した試験片の損傷状態は式(10)から計算できる。すなわち、この試験片の円孔配列に対する損傷効果テンソル  $\Phi'$  の  $x_i'$  座標に関する成分は、

$$\begin{aligned} \Phi' &= Q\Phi Q^T \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_1 \cos^2 \theta + \Phi_2 \sin^2 \theta & (\Phi_1 - \Phi_2) \sin \theta \cos \theta \\ (\Phi_1 - \Phi_2) \sin \theta \cos \theta & \Phi_1 \sin^2 \theta + \Phi_2 \cos^2 \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(11)$$

のように与えられる。ここでは  $Q$  は、 $x_i$  座標系から  $x_i'$  座標系への変換を定義する回転テンソルである。

一方、図1の円孔配列を持つ試験片の損傷状態は、試験片軸方向の単軸引張り破断試験によって実験的に求めることもできる。すなわち、このとき破断時のコーシー応力を  $(\sigma_{11})_{\theta B}$  とすると、試験片に発生する実質応力テンソルは、

$$\begin{aligned} S' &= (\sigma_B \Phi' + \Phi' \sigma_B) / 2 \\ &= \begin{bmatrix} (\sigma_{11})_{\theta B} \Phi_{11}' & (\sigma_{11})_{\theta B} \Phi_{12}' / 2 \\ (\sigma_{11})_{\theta B} \Phi_{12}' / 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

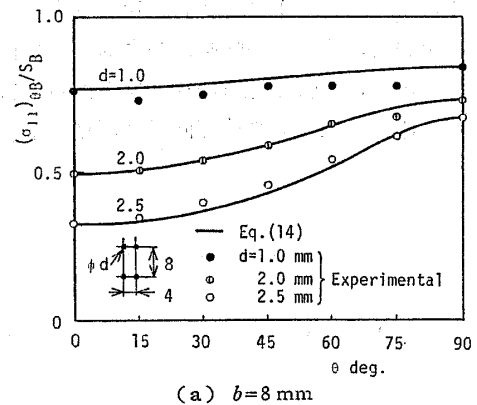
となる。この試験片でも  $S'$  の最大主応力が  $S_B$  に達したとき破断が生じるとすれば、

$$\begin{aligned} S_B &= [S_{11}' + \sqrt{(S_{11}')^2 + 4(S_{12}')^2}] / 2 \\ &= (\sigma_{11})_{\theta B} \Phi_{11}' [1 + \sqrt{1 + (\Phi_{12}' / \Phi_{11}')^2}] / 2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(13)$$

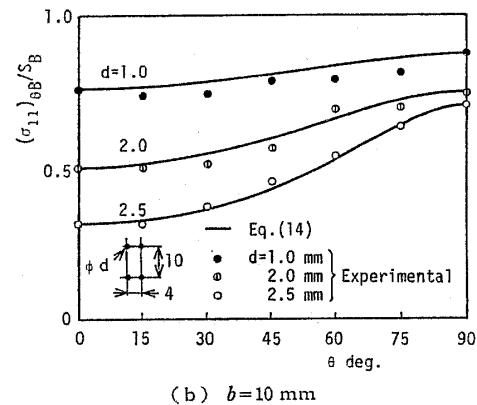
となり、これから

$$(\sigma_{11})_{\theta B} / S_B = 2 / \Phi_{11}' [1 + \sqrt{1 + (\Phi_{12}' / \Phi_{11}')^2}] \quad \dots\dots\dots(14)$$

を得る。したがって、 $\theta$  の各値に対して、式(11)の  $\Phi_{11}'$  および  $\Phi_{12}'$  を式(14)に代入して求めた  $(\sigma_{11})_{\theta B}$  と、実験によって求めた  $(\sigma_{11})_{\theta B}$  を比較すれば、損傷効果テンソルのテンソル的特性、ならびに実質応力テンソル  $S$  の概念の妥当性が検証できる。図4は、この結果を示す。図中の丸印は実験結果であり、実線は式(14)によって求めた理論値である。この図から、実験値は、孔径が1mmの場合に理論値との間に若干のずれが見られるものの、全般的には理論値とよく一致していることがわかる。つまり、破断に対する損傷の効果は、2階対称なテンソル  $\Phi$  で表すことができる。一方、図5は損傷効果テンソル  $\Phi'$  の成分  $\Phi_{11}'$  と空げき密度  $\bar{Q}$  との関係を図示したものである。図中



(a)  $b=8$  mm



(b)  $b=10$  mm

図4 破断応力におよぼす円孔配列の傾きの影響

の丸および四角印は、 $\theta=0^\circ, 90^\circ$  に対する実験値を示し、 $\phi_{11}'$  は式 (9), (11) によって求めた値であり、また  $\bar{\phi}$  は円孔の存在による横断面積の減少から計算した。一方実線は、次式によって求めた計算値である。

$$\phi_{11}' = 1 / (1 - \bar{\phi}) \dots\dots\dots (15)$$

図から、 $\phi_{11}'$  すなわち多孔板の破断応力は、空げき配列の影響をあまりうけず、実質面積の減少に強く支配されることがわかる。このことは、破断に対する損傷の効果が、空げき密度に関連した2階の対称テンソルで表せることのうちの根拠を与えている。また、孔径が2.5 mm の場合を除き、実線と丸印および四角印がよく一致していることから、破断に対する損傷の効果は、本実験の場合には、主に幾何学的な面積減少によるものであることがわかる。

3.3 実質応力テンソル  $\bar{S}$  の検討

クリープ構成式 (5) によれば、クリープ変形速度は式 (4・b) の実質応力テンソル  $\bar{S}$  で規定される。このことは、応力  $\sigma$  を受ける損傷材料の変形速度  $(\dot{\epsilon}^e)_D$  は、図3(b) のように同一形状の非損傷材料に、応力  $\bar{S}$  が作用したときの変形速度  $(\dot{\epsilon}^e)_U$  と等しいことを意味する。

非線形定常クリープ変形に対する Hoff の類似によれば、クリープ速度が式

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = f(\sigma_e) s_{ij} \dots\dots\dots (16)$$

で与えられる物体中の応力分布は、応力-ひずみ関係が式

$$\sigma_{ij} = f(\sigma_e) s_{ij} \dots\dots\dots (17)$$

で規定され、同一境界条件にある幾何学的に合同な物体の応力分布と同一であり、またそのひずみ速度は後者のひずみを対応するひずみ速度で置き換えることによって与えられる<sup>(11)</sup>。ここで  $s_{ij}$  と  $\sigma_e$  は、偏差応力テンソルと相当応力である。式 (17) は、静水圧に非依存な非線形応力-ひずみ関係式であり、単調な負荷における塑性変形の構成式を表す。したがって式 (16) で規定されるクリープ変形に対する材料損傷の影響

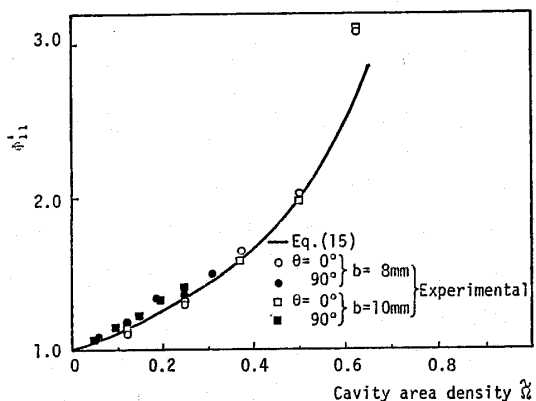


図5 損傷効果テンソル  $\phi_{11}'$  と空げき密度の関係

は、同じ材料損傷をもち、応力-塑性ひずみ関係が式 (17) で与えられる材料の塑性変形によって検討できることになる。遷移クリープ変形に対しても各段階のクリープ速度に着目すれば、同様な議論ができる。

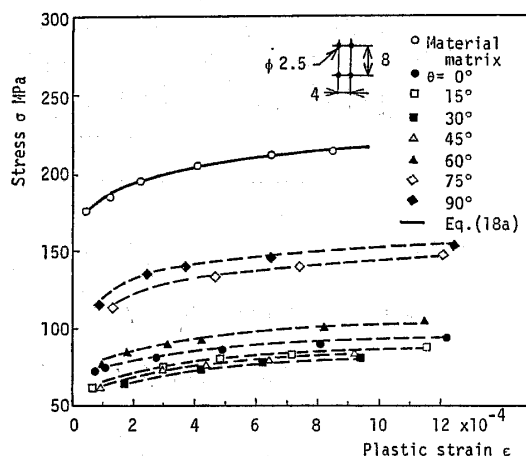
図6は、円孔配列主方向  $\theta$  のいくつかの場合に対して、図1のような多孔板試験片の単軸引張り試験によって得られた応力-塑性ひずみ関係を示す。同図 (a), (b) は、円孔直径を  $d=2.5$  mm とし、配列の間隔を  $a=4$  mm,  $b=8$  mm および  $a=4$  mm,  $b=10$  mm とした場合の結果である。特に、図中の丸印は、円孔を持たない母材の結果であり、その応力-塑性ひずみ関係は

$$\epsilon = 1.569 \times 10^{-36} \sigma_e^{13.6} \dots\dots\dots (18 \cdot a)$$

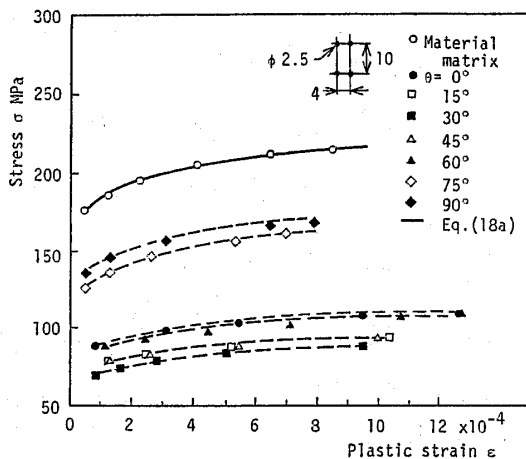
で与えられる。したがって、この材料の多軸状態の構成式 (17) は

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= (3/2) \times (1.569 \times 10^{-36}) \sigma_e^{(13.6-1)} s_{ij} \\ &= 2.354 \times 10^{-36} \sigma_e^{12.6} s_{ij} \dots\dots\dots (18 \cdot b) \end{aligned}$$

と書ける。



(a)  $b=8$  mm



(b)  $b=10$  mm

図6 多孔板の応力-塑性ひずみ関係

いま、引張り方向が円孔配列の主方向  $n_1$  から反時計方向に  $\theta$  だけ傾いた試験片に、引張応力  $(\sigma_{11})_\theta$  を加えた場合を考える。この試験片の損傷状態は、式 (6) の  $x_i$  座標系での損傷効果テンソル  $\Gamma_{rstu}$  に回転を施して得られたテンソル

$$\Gamma_{ijkl}' = \Gamma_{rstu} Q_{ir} Q_{js} Q_{kt} Q_{lu} \dots\dots\dots (19)$$

で表される。ここで  $Q$  は、図1の  $x_i$  座標系から  $x_i'$  座標系への変換を定義する回転テンソルである。このとき、式 (4・b) から実質応力テンソル  $\bar{S}$  を計算すれば

$$(\bar{S}_\theta) = \begin{bmatrix} (\bar{S}_{11})_\theta \\ (\bar{S}_{22})_\theta \\ (\bar{S}_{33})_\theta \\ (\bar{S}_{12})_\theta \\ (\bar{S}_{23})_\theta \\ (\bar{S}_{31})_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{1111}' \\ \Gamma_{2211}' \\ \Gamma_{3311}' \\ (\Gamma_{1211}' + \Gamma_{2111}')/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\sigma_{11})_\theta \dots\dots\dots (20)$$

となり、実質偏差応力  $\bar{s}_{ij}$  および実質相当応力  $\bar{\sigma}_r$  は

$$\bar{s}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{s}_{11} \\ \bar{s}_{22} \\ \bar{s}_{33} \\ \bar{s}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\Gamma_{1111}' - \Gamma_{2211}' - \Gamma_{3311}')/3 \\ (2\Gamma_{2211}' - \Gamma_{1111}' - \Gamma_{3311}')/3 \\ (2\Gamma_{3311}' - \Gamma_{1111}' - \Gamma_{2211}')/3 \\ (\Gamma_{1211}' + \Gamma_{2111}')/2 \end{bmatrix} (\sigma_{11})_\theta \dots\dots\dots (21)$$

$$\bar{\sigma}_r = \left( \frac{3}{2} \bar{s}_{ij} \bar{s}_{ij} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (22)$$

となる。したがって、引張り方向のひずみ成分は式 (18・b) から次のように与えられる。

$$(\varepsilon_{11})_\theta = (0.785 \times 10^{-36}) \left[ \frac{1}{6} \{ (2\Gamma_{1111}' - \Gamma_{2211}' - \Gamma_{3311}')^2 + (2\Gamma_{2211}' - \Gamma_{1111}' - \Gamma_{3311}')^2 + (2\Gamma_{3311}' - \Gamma_{1111}' - \Gamma_{2211}')^2 \} + \frac{3}{4} (\Gamma_{1211}' + \Gamma_{2111}')^2 \right]^{6.3} (2\Gamma_{1111}' - \Gamma_{2211}' - \Gamma_{3311}') (\sigma_{11})_\theta^{13.6} \dots\dots\dots (23)$$

特に、円孔を持たない材料母材に応力  $\sigma_0$  を加えたときの軸方向ひずみ  $\varepsilon_{11}$  は、式 (18・a) によって与えられ

$$\varepsilon_{11} = 1.569 \times 10^{-36} \sigma_0^{13.6} \dots\dots\dots (24)$$

となる。式 (23), (24) から、角  $\theta$  の円孔配列を持つ多孔板試験片と母材試験片にそれぞれ同一の軸ひずみを与える応力の比を計算すれば

$$\frac{\sigma_0}{(\sigma_{11})_\theta} = \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{6} \{ (2\Gamma_{1111}' - \Gamma_{2211}' - \Gamma_{3311}')^2 + (2\Gamma_{2211}' - \Gamma_{1111}' - \Gamma_{3311}')^2 + (2\Gamma_{3311}' - \Gamma_{1111}' - \Gamma_{2211}')^2 \} + \frac{3}{4} (\Gamma_{1211}' + \Gamma_{2111}')^2 \right]^{6.3} (2\Gamma_{1111}' - \Gamma_{2211}' - \Gamma_{3311}') \right\}^{1/13.6} \dots\dots (25)$$

となり、応力比はテンソル  $\Gamma_{ijkl}'$ 、したがって円孔配列とその傾き角  $\theta$  だけの関数となる。したがって、クリープ構成式 (5) における実質応力テンソル  $\bar{S}$  の概念の妥当性は、種々の傾き角  $\theta$  を持つ多孔板試験片の単軸引張り試験を行い、その応力-塑性ひずみ曲線を材料母材のそれと比較することによって求めた  $\sigma_0/(\sigma_{11})_\theta$  の実験値を、式 (25) から計算した値と比較することによって検討できる。

図7は、図に示した2種類の円孔配列につき、角  $\theta$  の種々の値に対する  $\sigma_0/(\sigma_{11})_\theta$  の実験値と計算結果を比較したものである。図中、各種の丸および四角印は  $d=1.0, 2.0, 2.5$  mm の場合に対する実験結果であり、また実線は式 (25) から求めた計算結果である。式 (25) 中のテンソル  $\Gamma_{ijkl}'$  は、式 (6) と式 (19) から

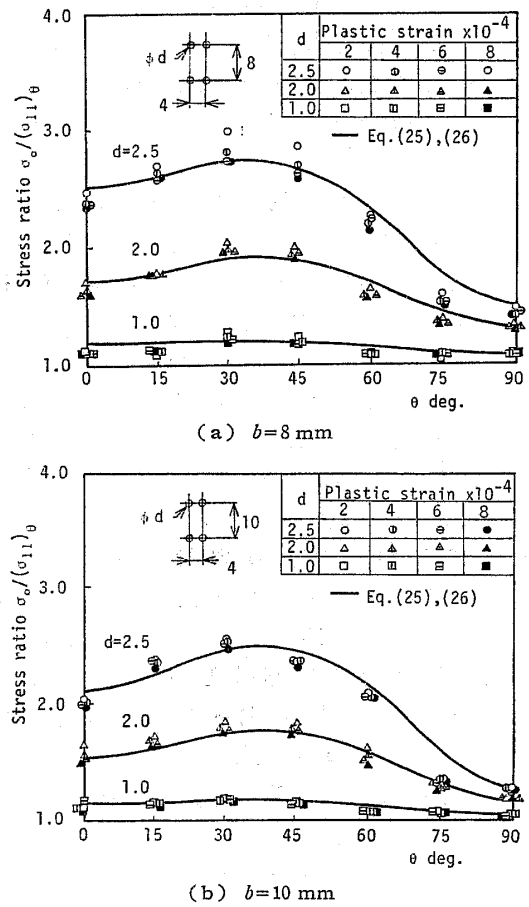


図7 塑性変形におよぼす円孔配列の傾きの影響

$$\Gamma_{1111}' = \lambda + 2\mu + (\Phi_1 \cos^2 \theta + \Phi_2 \sin^2 \theta)(\psi + \pi + 4\rho) + (\Phi_1 \cos^2 \theta + \Phi_2 \sin^2 \theta)^2 A + (\Phi_1^2 \cos^2 \theta + \Phi_2^2 \sin^2 \theta)(B + C + 4D) + (\Phi_1^2 \cos^2 \theta + \Phi_2^2 \sin^2 \theta)(\Phi_1 \cos^2 \theta + \Phi_2 \sin^2 \theta)(G + H) + (\Phi_1^2 \cos^2 \theta + \Phi_2^2 \sin^2 \theta)^2 K \dots (26 \cdot a)$$

$$\Gamma_{2211}' = \lambda + (\Phi_1 \cos^2 \theta + \Phi_2 \sin^2 \theta)\psi + (\Phi_1 \sin^2 \theta + \Phi_2 \cos^2 \theta)\pi + (\Phi_1 \cos^2 \theta + \Phi_2 \sin^2 \theta)(\Phi_1 \sin^2 \theta + \Phi_2 \cos^2 \theta)A + (\Phi_1^2 \cos^2 \theta + \Phi_2^2 \sin^2 \theta)B + (\Phi_1^2 \sin^2 \theta + \Phi_2^2 \cos^2 \theta)C + (\Phi_1^2 \cos^2 \theta + \Phi_2^2 \sin^2 \theta)(\Phi_1 \sin^2 \theta + \Phi_2 \cos^2 \theta)G + (\Phi_1^3 + \Phi_2^3 - \Phi_1 \Phi_2^2 - \Phi_2 \Phi_1^2)(\cos \theta \sin \theta)^2 H + (\Phi_1^2 \sin^2 \theta + \Phi_2^2 \cos^2 \theta)(\Phi_1^2 \cos^2 \theta + \Phi_2^2 \sin^2 \theta)K \dots (26 \cdot b)$$

$$\Gamma_{3311}' = \lambda + (\Phi_1 \cos^2 \theta + \Phi_2 \sin^2 \theta)\psi + \Phi_3 \pi + \Phi_3(\Phi_1 \cos^2 \theta + \Phi_2 \sin^2 \theta)A + (\Phi_1^2 \cos^2 \theta + \Phi_2^2 \sin^2 \theta)B + C\Phi_3^2 + \Phi_3(\Phi_1^2 \cos^2 \theta + \Phi_2^2 \sin^2 \theta)G + \Phi_3^2(\Phi_1^2 \cos^2 \theta + \Phi_2^2 \sin^2 \theta)K \dots (26 \cdot c)$$

$$\Gamma_{1211}' = (\Phi_2 - \Phi_1)(\sin \theta \cos \theta)[(\pi + 2\rho) + (\Phi_1 \cos^2 \theta + \Phi_2 \sin^2 \theta)A + (\Phi_2 + \Phi_1)(C + 2D) + (\Phi_1^2 \cos^2 \theta + \Phi_2^2 \sin^2 \theta)G + (\Phi_2 + \Phi_1)(\Phi_1 \cos^2 \theta + \Phi_2 \sin^2 \theta)H + (\Phi_2 + \Phi_1)(\Phi_1^2 \cos^2 \theta + \Phi_2^2 \sin^2 \theta)K] \dots (26 \cdot d)$$

$$\Gamma_{3111}' = (\Phi_2 - \Phi_1)(\sin \theta \cos \theta)[(\pi + 2\rho) + (\Phi_1 \cos^2 \theta + \Phi_2 \sin^2 \theta)A + (\Phi_2 + \Phi_1)(C + 2D) + (\Phi_1^2 \cos^2 \theta + \Phi_2^2 \sin^2 \theta)(G + H) + (\Phi_2 + \Phi_1)(\Phi_1^2 \cos^2 \theta + \Phi_2^2 \sin^2 \theta)K] \dots (26 \cdot e)$$

となる。上式から、明らかに係数  $\lambda, \psi, B$  を含む項は静水圧の拡大に関係し、塑性変形に対しては何の役割もはたさない。また、 $H$  を含む項は式 (4-a) によって求めた実質応力テンソル  $S^*$  を非対称にする作用をもつから、式 (25) の計算に際しては、 $\lambda, \psi, B, H$  は 0 とした。その他の係数は、図 7 において、 $\theta$  が  $0^\circ, 30^\circ, 90^\circ$  の時の実験値と理論値が最もよく一致するように試行錯誤によって決定した。その値を表 1 に示す。また、 $\Phi_i$  は式 (9) によって計算した値を用いた。図 7 にみられるように、いずれの場合にも、式 (25), (26) によって計算された理論値は実験値とよく一致し、したがって、変形に対する材料損傷の方向性の効果は一般には 4 階のテンソル  $\Gamma$  を用いて記述しなければならないことがわかる。

図 8 は、角  $\theta$  が  $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  の円孔配列を持つ多孔板試験片と母材試験片にそれぞれ同一の軸ひずみを与える応力の比が空げき体積密度の変化とともに、どのように変わるかを図示したものである。なお、ここでは、多孔板の空げき体積密度  $\Delta V/V$  は  $\{(\pi d^2/4)/ab\}$  で定義した。図から、空げき体積密度が、2.0%

以下では、変形に対する損傷の効果は、ほぼ等方的となることがわかる。Dyson-McLean によれば、一定引張りあるいは一定ねじりをうける  $750^\circ\text{C}$  Nimonic 80 A では破断時の空げき体積密度は 100 MPa 以上の相当応力に対して、2% 以下であり応力増加とともに双曲線的に減少する<sup>(2)</sup>。したがって、Dyson-McLean の結果が図 7 および 8 の場合にもあてはまるものとするれば、実際にクリープ変形の解析を行う場合、損傷の効果は破断の直前までは等方的としてさしつかえないことを意味する。

#### 4. クリープ構成式の具体化

前章において、クリープ変形に対する損傷の効果は 4 階のテンソルで表現しなければならないが、空げき体積密度が微小 (約 2% 以下) な場合には、その効果は等方的としてもさしつかえないことが明らかとなった。従って、このような場合、式 (5) のクリープ構成式は非常に簡単となり、この場合、損傷発展式と構成式の具体的な形は、たとえば、次のように書き表せる。

$$\dot{Q} = B[S^{(1)}]^{k_1} \nu^{(1)} \otimes \nu^{(1)} \dots (27 \cdot a)$$

表 1 式 (26) の係数値

b mm	8.00			10.00			
	d mm	1.00	2.00	2.50	1.00	2.00	2.50
$\Phi_1$		1.33	2.00	2.67	1.33	2.00	2.67
$\Phi_2$		1.14	1.33	1.46	1.11	1.25	1.33
$\Phi_3$		1.03	1.11	1.18	1.02	1.09	1.14
$\mu$		-0.09	-0.09	-0.09	-0.09	-0.09	-0.09
$\rho$		0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
$\pi$		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
A		-1.25	0.68	1.45	-1.20	0.91	1.26
C		1.05	0.34	0.016	1.00	0.18	0.03
D		0.029	0.04	0.035	0.029	0.035	0.034
G		-0.08	-0.852	-0.654	-0.88	-0.852	-0.62
K		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

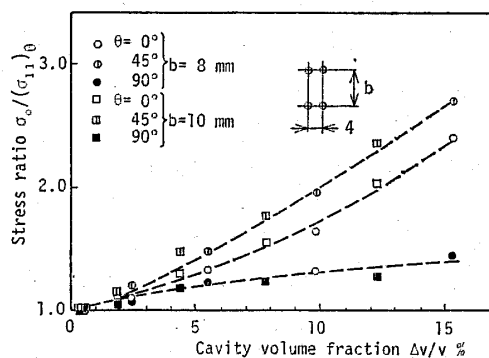


図 8 塑性変形におよぼす空げき体積密度の影響

$$\dot{\epsilon}^c = (3/2)mA^{1/m}\kappa^{(m-1)/m}\bar{S}_e^{(n-m)/m}\bar{S}_D \dots\dots(27\cdot b)$$

$$\dot{k} = mA^{1/m}\kappa^{(m-1)/m}\sigma_e^{n/m} \dots\dots(27\cdot c)$$

$$\bar{S} = [1+c(\text{tr } \bar{D})]\sigma \dots\dots(27\cdot d)$$

ここで、 $S^{(1)}$  および  $\nu^{(1)}$  は、 $S$  [式 (2) 参照] の正の最大主値およびその主方向単位ベクトルであり、 $\bar{S}_e$  および  $\bar{S}_D$  は、それぞれ  $\bar{S}$  の相当応力および偏差応力テンソル  $\bar{S}_D = \bar{S} - (1/3)(\text{tr } \bar{S})I$  である。また、 $A, m, n, k, c(0 \leq c \leq 1)$  は材料定数であり、 $\kappa$  は母材の非弾性変形履歴を表す変数である。なお、損傷の効果を4階のテンソルで表した場合については、式 (27・d) の  $\bar{S}$  を式 (4・b) でおきかえるだけでよいが、 $\bar{S}$  に関する式は、はなはだ煩雑となる。

## 5. 結 言

クリープ損傷のテンソル的表現について、実験的に検討した結果、損傷状態は損傷発展式に対しては、2階対称なテンソルで表せるが、クリープ構成式に対しては、4階のテンソルで表現しなければならないことがわかった。ただし、空げきの体積密度が微小な場合は、構成式に対する損傷変数はスカラーとして扱う。

最後に、本研究の一部は、名古屋大学工学部機械学科および豊橋技術科学大学エネルギー工学課程の特別研

究の結果に基づくものであることを付記し、実験に協力された名古屋大学 奥山利久君、中嶋孝行君ならびに、豊橋技術科学大学 一色泰三君、佐野村幸夫君に感謝する。また、この論文を注意深く検討し、原稿中の誤記を指摘された三菱重工業会社長崎研究所、猪狩敏秀氏と瀬戸口克哉氏にも謝意を表したい。

## 文 献

- (1) Garofalo, F., (足立訳), 金属クリープの基礎, (昭 43), 209, 丸善.
- (2) Dyson, B.F. and McLean, D., *Metal Sci.*, 11-1 (1977), 37.
- (3) Leckie, F.A. and Hayhurst, D.R., *Acta Metall.*, 25-9 (1977), 1059.
- (4) Chaboche, J.L., *Euromech Colloquium 115*, Villard-de-Lans, France, (1979).
- (5) Chaboche, J.L., *Problèmes Non-Linéaires de Mécanique*, PWN, Warsaw (1980), 137.
- (6) Leckie, F.A. and Onat, F.T., *Physical Non-Linearities in Structural Analysis*, Springer, Berlin (1981), 141.
- (7) 村上・大野, 機論, 46-409, A (昭 55), 940.
- (8) 村上・大野, 機論, 47-418, A (昭 56), 573.
- (9) Murakami, S. and Ohno, N., *Creep in Structures*, (1981), 422, Springer-Verlag.
- (10) Rivlin, R.S. and Ericksen, J.L., *J. Ratl. Mech. Anal.*, 4 (1955), 323.
- (11) Odqvist, F.K.G. and Hult, J., (村上訳), クリープ強さの理論, (昭 42), 48, 培風館.

## 討 論

〔質問〕 猪狩敏秀・瀬戸口克哉

(三菱重工業会社長崎研究所)

クリープ損傷に関する一連の研究をさらに進められ、実験的検証を行って理論とのよい一致を示されている点、敬意を表す。

(1) 試験材の破断のび、及び多孔板のひずみ測定位置を示し願いたい。また、多孔板のひずみをどのようにして弾性成分と塑性成分に分けたか示し願いたい。

(2) 実際の機器の損傷は高温での繰返し負荷の下で生じることが多い。貴論文の考え方を繰返し負荷の場合に適用する場合、例えば式 (27・b), (27・c) の構成式を繰返し変形に対するものと置換することにより可能であると考えてよいか。

〔回答〕 (1) 試験片ごとに若干のばらつきはあるが、孔のない試験片材料で約 40%, 多孔板試験片では、5~8% であった。ひずみは試験片中央部に標点距離 80 mm をとり、測定した。また試験片には、荷重段差法によって荷重を加えたので、塑性ひずみは、除荷時の残留ひずみを測定することによって求め

た。弾性ひずみは、全ひずみから塑性ひずみを差し引いて求められる。

(2) 高温下で、繰返し荷重を受ける構造要素の破断寿命とクリープ変形を算定する場合、応力の変動量とその繰返し数が少なく疲れ損傷の効果が無視できる場合と、反対に疲れ損傷が著しく、クリープ疲れ相互作用を考えなければならない場合の二つがある。前者の場合には、本論文の考え方に基づく実質応力テンソルを繰返し変形に対する構成式に用いるだけでよいと考えられる。なぜならば、クリープによって生じた空げきは、損傷の最終段階を除けば、応力の方向を逆にしても閉じることはないからである。これに対して、後者の場合には、クリープ損傷と疲れ損傷では微視的機構が異なるので、厳密には別個の損傷変数を用いなければならない。本論文の式はそのままでは適用できない。詳しくは文献 (7) の討論における井上氏への回答、および損傷力学に関する著者の一人の解説(付1)をご参照願いたい。

〔質問〕 井上達雄 (京都大学工学部)

クリープ損傷の進展が従来からご主張の2階の損傷



効果テンソル  $\Phi$  による実質応力に支配され、また、変形が損傷の空間的配置を表す 4 階のテンソル  $\Gamma$  に依存することを、損傷力学の立場から実験的に検証された意義は大きいと敬服する。次の点についてご教示願いたい。

(1) まず、前者の損傷の進展については、有孔平板の破断の実験から、理論の裏づけをされているが、最終破断に至る前の損傷の進展過程に対して、この考え方が妥当であるという理由はどう考えたらよいか。

(2) つぎに、変形に対してであるが、実験は塑性変形を対象とされている。Hoff のアナロジが成立つとしても、損傷の効果という本来微視的な現象がそのままクリープ変形に適用できるとするには、何らかの前提があるようにも考えられるが、この点についてのご意見をうかがいたい。

(3) 損傷の密度とその配置を考慮して理論的考察を進めておられるが、実験では、穴のまわりの応力集中も、損傷の効果に何らかの影響を及ぼすとも考えられるが、この点いかがか。

(4) 式 (6) を用いて実質応力  $\bar{S}$  を求める式 (20) と表 1 において、 $\Phi_3$  の成分が表れている。孔は  $x_3$  方向に貫通していることを考えると、損傷が  $x_3$  方向に影響を及ぼす理由がわからない。ご教示願いたい。

【回答】 (1) ここでは、テンソル方程式 (3) のテンソル的特性を検討するのに、同一円孔配列に対し、その円孔直径を 0.5 mm から 2.5 mm まで 5 種類の値に選んで実験を行っているが、このような各円孔直径を持つ一連の試験片がクリープ損傷過程の各段階に対応すると考えている。すなわち、この実験で検討しているのは、最終破断の際の損傷状態ではなく、損傷過程中的いくつかの段階における損傷状態のテンソル的特性を、破断試験によって調べていることになる。

つぎに、破断試験の意味について考えてみる。式 (3) のテンソル的特性を検討することは、クリープ試験によってある空げき配置状態まで損傷させた試験片の損傷状態がその後の損傷の進展に及ぼすテンソル特性を調べることになる。このために、ある一定値の損傷速度を生じさせる応力値が空げき配置の方位によってどのように変わるかを検討すればよいことになる。本実験ではこのような一定損傷速度として無限大の損傷速度、すなわち瞬間破断を選んだことになる。もち

ろん、理論の完全な検証のためには、上述の一定損傷速度として、クリープ状態におけるあらゆる損傷速度について検討する必要があるが、これは模型実験の範囲を越えるものである。

(2) この論文では、微視的な材料損傷の効果は、何らかの巨視的な損傷変数で記述できるとする損傷力学の観点から議論を進めている。したがって、同じ空げき配置を持つ 2 種類の材料があり、一方の母材の塑性変形構成式と他方の母材のクリープ構成式が同型であり、しかも境界条件が等価な場合、これら二つの損傷材料の力学的挙動は、一様な巨視的応力を与えて対応する変形を求める二つの境界値問題と考えることができる。連続体力学的観点からは、これら二つの境界値問題の解は、一方の解のひずみをひずみ速度でおきかえれば全く一致し、したがって Hoff の類似が成立することになる。

一方、このような連続体力学的概念が適用できるかどうかの検討は、もちろん必要である。しかし、このような問題を検討するには、実際の材料について損傷実験を行わなければならないが、これは、損傷材料の構成式における各損傷変数のテンソル的特性を検討しようとする本論文の対象範囲からは離れる問題と考えている。

(3) ご指摘のように、損傷によって応力が拡大される機構としては、各種の空げきの存在による材料の幾何学的な有効面積の減少と、それらの空げき近傍の応力集中による応力効果の局所的な拡大が考えられる。著者らのこれまでの理論における損傷テンソル、つまり有効面積の減少という概念は、必ずしも幾何学的な面積減少だけでなく、応力集中などの影響を考慮したものである。

ただし、図 5 からわかるように、本実験の場合には、破断に対する損傷の効果は、おもに幾何学的な面積減少だけに依存している。これは、本文中にも述べたように、応力集中の影響が少なくなるように試験片材料と空げき形状を定めたからである。

(4) 定義によれば、損傷効果テンソルの成分  $\Phi_3$  は、 $x_3$  方向 (板厚方向) に応力を負荷した時の有効面積減少による応力拡大の効果を表している。したがって、この実験で用いた試験片では、板面内の有効面積は空孔のために減少しており、 $\Phi_3$  は 0 とはならない。一方、変形に対して  $\Phi_3$  の成分が表れるのは、試験片軸方向に同じ応力を負荷しても、板面内の孔の形状と配置によって、その変形状態が異なるためである。

(付 1) 村上, 材料, 31-340 (1982-1), 1.