

日本機械学会論文集(A編)
51巻470号(昭60-10)

非線形硬化材料の繰返し塑性構成式*

大野 信忠**, 加智 義文***, 村上 澄男†
Nobutada OHNO, Yoshifumi KACHI, Sumio MURAKAMI

Key Words: Plasticity, Cyclic Plasticity, Constitutive Model, Nonlinear Hardening, Cyclic Hardening, Stress-Strain Curve

1. 緒 言

繰返し負荷を受ける構造要素の塑性あるいは弾塑性解析を精密に行うためには、用いる構成式が、材料要素の繰返し塑性変形挙動を精度よく記述する必要がある。金属材料の繰返し塑性変形の最も基本的な特徴は、いわゆる繰返し硬化（あるいは軟化）である。したがって、上述の繰返し塑性構成式は、まずこの現象を記述できなければならない。しかも、一般の構造要素内では応力とひずみの値が場所によって変化するから、その構成式は、解析に必要なひずみあるいは応力範囲での任意の大きさの繰返し塑性変形に対して妥当でなければならない。

前報⁽¹⁾⁽²⁾において著者の一人は、塑性ひずみ空間内に繰返し非硬化領域を規定することにより、上に述べたような繰返し塑性構成式を定式化した^{*1}。この領域は、その内側での塑性変形によっては材料の繰返し硬化が進行しないようなひずみ範囲を表す。前報⁽¹⁾⁽²⁾ではさらに、得られた構成式を304ステンレス鋼の常温での繰返しねじり試験結果に適用し、繰返しひずみ範囲が一定の場合だけでなく変動する場合にも、その妥当性を確かめた。また、この構成式に含まれる材料定数の値が、実験結果から系統的に決定できることも示した。

このように、繰返し非硬化領域モデルは、繰返し塑性構成式として十分有用であることが確かめられた。しかし前報⁽¹⁾⁽²⁾では、初期降伏後、あるいは逆負荷による再降伏後の非線形材料硬化を無視した場合に議論

を限った。これは、理論を簡単化するため、材料の加工硬化が等方硬化と移動硬化からなると仮定し、等方硬化および移動硬化変数の変化を塑性ひずみ増分に線形な形で規定したからである。

これに対し、上述の非線形材料硬化を記述し得る構成モデルとして、応力空間内に降伏面のほかに限界面(bounding surface)を導入する二曲面塑性モデルがある⁽³⁾⁻⁽⁵⁾。限界面は、降伏面の外側に位置し、降伏面の移動・膨張範囲を規定する。したがって、限界面内部における降伏面の移動によって、材料の過渡的な非線形硬化が表現される。なお、これら二曲面のほかにさらに副降伏面を考えた構成モデルも提案されている⁽⁶⁾。また、非線形材料硬化は、移動硬化変数の発展式に回復項を加えることによっても表現できる⁽⁷⁾。しかし特別の場合には、このような理論と二曲面塑性理論の間の数学的類似性を示し得るから、これらは全く異なる理論ではない⁽⁸⁾。

本研究では、二曲面塑性モデルを繰返し非硬化領域モデルに組み込むことによって、材料の繰返し硬化に加えて非線形硬化を記述し得る塑性構成式を定式化する。つづいて、得られた構成式の妥当性を、304⁽¹⁾⁽²⁾および316L⁽⁹⁾ステンレス鋼の常温での実験結果に基づいて検討する。なお、応力-ひずみループの安定状態での応力振幅とひずみ振幅の関係は一般に非線形であるが、前報ではこれについての議論は行わなかった。したがって本報では、この非線形性についても検討する。

2. 構成モデルの概略

最初に、二曲面塑性理論と繰返し非硬化領域について簡単に説明するとともに、本構成モデルの主要な仮定について述べる。

二曲面塑性理論を文献(3)に従って説明する。図1

* 昭和59年10月16日 第62期全国大会講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和59年4月6日。

** 正員、豊橋技術科学大学(〒440 豊橋市天伯町豊雀ヶ丘1-1)。

*** 学生員、豊橋技術科学大学大学院。

† 正員、名古屋大学工学部(〒464 名古屋市千種区不老町)。

*1 前報では、この領域を非硬化ひずみ範囲と呼んだ。

に示すように、応力空間内で降伏面の外側に限界面を仮定する。初期降伏後、あるいは逆負荷による再降伏後、降伏面は、図1の s^* 点 (s^* の定義は後出の式(8)参照) で限界面に内接するような方向へ移動するとともに膨張する。すなわち図1において、降伏面の中心 η は、偏差応力 s が限界応力 s^* へ近づく方向に移動する。このような降伏面の移動は、 s と s^* が離れているほど、塑性変形の硬化係数が大きくなるように規定される。そして s が s^* に近づくと、限界面が実質的に降伏面の役割をするようになり、塑性変形の硬化係数は小さくなる。換言すれば、限界面内部における降伏面の移動が過渡的材料硬化を記述し、限界面の変化は過渡的材料硬化が消失した状態での応力-ひずみ曲線を表す。

さて、すでに緒言で述べたように、繰返し非硬化領域を考慮した前報の構成式は、304 ステンレス鋼の繰返し硬化を精度よく記述したが、非線形材料硬化は表現し得なかった。この難点は、上述の二曲面塑性理論の考え方を取り入れることによって解決できる。すなわち、前報の構成式における降伏面を限界面とみなし、かつその内部に新しく降伏面を規定すれば、非線形材料硬化も表すことができる。なお本研究では、簡単のため、降伏面は限界面内部を移動するだけであり、その大きさは変化しないと仮定する。

このとき、限界面は、繰返し非硬化領域の概念に基

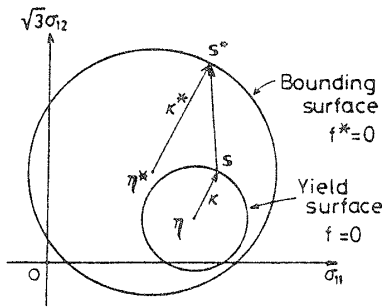


図1 降伏面と限界面⁽³⁾

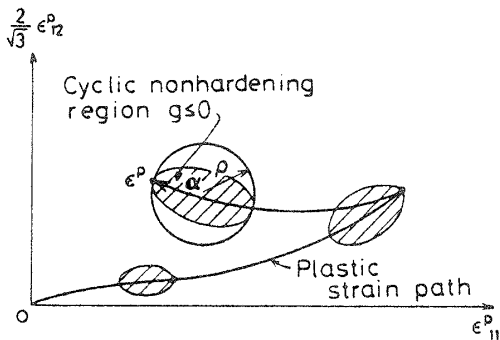


図2 繰返し非硬化領域の発達

づいて次のように発達する。すなわち、逆負荷後のあるひずみ範囲(繰返し非硬化領域)においては、限界面は膨張せず、ただ移動だけをする。一方、繰返し非硬化領域は、図2に示すように繰返し塑性変形の進行とともに膨張および移動する。この結果、繰返しひずみ範囲が一定のときには、このひずみ領域は、やがて繰返し塑性ひずみ範囲全体を占めるようになる。このとき、限界面はもはや膨張することなく、応力-ひずみループは安定化する。

図3は、単軸状態における負荷-除荷-逆負荷のもとでの限界応力 σ^* と応力 σ の変化を示す。すなわちまず、図3(a)の斜線を施したひずみ範囲のように、繰返し非硬化領域が発達する。このとき、逆負荷後のひずみ範囲 $[\epsilon_A^p, \epsilon_B^p]$ (繰返し非硬化領域) 内では、限界面の大きさ κ^* は変化しない。また応力 σ は、図3(b)に示すように、初期負荷後および逆負荷後、限界応力 σ^* に近づく。

3. 構成モデルの定式化

3.1 繰返し非硬化領域の関係式 まず、繰返し非硬化領域の関係式⁽¹⁾⁽²⁾について述べる。考える負荷履歴を逆負荷あるいは比例負荷からの偏りが著しくない場合に限り、繰返し非硬化領域を、図2に示すように塑性ひずみ空間内の球

$$g = \frac{2}{3}(\epsilon_{ij}^p - \alpha_{ij})(\epsilon_{ij}^p - \alpha_{ij}) - \rho^2 \leq 0 \dots \dots \dots (1)$$

によって近似する。ここで、 ϵ_{ij}^p は塑性ひずみを示し、また α_{ij} と ρ はこの球の中心と半径を示す。

式(1)の領域 $g \leq 0$ が膨張および移動するのは、塑性ひずみ状態 ϵ_{ij}^p が面 $g=0$ 上にあり、かつ塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ が面 $g=0$ の外向き法線成分を持つときだけであると仮定する。ここで (\cdot) は、適当な負荷パラメータに関する微分を示す。さらに、領域 $g \leq 0$ のこの

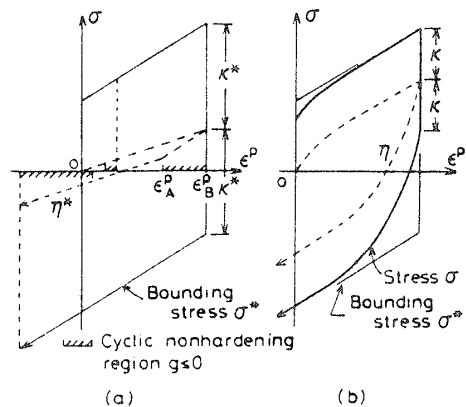


図3 単軸状態における限界応力 σ^* および応力 σ の変化

ような移動は、面 $g=0$ に立てた法線の方向へ生じるとする。このとき、適応条件式 $\dot{g}=0$ を考慮すれば、 ρ と α_{ij} の変化は次のように表される。

$$\dot{\rho} = c\Gamma\dot{\epsilon}^p \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\dot{\alpha}_{ij} = (1-c)\Gamma\dot{\epsilon}^p(\epsilon_{ij}^p - \alpha_{ij})/\rho \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここで $\dot{\epsilon}^p = (2\dot{\epsilon}_{ij}^p\dot{\epsilon}_{ij}^p/3)^{1/2}$ は、相当塑性ひずみ速度である。また c は、領域 $g \leq 0$ の発達を表す定数である。さらに Γ は、 ϵ_{ij}^p が面 $g=0$ 上にあつて外側へ動くときだけ値を持ち、その値は、塑性ひずみ速度ベクトル $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ が外向き法線ベクトル $\partial g/\partial \epsilon_{ij}^p$ となす角の余弦に等しい。すなわち Γ は

$$\Gamma = \begin{cases} (\epsilon_{ij}^p - \alpha_{ij})\dot{\epsilon}_{ij}^p / [(3/2)\rho\dot{\epsilon}^p], & g=0 \text{ かつ } (\partial g/\partial \epsilon_{ij}^p)\dot{\epsilon}_{ij}^p > 0 \\ 0, & g < 0 \text{ あるいは } (\partial g/\partial \epsilon_{ij}^p)\dot{\epsilon}_{ij}^p \leq 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(4)$$

と定義され、 $0 \leq \Gamma \leq 1$ を満足する。

3.2 応力と塑性ひずみの増分関係式 降伏面と限界面をそれぞれ $f=0$ および $f^*=0$ と表し、 f と f^* が次のように与えられる場合を考える。

$$f = \frac{3}{2}(s_{ij} - \eta_{ij})(s_{ij} - \eta_{ij}) - x^2 \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$x = x_0 \quad (\text{一定})$$

$$f^* = \frac{3}{2}(s_{ij}^* - \eta_{ij}^*)(s_{ij}^* - \eta_{ij}^*) - x^{*2} \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここで、 s_{ij} は偏差応力を表し、 η_{ij} と x はそれぞれ降伏面の中心と大きさを示す。また s_{ij}^* 、 η_{ij}^* および x^* は、それぞれ限界面上の偏差応力、限界面の中心とその大きさである。なお、すでに述べたように、降伏面の大きさ x は変化しないと仮定してある。

いま降伏面の移動を、Mrózの加工硬化係数場の理論⁽¹⁰⁾に基づくKriegの式⁽³⁾と同様に、次式

$$\dot{\eta}_{ij} = A(s_{ij}^* - s_{ij})\dot{\epsilon}^p \quad \dots\dots\dots(7)$$

によって規定する。ここで A は材料定数である。また限界応力 s_{ij}^* は、 $\partial f^*/\partial s_{ij}^*$ が $\partial f/\partial s_{ij}$ と同方向となるように取られる。すなわち s_{ij}^* は

$$s_{ij}^* = \eta_{ij}^* + (s_{ij} - \eta_{ij})x^*/x \quad \dots\dots\dots(8)$$

と表される。したがって、式(7)からわかるように、降伏面は限界面に内接する方向へ移動する。このとき、塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ の降伏面への垂直性を仮定し、適応条件式 $\dot{f}=0$ と式(7)を用いると、次式を得る。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2A} \frac{(s_{ij} - \eta_{ij})(s_{kl} - \eta_{kl})\dot{s}_{kl}}{x(s_{mn} - \eta_{mn})(s_{mn}^* - s_{mn})} \quad \dots\dots\dots(9)$$

次に限界面の発達、すなわち式(6)の η_{ij}^* と x^* の変化を、繰返し非硬化領域の概念に基づいて定式化する。すでに2章で述べたように、限界面 $f^*=0$ は、塑性ひずみ状態 ϵ_{ij}^p が式(1)の繰返し非硬化領域 $g \leq 0$

の内部にあるときは膨張(等方硬化)せず、移動だけをする。このとき、塑性ひずみの増加に伴う材料の硬化は、限界面の移動として表現され、この結果限界面の移動速度 $\dot{\eta}_{ij}^*$ は大きくなる[図3(a)参照]。このような限界面の変化は、前報⁽²⁾における降伏面の膨張および移動の式と同様に、式(4)の Γ を用いて次のように書ける。

$$x^* = x^*(q), \quad \dot{q} = \Gamma\dot{\epsilon}^p \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\dot{\eta}_{ij}^* = \left\{ \frac{2}{3}K + \frac{\frac{\partial f^*}{\partial q}(1-\Gamma)\dot{\epsilon}^p}{\frac{\partial f^*}{\partial \eta_{kl}^*}\dot{\epsilon}_{kl}^p} \right\} \dot{\epsilon}_{ij}^p - K_r\eta_{ij}^*\dot{\epsilon}^p \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここで q は、限界面の膨張を表す等方硬化変数であり、もしつねに $\Gamma=1$ であれば、 $q=\epsilon^p$ となる。また K と K_r は材料定数である。さらに、式(11)の最後の項は、塑性変形の進行に伴う回復⁽⁷⁾を表し、したがってこの項は、繰返し塑性変形における平均応力の緩和を記述する。ただしその効果は、5章における実験結果との比較からわかるように、初期負荷後および逆負荷後の非線形材料硬化を表すほどには大きくない。

なお、限界応力 s_{ij}^* と塑性ひずみ ϵ_{ij}^p の増分関係式には、付録の式(32)に示すように、 Γ が陽に現れない。したがって、 Γ の値が式(4)によって不連続に変化し、この結果 \dot{q} と $\dot{\eta}_{ij}^*$ が式(10)と(11)によって不連続となっても、限界応力-塑性ひずみ曲線の硬化係数はその影響を受けない。これは、等方硬化速度 \dot{q} が相当ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^p$ より小さくなると、すでに述べたように、移動硬化速度 $\dot{\eta}_{ij}^*$ が対応して大きくなるからである。式(11)の大括弧中の第2項が、このような $\dot{\eta}_{ij}^*$ の増加を表す。

3.3 限界応力 s_{ij}^* の消去 以上で本構成モデルの定式化は終了したが、限界応力 s_{ij}^* は、次のようにして構成式系から消去できる。すなわち、式(8)と(9)からそれぞれ、式

$$s_{ij}^* - s_{ij} = \eta_{ij}^* - \eta_{ij} + (s_{ij} - \eta_{ij})(x^* - x)/x \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p/\dot{\epsilon}^p = (3/2)(s_{ij} - \eta_{ij})/x \quad \dots\dots\dots(13)$$

が得られる。したがって、式(7)は

$$\dot{\eta}_{ij}^* = A[(2/3)(x^* - x)\dot{\epsilon}_{ij}^p - (\eta_{ij} - \eta_{ij}^*)\dot{\epsilon}^p] \quad \dots\dots\dots(14)$$

となる。上式の右辺第2項は、 $\eta_{ij}^*=0$ のとき、回復⁽⁷⁾を表す形となる。しかしこの場合、 $\eta_{ij}^* \neq 0$ であるから、上式の回復は限界面の中心 η_{ij}^* を原点として生じる。次に式(9)は、式(12)によって

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^p &= \frac{3}{2A} \frac{(s_{ij} - \eta_{ij})(s_{kl} - \eta_{kl}) \dot{s}_{kl}}{\chi H} \\ H &= (2/3)\chi(x^* - \chi) + (s_{ij} - \eta_{ij})(\eta_{ij}^* - \eta_{ij}) \end{aligned} \right\} \dots\dots(15)$$

と書き直される。さらに式(11)は、式(6)を代入し、かつ式(8)と(13)から導かれる式($s_{ij}^* - \eta_{ij}^*$) $\dot{\epsilon}_{ij}^p = x^*(q)\dot{\epsilon}^p$ を用いると、次のようになる。

$$\dot{\eta}_{ij}^* = \frac{2}{3} \left[K + (1 - \Gamma) \frac{dx^*(q)}{dq} \right] \dot{\epsilon}_{ij}^p - K_r \eta_{ij}^* \dot{\epsilon}^p \dots\dots(16)$$

この結果、本構成モデルは、繰返し非硬化領域の関係式(1)~(4)、降伏条件式(5)、塑性ひずみと応力の増分関係式(15)、降伏面と限界面の発展式(14)、(10)および(16)によって構成される。

4. 単軸状態への特特殊化

前章で議論した構成式を、単軸変形の場合に特特殊化する。すなわち、応力 σ および塑性ひずみ ϵ^p の単軸変形に対して、式(5)、(15)、(14)、(16)および(10)は、それぞれ次のような形となる。

$$f = (\sigma - \eta)^2 - x^2, \quad \chi = x_0 \dots\dots(17)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{(1/A)\dot{\sigma}}{x^* - \chi + \text{sgn}[\sigma - \eta] \cdot (\eta^* - \eta)} \dots\dots(18)$$

$$\dot{\eta} = A[(x^* - \chi)\dot{\epsilon}^p - (\eta - \eta^*)|\dot{\epsilon}^p|] \dots\dots(19)$$

$$\dot{\eta}^* = [K + (1 - \Gamma)dx^*/dq]\dot{\epsilon}^p - K_r \eta^* |\dot{\epsilon}^p| \dots\dots(20)$$

$$x^* = x^*(q), \quad \dot{q} = \Gamma |\dot{\epsilon}^p| \dots\dots(21)$$

ここで η と η^* は、それぞれ η_{ij} 、 η_{ij}^* の軸方向成分の3/2倍に等しい。また上式の Γ は、繰返し非硬化領域の関係式(1)~(4)によって与えられるが、 a_{ij} の軸方向成分を a と書くと、これらの関係式は次のようになる。

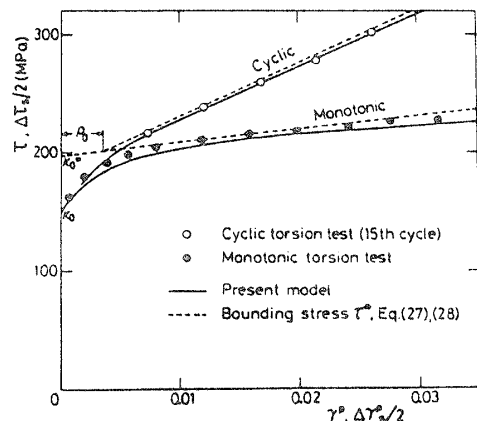


図4 単純ねじりおよび繰返しねじり試験による材料定数の決定

$$g = (\epsilon^p - \alpha)^2 - \rho^2 \dots\dots(22)$$

$$\dot{\rho} = c\Gamma|\dot{\epsilon}^p|, \quad \rho(0) = \rho_0 \dots\dots(23)$$

$$\dot{\alpha} = (1 - c)\Gamma|\dot{\epsilon}^p|(\epsilon^p - \alpha)/\rho \dots\dots(24)$$

$$\Gamma = \begin{cases} 1, & g=0 \text{ かつ } (\partial g / \partial \epsilon^p) \dot{\epsilon}^p > 0 \\ 0, & g < 0 \text{ あるいは } (\partial g / \partial \epsilon^p) \dot{\epsilon}^p \leq 0 \end{cases} \dots\dots(25)$$

なお η 、 η^* 、 q および α の初期値は零に取るが、 ρ の初期値は ρ_0 である(後出、図4参照)。

5. 304ステンレス鋼の繰返しねじり試験結果との比較

ここでは、本構成モデルの妥当性を、304ステンレス鋼薄肉円管試験片の常温での繰返しねじり試験結果⁽¹⁾⁽²⁾に基づいて検討する。なお、3章の多軸構成式をねじり変形に対して特特殊化すると、前章の単軸構成式と同様な式が得られる。そこで以下においては、簡単のため、 σ と ϵ^p をそれぞれせん断応力 τ および工学的塑性ねじりひずみ γ^p で置き換えることにより、前章の式(17)~(25)をそのまま用いることにする。また、ひずみは弾性成分と塑性成分の和とし、弾性成分に対してはHookeの法則を仮定する。

5.1 材料定数の決定 式(17)~(25)を実際に計算するためには、5個の材料定数 x_0 、 A 、 K 、 K_r 、 c に加えて材料関数 $x^*(q)$ と ρ の初期値 ρ_0 を決定しなければならない。ここでは、 $x^*(q)$ が

$$x^*(q) = x_0^* + Lq \dots\dots(26)$$

と書かれる場合を考える。ここで x_0^* と L は定数である。

材料定数の決定に際して、とりあえず式(20)の回復項を無視する($K_r=0$)。このとき、単調ねじりにおける限界応力 τ^* と塑性ひずみ γ^p の関係は、付録の式(34)によって

$$\tau^* = x_0^* + (K + L)\gamma^p \dots\dots(27)$$

となる。また、原点对称の一定ひずみ振幅繰返しねじりにおいて、応力-ひずみループが安定化した状態での限界応力振幅 $\Delta\tau_s^*/2$ と塑性ひずみ振幅 $\Delta\gamma_s^p/2$ の関係は、式(35)~(37)から、次のように求められる。

$$\begin{aligned} \Delta\tau_s^*/2 &= x_0^* + (K + L)\rho_0 \\ &+ [K + (1 + 1/c)L](\Delta\gamma_s^p/2 - \rho_0) \dots\dots(28) \end{aligned}$$

式(27)、(28)と図4に示す実験結果との比較から、 x_0^* 、 $K + L$ 、 ρ_0 および $K + (1 + 1/c)L$ の値が決まる(図4の破線)。次に定数 x_0 と A は、 $\tau - \gamma^p$ 曲線における初期降伏後の過渡的非線形硬化部分が式(17)~(19)によって表されるように決定する〔この際、式(18)と(19)の η^* と x^* は、 $\tau^* = \eta^* + x^*$ として現れるから、式(27)によって既知である〕。この結果、 c の値が与えら

れば、材料定数の値は K_r を除いてすべて定まる。定数 c は繰返し非硬化領域の発達を表すから、 c の値は、一定ひずみ範囲の繰返し変形において ϵ - γ ループの安定化に要する繰返し数から見積もられる (図 5)。最後に K_r の値は、平均応力の繰返し緩和、すなわち正、負の最大応力の繰返し均等化がこの定数に依存するから、平均ひずみが非零の繰返し試験結果から求められる (図 5)。以上のようにして次の値を得た。

$$\left. \begin{aligned} x_0^* &= 197 \text{ MPa}, x_0 = 150 \text{ MPa}, A = 350 \\ K &= 900 \text{ MPa}, L = 265 \text{ MPa}, K_r = 7.0 \\ \rho_0 &= 0.0036, c = 0.08 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

なお、これらの定数値を求めるために最初 $K_r = 0$ を仮定したが、実際に上の K_r の値を用いて $\tau^* - \gamma^p$ 線図と $\Delta\tau_0^* - \Delta\gamma_0^p$ 線図を計算したところ、この仮定の影響は小さく、定数の値をわずかに調整すればよいことがわかった。

5.2 一定ひずみ範囲繰返し変形 繰返しひずみ範囲 $[-0.03, 0.03]$, $[0.0, 0.03]$, $[0.015, 0.03]$ に対する正、負の最大応力の変化を図 5 に示す。なお、図 5 に示す応力値は絶対値であり、またひずみ範囲 $[-0.03, 0.03]$ に対する計算結果 (実線) は、正および負の両最大応力の変化に共通である。この図から、本構成モデルは、応力-ひずみループの安定化および正、負最大応力の繰返し均等化を精度よく表現することがわかる。なお、最大応力の値は限界応力の最大値とほとんど一致するから、図 5 の実験結果は、材料の非線形硬化を考えない前報の構成モデル⁽²⁾ によって

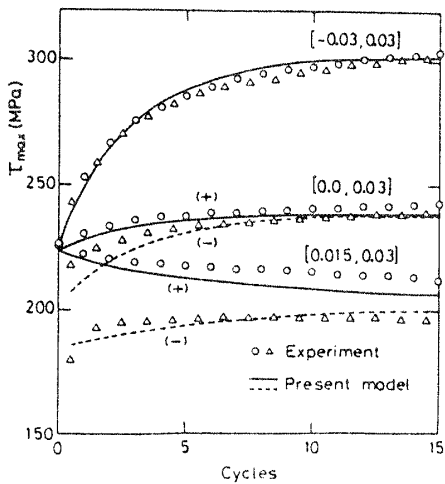
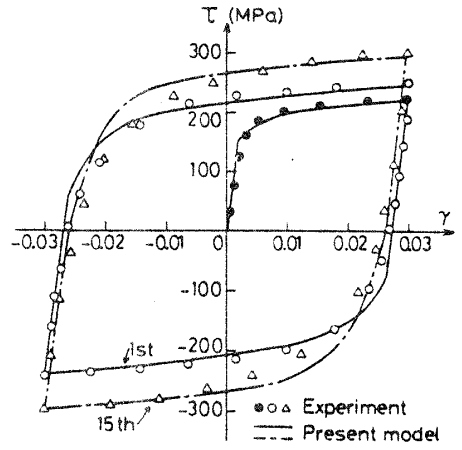


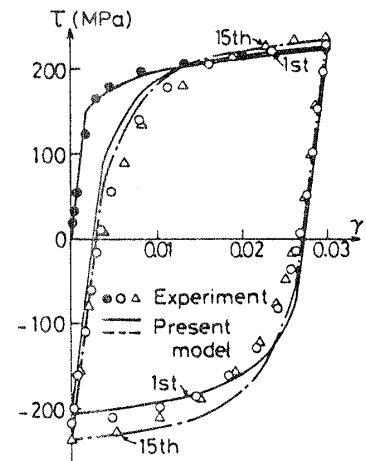
図 5 一定ひずみ範囲繰返しねじり変形における正、負最大応力の変化

も十分な精度で表される。

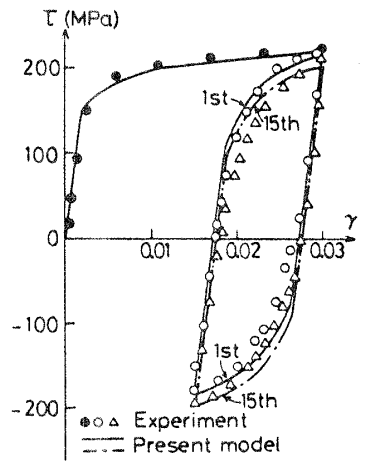
図 6 (a)~(c) は、図 5 に対応する応力-ひずみ曲線であり、最初のサイクルと 15 サイクルめの結果が



(a) 繰返しひずみ範囲 $[-0.03, 0.03]$



(b) 繰返しひずみ範囲 $[0.0, 0.03]$



(c) 繰返しひずみ範囲 $[0.015, 0.03]$

図 6 一定ひずみ範囲繰返しねじり変形における応力-ひずみ曲線

示されている。なお、15 サイクルめの応力-ひずみループは、計算および実験のどちらにおいても、ほとんど安定化している。この図からわかるように、本構成モデルによる結果は実験結果の傾向をかなりよく表しているが、計算結果における Bauschinger 効果は実験結果に比べて少なめである。しかし、前報の構成モデル⁽¹⁾⁽²⁾がこのような Bauschinger 効果を全く表現し得なかったことを考えると、本構成モデルは実験結果をかなりの精度で記述しているといえる。なお、初期降伏応力 σ_0 と降伏面の移動速度の係数 A は、初期降伏後の応力-ひずみ曲線を表現するように定めた。しかし、 σ_0 と A の値は、最初の逆負荷後の応力-ひずみ曲線を記述するように決めることもできる。このとき、計算結果の応力-ひずみ曲線は、実験結果に見られる Bauschinger 効果をより精度よく表現することを付言する。

5.3 変動ひずみ範囲繰返し変形 図7と8は、繰返しひずみ範囲が変動する場合の結果である。ひずみ範囲の変動履歴は、図7の中に示すように5段階(I~V)からなり、各段階での繰返し数はそれぞれ10回である。まず正、負最大応力の絶対値の変化を示す図7を見ると、本理論の結果は実験結果とよく一致していることがわかる。この一致の程度は、前報⁽²⁾の場合とほとんど同じである。これは、限界応力の変化が前報の理論に基づいて定式化されているからである。なお、段階Vにおいては、計算結果と実験結果の違いがしだいに大きくなっている。これは、段階IVからVへひずみ範囲の大きさが減少したため、実験結果では繰返し軟化がわずかずつ進行しているからである。

次に、各段階10 サイクルめの応力-ひずみループを示した図8(a)、(b)を見ると、本構成モデルによる結果はおおむね実験結果と一致していることがわかる。しかし、図6(a)~(c)の場合と同様、計算結果

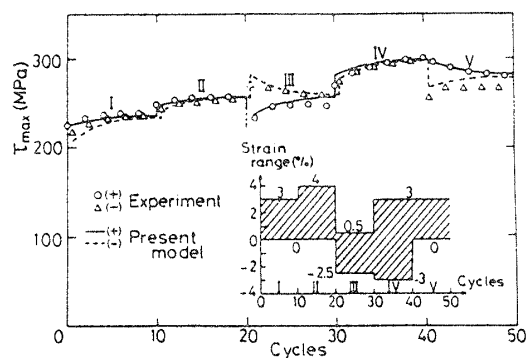
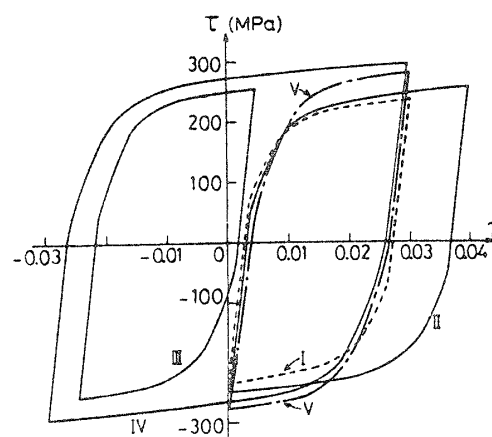


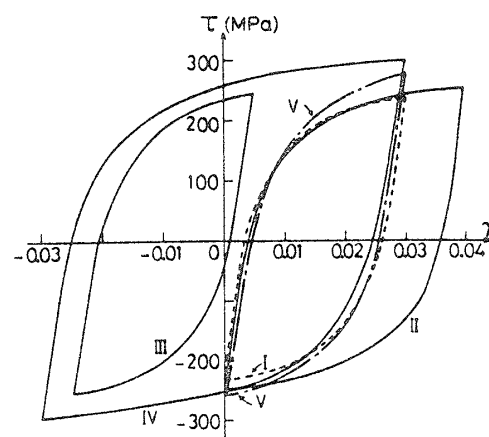
図7 変動ひずみ範囲繰返しねじり変形における正、負最大応力の変化

における Bauschinger 効果は、実験結果に比べて少ない。

Chaboche ら⁽⁹⁾は、最大塑性ひずみ範囲を規定した構成モデルを提案している。このひずみ範囲の発展式は、式(1)~(4)において $c=1/2$ とおいた場合である。したがって図7の段階IIIでは、最大塑性ひずみ範囲は、弾性ひずみを無視すれば $[-0.025, 0.04]$ となる。この結果、彼らの構成モデルによると、段階IIIにおける材料の繰返し硬化は、 $\Delta\gamma/2=0.065/2$ に対応するレベル ($\tau_{\max} \geq 300$ MPa, 図4参照)まで発達するはずである。しかしこの予測は、図7の実験結果とは一致しない。また、すでに述べた図5の繰返しひずみ範囲 $[0.015, 0.03]$ については、最大塑性ひずみ範囲は $[0.0, 0.03]$ となる。これは、ひずみ経路が最初ひずみ原点から出発するからである。したがって、この繰返し変形における材料の等方硬化は、ひずみ範囲 $[0.0, 0.03]$ の繰返し変形の場合と同じ大きさまで発達することになる。しかし、このような傾向も、図5



(a) 計算結果



(b) 実験結果

図8 変動ひずみ範囲繰返しねじり変形における応力-ひずみループ

の実験結果には認められない。

6. 316Lステンレス鋼の単軸繰返し試験結果との比較

前章の実験結果では、応力-ひずみループ安定時の応力振幅とひずみ振幅の関係が線形であった(図4)。しかし、この関係は一般に非線形であると考えられる。このような非線形性が見られる例として、316Lステンレス鋼の常温での単軸繰返し試験結果⁽⁹⁾がある(図9)。本章では、この試験結果に本構成モデルを適用し、その妥当性を検討する。

図9の実験結果に見られる $\Delta\sigma_s - \Delta\varepsilon_s$ 線図の非線形性を記述するため、 $x^*(q)$ の関数形を

$$x^*(q) = x_0^* \left(\frac{L}{m x_0^*} q + 1 \right)^m \dots\dots\dots (30)$$

と選ぶ。ここで x_0^* , L および m は定数であり、上式は $m=1$ のとき式(26)に帰着する。さらに以下においては、原点对称の繰返し変形だけを議論するから、式(20)の回復項を無視する。このとき、単軸引張負荷のもとでの限界応力 σ^* -塑性ひずみ ε^p の関係式、および $\Delta\sigma_s^* - \Delta\varepsilon_s^p$ の関係式は、付録の式(34)および式(35)~(37)によって与えられる。これらの関係式を図9の実験結果に適用すると、この図の破線のようになる。この結果、5・1節で述べた方法と同じようにして、材料定数の値が次のように得られた。

$$\left. \begin{aligned} x_0^* &= 325 \text{ MPa}, x_0 = 230 \text{ MPa}, A = 230 \\ K &= 350 \text{ MPa}, L = 1750 \text{ MPa}, K_r = \text{---} \\ m &= 0.40, \rho_0 = 0.0034, c = 0.08 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

なお c の値は、 $\Delta\varepsilon/2 = 0.01$ の場合の応力-ひずみループが繰返し数約10回で安定している⁽⁹⁾ので、前章の場合と同じく $c = 0.08$ とした。図9の実線は、上の材料定数を用いて計算した $\sigma - \varepsilon$ 線図と $\Delta\sigma_s/2 - \Delta\varepsilon_s/2$

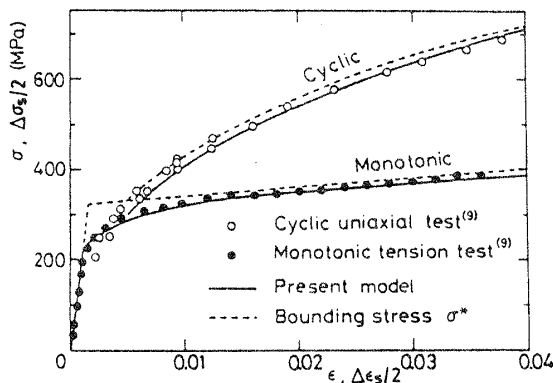


図9 単軸引張りおよび単軸繰返し試験による材料定数の決定

線図を示す。これらの計算結果は実験結果を精度よく再現しており、したがって本構成モデルは、 $\Delta\sigma_s - \Delta\varepsilon_s$ の関係が図9のように非線形であっても適用できる。

最後に図10は、 $\Delta\varepsilon/2$ を1%から3%まで繰返し数10回ごとに0.5%ずつ段階的に増加したときの結果を示す。なお図10には、各段階10サイクルめの $\sigma - \varepsilon$ ループのみが示されている。この図から、本理論は逆負荷後の非線形材料硬化を精度よく表現していることがわかる。

本研究では、降伏面の大きさを一定と仮定した。しかし図10を見ると、繰返しひずみ範囲が大きくなるにつれて、塑性変形の硬化係数の大きい応力範囲は拡大していることがわかる。したがって本理論は、実質的に降伏面の膨張を表現する。これは、降伏面の移動速度が限界応力 s_{ij}^* と偏差応力 s_{ij} の差によって規定され〔式(7)〕、限界面が繰返しひずみ範囲の拡大とともに膨張するからである。なお、式(7)の係数 A を $s_{ij}^* - s_{ij}$ の関数とすれば、このような降伏面の膨張はより顕著に表し得ると考えられる。

7. 結 言

本研究では、応力-ひずみループの繰返し硬化-安定化に加えて、初期降伏後および逆負荷による再降伏後の非線形材料硬化を表現する構成モデルを提案した。この構成モデルでは、降伏面が限界面の内部を移動し、限界面は繰返し非硬化領域の概念に基づいて発達する。この構成式の妥当性を、まず304ステンレス鋼の繰返しねじり試験結果により検討した。この結果、本理論は、繰返しひずみ範囲が一定の場合だけでなく変動する場合にも、かなりの精度で実験結果を記述することがわかった。次に、316Lステンレス鋼の単軸繰

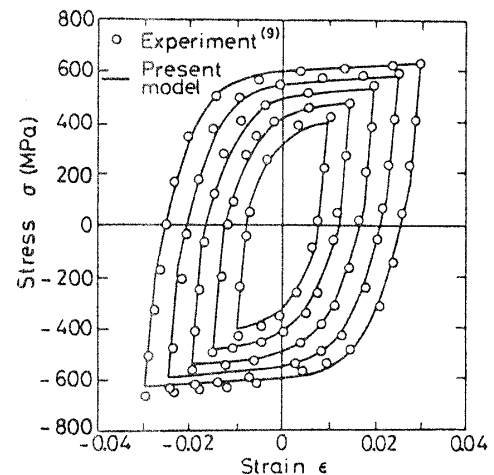


図10 ひずみ範囲の段階的増加を伴う繰返し変形における応力-ひずみループ

返し試験結果との比較から、応力-ひずみループ安定時の応力振幅-ひずみ振幅線図が非線形である場合にも、本理論は精度よく適用できることがわかった。

つづいて、本構成モデルについて二、三の議論を行う。本理論では、降伏面の移動速度が極めて大きいとき、すなわち式(7)の A が無限に大きいとき、限界面が実質的に降伏面の役割をする。このとき本理論は、前報の理論⁽²⁾ に帰着し、非線形材料硬化を全く表さない。次に、繰返し非硬化領域が発達しないとき ($\rho_0=0$ かつ $c \rightarrow 0$)、この領域の効果は現れない。したがって限界面の大きさ x^* は、式(10)によって相当塑性ひずみ ϵ^p の関数となる。この場合、式(26)あるいは(30)のように x^* の関数形を選択しても、 x^* は繰返し塑性変形の進行に伴って単調に増加するから、応力-ひずみループの安定化は記述できない。なお、 $x^*(\infty)$ が有限であるような関数 $x^*(\epsilon^p)$ の場合には、応力-ひずみループは安定化するが、 $x^*(\infty)$ の値が繰返しひずみ範囲の大きさに依存しない。したがって、図4および9に示した応力振幅とひずみ振幅の関係は表されない。

最後に、本論文に対し、詳細なご検討および貴重なご指摘をいただいた東京理科大学工学部金子堅司助教授に深く感謝する。

〔付 録〕

限界応力と塑性ひずみの関係は、前報⁽¹⁾⁽²⁾ における応力と塑性ひずみの関係にほかならない。しかし、記号の使い方が前報と異なる箇所もあるから、本研究に必要な関係式を導いておく。

限界応力 s_{ij}^* は、3章で述べたように、 $\partial f^*/\partial s_{ij}^*$ が $\partial f/\partial s_{ij}$ と同方向となるように定義される。したがって、 ϵ_{ij}^p の降伏面への垂直性を仮定するとき、 ϵ_{ij}^p は限界面に対しても垂直となる。このとき、適応条件式 $\dot{f}^*=0$ と式(10)、(16)を用いると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ij}^p &= \frac{3}{2E^p} \frac{(s_{ij}^* - \eta_{ij}^*)(s_{kl}^* - \eta_{kl}^*) \dot{s}_{kl}^*}{(s_{mn}^* - \eta_{mn}^*)(s_{mn}^* - \eta_{mn}^*)} \\ E^p &= K + \frac{dx^*(q)}{dq} - \frac{3}{2} K_r \frac{(s_{ij}^* - \eta_{ij}^*) \eta_{ij}^*}{x^*(q)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

上式から、単軸変形における限界応力 σ^* と塑性ひずみ ϵ^p の増分関係式は

$$\dot{\sigma}^* = \{K + dx^*/dq - K_r \text{sgn}[\sigma^* - \eta^*] \cdot \eta^*\} \dot{\epsilon}^p \dots\dots\dots (33)$$

となる。したがって、もし $K_r=0$ であれば、単調引張

り負荷のもとでの σ^* と ϵ^p の関係は

$$\sigma^* = \begin{cases} x^*(0) + [(dx^*/dq)_0 + K] \epsilon^p, & \epsilon^p < \rho_0 \\ (dx^*/dq)_0 \rho_0 + K \epsilon^p + x^*(\epsilon^p - \rho_0), & \epsilon^p \geq \rho_0 \end{cases} \dots\dots\dots (34)$$

と求められる。ここで $(dx^*/dq)_0$ は、 $q=0$ に対する dx^*/dq の値を示す。また、上式の導出においては、 $\epsilon^p < \rho_0$ のとき $q=0$ であり、 $\epsilon^p \geq \rho_0$ のとき $q = \epsilon^p - \rho_0$ であることに注意する。

つづいて、応力-ひずみループが安定化した状態での $\Delta\sigma_s^*$ と $\Delta\epsilon_s^p$ の関係を求める。ここで、記号 Δ は繰返し幅(範囲)を示し、添字 s は応力-ひずみループの安定状態を表す。いま、原点对称の一定ひずみ振幅繰返し変形を考える。まず、式 $f^* = (\sigma^* - \eta^*)^2 - x^{*2} = 0$ から

$$\Delta\sigma_s^* = \Delta\eta_s^* + 2x^*(q_s) \dots\dots\dots (35)$$

が成り立つ。次に本理論では、繰返し非硬化領域が繰返し塑性ひずみ範囲を占めると、応力-ひずみループが安定化する。したがって $\rho_s = \Delta\epsilon_s^p/2$ となる。このとき、式(21)、(23)から得られる関係式 $\dot{q} = \dot{\rho}/c$ 、 $\rho(0) = \rho_0$ を用いると、式(35)の q_s は

$$q_s = (1/c)(\Delta\epsilon_s^p/2 - \rho_0) \dots\dots\dots (36)$$

と求められる。一方 $\Delta\eta_s^*$ は、 $K_r=0$ ならば、式(20)と $\Gamma_s=0$ によって次のように表される。

$$\Delta\eta_s^* = [K + (dx^*/dq)_s] \Delta\epsilon_s^p \dots\dots\dots (37)$$

ここで $(dx^*/dq)_s$ は、 q_s に関する dx^*/dq の値である。この結果、 $\Delta\sigma_s^*$ と $\Delta\epsilon_s^p$ の関係は、式(36)と(37)を式(35)に代入することによって得られる。

文 献

- (1) 大野, 機論, 48-434, A (昭57), 1342.
- (2) Ohno, N., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 49-4 (1982), 721.
- (3) Krieg, R. D., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 42-3 (1975), 641.
- (4) Dafalias, Y. F. and Popov, E. P., *Acta Mech.*, 21 (1975), 173.
- (5) Dafalias, Y. F. and Popov, E. P., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 43-4 (1976), 645.
- (6) Hashiguchi, K., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 48-2 (1981), 297.
- (7) Chaboche, J. L., *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Tech.*, 25-1 (1977), 33.
- (8) Marquis, D., *Thèse Paris VI*, (1979).
- (9) Chaboche, J. L., ほか2名, *Trans. 5th Int. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Tech.*, Vol. L (1979), Paper No. L11/3, North-Holland.
- (10) Mróz, Z., *J. Mech. Phys. Solids*, 15-3 (1967), 163.

討 論

〔質問〕 金子 堅 司〔東京理科大学工学部〕

繰返し非硬化領域のご提案については敬意を表す。二、三ご教示願いたい。

(1) 3・1節で、考える負荷履歴を比例負荷などに制限すれば、繰返し非硬化領域が式(1)のように近似できるとされる根拠についてお伺いしたい。

(2) SUS 316 Lなどで、図7に示されるような解析を行おうとする際、必要なすべての材料定数決定のために最低限どういった材料実験が必要なのか、実務者の立場からお伺いしたい。また、諸定数の決定にはかなりの熟練を要するようになったが、決定上のポイントなどについてコメントをいただきたい。

〔回答〕 (1) 繰返し負荷履歴が完全に比例的ならば、繰返し非硬化領域は、単軸の式⁽¹⁾⁽²⁾

$$g = (\epsilon^p - \alpha)^2 - \rho^2 \leq 0 \dots\dots\dots (i)$$

を単純に多軸状態に拡張した式(1)によって表現できる。このことは、ご理解いただけると思う。次に、負荷履歴が、ある繰返し比例負荷からわずかに偏っているとき、材料の硬化状態は、そのような繰返し比例負荷による硬化状態とほぼ等しいと考える。したがって、このような場合の繰返し材料硬化に対しても、式(1)の繰返し非硬化領域が適用できると考える。小幡谷氏への回答も参照されたい。なお、式(i)の多軸状態への拡張は、式(1)の形に限られることはなく、他の形も仮定できる。しかし、比例負荷に近い負荷履歴を解析する限りにおいては、結果に大きな差違は現れないと思われる。

(2) 式(31)に示した SUS 316 L の材料定数においては、 K_r の値だけが未定である。 K_r が図7(変動ひずみ範囲試験)の計算結果に及ぼす影響は、次のようである。図7において、 $K_r \neq 0$ の材料定数(29)を用いた計算結果では、ひずみ範囲変動直後に生じた正、負最大応力の差は、その後繰返し数の増加とともに小さくなっている。一方、 K_r の値だけを変え $K_r = 0$ として同じ計算を行うと、このような差は小さくならない。しかし、それを除いては、同様な結果が得られる。以上のことから推察すると、SUS 316 L についても K_r の値が決定できれば、式(31)の定数を用いて、図7のような変動ひずみ範囲試験結果とかなりの精度で一致する計算結果が得られると思われる。なお、 K_r の値は、5・1節で述べたように、平均ひずみが非零の一定ひずみ範囲試験によって決定できる。

〔質問〕 小幡谷 洋一〔福井大学工学部〕

遷移軟化領域での挙動をも記述しうる繰返し塑性変形の構成式として興味深く拝見した。

構成式の妥当性を単軸応力繰返し下での実験結果のみによって検討されておられるので、繰返し非硬化領域を塑性ひずみ空間内の球と近似した仮定の妥当性は必ずしも明らかとはいえないように思われる。本構成式が適用できる逆負荷あるいは比例負荷からの負荷履歴の偏りをどのような、またどの程度のものとお考えなのかお伺いしたい。

〔回答〕 繰返し非硬化領域 $g \leq 0$ を式(1)のような球で近似したことの妥当性は、ご指摘のように、単軸繰返し応力下での実験によっては明らかにされない。比例負荷からの偏りがどの程度までならば、このような仮定が妥当であるかは、さらに実験を行って検討する必要があると思う。

しかし、比例負荷からの偏りがわずかである例として、繰返しねじりと一定軸力を受ける薄肉円管の機械的ラチェットを考えると、次のようなことがいえる。すなわち、軸方向ラチェットひずみ量が繰返しねじりの累積ひずみ量に比べて小さければ、材料の硬化状態はほとんど繰返しねじりに依存すると考えられる。したがって、この場合の繰返しねじりに関する応力-ひずみループの変化は、本構成モデルによってかなりの精度で表現されると思う。一方、軸方向ラチェットひずみの変化については、塑性変形の進行に伴う降伏面形状のゆがみにも大きく依存する。したがって、それを記述するためには、式(1)の妥当性の検討のほかに、降伏面のゆがみを考慮したより精巧な構成モデルが必要になると思う。

〔質問〕 坂田 信 二

〔(株)日立製作所機械研究所〕

理解しやすかつ材料定数の決定が比較的簡単な構成方程式で興味深く拝読した。下記の点について質問する。

構成方程式は、ひずみ速度の効果が入る形となっているが、5章での検証では、このひずみ速度の影響が考慮されていない。ひずみ速度を考慮した検証例があればご紹介願いたい。またひずみ速度を考慮した場合は、必要な材料定数はどのようなものかお教え願いたい。

〔回答〕 3章と4章で述べた構成式の定式化においては、ひずみ速度依存性は考慮していない。この結果、例えば単軸状態(4章)の関係式を見ると、応力増

分と塑性ひずみ増分の関係式(18)および降伏面, 限界面, 繰返し非硬化領域の発展式(19)~(21), (23), (24)は, すべて応力増分あるいは塑性ひずみ増分の一次式になっている。

本論文の構成関係式は, ひずみ速度依存性が表されるように拡張できる。すなわち, 文献(7)と同様に, 降伏面上の応力状態を準静的条件下での弾塑性応力状態と考え, over stress $\bar{\sigma}$ を

$$\bar{\sigma} = \left\{ \frac{3}{2} (s_{ij} - \eta_{ij})(s_{ij} - \eta_{ij}) \right\}^{1/2} - \alpha$$

と定義する。上式の $\bar{\sigma}$ は, 準静的弾塑性応力状態からの偏りを表す。したがって, 準静的条件下では $\bar{\sigma} = 0$

となる。このとき, $d\varepsilon_{ij}^p/dt$ (t : 時間) を $\bar{\sigma}$ の関数として

$$d\varepsilon_{ij}^p/dt = \mu \langle \bar{\sigma} \rangle \partial \bar{\sigma} / \partial s_{ij}$$

$$\mu \langle \bar{\sigma} \rangle = \begin{cases} \mu(\bar{\sigma}), & \bar{\sigma} > 0 \\ 0, & \bar{\sigma} \leq 0 \end{cases}$$

と表現すれば, 粘塑性変形が記述される。ただし, 降伏面の中心 η_{ij} の発展式としては, 式(7)は適当ではなく, 式(14)あるいは(19)を用いる。これは, 式(7)の s_{ij} が準静的条件下でのみ意味をもつからである。上述のような粘塑性構成式の妥当性については, 著者ら自身まだ検討していない。