

繰返し負荷を受ける切欠丸棒の詳細および簡易弾塑性解析*

Milan Šatra**, 大野 信 忠***

Detailed and Simplified Elastic-Plastic Analyses of a Notched Bar Subjected to Cyclic Loading

Milan ŠATRA and Nobutada OHNO

To find some features of the development of cyclic hardening in structural components with areas of strain concentration, detailed and simplified elastic-plastic analyses are performed on an axisymmetric notched bar subjected to axial cyclic loading at the ends. For the detailed analysis, the constitutive model based on the concept of the cyclic nonhardening region is implemented in an incremental finite element method. The model can describe the dependence of cyclic plastic behaviour on the cyclic stress or strain range. The simplified method using the cyclic stress-strain curve as the constitutive relation is applied to the case where the mean value of the cyclic load is nonzero, and its validity is discussed on the basis of the results of the detailed analysis. Moreover, a detailed analysis with accelerated cyclic hardening is performed.

Key Words: Cyclic Plasticity, Constitutive Model, Structural Analysis, FEM, Cyclic Loading, Notched Bar, Strain Concentration

1. 緒 言

形状不連続部を有する構造要素が繰返し負荷を受けるとき、繰返しひずみ範囲および応力範囲は、構造要素内に必然的に不均一に分布する。しかも、この分布は、材料の繰返し硬化あるいは軟化の発達に伴って変化する。この変化で重要なことは、一般に金属材料の場合、繰返し硬化あるいは軟化の発達が繰返し範囲に依存することである。したがって、繰返し負荷によって生じる形状不連続部での弾塑性ひずみ集中および応力集中を解析するためには、繰返し塑性変形の繰返し範囲依存性を考慮しなければならない。

上述の弾塑性解析の方法としては、大別して二通りが考えられる。一つは、材料の繰返し塑性変形挙動を精密に記述し得る構成式を用いて、構造要素内の各部分における繰返し硬化あるいは軟化の発達過程を詳細に解析する方法である。もう一つは、繰返し硬化および軟化の発達過程を無視し、それが構造要素全体にお

いて安定した状態、すなわち繰返し硬化(軟化)の安定状態だけを解析する簡易法である。

このような詳細解析は、最近いくつか行われている^{(1)~(7)}。しかし、最初に述べたような繰返し塑性変形挙動の繰返し範囲依存性を陽に考慮し、繰返し硬化(軟化)が構造要素全体において安定化していく過程を解析した例は、繰返し粘塑性変形における荷重保持効果を解析した文献(6)に見られるにすぎない。一方、簡易解析の方法としては、繰返し硬化(軟化)の安定状態でのピーク応力とピークひずみが、いわゆる繰返し応力-ひずみ曲線上にあることを仮定する方法がある^{(8)~(10)}。この方法は簡便であり、計算時間も少なくてすむが、繰返しひずみおよび応力の平均値が非零の場合には、その適用方法および妥当性が明らかではない。

上に述べたように、形状不連続部を有する構造要素の繰返し弾塑性解析は、まだ十分に研究されていない。本研究ではこのような解析に対して知見を得るために、平均値零および非零の繰返し負荷が軸端に作用する切欠丸棒の詳細および簡易弾塑性解析を行う。

本研究の詳細解析で用いる繰返し塑性構成式は、著者らが提案したモデル⁽¹²⁾⁽¹³⁾である。この構成式は、繰返し非硬化ひずみ領域の概念⁽¹¹⁾に基づいて定式化され

* 昭和61年7月18日 東海支部豊橋地方講演会において講演、原稿受付 昭和60年11月22日。

** 豊橋技術科学大学(〒440 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)、チェコスロバキア国立機械設計研究所(Husova 8, Prague, Czechoslovakia)。

*** 正員、豊橋技術科学大学エネルギー工学系

ており、したがって繰返し塑性変形の繰返し範囲依存性を陽に表現できる。またその妥当性は、304 および 316 ステンレス鋼の常温でのひずみ制御および応力制御繰返し塑性変形に対して確かめられている^{(12)~(14)}。なお、このような詳細解析によって、繰返し硬化の安定状態をより少ない繰返し数で計算するために、材料の繰返し硬化を加速させた場合についても検討する。

一方、簡易解析では、前述した従来の研究と同じく繰返し応力-ひずみ曲線を構成式として仮定する。しかし本研究では、このような簡易解析法を、境界での繰返し荷重および変位の平均値が非零の場合にも適用し、その結果を本詳細解析の結果と比較する。

2. 詳細解析のための構成式

本詳細解析に用いる構成式は、すでに詳述されているから^{(11)~(13)}、この章ではその概略を述べる。

2.1 繰返し非硬化領域⁽¹¹⁾ 材料の繰返し硬化は、通常、繰返し数の増加とともに安定化し、その安定状態は繰返し範囲に依存する。この現象を記述するため、繰返し非硬化領域と呼ばれる塑性ひずみ領域の発達を仮定し、この領域の内部で生じた塑性ひずみ増分は材料の繰返し硬化に寄与しないとす。

繰返し非硬化領域は、荷重履歴が比例荷重から著しく偏っていないければ、塑性ひずみ空間内の球

$$g = \frac{2}{3}(\epsilon_{ij}^p - a_{ij})(\epsilon_{ij}^p - a_{ij}) - \rho^2 \leq 0 \dots\dots\dots (1)$$

によって近似される。ここで ϵ_{ij}^p は、ひずみテンソル ϵ_{ij} の塑性成分を示し、また ρ と a_{ij} は、この球の半径と中心である。

塑性ひずみ ϵ_{ij}^p は、式(1)の領域 $g \leq 0$ の境界上あるいは内部に位置する。 ϵ_{ij}^p が面 $g=0$ 上にあり、かつ $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ が面 $g=0$ に対して外向きのとき、領域 $g \leq 0$ は移動・膨張すると仮定する。ここで (\cdot) は、適当な負荷パラメータに関する微分を示す。この結果、 ρ と a_{ij} の発展式は、次のように表される。

$$\dot{\rho} = c\Gamma \dot{\epsilon}^p \dots\dots\dots (2)$$

$$\dot{a}_{ij} = \sqrt{3/2}(1-c)\Gamma \dot{\epsilon}^p \nu_{ij} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 c は領域 $g \leq 0$ の発達の速さを表す定数であり、また $\dot{\epsilon}^p = \sqrt{2/3} \|\dot{\epsilon}^p\|$ 、 $\|\dot{\epsilon}^p\| = (\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p)^{1/2}$ および $\nu_{ij} = (\partial g / \partial \epsilon_{ij}^p) / \|\partial g / \partial \epsilon^p\|$ である。さらに上式の Γ は、領域 $g \leq 0$ の発展条件を表し、次のように定義される。

$$\Gamma = \begin{cases} \nu_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p / \|\dot{\epsilon}^p\|, & g=0 \text{ and } \nu_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \\ 0, & g < 0 \text{ or } \nu_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p < 0 \end{cases} \dots\dots\dots (4)$$

2.2 応力とひずみの増分関係式⁽¹²⁾⁽¹³⁾ 二曲面塑

性理論^{(15)~(18)}に基づいて、降伏曲面の外側に限界曲面を導入する。このとき、限界曲面内部における降伏曲面の移動は、初期降伏後あるいは再降伏後の非線形材料硬化、すなわち応力-ひずみ曲線の丸みを表現する。一方、限界曲面の発達には材料の繰返し硬化を記述する。なお、応力-ひずみ曲線の丸みを無視するときには、限界曲面は降伏曲面にほかならない。

すでに述べたように、繰返し非硬化領域 $g \leq 0$ の内部で生じた塑性ひずみ増分は材料の繰返し硬化に寄与しないと仮定される。この仮定に基づけば、 ϵ_{ij}^p が領域 $g \leq 0$ の内部を動き、式(4)において $\Gamma=0$ が成り立つときには、限界曲面は発達しない。したがって、限界曲面の半径 x^* と中心 η_{ij}^* の変化は、式(4)の Γ を用いて次のように表される。

$$x^* = x^*(q), \quad \dot{q} = \Gamma \dot{\epsilon}^p \dots\dots\dots (5)$$

$$\dot{\eta}_{ij}^* = (2/3)[K + (1-\Gamma)dx^*/dq] \dot{\epsilon}_{ij}^p \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 q は等方硬化変数であり、 K は定数である。

このとき、材料の繰返し硬化の安定化は次のように記述される。すなわち、繰返し塑性変形の進行に伴って、繰返し非硬化領域 $g \leq 0$ が式(1)~(4)に従って発達すると、この領域はやがて塑性ひずみの繰返し範囲を覆う。すると、1 サイクル中常に $\Gamma=0$ となるから、限界曲面はもはや膨張しなくなり、材料の繰返し硬化は安定化する。このときの限界曲面の半径 x^* は、 $x^* = x^*(q_s)$ 、 $q_s = (1/c)(\Delta \epsilon^p / 2 - \rho_0)$ と表され⁽¹²⁾⁽¹³⁾、したがって繰返し硬化の繰返し範囲依存性が表現される。ここで $\Delta \epsilon^p$ は繰返し塑性ひずみ範囲の大きさを示し、また ρ_0 は式(2)の ρ の初期値である。

降伏曲面は、簡単のため、大きさ一定で移動だけすると仮定すれば、降伏曲面およびその移動法則は

$$f = (3/2)(s_{ij} - \eta_{ij})(s_{ij} - \eta_{ij}) - x_0^2 = 0 \dots\dots (7)$$

$$\dot{\eta}_{ij} = A[(2/3)(x^* - x_0)\dot{\epsilon}_{ij}^p - (\eta_{ij} - \eta_{ij}^*)\dot{\epsilon}^p] \dots\dots\dots (8)$$

と書ける。ここで、 s_{ij} は応力テンソル σ_{ij} の偏差成分を示し、また η_{ij} と x_0 (一定) は降伏曲面の中心と半径である。

降伏曲面への $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ の法線性を仮定すれば、 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ は

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = (3/2)n_{ij}n_{kl}\dot{s}_{kl}/E^p \dots\dots\dots (9)$$

$$E^p = A[x^* - x_0 - \sqrt{3/2}(\eta_{ij} - \eta_{ij}^*)n_{ij}] \dots\dots\dots (10)$$

と求められる。ここで、 $n_{ij} = (\partial f / \partial \sigma_{ij}) / \|\partial f / \partial \sigma\|$ であり、 E^p は塑性接線係数を表す。一方、弾性ひずみ成分 ϵ_{ij}^e は、Hooke の法則を仮定すれば、ヤング率 E とポアソン比 ν を用いて、次のように表される。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij} \dots\dots\dots (11)$$

このとき、応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ と全ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ の関係は、次式により表される⁽¹⁹⁾。

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{ijkl} &= D_{ijkl}^e - \frac{6G^2}{E^p + 3G} n_{ij} n_{kl} \\ D_{ijkl}^e &= G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここで $G = E/[2(1+\nu)]$, $\lambda = E\nu/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ である。

3. 有限要素法への組み込み

前章の構成式の有限要素法への組み込みについて述べる。

このためまず、ひずみ経路が規定された場合に対して、前章の構成式の計算方法を説明する。応力状態 σ_{ij} , 領域 $g \leq 0$ の中心 α_{ij} と半径 ρ , 限界曲面の中心 η_{ij}^* と半径 κ^* , 降伏曲面の中心 η_{ij} (半径は κ_0 で一定) は、現時点において既知であるとする。このとき、規定されたひずみ増分 $\delta\epsilon_{ij}$ に対して、以下のように増分計算を行うことができる。

- (1) D_{ijkl} の計算…式(13), (10)
- (2) $\delta\sigma_{ij}$ の計算…式(12)
- (3) $\delta\epsilon_{ij}^e$ の計算…式(11), 式 $\epsilon_{ij}^e = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p$
- (4) Γ の計算…式(4)
- (5) $\delta\rho, \delta\alpha_{ij}, \delta\kappa^*, \delta\eta_{ij}^*, \delta\eta_{ij}$ の計算…式(2), (3), (5), (6), (8)
- (6) 増分量を現時点の値に加算

ここで(1)の計算において、 D_{ijkl} には式(4)の Γ が含まれておらず、したがって領域 $g \leq 0$ における塑性ひずみ点 ϵ_{ij}^p の位置およびその運動方向 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ が既知である必要はないことに注意する。

以上の計算手順から明らかのように、この構成式は、接線剛性に基づく通常の増分形有限要素法に即座に組み込むことができる。すなわちまず、式(13)と(10)により計算される D_{ijkl} を接線係数マトリックスとして有限要素計算を行い、各要素あるいは各積分点での $\delta\epsilon_{ij}$ と $\delta\sigma_{ij}$ を求める。次に、上記(3)~(6)を各要素あるいは各積分点で実行すればよい。

なお、 ϵ_{ij}^p が現時点では領域 $g \leq 0$ の内部にあるが、その増分 $\delta\epsilon_{ij}^p$ の過程において境界 $g = 0$ に達する場合には、式(4)の Γ は不連続に変化する。この場合、 ϵ_{ij}^p が境界 $g = 0$ に達した後の $\delta\epsilon_{ij}^p$ の成分を $\mu\delta\epsilon_{ij}^p$ と表し、式(4)を次式によって近似するのが便利である。

$$\Gamma = \mu\nu_{ij}\delta\epsilon_{ij}^p / \|\delta\epsilon^p\| \dots\dots\dots (14)$$

4. 簡易解析法

材料の応力-ひずみヒステリシスループが、解析する構造要素全体において安定した段階を考える。この段階では、構造要素内の各点で、繰返し応力範囲 $\Delta\sigma_{ij}$ とひずみ範囲 $\Delta\epsilon_{ij}$ (弾性成分 $\Delta\epsilon_{ij}^e$, 塑性成分 $\Delta\epsilon_{ij}^p$) は次式を満足すると仮定する。

$$\Delta\epsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \Delta\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \Delta\sigma_{kk} \delta_{ij} \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\Delta\epsilon_{ij}^p}{2} = \frac{3}{2} F_{cvc} \left(\frac{\Delta\sigma_{eff}}{2} \right) \frac{\Delta S_{ij}}{\Delta\sigma_{eff}} \dots\dots\dots (16)$$

ここで、関数 F_{cvc} は単軸状態での繰返し応力-塑性ひずみ曲線

$$\Delta\epsilon^p/2 = F_{cvc}(\Delta\sigma/2) \dots\dots\dots (17)$$

を表す。なお本研究では、 $\Delta\sigma_{ij}$ と $\Delta\epsilon_{ij}$ に対して、それらの偏差成分 ΔS_{ij} と Δe_{ij} によって次の相当範囲を定義する。

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma_{eff} &= [(3/2)\Delta S_{ij}\Delta S_{ij}]^{1/2} \\ \Delta\epsilon_{eff} &= [(2/3)\Delta e_{ij}\Delta e_{ij}]^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

$\Delta\sigma_{ij}$ と $\Delta\epsilon_{ij}$ は、応力-ひずみヒステリシスループにおける一つのピーク状態から引続く他のピーク状態への応力変化およびひずみ変化を表す。ピーク応力とピークひずみは、それぞれ応力のつりあい式および変位-ひずみ関係式を満足するから、 $\Delta\sigma_{ij}$ もつりあい式を満足し、また $\Delta\epsilon_{ij}$ はこれら二つのピーク状態の変位差 Δu_i に関して定義される。この結果 $\Delta\sigma_{ij}$ と $\Delta\epsilon_{ij}$ の分布は、境界で規定される荷重あるいは変位の繰返し幅を境界条件とし、また式(15)と(16)を構成式として解くことができる。

なお、繰返し応力およびひずみの平均値がともに零に等しいとき、 $\Delta\sigma_{ij}/2$ と $\Delta\epsilon_{ij}/2$ はそれぞれピーク応力およびピークひずみを表す。したがって、上に述べた簡易解析法は、文献(8)~(10)の解析法となる。

5. 解析例

本研究で解析した軸対称切欠丸棒 (弾性応力集中係数 4.8) の 1/4 断面を図 1(a) に示す。この丸棒は、軸端で規則的な軸方向繰返し応力 σ_z^* (最大値 σ_{max} , 最小値 σ_{min}) を一様に受ける。この図には、要素分割も示されている。8 節点アイソパラメトリック要素(4-Gauss 積分点)を使用し、要素数は 38, 節点数は 141 である。なお図 1(b) は、切欠底付近の拡大図である。

本解析では、各積分点での材料の降伏に対して、いわゆる r_{min} 法⁽¹⁹⁾を用いた。また増分の大きさは、相当ひずみ増分 $(2\delta e_{ij}\delta\epsilon_{ij}/3)^{1/2}$ の最大値が 0.001 となるように取った (実際には r_{min} 法のため、増分の大きさ

はこの値より小さくなっている)。

解析に使用した材料関数と定数は、常温での 304 ステンレス鋼の実験結果⁽¹⁴⁾をシミュレートするものである。すなわち、2章で述べた繰返し塑性構成式に対しては、式(5)の関数 $\kappa^*(q)$ を

$$\kappa^*(q) = \kappa_0^* + Lq \quad (\kappa_0^*, L: \text{定数}) \dots\dots\dots (19)$$

と選び、次の定数 (単位: 応力 MPa, ひずみ mm/mm)⁽¹⁴⁾を用いた。

$$\left. \begin{aligned} \kappa_0^* &= 255, \quad \kappa_0 = 185, \quad A = 500 \\ E_{mon}^p &= K + L = 2500 \\ E_{cyc}^p &= K + (1 + 1/c)L = 15550 \\ c &= \begin{cases} 0.08 & (\text{detailed anal.}) \\ 0.192 & (\text{accelerated anal.}) \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

なお、式(2)の ρ の初期値は零とした。このときの単調引張り応力-ひずみ (σ - ϵ) 曲線および繰返し応力-ひずみ ($\Delta\sigma/2$ - $\Delta\epsilon/2$) 曲線が、図2に示されている。図中の R_ϵ と R_σ は、ひずみ制御および応力制御繰返し負

荷における下限値の上限値に対する比である。

式(20)の E_{mon}^p と E_{cyc}^p は単調および繰返し応力-ひずみ曲線を直線近似したときの塑性接線係数として定まり⁽¹²⁾⁽¹³⁾、また κ_0^* , κ_0 および A は文献(13)の単調引張り応力-ひずみ曲線の式(A11)を用いて決定される。

c の値は、ひずみ範囲一定の繰返し変形において、繰返し硬化が安定化するための繰返し数 N_s から決定される⁽¹³⁾。本解析では c に対して、式(20)に示すような二つの値を仮定した。 $c=0.08$ は実験結果をかなり精度よく記述する値であり⁽¹⁴⁾、一方 $c=0.192$ は、材料の繰返し硬化を加速するために本研究において設定した値である。 $c=0.192$ は、式(20)からわかるように、式(6)における限界曲面の移動硬化定数 K を零とする。これらの c の値に対して、 N_s はそれぞれ約 10 および 4 となる。なお、このように c が一定値に取られる場合、 N_s は繰返しひずみ範囲の大きさにほとんど依存しない⁽¹³⁾。

次に、簡易解析の式(16)に含まれる関数 F_{cyc} は、図2の繰返し応力-ひずみ曲線の実験データから

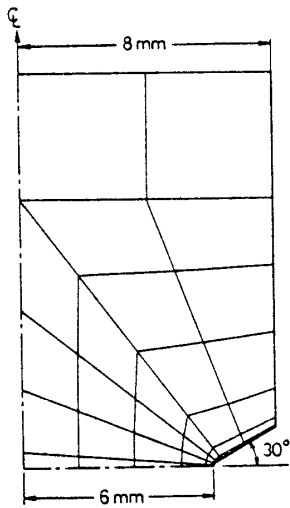
$$\left. \begin{aligned} F_{cyc}\left(\frac{\Delta\sigma_{eff}}{2}\right) &= a \left[\left(\frac{\Delta\sigma_{eff}/2}{\sigma_0} \right)^m - 1 \right] \\ a &= 1.306 \times 10^{-3}, \quad m = 2.78, \quad \sigma_0 = 185 \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

と決定した (図2の破線)。

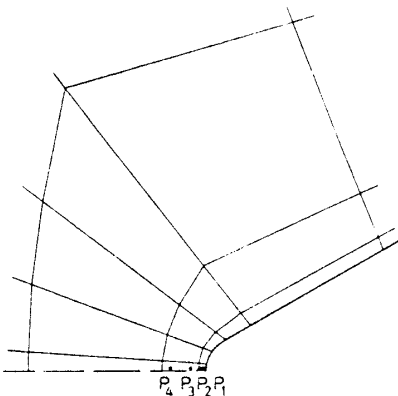
弾性定数は、詳細および簡易解析の両場合とも $E = 1.94 \times 10^5$ MPa, $\nu = 0.264$ の値を用いた。

6. 解析結果とその検討

解析結果を図3から8に示す。これらの図において、 P_i ($i=1, 2, 3, 4$) は、切欠底付近において最小断面に近い Gauss 積分点であり、図1(b)にそれらの位置が示されている。なお解析を行ったのは、軸端での繰返し応力の最大値と最小値が $(\sigma_{max}^{\dot{\epsilon}}, \sigma_{min}^{\dot{\epsilon}}) = (120, -120), (140, -70), (140, -20)$ (単位 MPa) の場合で



(a) 1/4 断面 (切欠底半径 0.2 mm)



(b) 切欠底の詳細

図1 軸対称切欠丸棒

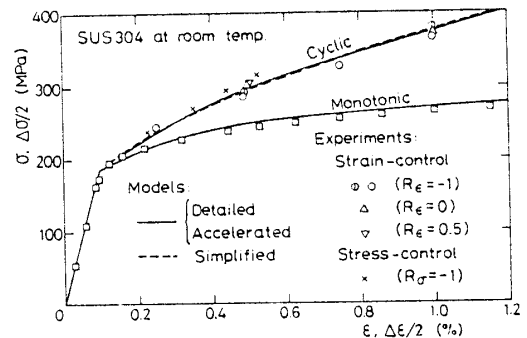
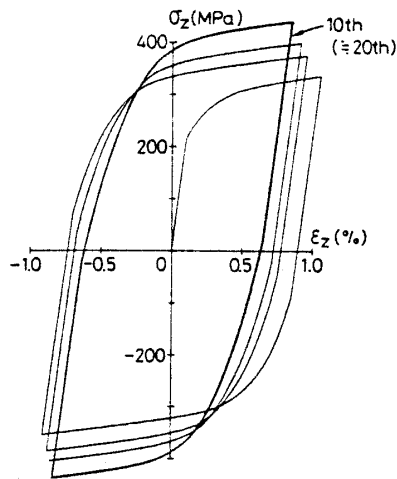
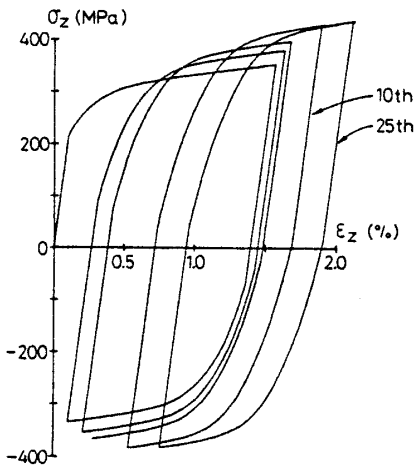


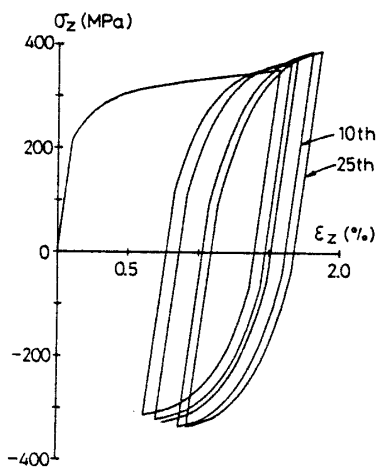
図2 単調引張りおよび繰返し応力-ひずみ曲線 (実験結果: 304 ステンレス鋼, 常温⁽¹⁴⁾)



(a) $\sigma_{\max}^{\circ} = 120 \text{ MPa}$, $\sigma_{\min}^{\circ} = -120 \text{ MPa}$



(b) $\sigma_{\max}^{\circ} = 140 \text{ MPa}$, $\sigma_{\min}^{\circ} = -70 \text{ MPa}$



(c) $\sigma_{\max}^{\circ} = 140 \text{ MPa}$, $\sigma_{\min}^{\circ} = -20 \text{ MPa}$

図3 切欠底の点 P_1 での $\sigma_z - \varepsilon_z$ ヒステリシスループ (詳細解析, $c = 0.08$)

ある。

6.1 詳細解析結果の検討 図3(a)~(c)は、詳細解析によって得られた、切欠底の点 P_1 での軸方向応力-軸方向ひずみ ($\sigma_z - \varepsilon_z$) ヒステリシスループである。この図から、繰返し数の増加とともに、応力振幅の増加と同時にひずみ振幅の減少が生じていることがわかる。これは、応力集中部の材料要素が繰返し硬化したことによる。

また図3の(b)と(c)では、軸端での繰返し負荷の平均値が非零のため、機械的ラチェットが進行している。しかし、機械的ラチェットによる ε_z の増加は、繰返し数とともに小さくなっている。なお、図4に示すように、塑性領域は境界荷重最大時においても軸横断面を貫通していない。この結果、図3(b)、(c)に見られる機械的ラチェットの進行は、軸中央部の弾性領域によって拘束され、やがて停止するものと考えられる。したがって以下においては、応力振幅とひずみ振幅の変化について主に検討する。

まず、応力振幅の分布の変化について議論する。図5は、本詳細解析による相当応力振幅 $\Delta\sigma_{\text{eff}}/2$ と繰返し数 N の関係を示す。この図からわかるように、 $c = 0.08$ の詳細解析の結果では、 $P_1 \sim P_4$ のどの点でも相当応力振幅は $N \approx 10$ までには安定化し、したがって繰返し硬化の安定状態が得られている。一方、 $c = 0.192$ として、材料の繰返し硬化を加速した場合には、相当応力振幅の安定化に要する繰返し数は約4回に減少している。

図3の応力-ひずみヒステリシスループですで見たとように、応力振幅とひずみ振幅は、材料の繰返し硬化の発達に伴って変化する。図6は、点 $P_1 \sim P_4$ での相当応力振幅 $\Delta\sigma_{\text{eff}}/2$ と相当ひずみ振幅 $\Delta\varepsilon_{\text{eff}}/2$ の変化をプロットしたものである。 $\Delta\sigma_{\text{eff}}/2$ と $\Delta\varepsilon_{\text{eff}}/2$ の関係は、 $P_1 \sim P_4$ のどの点においても、単軸繰返し応力-ひ

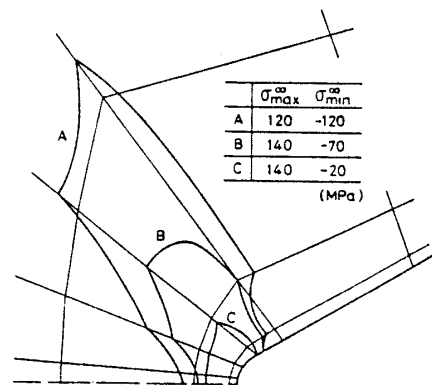


図4 詳細解析 ($c = 0.08$) における境界荷重最大時の塑性領域 (サイクル数 $N = 20$)

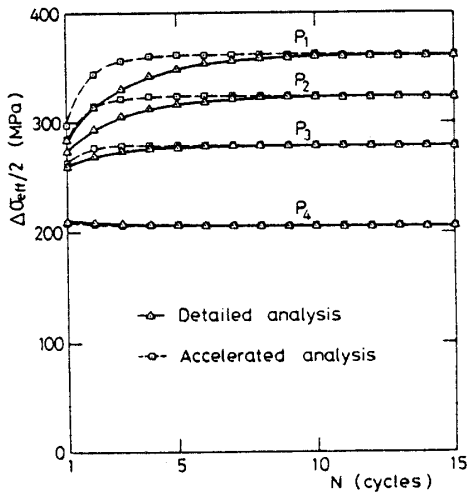
ずみ曲線に漸近している。特に、軸端での繰返し負荷の平均値が非零の場合にこの結論が成り立つことは(図6の記号△)、4章の簡易解析法の定式化から理解できるように、次のように換言できる。すなわち、繰返し硬化の安定状態での応力振幅とひずみ振幅の分布は、境界での繰返し負荷および変位の平均値に依存せず、それらの繰返し幅によって定まる。

図6に示した本詳細解析の結果は、オーステナイト系ステンレス鋼に対して物理的に妥当なものである。すなわち、図6のように応力範囲の増大とひずみ範囲の減少を同時に伴う繰返し塑性変形は、ひずみ範囲一定で応力範囲が増大する場合と応力範囲一定でひずみ範囲が減少する場合の中間形である。これら両場合に

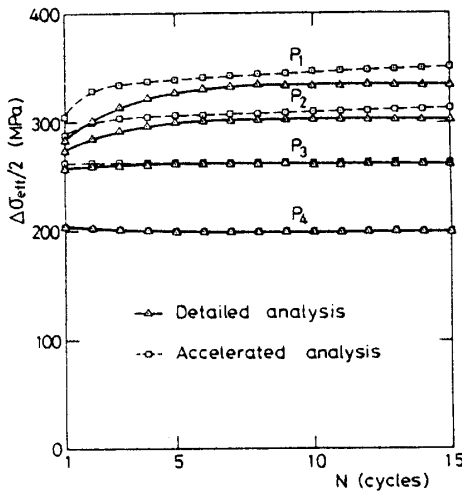
対する304および316ステンレス鋼の繰返し応力-ひずみ曲線は、ほぼ同一になることが実験的に確かめられている⁽¹⁴⁾⁽²⁰⁾(図2参照)。そして2章の構成式は、 $c \ll 1/2$ ならば、このような実験結果を記述できる⁽¹⁴⁾。

6・2 詳細解析結果と簡易解析結果の比較 上で述べたように、本詳細解析による相当応力振幅と相当ひずみ振幅は、繰返し数の増加に伴って繰返し応力-ひずみ関係を満足するようになる。このことは、本詳細解析により得られる結果の内、繰返し硬化の安定状態での応力範囲 $\Delta\sigma_{ij}$ とひずみ範囲 $\Delta\varepsilon_{ij}$ の分布については、4章で述べた簡易解析法の結果とほとんど一致することを示唆する。図7は、このような一致を、相当ひずみ振幅の最小断面上での分布について示す。この図では、軸端での繰返し負荷の平均値は非零であるが、両解析結果はよく一致している。

しかし、4章の簡易解析法は、応力-ひずみヒステリシスループの形状および機械的ラチェットについては全く情報を与えない。また、この解析法により得られる $\Delta\sigma_{ij}/2$ および $\Delta\varepsilon_{ij}/2$ がピーク応力およびひずみ状態を表すのは、境界での繰返し荷重および変位の平均値が零のときだけである。さらに、繰返し負荷過程中に境界の一部に接触が生じるような問題では、変位



(a) $\sigma_{max} = 120$ MPa, $\sigma_{min} = -120$ MPa



(b) $\sigma_{max} = 140$ MPa, $\sigma_{min} = -70$ MPa

図5 相当応力振幅 $\Delta\sigma_{eff}/2$ の変化 (最小断面)

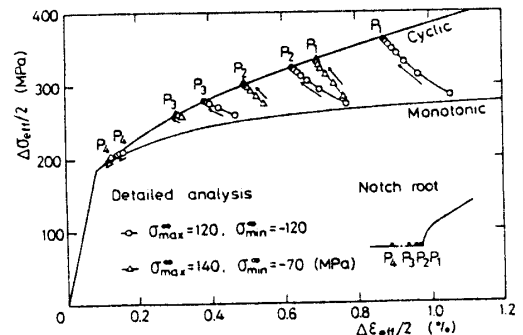


図6 詳細解析 ($c=0.08$) による相当応力振幅と相当ひずみ振幅の変化 (最小断面)

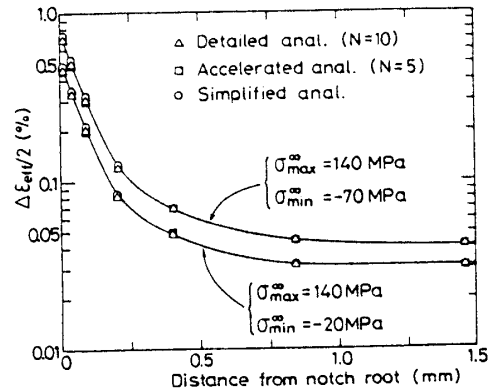
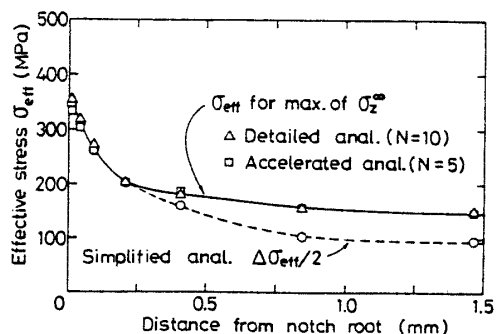
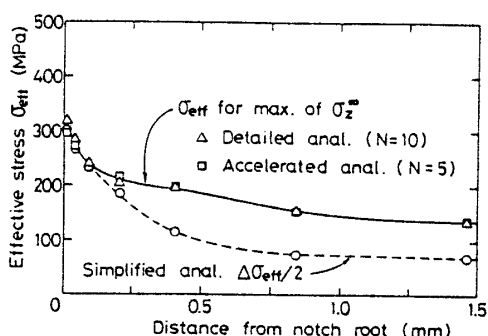


図7 詳細解析と簡易解析による相当ひずみ振幅の比較 (最小断面)

(a) $\sigma_{\max}=140$ MPa, $\sigma_{\min}=-70$ MPa(b) $\sigma_{\max}=140$ MPa, $\sigma_{\min}=-20$ MPa図8 詳細解析による σ_z 最大時の相当応力と簡易解析による相当応力振幅の比較 (最小断面)

量自体が解析に必要となるから、繰返し範囲だけに基づくこの簡易解析法を用いることはできない。

特に、高温下で境界荷重あるいは変位が保持され、クリープが問題となるときには、応力範囲ではなく応力自体の分布を求めなければならない。図8は、軸端での繰返し負荷の平均値が非零の場合に、詳細解析による境界荷重最大時の相当応力 σ_{eff} の分布と、簡易解析による相当応力振幅 $\Delta\sigma_{\text{eff}}/2$ の分布を最小断面上で比較したものである。ここで $\sigma_{\text{eff}}=(3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ である。両者は当然一致しないが、切欠底近傍ではよい一致が見られる。これは、応力集中部において塑性変形が生じた領域では、図3(b)、(c)に見られるように応力-ひずみヒステリシスループの応力平均値がほとんど零となるからである。この程度の一致で、簡易解析法による応力分布が切欠底でのクリープを適切に記述し得るか否かは、今後の検討課題である。

一方、 $c=0.192$ として繰返し硬化を加速した解析法は、相当ひずみ振幅だけでなく(図7)、相当応力分布についても(図8)、 $c=0.08$ の詳細解析法とよく一致した結果を与えている。

7. 結 言

本研究では、繰返し負荷を受ける切欠丸棒の詳細お

よび簡易弾塑性解析を行った。詳細解析では、繰返し非硬化ひずみ領域の概念に基づく塑性構成式を有限要素法に組み込み、繰返し硬化の発達過程および安定状態を解析した。一方、簡易解析では、繰返し応力-ひずみ関係を構成式とする従来の方法を、境界での繰返し負荷の平均値が非零の場合にも適用し、繰返し硬化の安定状態を解析した。さらに本研究では、詳細解析において材料の繰返し硬化を加速させた場合についても検討した。なお、解析に用いた材料定数は、常温での304ステンレス鋼に対するものである。

本研究で得られた結論は、次のように要約できる。

(1) 繰返し非硬化領域モデルは、接線剛性に基づく増分形の有限要素法に困難なく組み込むことができる。

(2) 本詳細解析によって、材料の繰返し硬化が構造要素全体において安定化した状態が求められた。この状態では、切欠丸棒内のどの点においても、相当応力振幅と相当ひずみ振幅は単軸繰返し応力-ひずみ関係を満足した。

(3) 機械的ラチェットの顕著でない本解析例では、繰返し硬化の安定状態での応力振幅とひずみ振幅の分布は、境界での繰返し負荷の平均値に依存せず、その繰返し幅によって定まった。

(4) 本詳細解析によって得られる結果の内、繰返し硬化の安定状態での応力範囲とひずみ範囲の分布については、繰返し応力-ひずみ曲線を用いた簡易解析法の結果とほとんど一致した。しかし、軸端での繰返し負荷の平均値が非零のとき、ピーク応力およびピークひずみの状態は、この簡易法によっては解析できない。

(5) 一方、材料の繰返し硬化を加速させた詳細解析の方法は、応力範囲とひずみ範囲だけでなく、繰返し硬化の安定状態でのピーク応力の分布についても少ない繰返し数で計算することができる。

なお本研究では、非比例負荷のもとでの材料の繰返し硬化⁽²¹⁾については考慮しなかった。このような繰返し硬化が顕著である場合には、もはや単軸繰返し応力-ひずみ曲線を用いることはできない。しかし、本研究の解析例では、境界荷重が一方向にのみ変化しているから、非比例負荷の影響は少ないと考えられる。

最後に、この研究に対してゆき届いたご検討を頂いた名古屋大学工学部の村上澄男教授に深く感謝する。また、本研究は昭和60年度文部省科学研究費〔奨励研究(A)課題番号60750086〕による研究の一部であることを付記する。

文 献

- (1) Valanis, K. C. and Fan, J., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 50-4 (1983), 789.
- (2) Valanis, K. C. and Fan, J., *Computers and Structures*, 19-5/6 (1984), 717.
- (3) Nakagomi, T., ほか2名, (Luxmoore, A. R. and Owen, D. R. J. 編), *Proc. 3rd. Int. Conf. on Numerical Methods in Fracture Mechanics*, (1984), 377, Pineridge Press.
- (4) 川島・ほか3名, *機論*, 51-470, A (昭60), 2334.
- (5) Chaboche, J. L. and Cailletaud, G., *Int. Conf. on Advance in Numerical Methods in Engineering, Swansea*, (1985), (T. P. ONERA n° 1985-3).
- (6) Levaillant, C., ほか2名, (Baylac, G., ほか2名編), *Preprints of 5th Int. Seminar on Inelastic Analysis and Life Prediction in High Temperature Environment, Paris*, (1985), 373.
- (7) 渡部・Atluri, S. N., 第9回構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, (昭60), 151.
- (8) Kratochvil, J., ほか2名, *Rep. SVÚSS-80-02025*, (1980), 43.
- (9) 江端・ほか3名, *三菱重工技法*, 19-1 (昭57), 1.
- (10) 佐近・遠藤, *機論*, 51-471, A (昭60), 2425.
- (11) 大野, *機論*, 48-434, A (昭57), 1342.
- (12) 大野・ほか2名, *機論*, 51-470, A (昭60), 2349.
- (13) Ohno, N. and Kachi, Y., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 53-2 (1986), 395.
- (14) Ohno, N. and Kachi, Y., *Proc. of 8th Int. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Tech.*, Vol. L, Brussels, (1985), 57, North-Holland.
- (15) Mróz, Z., *Acta Mech.*, 7 (1969), 199.
- (16) Krieg, R. D., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 42-3 (1975), 641.
- (17) Dafalias, Y. F. and Popov, E. P., *Acta Mech.*, 21 (1975), 173.
- (18) Dafalias, Y. F. and Popov, E. P., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 43-4 (1976), 645.
- (19) 鷲津・ほか4名, 有限要素法ハンドブックII応用編, (昭58), 6章, 培風館.
- (20) Chaboche, J. L., ほか2名, *Rech. Aérop.*, No. 1980-3 (1980), 35.
- (21) 例えば, 田中・ほか2名, *機論*, 51-468, A (昭60), 1941.

討 論

【質問】 猪狩敏秀〔三菱重工(株)長崎研究所〕
 実用面での多くの示唆を含む好論文と拝見した。下記についてご教示願えれば幸いです。

(1) 詳細履歴解析を正とし、簡易解析との比較がなされているが、実験との対比による詳細履歴解析精度の検証の必要性についてはどのようにお考えか。

(2) 繰返し硬化を加速した解析は、実用的には一種の簡易解析と見ることができると思われる。切欠底ピーク応力について詳細解析との対比は示されているが、図3(b), (c)に見られるような、ラチェットひずみについてはどのような対応となっているのか。

(3) 繰返し硬化を加速した簡易解析は、実用面で大きな魅力を感じるが、繰返し硬化の加速の程度については、どのようにして決定されたのか。

【回答】 有意義なご質問をいただき感謝する。
 以下のように回答する。

(1) 詳細解析の精度自身に対して、実験的検証は必要であると思う。しかし、本論文で使用した繰返し塑性構成式は、緒言および6・1節の最後の段落で述べたように、SUS 304 および 316 に対して単軸変形の場合に十分に妥当性を確かめたものである(ただし、機械的ラチェットについては、定性的にであるが⁽¹⁴⁾)。したがって、連続体力学的アプローチの妥当性の範囲内で、本詳細解析結果は物理的に意味があり、また本研究で扱った問題は、このようなアプローチが有効な場合と考えている。

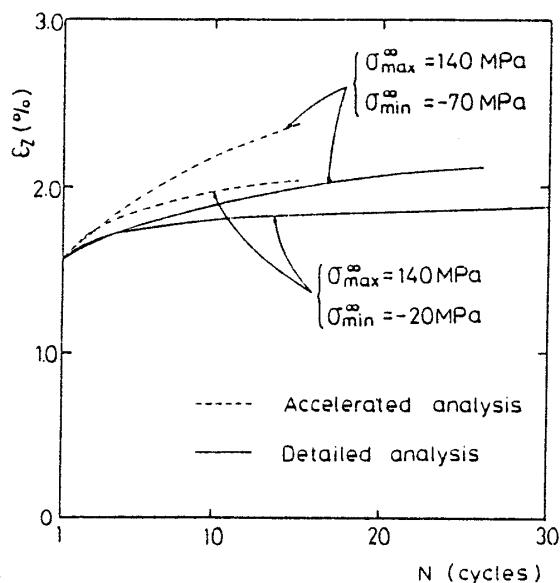
(2) ラチェットひずみに関する、詳細解析($c=0.08$)と繰返し硬化加速解析($c=0.192$)の比較を付図1に示す。この図からわかるように、両者の予測は定量的には異なっている。これは、両解析において、限界曲面の変化に関する塑性接線係数 E_{mon}^p が同じでも、その移動硬化係数 K の値が異なっているためである。すなわち、ラチェットひずみはヒステリシスループの平均応力の方向へ生じるが、このとき、 $K > 0$ であれば、限界曲面の中心もこの平均応力の方向へ移動する。この移動は、式(6)からわかるように、 K の値が大きいほど速くなる。そして、限界曲面の中心がヒステリシスループの平均応力に近づくと、ヒステリシスループの形状がその平均応力および平均ひずみに関して対称となり、ラチェットひずみは生じなくなる。この結果、 K の値が大きいほど、ラチェットひずみは小さくなる。

(3) 本解析では、繰返し硬化を加速し得る可能性を示すために、 $K=0$ とするような c の値を便宜的に選んだ。しかし、実際には、 c の値を系統的に変化させ、どのような値が適当かを調べる必要があると考える。このため、現在、このような検討を当研究室で進めているが、繰返し硬化を繰返し数4回程度で安定させる $c=0.2$ が適当な値であろうと思っている。

【質問】 渡部 修〔筑波大学構造工学系〕

以下の点についてご教示願いたい。

(1) 塑性シェークダウンしたときの平均応力値

付図1 切欠底の点P₁でのε_zの変化

は、構造物の境界条件や荷重条件により、非零になる可能性はないのか。Zarka-Casier (付1)は熱繰返し荷重について考察しているが、いかがか。

(2) 図5(b)において、P₁、P₂の点での応力振幅値が加速した解析のほうが詳細解析に比べて大きいのは、加速係数 c の値を大きくしたためか。

〔回答〕 (1) 塑性シェークダウンしたときの平均応力が非零になるか否かは、境界条件や荷重条件にも依存するが、それと同時に材料自身の繰返し塑性変形の性質によると思う。例えば、変位制御繰返し塑性変形において平均応力が完全に繰返し緩和し、また平均応力非零の荷重制御繰返し塑性変形では常に繰返しクリープ(機械的ラチェット)が生じるような材料では、塑性シェークダウンは平均応力が零となったときのみ可能である。

さて、著者のこれまでの実験的経験^{(11)~(14)}では、図3(b)、(c)のように塑性ひずみ振幅がある程度大き

ければ、繰返し緩和や繰返しクリープはほぼ上述のように生じるようである。したがって、このような場合には、塑性シェークダウンした時には、平均応力はほぼ零に等しくなるのが自然であると考えられる。ただし本解析では、限界曲面が移動すると、平均応力はこの移動量だけ零にならない(猪狩氏への回答(2)参照)。しかし、その移動量は通常それほど大きくない。

ご指摘のZarka-Casierの文献では、線形移動硬化モデルを用いて、平均応力非零の塑性シェークダウンが熱繰返し荷重条件下で解析されている。しかし、線形移動硬化モデルでは、平均応力の繰返し緩和は全く生じない。これは、塑性ひずみ振幅のかなり小さい場合には、良い仮定だと思うが、塑性ひずみ振幅のある程度大きい場合を考えると、Zarka-Casierの導いた塑性シェークダウンの結果がすべて正しいとはいえないと思う。

(2) ご指摘のとおりである。 $c=0.192$ の繰返し硬化加速解析では、繰返し硬化は繰返し数4回程度で飽和すると本文の5章で述べたが、これはひずみ範囲の上限と下限が固定されている場合である。図3の(b)、(c)のように上限と下限がラチェットするときには、繰返し非硬化領域が繰返しひずみ範囲と一致する程度まで発達した後も、ラチェットひずみの繰返し硬化への寄与により、繰返し硬化はわずかながら発達する。このような繰返し硬化の発達は、塑性ひずみの最大値が増加する過程に生じ、したがって塑性ひずみのラチェット量と等方硬化係数 L の積として表される〔式(4)、(5)および(19)参照〕。この積の値は、 $c=0.192$ の繰返し硬化加速解析のほうが $c=0.08$ の詳細解析より5倍以上大きく、その影響が図5(b)の点P₁、P₂で現れている(ラチェットひずみの比較に関しては、猪狩氏への回答における付図1を参照されたい)。

(付1) Zarka, J. and Casier, J., *Mechanics Today*, 6 (1981), 93.