

非硬化ひずみ領域を考慮した繰返し塑性構成式*

大 野 信 忠**
Nobutada OHNO**Key Words:** Plasticity, Cyclic Deformation, Constitutive Equation, Cyclic Hardening, Stabilization, Stress-Strain Diagram

1. 緒 言

一定ひずみ振幅のもとで金属材料に繰返し塑性変形を与えると、材料の応力-ひずみ曲線は、遷移的な繰返し硬化（あるいは軟化）を示した後にしだいに安定化することが知られている。最近 Chaboche らは⁽¹⁾、常温で 316 ステンレス鋼の繰返し塑性実験を行い、その繰返し硬化（軟化）-安定化について、興味ある履歴依存性を報告している。すなわち、ある一定ひずみ振幅 $\Delta\epsilon_1$ のもとで応力-ひずみ曲線が安定化した後にひずみ振幅を他の一定値 $\Delta\epsilon_2$ に増加すると、応力-ひずみ曲線は再び繰返し硬化した後に安定化し、しかもその再安定化した応力-ひずみループの応力振幅は、初期状態にひずみ振幅 $\Delta\epsilon_2$ を与えたときのそれに等しくなる。一方、ひずみ振幅 $\Delta\epsilon_2$ のもとで応力-ひずみ曲線が安定化した後にひずみ振幅を $\Delta\epsilon_1$ に減少した場合には、応力-ひずみ曲線はやや軟化した後に安定化するが、材料の硬化は初期状態にひずみ振幅 $\Delta\epsilon_1$ を与えて安定化したときの状態までは回復しない。

繰返し塑性形に対しては、これまでも多くの理論が提案されているが^{(1)~(13)}、このような変動ひずみ振幅のもとでの履歴依存性を簡単に表現できるものは見当たらない。すなわち、繰返し硬化（軟化）-安定化を最も詳しく扱った理論としては、応力-ひずみ関係に対する Lamberg-Osgood の式の定数を繰返し数の関数とする Eisenberg の理論⁽²⁾、引張りと圧縮に対してそれぞれ硬化変数を規定する Bodner らの理論⁽³⁾、ひずみ増分理論と変形理論を組み合わせた Bruhns の理論⁽⁴⁾、繰返し数十回めでの降伏応力を初期降伏以後の計算に用いる ORNL (Oak Ridge 国立研究所) の方法⁽⁵⁾⁽⁶⁾、材料硬化の最大塑性ひずみ範囲依存性を仮定した Chaboche らの理論⁽¹⁾がある。しかし、Eisenberg の理論と Bodner らの理論は、特定のひずみ振幅に対する繰返し硬化（軟化）-安定化を精度よく記述

することができても、任意の一定ひずみ振幅あるいは変動ひずみ振幅に対しては極めて複雑となる。次に、Bruhns の理論によって上に述べたような再硬化-再安定化が表現されるかどうかは明らかでない。また ORNL の方法では、繰返し硬化から安定化への過渡的過程が無視され、さらに Chaboche らの理論は形が複雑であるばかりでなく、彼らの最大塑性ひずみ範囲依存性の仮定には検討が必要である。

本論文ではまず、繰返し硬化-安定化材料の構成式を簡単な形で定式化するために、逆負荷後のあるひずみ領域では等方硬化が発達しないことを仮定し、このようなひずみ領域の発達を解析的に表現する。このひずみ領域は、その内側での繰返しでは材料がもはや硬化しないひずみ領域を表すから、今後非硬化ひずみ領域と呼ぶことにする。次に、線形硬化材料に対して、このような非硬化ひずみ領域を規定した繰返し塑性構成式を定式化する。つづいて、本理論の妥当性を常温での 304 ステンレス鋼に対する実験結果との比較によって検討する。すなわち、本理論に含まれる 4 個の材料定数の決定方法について述べた後、一定ひずみ振幅および変動ひずみ振幅の繰返しねじり変形に対する本理論の結果を対応する実験結果と比較する。なお、非硬化ひずみ領域に類似の回復可能クリープ硬化範囲を規定したクリープ構成式が、最近著者らによって定式化されている⁽¹⁴⁾。

2. 構成式の仮定と定式化

2.1 単軸変形 古典塑性理論では、塑性変形の進行に伴う材料の硬化は、等方硬化変数と移動硬化変数によって表される。このとき、単軸変形に対する塑性構成式は、簡単のため線形硬化材料を考えれば次のように書ける。

$$d\epsilon^p = \begin{cases} (1/K)d\sigma, & f=0 \text{ かつ } (\partial f/\partial \sigma)d\sigma > 0 \\ 0, & f < 0 \text{ あるいは } (\partial f/\partial \sigma)d\sigma \leq 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$f = (\sigma - R)^2 - (\sigma_0 + q)^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$dR = (1 - \mu)Kd\epsilon^p \quad \dots\dots\dots (3)$$

* 昭和 56 年 10 月 2 日 北陸信越支部北陸地方講演会において講演，原稿受付 昭和 56 年 5 月 8 日。

** 正員，豊橋技術科学大学（〒440 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1）。

$$dq = \mu K |d\epsilon^p| \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 ϵ^p と σ は塑性ひずみと応力であり、また R と q は移動硬化変数と等方硬化変数を示す。さらに、 σ_0 , K , μ は材料定数であって、それぞれ初期降伏応力、塑性接線係数、等方硬化と移動硬化の割合を表す。

式(1)～(4)によって繰返し塑性変形を記述するとき、等方硬化変数 q は塑性変形の進行に伴って単調に増加するから、一定ひずみ振幅のもとでの材料の繰返し硬化-安定化を表現することはできない。このような困難を避けるために、無限大の累積塑性ひずみ(あるいは塑性仕事)を等方硬化変数の有限値に対応させる Bodner らの理論⁽³⁾もある。しかし、この有限値はひずみ振幅の大きさには依存しないから、このような理論によって任意の一定ひずみ振幅のもとでの繰返し硬化-安定化を記述することはできない。

等方硬化変数と移動硬化変数によって材料の硬化を記述するとき、材料の繰返し硬化から安定化への移行は、1 サイクル当たりの等方硬化変数の発達が繰返し数の増加に伴ってしだいに減少することによると考えることができる。このとき、応力-ひずみループが安定化した状態では、等方硬化変数はまったく発達せず、移動硬化変数だけが変化する。このような等方硬化変数の発達の減少を表現するために、逆負荷後において等方硬化変数が発達せず、移動硬化変数だけが変化する塑性ひずみ領域が存在し、それは塑性変形の進行とともに拡大および移動すると仮定する。このとき、このひずみ領域内での繰返しでは材料はもはや繰返し硬化しないから、今後それを非硬化ひずみ領域と呼ぶことにする。本論文では簡単のため線形硬化材料を扱うが、このような非硬化ひずみ領域の概念は非線形硬化材料に対しても成り立つと考えられる。今、非硬化ひずみ領域の変化を一般に非線形硬化材料に対して示すと、図1のようになる。この図の破線は降伏面の移動量 R の変化を示し、また斜線を施こしたひずみ領域が非硬化ひずみ領域を表す。さらに k は降伏面の大きさを表し、線形硬化材料を仮定する本論文では $\sigma_0 + q$ に等しい〔式(11), (20) 参照〕。

上に述べた非硬化ひずみ領域は、クリープ構成式における回復可能クリープ硬化範囲⁽¹⁴⁾と同様、次のような微視的解釈を行うことができる。すなわち、一般に塑性変形が進行すると、転位は不動転位の形成、種々の障害物へのたい積、各種の転位構造の形成等により可動性を失い、材料は加工硬化する。このような不動化した転位は、逆負荷によって可動性を回復する可逆的な部分と、それを回復せず不可逆な転位構造を形成

する部分からなると考えられる。このため逆負荷のもとでは、転位の可逆的な部分の再可動化によって、材料の過渡的軟化が観察される。このように再可動化した転位は、それまで不動化していた方向とは逆方向へ運動する。したがって、逆負荷後のある塑性ひずみ領域では、可逆的な転位の不可逆的な転位への移行(等方硬化変数の発達)は、顕著でないと仮定できる。しかし、再可動化した転位は、逆負荷のもとでの塑性変形の進行とともに再び不動化し、このひずみ領域を越えると不可逆的な転位構造の形成(等方硬化変数の発達)に寄与するようになる。

まず、非硬化ひずみ領域の拡大および移動を定式化する。非硬化ひずみ領域は初期状態では大きさ0であり、 ϵ^p 軸上の原点0にほかならない*1。塑性変形が例えば図1の点A, Bまで進むと、非硬化ひずみ領域は、それぞれ塑性ひずみ範囲 $[\epsilon^p_A, \epsilon^p_A]$ および $[\epsilon^p_C, \epsilon^p_B]$ を占めるように発達および移動する。次にB点で逆負荷するとき、塑性ひずみ ϵ^p が非硬化ひずみ領域 $[\epsilon^p_C, \epsilon^p_B]$ の内側を進む間は、このひずみ領域は変化しない。さらに逆負荷が増加し、塑性ひずみ ϵ^p が非硬化ひずみ領域の反対側の境界 ϵ^p_C に達すると、それは再び発達および移動を開始する。そして、塑性変形が点Dまで進んだときには、非硬化ひずみ領域は塑性ひずみ範囲 $[\epsilon^p_D, \epsilon^p_E]$ を占める。いま、非硬化ひずみ領域の中心座標とその大きさを、それぞれ α , 2ρ とすれば、このひずみ領域は

$$g = (\epsilon^p - \alpha)^2 - \rho^2 \leq 0 \dots\dots\dots (5)$$

と書ける。このとき ρ は、上述のように ϵ^p が非硬化ひずみ領域の境界上において外側に向かって動くとき

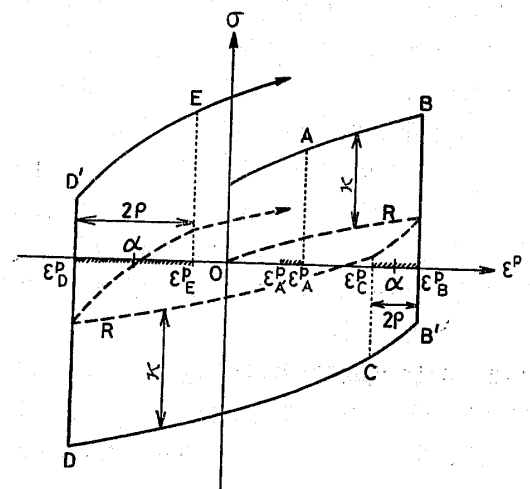


図1 非硬化ひずみ領域の変化

*1 非硬化ひずみ領域は、必ずしも初期状態で大きさ0である必要はない。すなわち、ある大きさ以下の一定ひずみ振幅のもとで材料が繰返し硬化しなければ、その大きさのひずみ領域を非硬化ひずみ領域の初期値にとることができる。

だけ大きくなるから, $d\rho$ は

$$d\rho = Hc|d\varepsilon^p| \dots\dots\dots (6)$$

$$H = \begin{cases} 1, & g=0 \text{ かつ } (\partial g/\partial \varepsilon^p)d\varepsilon^p > 0 \\ 0, & g<0 \text{ あるいは } (\partial g/\partial \varepsilon^p)d\varepsilon^p \leq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

のように表される. ここで c は, ρ の発達割合を示す材料定数である. さらに, $H=1$, すなわち $g=0$ かつ $(\partial g/\partial \varepsilon^p)d\varepsilon^p > 0$ のとき, 式 $dg=0$ が成立しなければならないから, $d\alpha$ は次のようになる.

$$d\alpha = H(1-c)d\varepsilon^p \dots\dots\dots (8)$$

つづいて, 等方硬化変数および移動硬化変数の変化を規定する. 等方硬化変数 q は, 前述の仮定のように, 塑性ひずみ ε^p が式 (5) の塑性ひずみ領域の境界上にあって外側に向かって動くときだけ発達する. この意味で式 $g=0$ によって定義される塑性ひずみ境界を, 等方硬化境界と呼ぶことにする. したがって, 非硬化ひずみ領域を考えると, 線形硬化材料に対する式 (4) は, 式 (7) の関数 H を用いて

$$dq = H\mu K|d\varepsilon^p| \dots\dots\dots (9 \cdot a)$$

のように修正される. このとき, 移動硬化変数 R の変化は, 条件 $df=0$ に式 (1) と (9・a) を代入することによって

$$dR = (1-H\mu)Kd\varepsilon^p \dots\dots\dots (10 \cdot a)$$

のように求められる. 式 (9・a) と (10・a) は, それぞれ式 (6) と (8) を用いると, 次のようにも書ける.

$$q = (\mu K/c)\rho \dots\dots\dots (9 \cdot b)$$

$$R = K\varepsilon^p - [\mu K/(1-c)]\alpha \dots\dots\dots (10 \cdot b)$$

式 (10・a) は, 塑性ひずみ ε^p が等方硬化境界上にあって外側に向かって動くときには, 古典塑性理論による式 (3), すなわち $dR = (1-\mu)Kd\varepsilon^p$ となる. 一方, ε^p が等方硬化境界内を動くときには, $dR = Kd\varepsilon^p$ となる. このように R の変化率は, ε^p が等方境界内を動くときに大きくなる (図1参照). これは微視的には, 不動化していた転位の可逆な部分が逆負荷によって再可動化するため, 内部応力の変化が大きくなることに対応すると解釈できる.

2.2 多軸応力状態への拡張

ここでは, 前節で述べた理論を多軸応力状態へ拡張する. いま, ミーゼス形の降伏条件を考えれば, 降伏関数 f は次のように書ける.

$$f = (3/2)(s_{ij} - R_{ij})(s_{ij} - R_{ij}) - (\sigma_0 + q)^2 \dots\dots (11)$$

ここで, 2階対称テンソル s_{ij} と R_{ij} はそれぞれ偏差応力および降伏面の中心の移動量を示す. なお, 上式は単軸変形では式 (2) に帰着するが, このとき式

(2) の R は R_{ij} の軸方向成分の 3/2 倍に等しい. 塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^p$ の降伏面への垂直性を仮定すれば, 単軸変形に対する式 (1) は, 多軸応力状態に対して

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{1}{K} \frac{(\partial f/\partial \sigma_{kl})d\sigma_{kl}}{(\partial f/\partial \sigma_{mn})(\partial f/\partial \sigma_{mn})} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dots\dots (12)$$

のように拡張される. ここで σ_{ij} は応力テンソルである.

次に, 非硬化ひずみ領域を, クリープにおける回復可能クリープ硬化範囲⁽¹⁴⁾と同様に多軸応力状態へ拡張する. すなわち, 非硬化ひずみ領域は多軸応力状態に対して図2の破線のようにになると考えられる. しかし, 考える負荷履歴を逆負荷あるいは比例負荷からの偏りが著しくない場合に限り, 非硬化ひずみ領域を, 図2に実線で示すような中心 α_{ij} , 半径 ρ の球

$$g = (2/3)(\varepsilon_{ij}^p - \alpha_{ij})(\varepsilon_{ij}^p - \alpha_{ij}) - \rho^2 \leq 0 \dots\dots (13)$$

によって近似する. ここで α_{ij} は2階対称の偏差テンソルである. 上式によって定義される非硬化ひずみ領域が膨張および移動するのは, 塑性ひずみ ε_{ij}^p が面 $g=0$ (今後, 等方硬化面と呼ぶ) 上にあって, しかも $d\varepsilon_{ij}^p$ が外向き法線成分を持つときだけである. したがって, 単軸状態において式 (6) と (8) で規定される $d\rho$ と $d\alpha_{ij}$ は, 多軸状態に対して

$$d\rho = \sqrt{\frac{2}{3}} Hc \frac{(\partial g/\partial \varepsilon_{ij}^p)d\varepsilon_{ij}^p}{[(\partial g/\partial \varepsilon_{kl}^p)(\partial g/\partial \varepsilon_{kl}^p)]^{1/2}} \dots\dots\dots (14)$$

$$d\alpha_{ij} = H(1-c) \frac{(\partial g/\partial \varepsilon_{kl}^p)d\varepsilon_{kl}^p}{(\partial g/\partial \varepsilon_{mn}^p)(\partial g/\partial \varepsilon_{mn}^p)} \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dots\dots\dots (15)$$

と書ける. ここで H は, 次のように定義される.

$$H = \begin{cases} 1 & g=0 \text{ かつ } (\partial g/\partial \varepsilon_{ij}^p)d\varepsilon_{ij}^p > 0 \\ 0 & g<0 \text{ あるいは } (\partial g/\partial \varepsilon_{ij}^p)d\varepsilon_{ij}^p \leq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (16)$$

なお, $H=1$ のとき条件 $dg=0$ が成立しなければならないが, 式 (14) と (15) はこの条件を満足する.

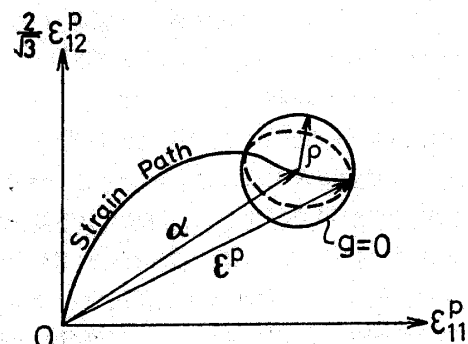


図2 多軸状態における非硬化ひずみ領域

また $c=1/2$ のとき、式 (13)~(16) は、繰返し塑性変形の最大塑性ひずみ範囲依存性を表現するために Chaboche ら⁽¹⁾ が規定した塑性ひずみ空間内の球に一致する。しかし、繰返し塑性変形に対するこのような規準は妥当でない。すなわち、例えばひずみ振幅 3% のもとで繰返し変形させたときの応力振幅と、最初の 1 サイクルだけ同じひずみ振幅を与え、それ以後のサイクルではひずみ振幅を 3% 以下にとったときの応力振幅が等しくなることは考えられないからである。

等方硬化変数が発達するのは、塑性ひずみ ε_{ij}^p が等方硬化面 ($g=0$) 上にあって、 $d\varepsilon_{ij}^p$ が外向き法線成分を持つときである。したがって、単軸状態に対する式 (9・a) は

$$dq = \sqrt{\frac{2}{3}} H \mu K \frac{(\partial g / \partial \varepsilon_{ij}^p) d\varepsilon_{ij}^p}{[(\partial g / \partial \varepsilon_{kl}^p) (\partial g / \partial \varepsilon_{kl}^p)]^{1/2}} \quad \dots\dots\dots (17 \cdot a)$$

$$= (\mu K / c) d\rho \quad \dots\dots\dots (17 \cdot b)$$

となる。ここで式 (14) を用いた。上式から、等方硬化変数の値は、多軸応力状態に対しても非硬化ひずみ領域の大きさに比例することがわかる。最後に、降伏面の代表的な移動法則としては、Prager 則⁽¹⁵⁾ と Ziegler 則⁽¹⁶⁾ がある。Prager 則に従い、負荷状態のもとでの適合条件 $df=0$ を用いれば、 dR_{ij} は

$$dR_{ij} = \frac{(\partial f / \partial \sigma_{kl}) d\sigma_{kl} + (\partial f / \partial q) dq}{(\partial f / \partial \sigma_{mn}) d\varepsilon_{mn}^p} d\varepsilon_{ij}^p \quad \dots\dots\dots (18 \cdot a)$$

となる。一方、Ziegler 則に従えば

$$dR_{ij} = \frac{(\partial f / \partial \sigma_{kl}) d\sigma_{kl} + (\partial f / \partial q) dq}{(\partial f / \partial \sigma_{mn}) (s_{mn} - R_{mn})} (s_{ij} - R_{ij}) \quad \dots\dots\dots (18 \cdot b)$$

となる。しかし、ミーゼス形の降伏条件、式 (11) と $d\varepsilon_{ij}^p$ の降伏面への垂直性、式 (12) を仮定するとき、

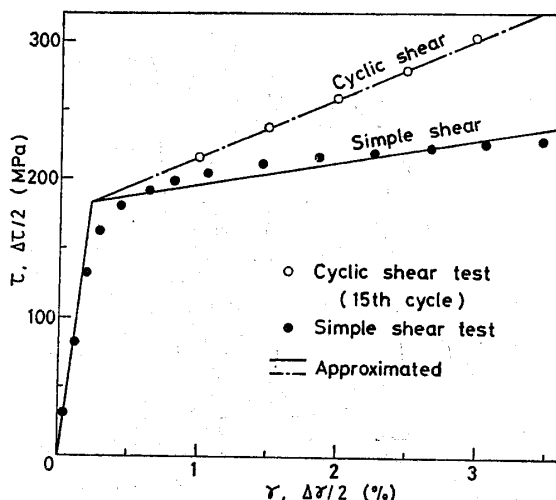


図 3 単純ねじりおよび繰返しねじり試験による材料定数の決定

両者は一致する。

3. 実験結果との比較および検討

ここでは本理論の妥当性を検討するため、常温での 304 ステンレス鋼薄肉円管に対する繰返しねじり試験結果を本理論の結果と比較し、検討する。

試験片供試材は、1100°C で溶体化処理された 304 ステンレス鋼の丸棒 (直径 40 mm) であり、その化学成分は、C (0.08%), Si (0.40%), Mn (0.50%), P (0.033%), S (0.026%), Ni (8.39%), Cr (18.35%) である。試験片は、この丸棒から精密に仕上げた外径 21 mm、内径 19 mm、ゲージ長さ 70 mm の薄肉円管試験片である。実験装置は、複合負荷試験機 IS 5000 (島津製作所製)⁽¹⁷⁾ であり、変位の検出には差動変圧器を用いた。なお、以下の実験は、軸力 0 のもとでねじりひずみ速度 $\dot{\gamma}$ を 1% min⁻¹ に規定して行った。

3.1 材料定数の決定 本理論をねじり変形に対してまとめると、次のようになる*2。まず、塑性ひずみ増分は、

$$d\gamma^p = \begin{cases} (1/K) d\tau, & f=0 \text{ かつ } (\partial f / \partial \tau) d\tau > 0 \\ 0, & f < 0 \text{ あるいは } (\partial f / \partial \tau) d\tau \leq 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$f = (\tau - R)^2 - (\tau_0 + q)^2 \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$dR = (1 - \mu H) K d\gamma^p, \quad dq = H \mu K |d\gamma^p| \quad \dots\dots (21)$$

と書ける。ここで、 τ と γ^p はそれぞれねじり応力およびねじりひずみ γ の塑性成分を示す。次に、式 (21) の H は非硬化ひずみ領域によって、次のように規定される。

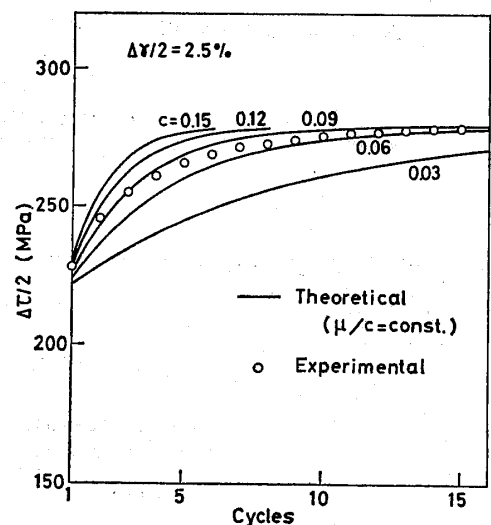


図 4 非硬化ひずみ領域の発達に対する材料定数 c の決定

*2. 式 (19)~(24) の K, R, q, α, ρ は、ねじり変形に対して定義し直されている。

$$H = \begin{cases} 1, & g=0 \text{かつ } (\partial g / \partial \gamma^p) d\gamma^p > 0 \\ 0, & g < 0 \text{あるいは } (\partial g / \partial \gamma^p) d\gamma^p \leq 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$g = (\gamma^p - \alpha)^2 - \rho^2 \quad \dots\dots\dots(23)$$

$$d\alpha = H(1-c)d\gamma^p, \quad d\rho = Hc|d\gamma^p| \quad \dots\dots\dots(24)$$

式 (19)~(24) に含まれる材料定数は, K , τ_0 , μ , c の 4 個であり, これらは前に述べたように次のような意味を持つ. すなわち, K と τ_0 はそれぞれ塑性接線係数および初期降伏応力を示し, また μ と c は等方硬化と移動硬化の割合, および非硬化ひずみ領域の発達を速さを表す.

以上の 4 個の材料定数は, K , τ_0 , μ/c , c の順序に求められる. まず K と τ_0 は, 図 3 の単純ねじり試験の結果を 2 直線近似することによって定められる. 次に μ/c は, 応力-ひずみ曲線が安定化した状態での応力振幅 $\Delta\tau_s$ とひずみ振幅 $\Delta\gamma_s$ の関係を用いて決定することができる. すなわち, 原点对称の一定ひずみ振幅繰返し変形に対する $\Delta\tau_s$ - $\Delta\gamma_s$ 関係式は

$$\frac{\Delta\tau_s}{2} - \tau_0 = \left[\frac{1}{G} + \frac{1}{(1+\mu/c)K} \right] \left(\frac{\Delta\tau_s}{2} - \tau_0 \right) \quad \dots\dots\dots(25)$$

と表される (付録参照). ここで G は横弾性係数を示し, また $\tau_0 = \tau_0/G$ である. したがって μ/c の値は, 図 3 に一点鎖線で示すような $\Delta\tau_s/2 - \Delta\gamma_s/2$ 関係の傾きから定めることができる. なお図 3 では, 繰返し数 15 回で応力-ひずみ曲線が安定化したと見なしたが, 後に述べる図 5 からわかるように, このための誤差はの場合無視できる. また, ひずみ振幅が大きくなると, $\Delta\tau_s$ - $\Delta\gamma_s$ の関係は一般に非線形となるが⁽¹⁾⁽⁶⁾, ひずみ振幅を適当な範囲に限れば, 式 (25) のような線

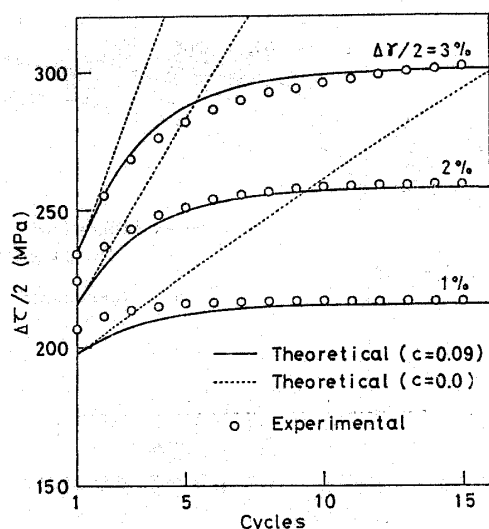


図 5 一定ひずみ振幅繰返し変形における応力振幅の変化

形近似がかなりの精度で成り立つと考えられる. 最後に c の値は, 繰返し硬化から安定化への移行をよく表すように決定することができる. 図 4 は, c のこのような決定の様子を $\Delta\gamma/2=2.5\%$ に対して示した図であり, 上で求められた μ/c の値に対して c をパラメータとして, $\Delta\tau/2$ -繰返し数の関係がいくつか描かれている. このようにして, 次のように材料定数が定められた.

$$\left. \begin{aligned} K &= 1650 \text{ MPa}, & \tau_0 &= 183 \text{ MPa} \\ \mu/c &= 1.72, & c &= 0.09 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(26)$$

3.2 一定ひずみ振幅繰返し変形 上の材料定数を用いて, $\Delta\gamma/2=1, 2, 3\%$ に対する応力振幅の変化を計算した結果を, 図 5 に実線で示す. この図の点線は, 非硬化ひずみ領域を考えない古典的な理論 (1)~(4) によって計算した結果である. この図から, 本理論の結果はどのひずみ振幅に対しても実験結果とよく一致しているのに対して, 古典理論の結果は繰返し硬化から安定化への移行をまったく表さないことがわかる. なお, $\Delta\gamma/2=1, 2\%$ に対する理論結果が, 繰返し数の小さい間実験結果を下回るのは, 単純ねじり曲線の 2 直線近似 (図 3 の実線) が, このひずみ領域では実験結果より小さい応力値を見積もっているからである.

次に図 6 は, 同じ繰返し塑性変形における繰返し数 15 回めの応力-ひずみループを示し, 実線と破線がそれぞれ本理論結果および実験結果を表す. 本理論は, 線形硬化材料を仮定しているため, 逆負荷直後における材料の過渡的軟化を表現することはできないが, 理論結果は 2 直線近似の精度の範囲内で実験結果をよく表している.

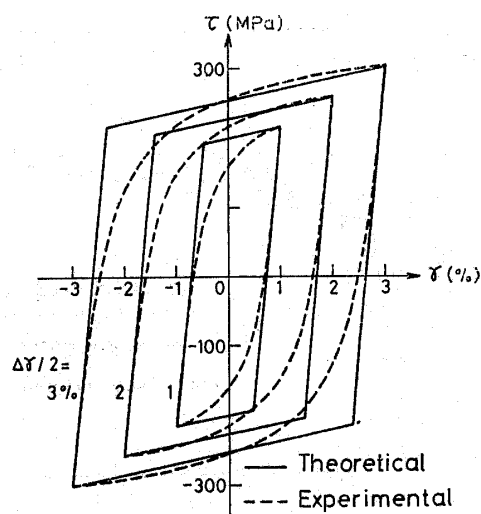


図 6 一定ひずみ振幅繰返し変形における安定化した応力-ひずみ線図

さらに、 $\Delta\gamma/2=3\%$ に対する応力-ひずみ線図の変化を、横軸にねじりひずみの総和 $\int |d\gamma|$ をとって図 7 に示す。この図からも、本理論（実線）は 2 直線近似の精度の範囲内で実験結果をよく表すことがわかる。一方、点線で示す古典理論の結果は、2 サイクルめ後半あたりから実験結果との違いが目立ち始め、5 サイクルめではその違いが $\Delta\tau/2$ について約 20% にも達している。

3.3 変動ひずみ振幅繰返し変形 緒言で述べた Chaboche らの実験と同様に、 $\Delta\gamma/2$ を繰返し数十回ごとに $1\% \rightarrow 2\% \rightarrow 3\% \rightarrow 2\% \rightarrow 1\% \rightarrow 2\%$ と階段的に変化させたときの応力振幅の変化を図 8 に示す。なお、ひずみ範囲は原点对称である。この図で横軸に平行な一点鎖線は、一定ひずみ振幅のもとでの $\Delta\tau/2$ の安定値 $\Delta\tau_s/2$ (15 サイクルめ) を表す。実験結果を見ると、 $\Delta\gamma$ を増加した後の $\Delta\tau$ は、対応する $\Delta\tau_s$ (一点鎖線) の応力レベルへ漸近し、一方 $\Delta\gamma$ を減少したときには、 $\Delta\tau$ は対応する一点鎖線の応力レベルまで回復していない。したがって、常温での 304 ステンレス鋼も、緒言で述べた履歴依存性を示す。なお、同様な履歴依存性は、高温での 304 ステンレス鋼に対する ORNL の実験結果⁽⁶⁾でも見られる。ただし、文献(6)ではひずみ振幅を減少したときにも履歴依存性はないと結論している。しかし、そこに掲載されているひずみ振幅減少試験の結果を注意深く調べれば、変形履歴の影響は消失しておらず、したがって履歴依存性は無視できないことがわかる。

次に、本理論の結果（実線）について検討する。まず、ひずみ振幅を増加した場合には、実線は最初急速に増加した後一点鎖線に漸近し、実験結果とよく一

致している。したがって本理論は、ひずみ振幅を増加した後の再硬化-再安定化および履歴効果の消失を表すことがわかる。これは、式 (9・b) と (10・b) あるいは式 (25) からわかるように、ひずみ振幅増加後の $\Delta\tau$ が増加後のひずみ振幅によって規定されるからである。次に、ひずみ振幅を減少したとき、本理論による $\Delta\tau$ は最初階段的に減少するが、その後は一定のままである。一方実験結果では、すでに述べたように、 $\Delta\tau$ は繰返し数の増加とともにわずかではあるが減少している。したがって本理論は、ひずみ振幅減少後の履歴依存性を強く見積もり過ぎる。これは、本理論の等硬化変数 q が、非硬化ひずみ領域の大きさ ρ によって規定され、しかも ρ が非減少特性を持つためである。ゆえに、本理論をより精密化するためには、このような ρ の回復を考慮しなければならない。しかし、 $\Delta\gamma$ 減少後 10 サイクルめでの本理論結果と実験結果との差は、材料の硬化が完全に回復したときの結果（一点鎖線）と実験結果の差よりも小さく、また本理論の簡単さを考えれば、本理論は実用的に有用な理論であると言える。

最後に図 9(a), (b) に、それぞれひずみ振幅の増加および減少後 10 サイクルめでの応力-ひずみ線図を示す。図 9(a) を見ると、一定ひずみ振幅に対する図 6 とほとんど変わらず、したがってひずみ振幅が増加するときには、応力-ひずみ線図の形に対しても履歴効果は消失する。次に図 9(b) を見ると、かなりの履歴効果が残っていることがわかる。本理論結果と実験結果の差は、上述のようにひずみ振幅を減少した場合に現れるが、その差がそれほど大きくないことは図 9(b) からわかる。

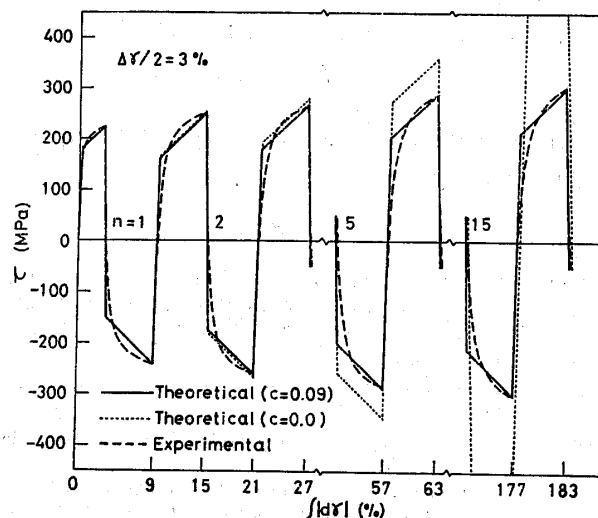


図 7 一定ひずみ振幅繰返し変形における応力-ひずみ線図の変化

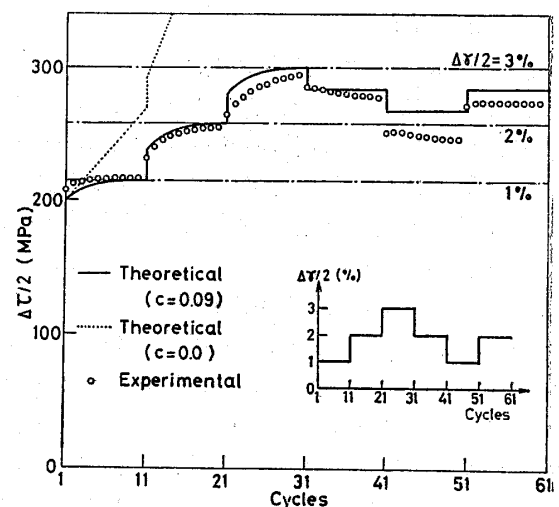


図 8 変動ひずみ振幅繰返し変形における応力振幅の変化

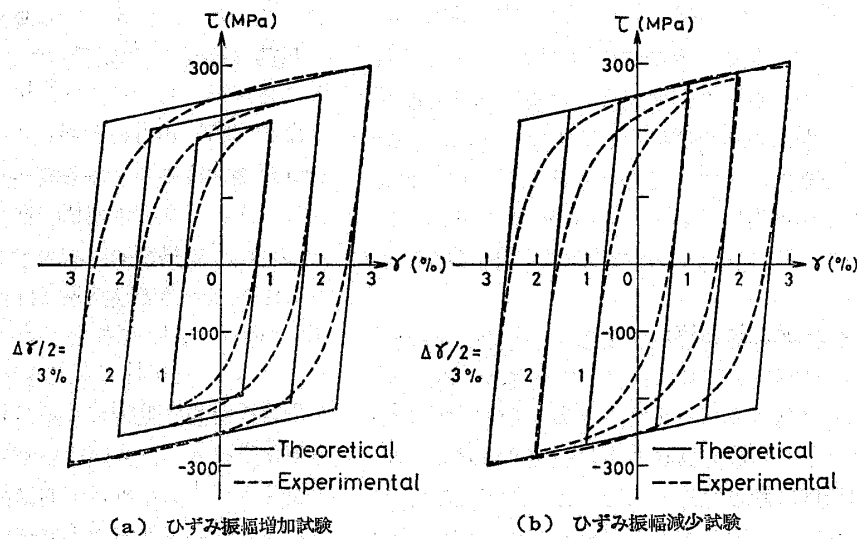


図 9 ひずみ振幅変動後繰返し数 10 回めでの応力-ひずみ線図

4. 結 言

本論文では、繰返し硬化-安定化材料の簡単な構成式を研究した。このためまず、逆負荷後に非硬化ひずみ領域が存在することを仮定し、その発達を解析的に表現した。次に、線形硬化材料に対して、非硬化ひずみ領域を考慮した塑性構成式を定式化した。さらに、非硬化ひずみ領域を塑性ひずみ空間内の球で近似することにより、このような塑性構成式を多軸応力状態へ拡張した。つづいて、本理論の妥当性を検討するため、繰返しねじり変形に対する本理論の結果を 304 ステンレス鋼薄肉円管に対する実験結果と比較、検討した。この結果本理論は、線形硬化材料の近似の精度の範囲内で、一定ひずみ振幅および変動ひずみ振幅ねじり試験の結果をよく表すことがわかった。ただし、ひずみ振幅が減少する場合には、本理論は履歴依存性を少し大きく見積もる。

最後に、本理論の今後の問題点について簡単に述べる。まず、変動ひずみ振幅試験結果との比較において述べたように、ひずみ振幅減少後の弱い繰返し軟化を表現するために、非硬化ひずみ領域の回復を考えなければならない。強い予変形を受けた材料に繰返し変形を与えると観察される繰返し軟化も、類似の現象として、このような回復を考慮することによって記述できると考えられる。次に、本研究では原点对称の繰返しひずみについて検討したが、平均ひずみの 0 でない場合には、平均応力がしだいに 0 に近づく繰返し緩和現象が現れる。この現象を記述するためには、Mróz⁽⁶⁾のように、移動硬化変数の発展式に回復の項を加えなければならない。これら二つの回復の効果は、サイクリック・クリープにおける遷移段階から定常段階

への移行にも密接していると考えられ、次報で検討する予定である。

この研究に対して懇切なご教示と、ゆき届いたご検討を頂いた名古屋大学工学部の大橋義夫教授および豊橋技術科学大学の村上澄男教授に深く感謝する。

【付録】

式 (25) の誘導を以下に示す。本理論では、応力-ひずみ曲線の安定化は、非硬化ひずみ領域 $g \leq 0$ が繰返し塑性ひずみ範囲を占めることによって表現される。したがって、原点对称の一定ひずみ振幅繰返し変形の場合、 $\rho_s = \Delta\gamma_s/2$, $\alpha_s = 0$ となる。ここで、添字 s は応力-ひずみ曲線の安定状態を示す。この結果、式 (9・b) と (10・b) によって、 q_s と ΔR_s は

$$q_s = (\mu K/c)(\Delta\gamma_s/2), \quad \Delta R_s = K\Delta\gamma_s/2$$

と表される。一方、降伏条件式 (20) から、式

$$\Delta\tau_s = \Delta R_s + 2(\tau_0 + q_s)$$

を得る。したがって、 $\Delta\tau_s$ と $\Delta\gamma_s$ の関係は

$$\Delta\tau_s - 2\tau_0 = K \left(1 + \frac{\mu}{c} \right) \Delta\gamma_s/2$$

と求められる。さらに、関係 $\Delta\gamma_s = \Delta\tau_s/G + \Delta\gamma_s/2$ を用いれば、式 (25) が導かれる。

文 献

- (1) Chaboche, J.L., ほか 2 名 (Jager, T.A. and Boley, B.A. 編), *Trans. 5th Int. Conf. Struct. Mech. React. Tech.*, (1979), Paper No. L11/3, North-Holland.
- (2) Eisenberg, M.A., *Trans. ASME, Ser. H*, 98-3 (1976), 221.
- (3) Bodner, S.R., ほか 2 名, *Trans. ASME, Ser. E*, 46-4 (1976), 805.
- (4) Bruhns, O., *Arch. Mech.*, 25-3 (1973), 535.
- (5) Pugh, C.E., ほか 3 名, *ORNL-TM-3602*, (1972), Oak Ridge Nat. Lab.
- (6) Corum, J.M., ほか 4 名, *ORNL-5014*, (1974), Oak Ridge Nat. Lab.

- (7) Mróz, Z., *Acta Mech.*, 7-2/3 (1969), 199.
 (8) Mróz, Z., ほか2名, *Acta Mech.*, 25-1/2 (1976), 51.
 (9) Dafalias, Y.F. and Popov, E.P., *Trans. ASME, Ser. E*, 43-4 (1976), 645.
 (10) Miller, A.K., *Trans. ASME, Ser. H*, 98-2 (1976), 97.
 (11) Miller, A.K., *Trans. ASME, J. Eng. Mot. Tech.*, 102-2 (1980), 215.
 (12) Valanis, K.C., *Trans. ASME, Ser. E*, 41-2 (1974), 441.
 (13) Valanis, K.C. and Wu, H.-C., *Trans. ASME, Ser. E*, 42-1 (1975), 67.
 (14) 村上・大野, 機論, 48-428, A (昭 57), 431.
 (15) Prager, W., *Proc. Instn. Mech. Eng.*, 169 (1955), 41.
 (16) Ziegler, H., *Q. Appl. Math.*, 17-1 (1959), 55.
 (17) 大橋・ほか3名, 機論, 46-405, A (昭 55), 459.

討 論

〔質問〕 長渡甲太郎〔川崎重工業(株)〕

式(i)と(ii)に示す, 単軸と2軸のひずみ径路を想定した場合について伺います。

$$\gamma_1^p = \frac{\Delta\gamma^p}{2} \sin \omega t, \quad t \geq 0 \dots\dots\dots (i)$$

$$\gamma_1^p = \frac{\Delta\gamma^p}{2} \sin \omega t, \quad \gamma_2^p = 0, \quad t = 0 \sim \frac{\pi}{2\omega} \dots\dots\dots (ii \cdot a)$$

$$\gamma_1^p = \frac{\Delta\gamma^p}{2} \sin \omega t, \quad \gamma_2^p = \frac{\Delta\gamma^p}{2} \cos \omega t, \quad t \geq \frac{\pi}{2\omega} \dots\dots\dots (ii \cdot b)$$

式(i)の単軸ひずみ径路に対して, 応力-ひずみ関係が安定化した状態では,

$$\rho = \Delta\gamma^p/2, \quad f = |\tau - R| - \left(\tau_0 + \frac{\mu}{c} K \frac{\Delta\gamma^p}{2} \right) \dots\dots\dots (iii)$$

式(iii)によると, 応力範囲 $\Delta\tau_s$ は

$$\Delta\tau_s = 2\tau_0 + K \left(1 + \frac{\mu}{c} \right) \Delta\gamma^p \dots\dots\dots (iv)$$

これは材料硬化の最大ひずみ依存性を表したものである。

図3のように $\Delta\tau_s$ と $\Delta\gamma_s$ に線形関係があれば, 式(iv)から貴モデルがサイクリック硬化を良好に表現することがわかる。ステンレス鋼の $\Delta\tau_s$, $\Delta\gamma_s$ 関係は一般に線形であるのか。

式(ii・b)によると $(\gamma_1^p)^2 + (\gamma_2^p)^2 = (\Delta\gamma^p/2)^2$ である。これは $\gamma_1^p = \gamma_2^p = 0$ を中心とした半径 $\Delta\gamma^p/2$ の円形ひずみ径路である。 $t > (\pi/2\omega)$ では, γ_1^p , γ_2^p は非硬化ひずみ範囲を表す $g=0$ 面上にあり, かつ $(\partial g / \partial \varepsilon_{ij}^p) d\varepsilon_{ij}^p > 0$ である。すなわち, つねに $H=1$ であり, 非硬化ひずみ範囲は膨張しつづける。この場合には, 貴モデルは古典モデルと同じ結果を与えることになる。ゆえに, 貴モデルの多軸応力状態への拡張においては, なんらかの形で材料硬化の最大塑性ひずみ依存性を表す条件式を追加する必要があるのではないか。

〔回答〕 より一般的な場合に対する本理論の妥当性についてご検討頂き, 感謝する。

まず, ご質問の式(i)のように繰返し塑性変形を行うとき, ヒステリシスループが安定化した状態での応力振幅 $\Delta\tau_s$ と塑性ひずみ振幅 $\Delta\gamma^p$ は, ご指摘の式(iv)〔本論文中の式(25)と実質的に同一〕のように線形関係となる。文献(1)の316ステンレス鋼に対する常温での実験結果を見ると, $\Delta\varepsilon/2$ (ε : 軸方向ひずみ)が2%程度以内であれば, このような線形関係がよい近似であることがわかる(本論文の図3の $\Delta\gamma/2$ を相当ひずみに換算すると0~1.7%)。しかし, 一般にひずみ振幅が大きくなると, 1346ページ左欄下3~1行めで述べたように, $\Delta\tau_s$ と $\Delta\gamma^p$ の関係は非線形となる。このような非線形関係は, 例えば式(2)あるいは(20)を

$$f = (\tau - R)^2 - (\tau_0^n + q)^{2/n}$$

のように非線形化することによって記述することができ。ここで n は材料定数である。すなわち, このとき $\Delta\tau_s$ と $\Delta\gamma^p$ の関係は, 次式

$$\Delta\tau_s = K \Delta\gamma^p + 2 \left(\tau_0^n + \frac{\mu K}{c} \frac{\Delta\gamma^p}{2} \right)^{1/n}$$

のように非線形となる。

次に, 原点を中心とした半径 $\Delta\gamma^p/2$ の円形ひずみ径路に沿って塑性変形を繰返すとき, ご指摘のようにつねに $H=1$ となる。しかし, 非硬化ひずみ範囲の大きさ ρ の発展式(14)では, $d\rho$ は $(\partial g / \partial \varepsilon_{ij}^p) d\varepsilon_{ij}^p$ に比例しているから, ご質問のような心配はない。すなわち, 考えている問題の性質から, 非硬化ひずみ範囲の中心 α_{ij} は, 繰返し数の増加とともに原点に近づく。このとき, ρ が増加し, $\Delta\gamma^p/2$ に近づくと, 法線 $\partial g / \partial \varepsilon_{ij}^p$ とひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^p$ の内積 $(\partial g / \partial \varepsilon_{ij}^p) d\varepsilon_{ij}^p$ はしだいに0となる。したがって, $H=1$ であっても ρ は増加し続けられないから, 本理論は古典理論と同じ結果を与えることにはならない。また, 最大塑性ひずみ範囲依存性を表す条件式を追加する必要もない。

〔質問〕 守 時 一 (東北大学工学部)

繰返し塑性変形の構成式において, 近似の向上に貢献されたことに敬意を表す。

(1) 式 (15), (18) の仮定のもとでは継続した負荷過程にもかかわらず非硬化ひずみ範囲の膨張の生じない応力状態の存在が考えられる。この場合対象としている現象のモデル化という点において適切さを欠くのではないかと考えるが、いかがか。

(2) 非硬化ひずみ範囲の定義が 1342 ページ右欄 10~15 行めと 1343 ページ左欄 24~30 行めにあり重複している。

(3) 1344 ページ左欄下 15 行めの $dR=(1-\mu K) \times ds^p$ は $dR=(1-\mu) \kappa ds^p$ でないか。

(4) 1344 ページ左欄下 17~12 行めの説明では「等方硬化境界内」と「非硬化ひずみ範囲」が同一の内容(領域)のように読みとれるが異なっているのか。

〔回答〕 (1) 「継続した負荷過程」すなわち「除荷を伴わない負荷過程」において、ご質問のような応力状態が現れる場合としては、半径の比較的大きい円形ひずみ径路に沿う繰返し負荷が考えられる。このとき、除荷 ($\sigma_{ij} ds_{ij} < 0$) が現れないにもかかわらず、繰返し数の増加に伴って、非硬化ひずみ範囲は膨張しなくなる(長渡氏への回答参照)。しかし、このような傾向は実験的に確かめられているから(付1)、これが本理論の欠陥になるとは考えられない。

次に、ひずみ空間で原点OからあるP点まで比例変形を行った後に、ある曲率でひずみ径路の進行方向を反転するときにも、ご指摘のような応力状態が現れることがある。すなわち、OP が長いほど点Pでの非硬化ひずみ範囲の大きさは大きくなる。また、曲率半径がある程度大きければ、 $\sigma_{ij} ds_{ij} \geq 0$ となり除荷は生じない。しかし、点Pでの非硬化ひずみ範囲の大きさに比べてこの曲率半径が相対的に小さければ、 ds_{ij} の方向を反転するうちに、塑性ひずみ点が非硬化ひずみ範囲の内側へ進む可能性がある。これは、現在の塑性ひずみ増分が、過去のひずみ履歴OPに対して逆行しており、かつその曲率半径がOPの長さに比べて小さいからである。換言すれば、過去の強いひずみ履歴の影響が現在の内部状態変化に影響しているからであり、したがってこの場合も本理論の欠点が現れているわけではない。

(2) 1342 ページ右欄 10~15 行め、すなわち緒言での記述は、本文の内容を簡単に要約した部分であるから、このような重複があっても問題はないと思う。

(3) ご指摘のとおりであり、おわびして訂正させていただきます。

(4) 等方硬化境界内と非硬化ひずみ範囲は同一の領域である。1344 ページ左欄 14, 15 行めで等方硬化境界を非硬化ひずみ範囲の境界 ($g=0$) と明確に定義しているから、特に混乱はないと思う。

〔質問〕 吉田 総 仁 (広島大学工学部)

繰返し硬化特性を簡単なパラメータで表し、変動ひずみ振幅にも応用しうる構成式を導かれたことに敬意を表す。

(1) 繰返し変形の特徴であるが応力反転直後の加工硬化係数の急こう配(遷移軟化)を表現することは重要だと思う。貴論文では、線形硬化則のみを取上げておられるが、遷移軟化領域の挙動を表すことはできるのか。

(2) 線形硬化はひずみが一定方向に大きく進行し安定した状態を表現するものであるので、大きなひずみ振幅から小さなひずみ振幅に移るとき硬化を大きく見積もりすぎるといった問題は線形硬化を仮定していることに主たる原因があるのではないか。

〔回答〕 繰返し塑性変形の研究のご経験に基づく有意義なご質問を頂き、感謝する。

(1) 本論文の主目的は、古典的な塑性構成式(1)~(4)に非硬化ひずみ範囲の概念を適用し、簡単な繰返し塑性構成式を導くことにある。この古典的な式は線形硬化材料に対するものであり、応力反転直後の過渡的軟化を表現しない。したがって本理論も、本論文のままでは、このような軟化を記述することはできない。しかし、応力反転直後の過渡的軟化は、例えば移動硬化法則に記憶減衰項を考慮することによって表現できる(付2)。したがって、本理論の場合も、 dR の式 (10・a) あるいは dR_{ij} の式 (18・a), (18・b) にこのような項を加えることによって、そのような現象は表されると考えている。

(2) 図8において、 $\Delta\gamma/2$ を2%から1%に減少した直後での理論結果と実験結果の差は、ご指摘のように、非線形硬化を考えていないことによるものである。しかし、この図の実験結果でご注目いただきたいことは、ひずみ振幅減少後において応力振幅が繰返し数とともに漸減し、繰返し軟化が現れていることである。したがって、ひずみ振幅減少後の変形挙動をより精密に記述するためには、1347 ページ右欄 14, 15 行めで述べたように、非硬化ひずみ範囲の回復を考慮することにより繰返し軟化を表現することも重要であると考えます。

(付1) Lamba, H.S. and Sidebottom, O.M., *Trans. ASME, Ser. H*, 100-1 (1978), 96.

(付2) Chaboche, J.L., *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Tech.*, 25 (1977), 33.