

厚肉回転対称かくの弾/粘塑性動的応答*

(回転慣性を考慮した場合)

竹園茂男**, 埜 克己**, 内堀博雄***

Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of Moderately Thick Shells of Revolution (Case of Consideration of Rotatory Inertia)

by Shigeo TAKEZONO, Katsumi TAO, and Hiroo UCHIBORI

An analytical method for the elasto/visco-plastic dynamic problems of general moderately thick shells of revolution is developed in consideration of the effect of shear deformation and rotatory inertia. The equations of motion and the relations between the resulting stresses and displacements are derived by extending the Naghdi theory in elastic shells with given consideration to the effect of shear deformation and rotatory inertia. For the constitutive relations, the elasto/visco-plastic equations by Fyfe based on the model developed by Perzyna are employed. The numerical method selected for this problem is a method using finite difference in both space and time. As a numerical example a cylindrical shell under a semisinusoidal internal pressure with respect to time is analyzed, and the results are compared with those from the theory which neglects the effect of rotatory inertia.

Key Words: Structural Analysis, Elasto/Visco-Plastic Deformation, Dynamic Response, Thick Shells of Revolution, Shear Deformation, Rotatory Inertia, FDM

1. 緒 言

かく構造物に衝撃荷重が作用する場合の弾/粘塑性動的応答問題については、これまでに回転対称かくばかりでなく、一般の非軸対称かくについても解析がなされてきた⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾。しかしながら、これらの研究は薄肉かくを対象としたものが多く、今日高温、高圧化に伴って実用されつつある厚肉のかくを取扱った研究は少ないようである。

著者らは、すでにせん断変形の影響を考慮に入れた厚肉回転対称かくの弾/粘塑性動的応答問題の解法を示したが⁽⁵⁾、本研究ではさらに回転慣性を考慮に入れて解析を行った。すなわち、弾/粘塑性の構成関係には、Perzyna の理論⁽⁶⁾に基づく Fyfe の構成式⁽⁷⁾を用い、厚肉の場合に考慮すべきかく厚方向のせん断変形と回転慣性には、Naghdi の理論⁽⁸⁾を採用した。導かれた基礎式の数値解法には、差分法を適用した。

数値例として衝撃内圧を受ける両端固定の厚肉円筒かくの問題を取り上げ、回転慣性の影響を考察した。

2. 解 法

2.1 基礎式 図1に示すように、対称軸からかくの中央面上の任意点 P までの距離を r とし、かくの中央面の形を $r=r(s)$ で与えると、中央面の点 P における無次元曲率 $\omega_s (= a/R_s)$ 、 $\omega_\theta (= a/R_\theta)$ および無次元半径 $\rho (= r/a)$ の間には次の関係が成立する。ただし、 s はかくの中央面において子午線に沿って測った長さであり、 a は代表長さである。

$$\left. \begin{aligned} \omega_s &= -(\gamma' + \gamma^2)/\omega_\theta, \quad \omega_\theta = \sqrt{1 - (\rho')^2}/\rho \\ \omega'_s &= \gamma(\omega_s - \omega_\theta), \quad \rho''/\rho = -\omega_s \omega_\theta \\ \gamma &= \rho'/\rho, \quad \xi = s/a, \quad (\gamma = d(\quad)/d\xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

また、かくの任意点 Q を表すのに、直交座標 (ξ, θ, ζ) を用いる。ここに、 θ は円周方向の角であり、 ζ は中央面から外向きに測った長さである。

さて、Reissner の変分原理⁽⁹⁾を回転対称かくの弾/粘塑性動的応答問題に適用すると、次の増分形で表した運動方程式および合応力と合モーメントの式が得られる。まず運動方程式は、

* 昭和61年7月18日 東海支部豊橋地方講演会において講演、原稿受付 昭和61年1月6日。

** 正員、豊橋技術科学大学 (〒440 豊橋市天伯町)。

*** 正員、新日本製鉄(株) (〒804 北九州市戸畑区中原 46-59)。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\Delta N_e)}{\partial \xi} + \gamma(\Delta N_e - \Delta N_o) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta N_{oe})}{\partial \theta} + \omega_e(\Delta Q_e) + a \left[\Delta P_e - \rho_0 h \left\{ \left(1 + \frac{h^2}{12 R_s R_o} \right) \frac{\partial^2(\Delta U_e)}{\partial t^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_o} \right) \frac{\partial^2(\Delta \Phi_e)}{\partial t^2} \right\} \right] = 0 \\
& \frac{\partial(\Delta N_{eo})}{\partial \xi} + \gamma(\Delta N_{eo} + \Delta N_{oe}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta N_o)}{\partial \theta} + \omega_o(\Delta Q_o) + a \left[\Delta P_o - \rho_0 h \left\{ \left(1 + \frac{h^2}{12 R_s R_o} \right) \frac{\partial^2(\Delta U_o)}{\partial t^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_o} \right) \frac{\partial^2(\Delta \Phi_o)}{\partial t^2} \right\} \right] = 0 \\
& \frac{\partial(\Delta Q_e)}{\partial \xi} + \gamma(\Delta Q_e) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta Q_o)}{\partial \theta} - (\omega_e \Delta N_e + \omega_o \Delta N_o) + a \left[\Delta P_e - \rho_0 h \left(1 + \frac{h^2}{12 R_s R_o} \right) \frac{\partial^2(\Delta W)}{\partial t^2} \right] = 0 \\
& \Delta Q_e - \frac{1}{a} \left[\frac{\partial(\Delta M_e)}{\partial \xi} + \gamma(\Delta M_e - \Delta M_o) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta M_{oe})}{\partial \theta} \right] - \Delta \bar{M}_e + \rho_0 \frac{h^3}{12} \left\{ \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_o} \right) \frac{\partial^2(\Delta U_e)}{\partial t^2} \right. \\
& \quad \left. + \left(1 + \frac{3h^2}{20 R_s R_o} \right) \frac{\partial^2(\Delta \Phi_e)}{\partial t^2} \right\} = 0 \\
& \Delta Q_o - \frac{1}{a} \left[\frac{\partial(\Delta M_{eo})}{\partial \xi} + \gamma(\Delta M_{eo} + \Delta M_{oe}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta M_o)}{\partial \theta} \right] - \Delta \bar{M}_o + \rho_0 \frac{h^3}{12} \left\{ \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_o} \right) \frac{\partial^2(\Delta U_o)}{\partial t^2} \right. \\
& \quad \left. + \left(1 + \frac{3h^2}{20 R_s R_o} \right) \frac{\partial^2(\Delta \Phi_o)}{\partial t^2} \right\} = 0
\end{aligned}$$

.....(2)

ここに、 Δ は増分を表す。 $N_e, N_o, N_{eo}, N_{oe}, Q_e, Q_o$ および M_e, M_o, M_{eo}, M_{oe} は、図 2 に示すように、かくの単位長さ当たりの合応力および合モーメントであり、 U_e, U_o, W および Φ_e, Φ_o は変位および回転である。また慣性項に含まれる h, t, ρ_0 はそれぞれかく厚、時間および密度である。 P_e, P_o, P_e^- および \bar{M}_e, \bar{M}_o はかくの中央面の単位面積当たりの分布荷重の成分であり、かくの内外面に作用する分布荷重 $\{P_e^-, P_o^-, P_e^-\}, \{P_e^+, P_o^+, P_e^+\}$ と次の関係にある。

$$(P_e, P_o, P_e^-) = \{P_e^-, P_o^-, P_e^-\} h^- - \{P_e^+, P_o^+, P_e^+\} h^+ \quad \text{.....(3)}$$

$$\bar{M}_e = -\frac{h}{2}(P_e^+ h^+ + P_e^- h^-), \bar{M}_o = -\frac{h}{2}(P_o^+ h^+ + P_o^- h^-) \quad \text{.....(4)}$$

ただし、 P_e, P_e^- などは座標方向のものを正とし、 P_e^+ などはこれと反対方向のものを正とする。また、

$$h^\pm = 1 \pm \frac{h}{2} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_o} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{1}{R_s R_o} \quad \text{.....(5)}$$

次に、合応力および合モーメントと変位および回転との関係は、

$$\begin{aligned}
\Delta N_e &= Eh/a(1-\nu^2) \left[\frac{\partial(\Delta U_e)}{\partial \xi} + \omega_e \Delta W + \nu \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta U_o)}{\partial \theta} + \gamma \Delta U_e + \omega_o \Delta W \right\} \right. \\
& \quad \left. - \frac{h^2}{12a} (\omega_e - \omega_o) \frac{\partial(\Delta \Phi_e)}{\partial \xi} \right] - \Delta N_e^{vp} \\
\Delta N_o &= Eh/a(1-\nu^2) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta U_o)}{\partial \theta} + \gamma \Delta U_e + \omega_o \Delta W + \nu \left\{ \frac{\partial(\Delta U_e)}{\partial \xi} + \omega_e \Delta W \right\} \right. \\
& \quad \left. - \frac{h^2}{12a} (\omega_o - \omega_e) \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta \Phi_o)}{\partial \theta} + \gamma \Delta \Phi_e \right\} \right] - \Delta N_o^{vp} \\
\Delta N_{eo} &= Eh/2a(1+\nu) \left[\frac{\partial(\Delta U_o)}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta U_e)}{\partial \theta} - \gamma \Delta U_o + \frac{h^2}{12a^2} (\omega_e - \omega_o) \left\{ \omega_e \frac{\partial(\Delta U_o)}{\partial \xi} - a \frac{\partial(\Delta \Phi_o)}{\partial \xi} \right\} \right] - \Delta N_{eo}^{vp} \\
\Delta N_{oe} &= Eh/2a(1+\nu) \left[\frac{\partial(\Delta U_o)}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta U_e)}{\partial \theta} - \gamma \Delta U_o + \frac{h^2}{12a^2} (\omega_o - \omega_e) \left\{ \omega_o \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta U_e)}{\partial \theta} - \gamma \Delta U_o \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - a \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta \Phi_e)}{\partial \theta} - \gamma \Delta \Phi_o \right) \right\} \right] - \Delta N_{oe}^{vp} \\
\Delta M_e &= Eh^3/12a(1-\nu^2) \left[\frac{\partial(\Delta \Phi_e)}{\partial \xi} + \nu \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta \Phi_o)}{\partial \theta} + \gamma \Delta \Phi_e \right\} - \frac{1}{a} (\omega_e - \omega_o) \left\{ \frac{\partial(\Delta U_e)}{\partial \xi} + \omega_e (\Delta W) \right\} \right] - \Delta M_e^{vp} \\
\Delta M_o &= Eh^3/12a(1-\nu^2) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta \Phi_o)}{\partial \theta} + \gamma \Delta \Phi_e + \nu \frac{\partial(\Delta \Phi_e)}{\partial \xi} - \frac{1}{a} (\omega_o - \omega_e) \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta U_o)}{\partial \theta} + \gamma \Delta U_e + \omega_o \Delta W \right\} \right. \\
& \quad \left. - \Delta M_o^{vp} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{\theta\theta} &= Eh^3/24a(1+\nu) \left[\frac{\partial(\Delta\Phi_\theta)}{\partial\xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta\Phi_\theta)}{\partial\theta} - \gamma\Delta\Phi_\theta + \frac{1}{a}(\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{\partial(\Delta U_\theta)}{\partial\xi} \right] - \Delta M_{\theta\theta}^{vp} \\ \Delta M_{\theta\xi} &= Eh^3/24a(1+\nu) \left[\frac{\partial(\Delta\Phi_\theta)}{\partial\xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta\Phi_\theta)}{\partial\theta} - \gamma\Delta\Phi_\theta + \frac{1}{a}(\omega_\xi - \omega_\theta) \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta U_\xi)}{\partial\theta} - \gamma\Delta U_\xi \right\} \right] - \Delta M_{\theta\xi}^{vp} \\ \Delta Q_\theta &= 5Eh/12a(1+\nu) \left[\frac{\partial(\Delta W)}{\partial\xi} - \omega_\xi\Delta U_\xi + a\Delta\Phi_\theta \right] - \Delta Q_\theta^{vp} \\ \Delta Q_\xi &= 5Eh/12a(1+\nu) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta W)}{\partial\theta} - \omega_\theta\Delta U_\theta + a\Delta\Phi_\theta \right] - \Delta Q_\xi^{vp} \end{aligned} \dots\dots\dots(6)$$

ここに、()^{vp} は粘塑性によるみかけの内力成分を示し、次式によってみかけの応力増分から計算できる。

$$\begin{aligned} \{\Delta N_{\xi\xi}^{vp}, \Delta N_{\theta\theta}^{vp}, \Delta Q_\xi^{vp}, \Delta M_{\xi\xi}^{vp}, \Delta M_{\theta\xi}^{vp}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\Delta\sigma_{\xi\xi}^{vp}, \Delta\sigma_{\theta\theta}^{vp}, \Delta\sigma_{\xi\theta}^{vp}, \zeta\Delta\sigma_{\xi\xi}^{vp}, \zeta\Delta\sigma_{\theta\theta}^{vp}\} L_\theta d\xi \\ \{\Delta N_{\theta\theta}^{vp}, \Delta N_{\xi\xi}^{vp}, \Delta Q_\theta^{vp}, \Delta M_{\theta\xi}^{vp}, \Delta M_{\xi\xi}^{vp}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\Delta\sigma_{\theta\theta}^{vp}, \Delta\sigma_{\xi\xi}^{vp}, \Delta\sigma_{\theta\xi}^{vp}, \zeta\Delta\sigma_{\theta\theta}^{vp}, \zeta\Delta\sigma_{\xi\xi}^{vp}\} L_\xi d\xi \end{aligned} \dots\dots\dots(7)$$

ただし

$$L_\xi = 1 + \zeta/R_\xi, L_\theta = 1 + \zeta/R_\theta$$

みかけの応力増分 {Δσ^{vp}} は、粘塑性ひずみ増分 {Δε^{vp}} と、次の関係にある。

$$\{\Delta\sigma^{vp}\} = [D]\{\Delta\varepsilon^{vp}\} \dots\dots\dots(8)$$

ただし

$$\begin{aligned} \{\Delta\sigma^{vp}\} &= \{\Delta\sigma_{\xi\xi}^{vp}, \Delta\sigma_{\theta\theta}^{vp}, \Delta\sigma_{\xi\theta}^{vp}, \Delta\sigma_{\theta\xi}^{vp}, \Delta\sigma_{\xi\xi}^{vp}\}^T \\ \{\Delta\varepsilon^{vp}\} &= \{\Delta\varepsilon_{\xi\xi}^{vp}, \Delta\varepsilon_{\theta\theta}^{vp}, \Delta\varepsilon_{\xi\theta}^{vp}, \Delta\varepsilon_{\theta\xi}^{vp}, \Delta\varepsilon_{\xi\xi}^{vp}\}^T \end{aligned}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}$$

.....(9)

本研究では構成関係に、Perzyna の理論⁽⁶⁾に基づく Fyfe の構成式を用いる。Perzyna の式は、

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \dot{S}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{S} \delta_{ij} \\ &+ \gamma_0 \langle \Phi(F) \rangle S_{ij} J_2^{-1/2} \end{aligned} \dots\dots\dots(10)$$

ここに、(·) は時間に関する微分を示し、S_{ij}、S および ε_{ij} は偏差応力、平均垂直応力およびひずみであ

る。E、ν および γ₀ はそれぞれ縦弾性率、ポアソン比および粘性を表す定数であり、J₂ は偏差応力の第2不変量である。また、⟨Φ(F)⟩ は次の定義によるものである。

$$\begin{cases} \langle \Phi(F) \rangle = 0 : F \leq 0 \\ \langle \Phi(F) \rangle = \Phi(F) : F > 0 \end{cases} \dots\dots\dots(11)$$

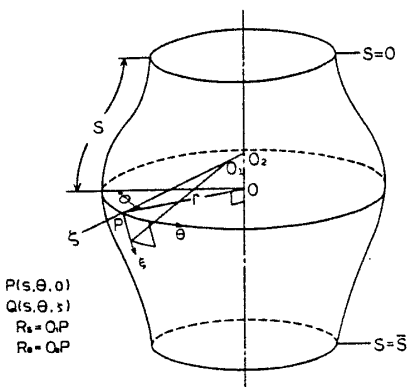


図1 かくの形状と座標

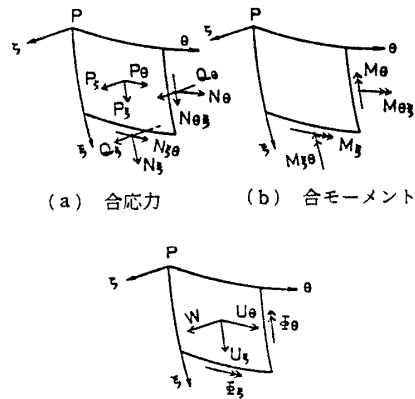


図2 内力と変位

Fyfe は関数 $\Phi(F)$ の形を、種々の動的塑性実験から次の形に定めている⁽⁷⁾。

$$\Phi(F) = e^{\alpha F} - 1, F = \frac{J_2^{1/2} - \tau^*}{\tau_0} \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 α は材料定数で、 τ^* と τ_0 は単純せん断の場合の静的な降伏応力と初期降伏応力である。なお $F=0$ はミーゼスの降伏曲面を表す。

仮定されるかくの応力状態（かく厚方向の垂直応力 $\sigma_r=0$ ）において、Fyfe の式は式(10)と式(12)より次のように表される。

$$\{\Delta\varepsilon\} = [D]^{-1}\{\Delta\sigma\} + \{\Delta\varepsilon^{vp}\} \dots\dots\dots(13)$$

ただし

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon_r, \Delta\varepsilon_\theta, \Delta\varepsilon_{\theta\theta}, \Delta\varepsilon_{r\theta}, \Delta\varepsilon_{\theta r}\}^T$$

$$\{\Delta\sigma\} = \{\Delta\sigma_r, \Delta\sigma_\theta, \Delta\sigma_{\theta\theta}, \Delta\sigma_{r\theta}, \Delta\sigma_{\theta r}\}^T$$

$$\{\Delta\varepsilon^{vp}\} = \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} \Delta t$$

$$= \frac{2}{3} \gamma_0 \left[\exp\left\{ \frac{\alpha(\sqrt{J_2} - \tau^*)}{\tau_0} \right\} - 1 \right] \frac{1}{\sqrt{J_2}} \times \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \{\sigma\} \Delta t \dots\dots\dots(14)$$

応力 $\{\sigma\}$ を合応力および合モーメントで表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_r &= \left[\frac{\Delta N_r + \Delta N_r^{vp}}{h} + \frac{\Delta M_r + \Delta M_r^{vp}}{h^2/6} \frac{\zeta}{h/2} \right] \\ &\quad \times L_r^{-1} - \Delta\sigma_r^{vp} \\ \Delta\sigma_\theta &= \left[\frac{\Delta N_\theta + \Delta N_\theta^{vp}}{h} + \frac{\Delta M_\theta + \Delta M_\theta^{vp}}{h^2/6} \frac{\zeta}{h/2} \right] \\ &\quad \times L_\theta^{-1} - \Delta\sigma_\theta^{vp} \\ \Delta\sigma_{\theta\theta} &= \left[\frac{\Delta N_{\theta\theta} + \Delta N_{\theta\theta}^{vp}}{h} + \frac{\Delta M_{\theta\theta} + \Delta M_{\theta\theta}^{vp}}{h^2/6} \frac{\zeta}{h/2} \right] \\ &\quad \times L_{\theta\theta}^{-1} - \Delta\sigma_{\theta\theta}^{vp} \\ \Delta\sigma_{r\theta} &= \frac{3}{2} \frac{\Delta Q_r + \Delta Q_r^{vp}}{h} \left[1 - \left(\frac{\zeta}{h/2} \right)^2 \right] L_{r\theta}^{-1} - \Delta\sigma_{r\theta}^{vp} \\ \Delta\sigma_{\theta r} &= \frac{3}{2} \frac{\Delta Q_\theta + \Delta Q_\theta^{vp}}{h} \left[1 - \left(\frac{\zeta}{h/2} \right)^2 \right] L_{\theta r}^{-1} - \Delta\sigma_{\theta r}^{vp} \end{aligned} \dots\dots\dots(15)$$

以上で40個の独立変数 $\Delta N_r, \Delta N_\theta, \Delta N_{\theta\theta}, \Delta N_{r\theta}, \Delta M_r, \Delta M_\theta, \Delta M_{\theta\theta}, \Delta M_{r\theta}, \Delta Q_r, \Delta Q_\theta, \Delta N_r^{vp}, \Delta N_\theta^{vp}, \Delta N_{\theta\theta}^{vp}, \Delta N_{r\theta}^{vp}, \Delta M_r^{vp}, \Delta M_\theta^{vp}, \Delta M_{\theta\theta}^{vp}, \Delta M_{r\theta}^{vp}, \Delta Q_r^{vp}, \Delta Q_\theta^{vp}, \Delta\sigma_r, \Delta\sigma_\theta, \Delta\sigma_{\theta\theta}, \Delta\sigma_{r\theta}, \Delta\sigma_{\theta r}, \Delta\sigma_r^{vp}, \Delta\sigma_\theta^{vp}, \Delta\sigma_{\theta\theta}^{vp}, \Delta\sigma_{r\theta}^{vp}, \Delta\sigma_{\theta r}^{vp}, \Delta\varepsilon_r^{vp}, \Delta\varepsilon_\theta^{vp}, \Delta\varepsilon_{\theta\theta}^{vp}, \Delta\varepsilon_{r\theta}^{vp}, \Delta\varepsilon_{\theta r}^{vp}, \Delta U_r, \Delta U_\theta, \Delta W, \Delta\Phi_r, \Delta\Phi_\theta$ に対して、式(2), (6)~(8), (14), (15)の40個の式が用意されたことになる。

2.2 無次元方程式

一般に非対称問題を解析するには、各変数を θ 方向にフーリエ級数で表し、その係数を定めればよい。そこで上に示した40個の変数のうち、粘塑性ひずみ増分 $\Delta\varepsilon_r^{vp}, \Delta\varepsilon_\theta^{vp}, \Delta\varepsilon_{\theta\theta}^{vp}, \Delta\varepsilon_{r\theta}^{vp}, \Delta\varepsilon_{\theta r}^{vp}$ を除く35個の変数を次のようにフーリエ級数で表す。

$$\begin{aligned} \{\Delta N_r, \Delta N_r^{vp}, \Delta N_\theta, \Delta N_\theta^{vp}, \Delta Q_r, \Delta Q_r^{vp}\} &= \sigma_0 h \sum_{n=0}^{\infty} \{\Delta n_r^{(n)}, \Delta n_r^{vp(n)}, \Delta n_\theta^{(n)}, \Delta n_\theta^{vp(n)}, \Delta q_r^{(n)}, \Delta q_r^{vp(n)}\} \cos n\theta \\ \{\Delta N_{\theta\theta}, \Delta N_{\theta\theta}^{vp}, \Delta N_{r\theta}, \Delta N_{r\theta}^{vp}, \Delta Q_\theta, \Delta Q_\theta^{vp}\} &= \sigma_0 h \sum_{n=1}^{\infty} \{\Delta n_{\theta\theta}^{(n)}, \Delta n_{\theta\theta}^{vp(n)}, \Delta n_{r\theta}^{(n)}, \Delta n_{r\theta}^{vp(n)}, \Delta q_\theta^{(n)}, \Delta q_\theta^{vp(n)}\} \sin n\theta \\ \{\Delta M_r, \Delta M_r^{vp}, \Delta M_\theta, \Delta M_\theta^{vp}\} &= \frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \{\Delta m_r^{(n)}, \Delta m_r^{vp(n)}, \Delta m_\theta^{(n)}, \Delta m_\theta^{vp(n)}\} \cos n\theta \\ \{\Delta M_{\theta\theta}, \Delta M_{\theta\theta}^{vp}, \Delta M_{r\theta}, \Delta M_{r\theta}^{vp}\} &= \frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \{\Delta m_{\theta\theta}^{(n)}, \Delta m_{\theta\theta}^{vp(n)}, \Delta m_{r\theta}^{(n)}, \Delta m_{r\theta}^{vp(n)}\} \sin n\theta \\ \{\Delta U_r, \Delta W, \Delta\Phi_r\} &= \frac{\sigma_0}{E} \sum_{n=0}^{\infty} \{a \Delta u_r^{(n)}, a \Delta w^{(n)}, \Delta\phi_r^{(n)}\} \cos n\theta \\ \{\Delta U_\theta, \Delta\Phi_\theta\} &= \frac{\sigma_0}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \{a \Delta u_\theta^{(n)}, \Delta\phi_\theta^{(n)}\} \sin n\theta \\ \{\Delta\sigma_r, \Delta\sigma_r^{vp}, \Delta\sigma_\theta, \Delta\sigma_\theta^{vp}, \Delta\sigma_{r\theta}, \Delta\sigma_{r\theta}^{vp}\} &= \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{\Delta s_r^{(n)}, \Delta s_r^{vp(n)}, \Delta s_\theta^{(n)}, \Delta s_\theta^{vp(n)}, \Delta s_{r\theta}^{(n)}, \Delta s_{r\theta}^{vp(n)}\} \cos n\theta \\ \{\Delta\sigma_{\theta\theta}, \Delta\sigma_{\theta\theta}^{vp}, \Delta\sigma_{\theta r}, \Delta\sigma_{\theta r}^{vp}\} &= \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{\Delta s_{\theta\theta}^{(n)}, \Delta s_{\theta\theta}^{vp(n)}, \Delta s_{\theta r}^{(n)}, \Delta s_{\theta r}^{vp(n)}\} \sin n\theta \end{aligned} \dots\dots\dots(16)$$

また分布荷重もフーリエ級数に展開する。

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta P_r, \Delta P_r, \Delta \bar{M}_r\} &= \frac{\sigma_0 h}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \{\Delta p_r^{(n)}, \Delta p_r^{(n)}, a \Delta \bar{m}_r^{(n)}\} \cos n\theta \\ \{\Delta P_\theta, \Delta \bar{M}_\theta\} &= \frac{\sigma_0 h}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \{\Delta p_\theta^{(n)}, a \Delta \bar{m}_\theta^{(n)}\} \sin n\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

ただし、 σ_0 は代表応力である。なお式(16), (17)は、 $\theta=0^\circ$ の子午線面に対して面对称な荷重が作用する場合である

が、より一般性をもたせるには、各フーリエ展開式において sin で表されているものには cos の級数を、cos で表されているものには sin の級数を付加する。

平衡方程式(2)を、これらのフーリエ級数を用いて、書き表すと次式のようなになる。ここで、フーリエ級数の項数を示す添字 (n) は省略する。

$$\begin{aligned}
 (\Delta n_\epsilon)' + \gamma(\Delta n_\epsilon - \Delta n_\theta) + \frac{n}{\rho} \Delta n_{\theta\epsilon} + \omega_\epsilon \Delta q_\epsilon + \Delta p_\epsilon - \frac{a\rho_0}{E} \left[a \left(1 + \frac{h^2}{12R_s R_\theta} \right) \Delta \dot{u}_\epsilon + \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) \Delta \dot{\varphi}_\epsilon \right] &= 0 \\
 (\Delta n_{\theta\theta})' + \gamma(\Delta n_{\theta\theta} + \Delta n_{\theta\epsilon}) - \frac{n}{\rho} \Delta n_\theta + \omega_\theta \Delta q_\theta + \Delta p_\theta - \frac{a\rho_0}{E} \left[a \left(1 + \frac{h^2}{12R_s R_\theta} \right) \Delta \dot{u}_\theta + \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) \Delta \dot{\varphi}_\theta \right] &= 0 \\
 (\Delta q_\epsilon)' + \gamma \Delta q_\epsilon + \frac{n}{\rho} \Delta q_\theta - (\omega_\epsilon \Delta n_\epsilon + \omega_\theta \Delta n_\theta) + \Delta p_\epsilon - \frac{a^2 \rho_0}{E} \left(1 + \frac{h^2}{12R_s R_\theta} \right) \Delta \dot{w} &= 0 \\
 \Delta q_\epsilon - \lambda^2 \left[(\Delta m_\epsilon)' + \gamma(\Delta m_\epsilon - \Delta m_\theta) + \frac{n}{\rho} \Delta m_{\theta\epsilon} \right] - \Delta \bar{m}_\epsilon + \frac{h^2 \rho_0}{12 E} \left[a \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) \Delta \dot{u}_\epsilon + \left(1 + \frac{3h^2}{20R_s R_\theta} \right) \Delta \dot{\varphi}_\epsilon \right] &= 0 \\
 \Delta q_\theta - \lambda^2 \left[(\Delta m_{\theta\theta})' + \gamma(\Delta m_{\theta\theta} + \Delta m_{\theta\epsilon}) - \frac{n}{\rho} \Delta m_\theta \right] - \Delta \bar{m}_\theta + \frac{h^2 \rho_0}{12 E} \left[a \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) \Delta \dot{u}_\theta + \left(1 + \frac{3h^2}{20R_s R_\theta} \right) \Delta \dot{\varphi}_\theta \right] &= 0 \\
 \dots\dots\dots & (18)
 \end{aligned}$$

ここに、 $\lambda = h/a$ 。

式(6)も同様に、

$$\begin{aligned}
 \Delta n_\epsilon &= b \left[(\Delta u_\epsilon)' + \omega_\epsilon \Delta w + \nu \left(\frac{n}{\rho} \Delta u_\theta + \gamma \Delta u_\epsilon + \omega_\theta \Delta w \right) - c(\omega_\epsilon - \omega_\theta)(\Delta \varphi_\epsilon)' \right] - \Delta n_\epsilon^{vp} \\
 \Delta n_\theta &= b \left[\frac{n}{\rho} \Delta u_\theta + \gamma \Delta u_\epsilon + \omega_\theta \Delta w + \nu \{ (\Delta u_\epsilon)' + \omega_\epsilon \Delta w \} - c(\omega_\theta - \omega_\epsilon) \left(\frac{n}{\rho} \Delta \varphi_\theta + \gamma \Delta \varphi_\epsilon \right) \right] - \Delta n_\theta^{vp} \\
 \Delta n_{\theta\theta} &= \frac{b(1-\nu)}{2} \left[(\Delta u_\theta)' - \frac{n}{\rho} \Delta u_\epsilon - \gamma \Delta u_\theta + c(\omega_\epsilon - \omega_\theta) \{ \omega_\epsilon (\Delta u_\theta)' - (\Delta \varphi_\theta)' \} \right] - \Delta n_{\theta\theta}^{vp} \\
 \Delta n_{\theta\epsilon} &= \frac{b(1-\nu)}{2} \left[(\Delta u_\theta)' - \frac{n}{\rho} \Delta u_\epsilon - \gamma \Delta u_\theta + c(\omega_\epsilon - \omega_\theta) \left\{ \omega_\theta \left(\frac{n}{\rho} \Delta u_\epsilon + \gamma \Delta u_\theta \right) - \left(\frac{n}{\rho} \Delta \varphi_\epsilon + \gamma \Delta \varphi_\theta \right) \right\} \right] - \Delta n_{\theta\epsilon}^{vp} \\
 \Delta m_\epsilon &= d \left[(\Delta \varphi_\epsilon)' + \nu \left(\frac{n}{\rho} \Delta \varphi_\theta + \gamma \Delta \varphi_\epsilon \right) - (\omega_\epsilon - \omega_\theta) \{ (\Delta u_\epsilon)' + \omega_\epsilon \Delta w \} \right] - \Delta m_\epsilon^{vp} \\
 \Delta m_\theta &= d \left[\frac{n}{\rho} \Delta \varphi_\theta + \gamma \Delta \varphi_\epsilon + \nu (\Delta \varphi_\epsilon)' - (\omega_\theta - \omega_\epsilon) \left(\frac{n}{\rho} \Delta u_\theta + \gamma \Delta u_\epsilon + \omega_\theta \Delta w \right) \right] - \Delta m_\theta^{vp} \\
 \Delta m_{\theta\theta} &= \frac{d(1-\nu)}{2} \left[(\Delta \varphi_\theta)' - \frac{n}{\rho} \Delta \varphi_\epsilon - \gamma \Delta \varphi_\theta + (\omega_\theta - \omega_\epsilon) (\Delta u_\theta)' \right] - \Delta m_{\theta\theta}^{vp} \\
 \Delta m_{\theta\epsilon} &= \frac{d(1-\nu)}{2} \left[(\Delta \varphi_\theta)' - \frac{n}{\rho} \Delta \varphi_\epsilon - \gamma \Delta \varphi_\theta - (\omega_\epsilon - \omega_\theta) \left(\frac{n}{\rho} \Delta u_\epsilon + \gamma \Delta u_\theta \right) \right] - \Delta m_{\theta\epsilon}^{vp} \\
 \Delta q_\epsilon &= \frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} \left[(\Delta w)' + \Delta \varphi_\epsilon - \omega_\epsilon \Delta u_\epsilon \right] - \Delta q_\epsilon^{vp} \\
 \Delta q_\theta &= \frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} \left[-\frac{n}{\rho} \Delta w + \Delta \varphi_\theta - \omega_\theta \Delta u_\theta \right] - \Delta q_\theta^{vp} \\
 \dots\dots\dots & (19)
 \end{aligned}$$

ここに、 $b = \frac{1}{1-\nu^2}$, $c = \frac{h^2}{12a^2}$, $d = \frac{1}{12(1-\nu^2)}$

また、式(15)は、

$$\begin{aligned}
 \Delta s_\epsilon &= \left[(\Delta n_\epsilon + \Delta n_\epsilon^{vp}) + 12 \frac{\xi}{a} (\Delta m_\epsilon + \Delta m_\epsilon^{vp}) \right] L_\sigma^{-1} - \Delta s_\epsilon^{vp} \\
 \Delta s_\theta &= \left[(\Delta n_\theta + \Delta n_\theta^{vp}) + 12 \frac{\xi}{a} (\Delta m_\theta + \Delta m_\theta^{vp}) \right] L_\sigma^{-1} - \Delta s_\theta^{vp} \\
 \Delta s_{\theta\theta} &= \left[(\Delta n_{\theta\theta} + \Delta n_{\theta\theta}^{vp}) + 12 \frac{\xi}{a} (\Delta m_{\theta\theta} + \Delta m_{\theta\theta}^{vp}) \right] L_\sigma^{-1} - \Delta s_{\theta\theta}^{vp} \\
 \Delta s_{\theta\epsilon} &= \frac{3}{2} (\Delta q_\epsilon + \Delta q_\epsilon^{vp}) \left[1 - \left(\frac{\xi}{h/2} \right)^2 \right] L_\sigma^{-1} - \Delta s_{\theta\epsilon}^{vp}
 \end{aligned}$$

$$\Delta s_{\theta t} = \frac{3}{2}(\Delta q_{\theta} + \Delta q_{\theta}^{vp}) \left[1 - \left(\frac{\zeta}{h/2} \right)^2 \right] L_e^{-1} - \Delta \sigma_{\theta}^{vp} \dots \dots \dots (20)$$

式(19)を式(18)に代入すると、5変数 $\Delta u_{\xi}^{(n)}$, $\Delta u_{\theta}^{(n)}$, $\Delta w^{(n)}$, $\Delta \phi_{\xi}^{(n)}$, $\Delta \phi_{\theta}^{(n)}$ に関する次の5元連立2階微分方程式が得られる。

$$A_1 z'' + A_2 z' + A_3 z = A_4 N' + A_5 N + A_6 Q' + A_7 Q + A_8 M' + A_9 M + A_{10} P + A_{11} \ddot{z} \dots \dots \dots (21)$$

ここで、 $A_1 \sim A_{11}$ はかくの形状と材質によって定まる 5×5 の行列であり、 z, N, Q, M, P は、

$$\left. \begin{aligned} z &= \{ \Delta u_{\xi}^{(n)}, \Delta u_{\theta}^{(n)}, \Delta w^{(n)}, \Delta \phi_{\xi}^{(n)}, \Delta \phi_{\theta}^{(n)} \}^T \\ N &= \{ \Delta n_{\xi}^{vp(n)}, \Delta n_{\theta}^{vp(n)}, \Delta n_{\xi\theta}^{vp(n)}, \Delta n_{\theta\xi}^{vp(n)}, 0 \}^T \\ Q &= \{ \Delta q_{\xi}^{vp(n)}, \Delta q_{\theta}^{vp(n)}, 0, 0, 0 \}^T \\ M &= \{ \Delta m_{\xi}^{vp(n)}, \Delta m_{\theta}^{vp(n)}, \Delta m_{\xi\theta}^{vp(n)}, \Delta m_{\theta\xi}^{vp(n)}, 0 \}^T \\ P &= \{ \Delta p_{\xi}^{(n)}, \Delta p_{\theta}^{(n)}, \Delta p_{\xi}^{(n)}, \Delta \bar{m}_{\xi}^{(n)}, \Delta \bar{m}_{\theta}^{(n)} \}^T \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

である。

式(19)~(21)の粘塑性に関する内力成分の増分の各フーリエ係数は、式(7), (8), (16)からそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \Delta n_{\xi}^{vp(n)}, \Delta m_{\xi}^{vp(n)} \} \cos n\theta &= \frac{E}{h} \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ 1, \frac{a\zeta}{h^2} \right\} (\Delta \varepsilon_{\xi}^{vp} + \nu \Delta \varepsilon_{\theta}^{vp}) L_e d\zeta \\ \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \Delta n_{\theta}^{vp(n)}, \Delta m_{\theta}^{vp(n)} \} \cos n\theta &= \frac{E}{h} \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ 1, \frac{a\zeta}{h^2} \right\} (\Delta \varepsilon_{\theta}^{vp} + \nu \Delta \varepsilon_{\xi}^{vp}) L_e d\zeta \\ \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \Delta n_{\xi\theta}^{vp(n)}, \Delta m_{\xi\theta}^{vp(n)} \} \sin n\theta &= \frac{E}{h} \frac{1}{1+\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ 1, \frac{a\zeta}{h^2} \right\} \Delta \varepsilon_{\xi\theta}^{vp} L_e d\zeta \\ \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \Delta n_{\theta\xi}^{vp(n)}, \Delta m_{\theta\xi}^{vp(n)} \} \sin n\theta &= \frac{E}{h} \frac{1}{1+\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ 1, \frac{a\zeta}{h^2} \right\} \Delta \varepsilon_{\theta\xi}^{vp} L_e d\zeta \\ \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \Delta q_{\xi}^{vp(n)} \cos n\theta &= \frac{E}{h} \frac{1}{1+\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \varepsilon_{\xi\xi}^{vp} L_e d\zeta \\ \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \Delta q_{\theta}^{vp(n)} \sin n\theta &= \frac{E}{h} \frac{1}{1+\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \varepsilon_{\theta\theta}^{vp} L_e d\zeta \end{aligned} \dots \dots \dots (23)$$

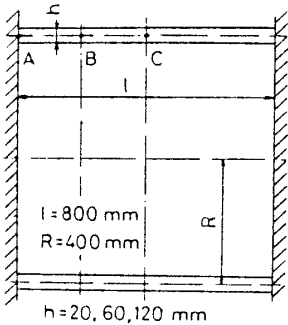


図3 円筒かくと荷重

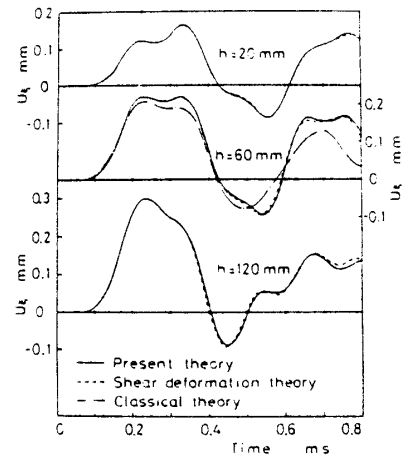
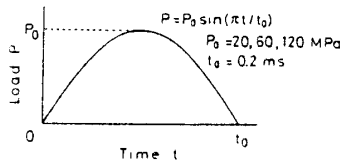


図4 変位 U_{θ} の時間的变化 (点 B)

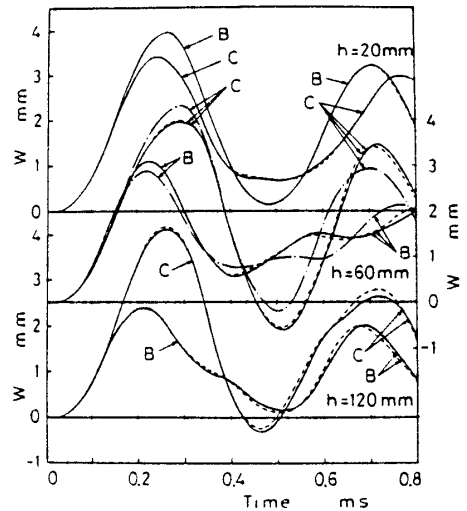


図5 変位 W の時間的变化

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \Delta s_{\theta}^{vp(n)}, \Delta s_{\theta}^{vp(n)}, \Delta s_{\theta}^{vp(n)} \} \cos n\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \\ &\times \{ \Delta \epsilon_{\theta}^{vp} + \nu \Delta \epsilon_{\theta}^{vp}, \Delta \epsilon_{\theta}^{vp} + \nu \Delta \epsilon_{\theta}^{vp}, (1-\nu) \Delta \epsilon_{\theta}^{vp} \} \\ \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \Delta s_{\theta}^{vp(n)}, \Delta s_{\theta}^{vp(n)} \} \sin n\theta \\ &= \frac{E}{1+\nu} \{ \Delta \epsilon_{\theta}^{vp}, \Delta \epsilon_{\theta}^{vp} \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

式(23), (24)の右辺の粘塑性ひずみ増分は、応力値から式(14)を用いて計算できる。また式(23)の積分には Simpson の 1/3 則を用いる。

3. 数値計算法

ある任意の計算段階における変位と回転の増分は、

式(21)を適当な境界条件のもとで解けば得られ、またこれらを用いて、内力成分の増分は、式(19)ならびに式(20)から求められる。しかしながら、式(21)を厳密に理論解析することは困難であるから、差分法によって数値的に解を求める。境界と不連続点では前進および後退 3 点差分式を、その他の点では中間差分式を用いる⁽¹⁰⁾。また慣性項には次の Houbolt の後退時間差分式⁽¹¹⁾を用いる。

$$\begin{aligned} \ddot{z}_{i,j} &= a_j z_{i,j} + b_j z_{i,j-1} + c_j z_{i,j-2} + d_j z_{i,j-3} \\ (j &= 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \dots\dots\dots (25)$$

ここで係数 a_j, b_j, c_j, d_j は初期条件によって決まり、初期変位、初速度、初期加速度が零のときには次のようになる。

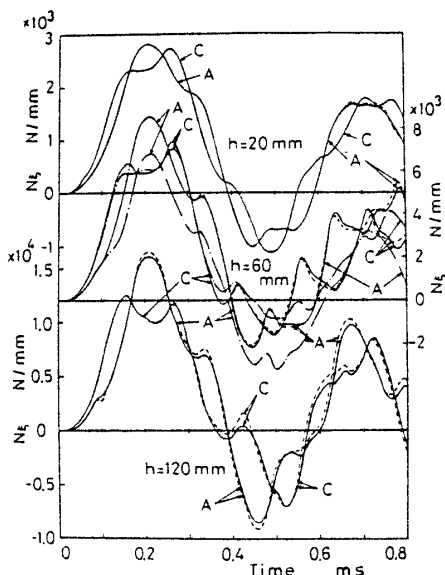


図 6 合応力 N_{θ} の時間的变化

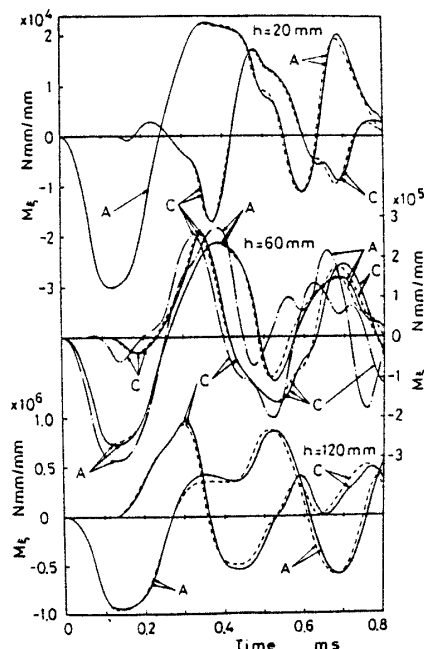


図 8 合モーメント M_{θ} の時間的变化

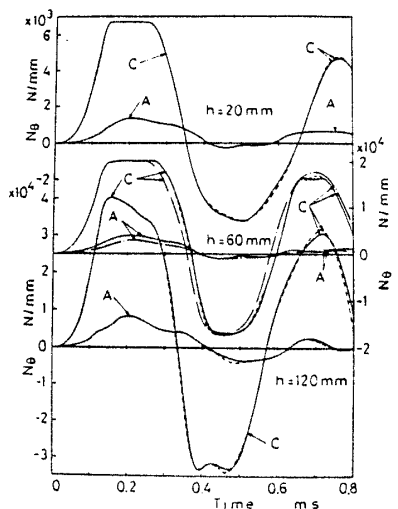


図 7 合応力 N_{θ} の時間的变化

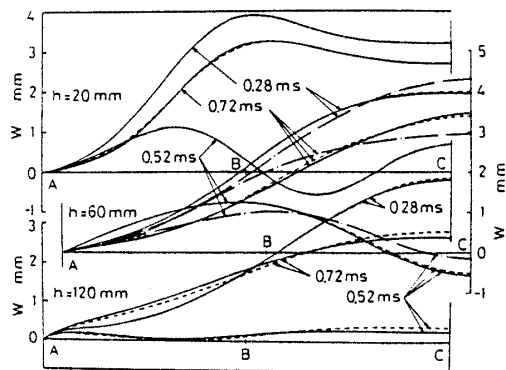


図 9 変位 W の軸方向分布の時間的变化

$$\left. \begin{aligned} a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = 0 \\ a_1 = 6/(\Delta t)^2, b_1 = c_1 = d_1 = 0 \\ a_2 = 2/(\Delta t)^2, b_2 = -4/(\Delta t)^2, c_2 = d_2 = 0 \\ a_3 = 2/(\Delta t)^2, b_3 = -5/(\Delta t)^2, \\ c_3 = 4/(\Delta t)^2, d_3 = -1/(\Delta t)^2 \end{aligned} \right\}$$

.....(26)

これらの差分式を式(21)および境界条件式、接続条件式に用いると、 $z_{i,j}$ に関する多元連立方程式が得られる。一般に弾/粘塑性問題の解は、これらの各計算段階の増分を積分することによって得られる。

4. 数 値 例

数値例として、両端固定の6061-T6アルミ厚肉円筒かくに、衝撃内圧が作用する場合(図3)を取り上げた。円筒かくの形状は、全長 $l=800$ mm, 半径 $R=400$ mm とし、かく厚 $h=20, 60, 120$ mm の3種類について計算を行った。また内圧は、各かく厚の場合に対して、無次元量 p^0 が等しくなるように、 $P_0=20, 60, 120$ MPa とした。円筒かくの形状諸量は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a = R, \xi = s/R, \rho = 1, \rho' = 0, \gamma = 0 \\ \omega_0 = 1, \omega_e = \omega_e' = 0 \end{aligned} \right\} \text{.....(27)}$$

また ξ の差分間隔 $\Delta\xi$ は、差分点の数を N として、
 $\Delta\xi = l/2R(N-1)$ (28)

境界条件は、固定端 ($i=1$) および中央 ($i=N$) において、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \text{固定端 } (i=1): \\ \Delta U_e = \Delta U_o = \Delta W = \Delta \Phi_e = \Delta \Phi_o = 0 \\ \text{中央 } (i=N): \\ \Delta U_e = \Delta \Phi_e = \Delta Q_e = \Delta N_{e0} = \Delta M_{e0} = 0 \end{aligned} \right\}$$

.....(29)

なお、式(16)の σ_0 は本計算では $\sigma_0=1$ とした。

計算に用いた6061-T6アルミニウムの材料定数は次のとおりである⁽⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} E = 71.3 \text{ GPa}, \nu = 0.33, \rho_0 = 2.71 \text{ g/cm}^3 \\ \tau_0 = \tau^* = 170 \text{ MPa} \\ (\text{引張降伏応力 } \sigma_r = 294 \text{ MPa}) \\ \alpha = 2, \gamma_0 = 5000 \text{ s}^{-1} \end{aligned} \right\} \text{.....(30)}$$

差分点数は子午線方向に $N=51$ とし、かく厚方向には41個の格子点を採用した。時間間隔 Δt は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ ms とした。これらの値は解の収束性と計算機の容量および計算時間を考慮して決定した。

次に計算結果について考察する。図4~10において、実線は本理論による結果を、破線はかく厚方向のせん断変形のみを考慮し、回転慣性を無視した理論による結果を示す。また、一点鎖線は、せん断変形も回転慣性も共に省略した古典理論 (Sandersの理論⁽¹²⁾) による結果である。

図4は点B (ACの中点) における変位成分 U_e の時間的変化である。かく厚の比較的薄い $h=20$ mm の場合には実線と破線の差はわずかであるが、かく厚が大きくなるにつれて差が大きくなる。 $h=60$ mm の場合には、古典理論による結果も併記 (一点鎖線) したが、これとの差は非常に大きい。

図5は点Bおよび点Cの変位成分 W の時間的変化を示す。点Bと点Cにおける値を比較すると、かく厚の比較的薄い場合には、点Bの変位のほうが点Cの変位よりもむしろ大きい。かく厚が大きくなると、点Cの変位のほうが大きくなる。実線と破線の差

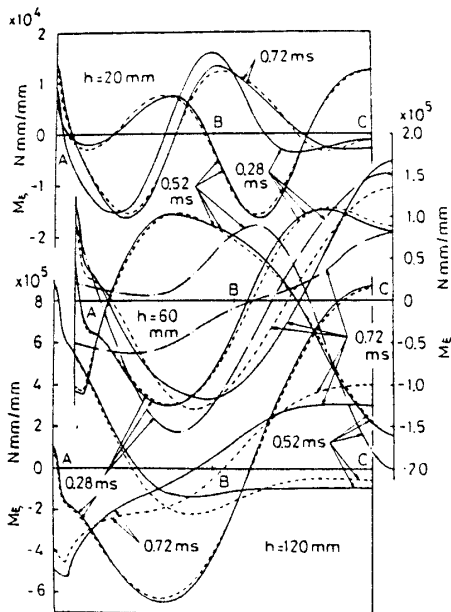


図10 合モーメント M_e の軸方向分布の時間的变化

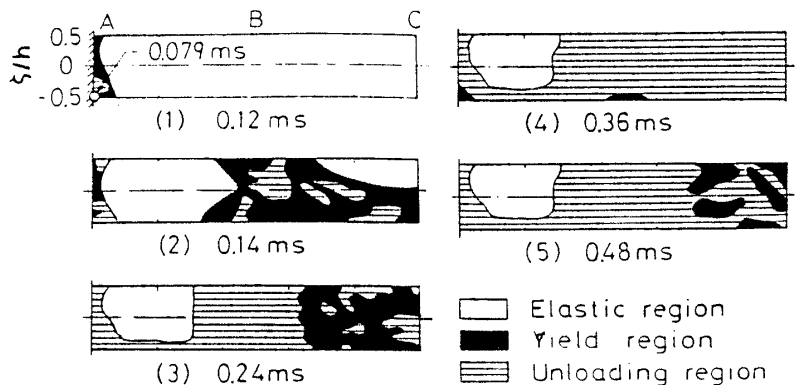


図11 降伏領域の進展 ($h=60$ mm)

およびこれらと一点鎖線の差については、 U_e と同様のことがいえる。

図6は、点Aおよび点Cの軸方向の面内力 N_e の時間的変化である。点Aと点Cにおける値を比較すると、かく厚が比較的薄い場合には、両者の値はほぼ等しいが、かく厚が大きくなると、点Aの値のほうが大きくなる。実線と破線の差は、かく厚が比較的薄い場合には、わずかであるが、かく厚とともに大きくなる。また、これらと古典理論による値との差は点Aにおいて特に大きい。

図7は、点Aおよび点Cの円周方向の面内力 N_e の時間的変化である。古典理論による値との差は、点Cでは比較的小さい。実線と破線の差は、 N_e と同様に、かく厚が増すほど大きくなる。

図8は、点Aおよび点Cの軸方向の曲げモーメント M_e の時間的変化の様子を示す。実線と破線を比較すると、比較的小さく厚の小さい $h=20$ の場合でも、少し差が生じており、他の内力成分よりも回転慣性の影響を強く受けることがわかる。古典理論による値との差は点Aで特に大きい。なお、ここには示さなかったが、円周方向の曲げモーメント M_e は、値は異なるが、時間的変化の様子は M_e と類似している。

図9は W の軸方向分布の時間的変化を示す。かく厚が比較的薄い $h=20$ mmの場合には、 W は点Bで大きくなるが、かく厚が大きくなると、点Cで大きな値を示すようになる。

図10は、 M_e の軸方向分布の時間的変化である。 $h=60$ mmの場合を見ると、せん断変形と回転慣性を無視した古典理論による解は、非常に異なった挙動を示すことがわかる。

図11に、 $h=60$ mmの場合について、本理論によるかく内部の降伏域の進展の様子を示す。 $h=20, 120$ mmの場合もほぼ同様である。図において、除荷域とは、一度以上降伏を経験した後、応力が降伏点以下になっている領域を意味する。図11に示すように、まず点Aの内表面で降伏を起こし、これが外側に向かって広がる。続いてACの中間部で塑性域が発生し、中央部に向かって広がっていくが、すぐその後を除荷域

が追いかける。その後、中央部の降伏した部分は、かくの振動とともに除荷と再降伏を繰返す。なお、点Aより少し離れた部分は、降伏せずに弾性のままで残ることになる。

5. 結 言

本論文では、中程度の厚さの軸対称かくの弾/粘塑性動的応答問題を、かく厚方向のせん断変形と回転慣性を考慮に入れて、解析した。構成関係にはPerzynaの理論に基づくFyfeの構成式を用い、厚肉の場合に考慮すべきせん断変形と回転慣性には、Naghdiの理論を採用して基礎式を導いた。数値解法には差分法を適用した。

数値例として、両端固定の6061-T6アルミニウム円筒かくに、衝撃内圧が時間に対して \sin 状に作用する問題を取扱い、内力および変位の時間的変化の様子を解析した。その結果、かく厚と半径の比が5%程度の円筒かくでも、変位と内力のほとんどすべての成分にわずかながら回転慣性の影響が見られ、かく厚が増すにつれてその影響が大きくなる。また古典理論との比較から、回転慣性の影響よりもせん断変形の影響のほうが大きいことがわかった。したがって、厚肉かくの動的応答問題を解析する際には、せん断変形を考慮することがまず第一に重要であるが、回転慣性も考慮に入れることが必要である。

文 献

- (1) 竹園・埜, 機論, 44-381 (昭53), 1478.
- (2) Nagarajan, S. and Popov, E. P., *Int. J. Numer. Method in Eng.*, 9-3 (1975), 535.
- (3) 竹園・埜, 機論, 47-421, A (昭56), 949.
- (4) Atkatsh, R. S., ほか2名, *Trans. ASME, Ser. E*, 50-1 (1983), 131.
- (5) 竹園・ほか2名, 機論, 52-476, A (昭61), 997.
- (6) Perzyna, P., *Adv. Appl. Mech.*, 9 (1966), 243, Academic Press.
- (7) Fyfe, I. M., *Trans. ASME, Ser. E*, 42-1 (1975), 141.
- (8) Naghdi, P. M., *Q. Appl. Math.*, 14-4 (1957), 369.
- (9) Reissner, E., *J. Math. Phys.*, 31 (1952), 109.
- (10) 竹園・埜, 機論, 46-402, A (昭55), 227.
- (11) Houbolt, J. C., *J. Aeronaut. Sci.*, 17 (1950), 540.
- (12) Sanders, J. L., Jr., *NASA Tech. Rep.* R-24 (1959), 1.