

非対称荷重を受ける直交異方性厚肉回転対称殻の弾/粘塑性解析*

竹園茂男^{*1}, 埜 克己^{*1}, 白石博文^{*2}

Elasto/Visco-Plastic Analysis of Orthotropic Moderately Thick Shells of Revolution under Asymmetrical Loading

Shigeo TAKEZONO, Katsumi TAO, and Hirofumi SHIRAISHI

An analytical method for the elasto/visco-plastic problems of general, orthotropic moderately thick shells of revolution subjected to asymmetrical loads is developed in consideration of the effect of shear deformations. The Reissner-Naghdi theory for elastic moderately thick shells is extended in this analysis. As the constitutive equation, Hooke's law for orthotropic materials is used in the elastic region, and equations based on the orthotropic visco-plastic theory derived from the orthotropic plastic theory by Hill are employed in the plastic range. The visco-plastic strain rates are related to the stresses by Perzyna's equation. In order to check the adequacy of the numerical analysis, experiments are performed on the elasto/visco-plastic deformation of a titanium cylindrical shell subjected to locally distributed loads. Good agreement is obtained between the experimental results and analytical solutions. The fundamental equations for the increment are numerically solved by a finite difference method and the solutions are obtained by integration of the incremental values.

Key Words: Structural Analysis, Elasto/visco-plastic Deformation, Asymmetrical Loads, Thick Shells of Revolution, Orthotropy, Shear Deformation, FDM, Experiment on Titanium Shell

1. 緒 言

軸対称殻の弾/粘塑性変形問題については、これまでに軸対称荷重に限らず、非対称荷重の場合に対しても、いくつかの研究結果が報告されている^{(1)~(4)}。また著者らは、せん断変形の影響を考慮に入れた、中程度の厚さを有する回転対称殻の弾/粘塑性変形問題の解法を示してきた⁽⁵⁾⁽⁶⁾。しかしながら、これらの研究は、いずれも等方性材料から成る殻を対象としており、異方性材料から成る殻を取扱った研究は少ないようである⁽⁷⁾。

本論文では、材料が直交異方性を有する場合の、やや肉厚の大きい回転対称殻の、弾/粘塑性変形問題を取扱った。弾/粘塑性の構成関係には、Hillの直交異方性塑性理論にならって、Perzynaの弾/粘塑性構成式⁽⁸⁾を直交異方性の場合に拡張したものをを用い、厚肉の場合に考慮すべきせん断変形には、Reissner-Naghdiの理論⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾(ひずみ-変位関係)を採用して基礎式を導いた。基礎式の数値解法には、差分法を適用

した。

材料の塑性領域において粘性の影響が現れることは、実験の際などによく観察されるところであるが、この塑性領域における粘性の影響に着目した実験例は、比較的少ないようである⁽¹⁾⁽⁴⁾⁽⁷⁾。著者らは、両端自由のチタン円筒殻の中央部に局所的分布荷重を加え、円筒殻の外表面のひずみの時間的変化を測定し、計算値と比較して、本解法の妥当性を検討した。

2. 解 法

2.1 基礎関係式 図1に示すように、対称軸から殻の中央面上の任意点Pまでの距離を r とし、殻の中央面の形を $r=r(s)$ で与えると、中央面の点Pにおける無次元曲率 $\omega_\xi(=a/R_s)$ 、 $\omega_\theta(=a/R_\theta)$ および無次元半径 $\rho(=r/a)$ の間には、次の関係が成立する。ただし、 s は殻の中央面において子午線に沿って測った長さであり、 a は代表長さである。

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= -(\gamma' + \gamma^2)/\omega_\theta, \quad \omega_\theta = \sqrt{1 - (\rho')^2}/\rho \\ \omega'_\theta &= \gamma(\omega_\xi - \omega_\theta), \quad \rho''/\rho = -\omega_\xi\omega_\theta \\ \gamma &= \rho'/\rho, \quad \xi = s/a, \quad (\quad)' = d(\quad)/d\xi \end{aligned} \right\} \quad \dots(1)$$

また、殻の任意点Qを表すのに、直交座標 (ξ, θ, ζ) を用いる。ここに、 θ は円周方向の角であり、 ζ は中央面から外向きに測った長さである。

* 昭和62年7月14日 東海支部三重地方講演会において講演、原稿受付 昭和61年11月10日。

^{*1} 正員、豊橋技術科学大学(〒440 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

^{*2} 正員、平田機工(株)(〒321 宇都宮市平出工業団地)。

さて Reissner の殻理論⁽⁹⁾による平衡方程式を軸対称殻に適用し、時間または時間とともに単調に変化する量について微分すると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{N}_\xi}{\partial \xi} + \gamma(\dot{N}_\xi - \dot{N}_\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{N}_{\theta\xi}}{\partial \theta} + \omega_\xi \dot{Q}_\xi + a \dot{P}_\xi &= 0 \\ \frac{\partial \dot{N}_{\theta\xi}}{\partial \xi} + \gamma(\dot{N}_{\theta\xi} + \dot{N}_{\theta\theta}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{N}_\theta}{\partial \theta} + \omega_\theta \dot{Q}_\theta + a \dot{P}_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \dot{Q}_\xi}{\partial \xi} + \gamma \dot{Q}_\xi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{Q}_\theta}{\partial \theta} - (\omega_\xi \dot{N}_\xi + \omega_\theta \dot{N}_\theta) + a \dot{P}_\xi &= 0 \\ \dot{Q}_\xi - \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \dot{M}_\xi}{\partial \xi} + \gamma(\dot{M}_\xi - \dot{M}_\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{M}_{\theta\xi}}{\partial \theta} \right] &= 0 \\ \dot{Q}_\theta - \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \dot{M}_{\theta\xi}}{\partial \xi} + \gamma(\dot{M}_{\theta\xi} + \dot{M}_{\theta\theta}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{M}_\theta}{\partial \theta} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $N_\xi, N_\theta, N_{\theta\xi}, N_{\theta\theta}, Q_\xi, Q_\theta$ および $M_\xi, M_\theta, M_{\theta\xi}, M_{\theta\theta}$ は図 2 に示すように殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントである。 P_ξ, P_θ, P_ζ は殻の中央面の単位面積当たりの分布荷重の ξ, θ, ζ 方向の成分であり、殻の内、外面に作用する分布荷重 $\{P_\xi^-, P_\theta^-, P_\zeta^-\}, \{P_\xi^+, P_\theta^+, P_\zeta^+\}$ と次の関係にある。

$$\{P_\xi, P_\theta, P_\zeta\} = \{P_\xi^-, P_\theta^-, P_\zeta^-\} h^-$$

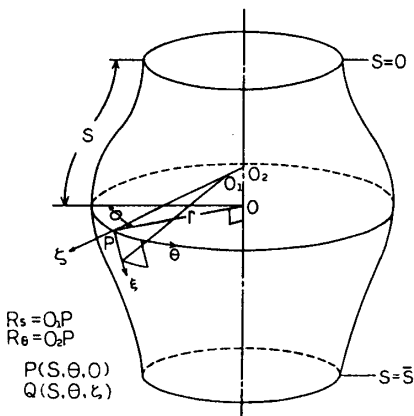
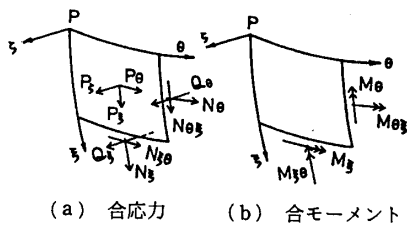
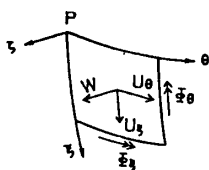


図 1 殻の形状と座標



(a) 合応力 (b) 合モーメント



(c) 変位と回転

図 2 内力と変位

$$-\{P_\xi^+, P_\theta^+, P_\zeta^+\} h^+ \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 P_ξ, P_θ, P_ζ などは座標軸方向のものを正とし、 P_ξ^+ などはこれと反対方向のものを正とする。また、

$$h^\pm = 1 \pm \frac{h}{2} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{1}{R_s R_\theta} \dots\dots\dots (4)$$

次に中央面のひずみ $\epsilon_{\xi m}, \epsilon_{\theta m}$ および $\epsilon_{\xi\theta m}$ を ξ, θ, ζ 方向の変位 U_ξ, U_θ, W で表すと⁽¹⁰⁾,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\xi m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \omega_\xi W \right] \\ \epsilon_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \gamma U_\xi + \omega_\theta W \right] \\ \epsilon_{\xi\theta m} &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\xi}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial \xi} - \gamma U_\theta \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $\epsilon_{\xi\theta m}$ は工学上のせん断ひずみの 1/2 である。

また、曲率の変化量 $\chi_\xi, \chi_\theta, \chi_{\theta\xi}, \chi_{\theta\theta}$ と変位成分との関係は次のようになる⁽¹⁰⁾。

$$\left. \begin{aligned} \chi_\xi &= \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \xi}, \chi_\theta = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \theta} + \gamma \Phi_\xi \right) \\ \chi_{\theta\xi} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \xi} - 2\omega_\xi \Phi_n \right) \\ \chi_{\theta\theta} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \theta} - \gamma \Phi_\theta + 2\omega_\theta \Phi_n \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\Phi_\xi, \Phi_\theta, \Phi_n$ は中央面の回転を示し、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_\xi &= \frac{1}{a} \left(-\frac{\partial W}{\partial \xi} + \omega_\xi U_\xi \right) + 2\epsilon_{\xi\zeta m} \\ \Phi_\theta &= \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \omega_\theta U_\theta \right) + 2\epsilon_{\theta\zeta m} \\ \Phi_n &= \frac{1}{2a} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\xi}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial \xi} + \gamma U_\theta \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

なお $\epsilon_{\xi\zeta m}, \epsilon_{\theta\zeta m}$ は ζ 方向のせん断ひずみである。

殻厚中央面から ζ の距離にある点 Q のひずみ成分は次式で表される⁽¹⁰⁾。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\xi &= (\epsilon_{\xi m} + \zeta \chi_\xi) / L_\xi, \epsilon_\theta = (\epsilon_{\theta m} + \zeta \chi_\theta) / L_\theta \\ \epsilon_{\theta\xi} &= \{ (\epsilon_{\xi\theta m} + \Phi_n) / 2 + \zeta (\chi_{\theta\xi} + \Phi_n / R_\theta) \} / L_\xi \\ &\quad + \{ (\epsilon_{\theta\xi m} - \Phi_n) / 2 + \zeta (\chi_{\theta\xi} - \Phi_n / R_\theta) \} / L_\theta \\ \epsilon_{\xi\zeta} &= \epsilon_{\xi\zeta m} / L_\xi, \epsilon_{\theta\zeta} = \epsilon_{\theta\zeta m} / L_\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $L_\xi = 1 + \zeta / R_s, L_\theta = 1 + \zeta / R_\theta$

次に、Hill の直交異方性理論を用いて、Perzyna の弾/粘塑性構成式⁽⁸⁾を直交異方性の場合に拡張する。異方性の主軸を ξ, θ, ζ とし、殻厚方向の垂直応力を省略すると、相当応力 $\bar{\sigma}$ は次の式で与えられる。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2(F+G+H)} [(G+H)\sigma_\xi^2 - 2H\sigma_\xi\sigma_\theta + (F+H)\sigma_\theta^2 + 2L\sigma_\zeta^2 + 2M\sigma_\xi^2 + 2N\sigma_\theta^2]^{1/2}} \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 F, G, H, L, M, N は材料の異方性パラメータである。式(9)の $\bar{\sigma}$ を塑性ポテンシャルとするとき

この配は、

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ij}} \right] &= \frac{3}{2\sigma} [S_\epsilon, S_\theta, 2S_{\sigma\epsilon}, 2S_{\sigma\theta}, 2S_{\epsilon\theta}] \\ &= \frac{3}{2\sigma} S_{ij} \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} S_\epsilon &= \frac{(G+H)\sigma_\epsilon - H\sigma_\theta}{F+G+H}, S_\theta = \frac{(F+H)\sigma_\theta - H\sigma_\epsilon}{F+G+H} \\ S_{\sigma\epsilon} &= \frac{L\sigma_{\sigma\epsilon}}{F+G+H}, S_{\sigma\theta} = \frac{M\sigma_{\sigma\theta}}{F+G+H} \\ S_{\epsilon\theta} &= \frac{N\sigma_{\epsilon\theta}}{F+G+H} \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

全ひずみを弾性ひずみと粘塑性ひずみの和で表すと、直交異方性の場合の応力-ひずみ関係式は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_\epsilon &= \frac{E_\epsilon}{1-\nu_{\epsilon\theta}\nu_{\theta\epsilon}} (\dot{\epsilon}_\epsilon + \nu_{\theta\epsilon}\dot{\epsilon}_\theta) - \dot{\sigma}_\epsilon^{vp} \\ \dot{\sigma}_\theta &= \frac{E_\theta}{1-\nu_{\theta\epsilon}\nu_{\epsilon\theta}} (\nu_{\epsilon\theta}\dot{\epsilon}_\epsilon + \dot{\epsilon}_\theta) - \dot{\sigma}_\theta^{vp} \\ \dot{\sigma}_{\epsilon\theta} &= 2G_{\epsilon\theta}\dot{\epsilon}_{\epsilon\theta} - \dot{\sigma}_{\epsilon\theta}^{vp} \\ \dot{\sigma}_{\sigma\epsilon} &= 2G_{\sigma\epsilon}\dot{\epsilon}_{\sigma\epsilon} - \dot{\sigma}_{\sigma\epsilon}^{vp}, \dot{\sigma}_{\sigma\theta} = 2G_{\sigma\theta}\dot{\epsilon}_{\sigma\theta} - \dot{\sigma}_{\sigma\theta}^{vp} \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_\epsilon^{vp} &= \frac{E_\epsilon}{1-\nu_{\epsilon\theta}\nu_{\theta\epsilon}} (\dot{\epsilon}_\epsilon^{vp} + \nu_{\theta\epsilon}\dot{\epsilon}_\theta^{vp}) \\ \dot{\sigma}_\theta^{vp} &= \frac{E_\theta}{1-\nu_{\theta\epsilon}\nu_{\epsilon\theta}} (\nu_{\epsilon\theta}\dot{\epsilon}_\epsilon^{vp} + \dot{\epsilon}_\theta^{vp}) \\ \dot{\sigma}_{\epsilon\theta}^{vp} &= 2G_{\epsilon\theta}\dot{\epsilon}_{\epsilon\theta}^{vp} \\ \dot{\sigma}_{\sigma\epsilon}^{vp} &= 2G_{\sigma\epsilon}\dot{\epsilon}_{\sigma\epsilon}^{vp} \\ \dot{\sigma}_{\sigma\theta}^{vp} &= 2G_{\sigma\theta}\dot{\epsilon}_{\sigma\theta}^{vp} \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

ここに、粘塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^{vp}$ は、Perzyna の式⁽⁹⁾より、

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \Psi(f) \rangle \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \right] = \frac{3}{2\sigma} \gamma \langle \Psi(f) \rangle S_{ij} \dots (14)$$

ここに、 $\langle \cdot \rangle$ は時間に関する微分を示し、 $E_\epsilon, E_\theta, G_{\sigma\epsilon}, G_{\sigma\theta}, G_{\epsilon\theta}$ は弾性係数、 $\nu_{\epsilon\theta}, \nu_{\theta\epsilon}$ はポアソン比、 γ は粘性パラメータである。また、 $\Psi(f)$ は次の定義によるものである。

$$\left. \begin{aligned} f \leq 0 \text{ のとき } &\langle \Psi(f) \rangle = 0 \\ f > 0 \text{ のとき } &\langle \Psi(f) \rangle = \Psi(f) \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

ここに、 f は

$$f = (\sigma - \sigma^*) / \sigma^* \dots (16)$$

で、 $f=0$ は Hill の降伏曲面を表す。 σ^* は、ひずみ速度が十分小さい通常の引張試験における応力-ひずみ関係から得られ、一般に次の相当粘塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^{vp}$ の関数となる。

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}^{vp} &= \sqrt{\frac{2}{3}(F+G+H)} \int \left\{ \frac{(F+H)d\epsilon_\epsilon^{vp2} + 2Hd\epsilon_\epsilon^{vp} \cdot d\epsilon_\theta^{vp} + (G+H)d\epsilon_\theta^{vp2}}{FG+GH+HF} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2d\epsilon_{\sigma\epsilon}^{vp2}}{L} + \frac{2d\epsilon_{\sigma\theta}^{vp2}}{M} + \frac{2d\epsilon_{\epsilon\theta}^{vp2}}{N} \right\}^{1/2} \dots (17) \end{aligned}$$

殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントは式(8)、(12)を用い、かつ積分に関する近似

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} L_\theta/L_\epsilon d\zeta &\simeq h \left[1 + \frac{h^2}{12R_s} \left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \right], \int_{-h/2}^{h/2} L_\theta/L_\epsilon \zeta d\zeta \simeq -\frac{h^3}{12} \left[\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right] \\ \int_{-h/2}^{h/2} L_\theta/L_\epsilon \zeta^2 d\zeta &\simeq \frac{h^3}{12} \left[1 + \frac{3}{20} \frac{h^2}{R_s} \left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \right] \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

を行うと、次式のようになる。なお h は殻厚である。

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}_\epsilon &= \left\{ \int E_\epsilon d\zeta / (1-\nu_{\epsilon\theta}\nu_{\theta\epsilon}) \right\} \left[\dot{\epsilon}_{\epsilon m} + \nu_{\theta\epsilon}\dot{\epsilon}_{\theta m} - \frac{h^2}{12a} (\omega_\epsilon - \omega_\theta) \dot{\kappa}_\epsilon \right] - \dot{N}_\epsilon^{vp} \\ \dot{N}_\theta &= \left\{ \int E_\theta d\zeta / (1-\nu_{\theta\epsilon}\nu_{\epsilon\theta}) \right\} \left[\dot{\epsilon}_{\theta m} + \nu_{\epsilon\theta}\dot{\epsilon}_{\epsilon m} - \frac{h^2}{12a} (\omega_\theta - \omega_\epsilon) \dot{\kappa}_\theta \right] - \dot{N}_\theta^{vp} \\ \dot{N}_{\epsilon\theta} &= \left\{ \int 2G_{\epsilon\theta} d\zeta \right\} \left[\dot{\epsilon}_{\epsilon\theta m} + \frac{h^2}{12a} (\omega_\epsilon - \omega_\theta) \left\{ \frac{1}{2R_s} (\dot{\epsilon}_{\epsilon\theta m} - \dot{\Phi}_n) - \dot{\kappa}_{\epsilon\theta} \right\} \right] - \dot{N}_{\epsilon\theta}^{vp} \\ \dot{N}_{\theta\epsilon} &= \left\{ \int 2G_{\theta\epsilon} d\zeta \right\} \left[\dot{\epsilon}_{\theta\epsilon m} + \frac{h^2}{12a} (\omega_\theta - \omega_\epsilon) \left\{ \frac{1}{2R_\theta} (\dot{\epsilon}_{\theta\epsilon m} + \dot{\Phi}_n) - \dot{\kappa}_{\theta\epsilon} \right\} \right] - \dot{N}_{\theta\epsilon}^{vp} \\ \dot{M}_\epsilon &= \left\{ \int E_\epsilon \zeta^2 d\zeta / (1-\nu_{\epsilon\theta}\nu_{\theta\epsilon}) \right\} \left[\dot{\kappa}_\epsilon + \nu_{\theta\epsilon}\dot{\kappa}_\theta - \frac{1}{a} (\omega_\epsilon - \omega_\theta) \dot{\epsilon}_{\epsilon m} \right] - \dot{M}_\epsilon^{vp} \\ \dot{M}_\theta &= \left\{ \int E_\theta \zeta^2 d\zeta / (1-\nu_{\theta\epsilon}\nu_{\epsilon\theta}) \right\} \left[\dot{\kappa}_\theta + \nu_{\epsilon\theta}\dot{\kappa}_\epsilon - \frac{1}{a} (\omega_\theta - \omega_\epsilon) \dot{\epsilon}_{\theta m} \right] - \dot{M}_\theta^{vp} \\ \dot{M}_{\epsilon\theta} &= \left\{ \int 2G_{\epsilon\theta} \zeta^2 d\zeta \right\} \left[\dot{\kappa}_{\epsilon\theta} + \dot{\kappa}_{\theta\epsilon} - \frac{1}{2a} (\omega_\theta - \omega_\epsilon) (\dot{\Phi}_n - \dot{\epsilon}_{\epsilon\theta m}) \right] - \dot{M}_{\epsilon\theta}^{vp} \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{M}_{\theta\epsilon} &= \left\{ \int 2G_{\theta\epsilon} \zeta^2 d\zeta \right\} \left[\dot{\chi}_{\theta\epsilon} + \dot{\chi}_{\theta\epsilon} - \frac{1}{2a}(\omega_\theta - \omega_\epsilon)(\dot{\Phi}_n + \dot{\epsilon}_{\theta m}) \right] - \dot{M}_{\theta\epsilon}^{vp} \\ \dot{Q}_\epsilon &= \frac{5}{6} \left\{ \int 2G_{\epsilon\zeta} d\zeta \right\} \dot{\epsilon}_{\epsilon m} - \dot{Q}_\epsilon^{vp}, \quad \dot{Q}_\theta = \frac{5}{6} \left\{ \int 2G_{\theta\zeta} d\zeta \right\} \dot{\epsilon}_{\theta m} - \dot{Q}_\theta^{vp} \end{aligned} \right\}$$

ここで、()^{vp} は粘塑性による見掛けの内力成分を示し、次式によって見掛けの応力の変化率から計算できる。

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{N}_\epsilon^{vp}, \dot{N}_{\theta\epsilon}^{vp}, \dot{Q}_\epsilon^{vp}, \dot{M}_\epsilon^{vp}, \dot{M}_{\theta\epsilon}^{vp}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}_\epsilon^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\epsilon}^{vp}, \dot{\sigma}_{\epsilon\zeta}^{vp}, \dot{\sigma}_\epsilon^{vp}\zeta, \dot{\sigma}_{\theta\epsilon}^{vp}\zeta\} L_\theta d\zeta \\ \{\dot{N}_\theta^{vp}, \dot{N}_{\theta\theta}^{vp}, \dot{Q}_\theta^{vp}, \dot{M}_\theta^{vp}, \dot{M}_{\theta\theta}^{vp}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}_\theta^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\theta}^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\zeta}^{vp}, \dot{\sigma}_\theta^{vp}\zeta, \dot{\sigma}_{\theta\theta}^{vp}\zeta\} L_\epsilon d\zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

以上で50個の独立変数 $\dot{N}_\epsilon, \dot{N}_\theta, \dot{N}_{\theta\epsilon}, \dot{N}_{\theta\theta}, \dot{M}_\epsilon, \dot{M}_\theta, \dot{M}_{\theta\epsilon}, \dot{M}_{\theta\theta}, \dot{Q}_\epsilon, \dot{Q}_\theta, \dot{N}_\epsilon^{vp}, \dot{N}_\theta^{vp}, \dot{N}_{\theta\epsilon}^{vp}, \dot{N}_{\theta\theta}^{vp}, \dot{M}_\epsilon^{vp}, \dot{M}_\theta^{vp}, \dot{M}_{\theta\epsilon}^{vp}, \dot{M}_{\theta\theta}^{vp}, \dot{Q}_\epsilon^{vp}, \dot{Q}_\theta^{vp}, \dot{\sigma}_\epsilon, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_{\theta\epsilon}, \dot{\sigma}_{\theta\theta}, \dot{\sigma}_{\epsilon\zeta}, \dot{\sigma}_{\theta\zeta}, \dot{\sigma}_{\theta\epsilon}^{vp}, \dot{\sigma}_\epsilon^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\epsilon}^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\zeta}^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\theta}^{vp}, \dot{\epsilon}_\epsilon^{vp}, \dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta\epsilon}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\epsilon\zeta}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^{vp}, \dot{U}_\epsilon, \dot{U}_\theta, \dot{W}, \dot{\Phi}_\epsilon, \dot{\Phi}_\theta, \dot{\Phi}_n, \dot{\epsilon}_{\epsilon m}, \dot{\epsilon}_{\theta m}, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta m}, \dot{\epsilon}_{\epsilon\zeta m}, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta m}, \dot{\chi}_\epsilon, \dot{\chi}_\theta, \dot{\chi}_{\theta\epsilon}, \dot{\chi}_{\theta\theta}$ に対して、式(2), (5)~(7), (12)~(14), (19), (20)の50個の式が用意されたことになる。

2.2 支配方程式

一般に非対称問題を解析するには、各変数を θ 方向にフーリエ級数で表し、その係数を定めればよい。そこで上に示した50個の変数のうち、粘塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_\epsilon^{vp}, \dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta\epsilon}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\epsilon\zeta}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta}^{vp}$ を除く45個の変数と分布荷重をフーリエ級数に展開する。フーリエ級数には一般に対応する小文字を採用するが、 σ には s を用いる⁽⁶⁾。

これらのフーリエ展開式を前述の基礎式に代入し、フーリエ係数に関する対応する式をつくり、これらの式から順次未知数を消去すると、最後に平衡方程式は変位 u_ϵ, u_θ, w および回転 $\phi_\epsilon, \phi_\theta$ に関する次の五元連立二階微分方程式になる。なお、フーリエ級数の添字 (n) は便宜上省略する。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \ddot{u}_\epsilon'' + a_{12} \ddot{u}_\epsilon' + a_{13} \ddot{u}_\epsilon + a_{14} \ddot{u}_\theta + a_{15} \ddot{u}_\theta + a_{16} \ddot{w}' + a_{17} \ddot{w} + a_{18} \ddot{\phi}_\epsilon' + a_{19} \ddot{\phi}_\epsilon + a_{10} \ddot{\phi}_\theta + a_{11} \ddot{\phi}_\theta &= c_1 \\ a_{12} \ddot{u}_\epsilon' + a_{13} \ddot{u}_\epsilon + a_{14} \ddot{u}_\theta' + a_{15} \ddot{u}_\theta + a_{16} \ddot{u}_\theta + a_{17} \ddot{w}' + a_{18} \ddot{w} + a_{19} \ddot{\phi}_\epsilon' + a_{20} \ddot{\phi}_\epsilon + a_{21} \ddot{\phi}_\theta &= c_2 \\ a_{22} \ddot{u}_\epsilon + a_{23} \ddot{u}_\theta + a_{24} \ddot{u}_\theta + a_{25} \ddot{w}'' + a_{26} \ddot{w}' + a_{27} \ddot{w} + a_{28} \ddot{\phi}_\epsilon' + a_{29} \ddot{\phi}_\epsilon + a_{30} \ddot{\phi}_\theta &= c_3 \\ a_{31} \ddot{u}_\epsilon' + a_{32} \ddot{u}_\epsilon + a_{33} \ddot{u}_\theta + a_{34} \ddot{u}_\theta + a_{35} \ddot{w}' + a_{36} \ddot{w} + a_{37} \ddot{\phi}_\epsilon' + a_{38} \ddot{\phi}_\epsilon + a_{39} \ddot{\phi}_\theta + a_{40} \ddot{\phi}_\theta + a_{41} \ddot{\phi}_\theta &= c_4 \\ a_{42} \ddot{u}_\epsilon + a_{43} \ddot{u}_\theta' + a_{44} \ddot{u}_\theta + a_{45} \ddot{u}_\theta + a_{46} \ddot{w} + a_{47} \ddot{\phi}_\epsilon' + a_{48} \ddot{\phi}_\epsilon + a_{49} \ddot{\phi}_\theta' + a_{50} \ddot{\phi}_\theta + a_{51} \ddot{\phi}_\theta &= c_5 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

ここで $a_1 \sim a_{51}$ は殻の形状と弾性係数 $E_\epsilon \sim G_{\theta\epsilon}, \nu_{\theta\epsilon}, \nu_{\theta\theta}$ とから定まる係数であり、 $c_1 \sim c_5$ は殻の形状のほか、分布荷重および粘塑性による見掛けの内力成分から定まる定数で、次式によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \dot{n}_\epsilon^{vp'} + \gamma(\dot{n}_\epsilon^{vp} - \dot{n}_\theta^{vp}) + \frac{n}{\rho} \dot{n}_{\theta\epsilon}^{vp} + \omega_\epsilon \dot{q}_\epsilon^{vp} - a \dot{p}_\epsilon, \quad c_2 = \dot{n}_{\theta\epsilon}^{vp'} + \gamma(\dot{n}_{\theta\epsilon}^{vp} + \dot{n}_{\theta\theta}^{vp}) - \frac{n}{\rho} \dot{n}_\theta^{vp} + \omega_\theta \dot{q}_\theta^{vp} - a \dot{p}_\theta \\ c_3 &= \dot{q}_\epsilon^{vp'} + \gamma \dot{q}_\epsilon^{vp} + \frac{n}{\rho} \dot{q}_\theta^{vp} - \omega_\epsilon \dot{n}_\epsilon^{vp} - \omega_\theta \dot{n}_\theta^{vp} - a \dot{p}_\zeta, \quad c_4 = a \dot{q}_\epsilon^{vp} - \dot{m}_\epsilon^{vp'} - \gamma(\dot{m}_\epsilon^{vp} - \dot{m}_\theta^{vp}) - \frac{n}{\rho} \dot{m}_{\theta\epsilon}^{vp} \\ c_5 &= a \dot{q}_\theta^{vp} - \dot{m}_{\theta\epsilon}^{vp'} - \gamma(\dot{m}_{\theta\epsilon}^{vp} + \dot{m}_{\theta\theta}^{vp}) + \frac{n}{\rho} \dot{m}_\theta^{vp} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

また、式(8), (12), (19)からひずみと曲率の変化量を消去し、フーリエ級数表示することにより、応力は合応力および合モーメントから次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{s}_\epsilon &= \{(\dot{n}_\epsilon + \dot{n}_\epsilon^{vp})/h + (\dot{m}_\epsilon + \dot{m}_\epsilon^{vp})(12\zeta/h^3)\}/L_\theta - \dot{s}_\epsilon^{vp}, \quad \dot{s}_\theta = \{(\dot{n}_\theta + \dot{n}_\theta^{vp})/h + (\dot{m}_\theta + \dot{m}_\theta^{vp})(12\zeta/h^3)\}/L_\epsilon - \dot{s}_\theta^{vp} \\ \dot{s}_{\theta\epsilon} &= \{(\dot{n}_{\theta\epsilon} + \dot{n}_{\theta\epsilon}^{vp})/h + (\dot{m}_{\theta\epsilon} + \dot{m}_{\theta\epsilon}^{vp})(12\zeta/h^3)\}/L_\theta - \dot{s}_{\theta\epsilon}^{vp}, \quad \dot{s}_{\epsilon\zeta} = 3(\dot{q}_\epsilon + \dot{q}_\epsilon^{vp})(1-4\zeta^2/h^2)/(2hL_\theta) - \dot{s}_{\epsilon\zeta}^{vp} \\ \dot{s}_{\theta\zeta} &= 3(\dot{q}_\theta + \dot{q}_\theta^{vp})(1-4\zeta^2/h^2)/(2hL_\epsilon) - \dot{s}_{\theta\zeta}^{vp} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

式(22), (23)の粘塑性に関する内力成分の変化率のフーリエ係数は、式(13), (20)のフーリエ展開式から、それぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{n}_\epsilon^{vp(n)}, \dot{m}_\epsilon^{vp(n)}\} \cos n\theta &= \frac{E_\epsilon}{1-\nu_{\theta\epsilon}\nu_{\theta\theta}} \int_{-h/2}^{h/2} \{1, \zeta\} (\dot{\epsilon}_\epsilon^{vp} + \nu_{\theta\epsilon} \dot{\epsilon}_\theta^{vp}) L_\theta d\zeta \\ \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{n}_\theta^{vp(n)}, \dot{m}_\theta^{vp(n)}\} \cos n\theta &= \frac{E_\theta}{1-\nu_{\theta\theta}\nu_{\theta\epsilon}} \int_{-h/2}^{h/2} \{1, \zeta\} (\dot{\epsilon}_\theta^{vp} + \nu_{\theta\theta} \dot{\epsilon}_\epsilon^{vp}) L_\epsilon d\zeta \\ \sum_{n=1}^{\infty} \{\dot{n}_{\theta\epsilon}^{vp(n)}, \dot{m}_{\theta\epsilon}^{vp(n)}\} \sin n\theta &= 2G_{\theta\epsilon} \int_{-h/2}^{h/2} \{1, \zeta\} \dot{\epsilon}_{\theta\epsilon}^{vp} L_\theta d\zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{n}_{\theta\epsilon}^{vp(n)}, \dot{m}_{\theta\epsilon}^{vp(n)} \} \sin n\theta &= 2G_{\theta\theta} \int_{-h/2}^{h/2} \{1, \zeta\} \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^{vp} L_{\epsilon} d\zeta \\ \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \dot{q}_{\epsilon}^{vp(n)} \cos n\theta, \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_{\theta}^{vp(n)} \sin n\theta \right\} &= 2 \int_{-h/2}^{h/2} \{ G_{\epsilon\epsilon} \dot{\epsilon}_{\epsilon\epsilon}^{vp} L_{\theta}, G_{\theta\epsilon} \dot{\epsilon}_{\theta\epsilon}^{vp} L_{\epsilon} \} d\zeta \\ \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{s}_{\epsilon}^{vp(n)}, \dot{s}_{\theta}^{vp(n)} \} \cos n\theta &= \frac{1}{1-\nu_{\theta\theta}\nu_{\theta\epsilon}} \{ E_{\epsilon}(\dot{\epsilon}_{\epsilon}^{vp} + \nu_{\theta\epsilon}\dot{\epsilon}_{\theta}^{vp}), E_{\theta}(\dot{\epsilon}_{\theta}^{vp} + \nu_{\theta\theta}\dot{\epsilon}_{\epsilon}^{vp}) \} \\ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \dot{s}_{\theta\theta}^{vp(n)} \sin n\theta, \sum_{n=0}^{\infty} \dot{s}_{\epsilon\epsilon}^{vp(n)} \cos n\theta, \sum_{n=1}^{\infty} \dot{s}_{\theta\epsilon}^{vp(n)} \sin n\theta \right\} &= 2 \{ G_{\theta\theta} \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^{vp}, G_{\epsilon\epsilon} \dot{\epsilon}_{\epsilon\epsilon}^{vp}, G_{\theta\epsilon} \dot{\epsilon}_{\theta\epsilon}^{vp} \} \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

式(24), (25)の右辺の粘塑性ひずみ速度は応力値から式(14)によって計算できる。また積分にはシンプソンの1/3則を用いる。

3. 数値計算法

ある任意の計算段階における変位と回転の変化率は、式(21)を適当な境界条件のもとで解けば得られ、またこれらを用いて、内力成分の変化率は、式(5)~(7), (19), (23)から求められる。しかしながら、式(21)を厳密に理論解析することは困難であるから、差分法によって数値的に解を求める。この数値解法は、著者らがすでに発表した薄肉殻の場合⁽³⁾とほぼ同様であるので、ここでは紙面の都合もあり省略する。薄肉殻の場合には、式(21)の5元連立二階微分方程式に相当する式が、 $u_{\epsilon}, u_{\theta}, w, m_{\epsilon}$ に関する四元連立方程式となっている。一般に弾/粘塑性問題の解は、これらの変化率から求められる各計算段階の増分を積分することによって得られる。

4. 実験

ここでは、形状が単純で、実験の容易な両端自由の円筒殻について実験を行い、計算結果と実験結果を比較する。

4.1 試験片と材料定数 実験に用いた円筒殻試験片は、外径60mm、内径46mmのチタン引抜管から内外面を切削して仕上げた。形状寸法は、平均半径 $R=25.4$ mm, 厚さ $h=2.7$ mm, 長さ $l=86$ mm とし、寸法比 R/h は9.4である(図3)。

一方、この材料の材料特性を求めるため、この引抜管から軸方向、円周方向および45°方向の3方向の単軸引張試験片を切り出し、それぞれの試験片について種々のひずみ速度 ($\dot{\epsilon}=0.05\sim 300 \mu/s$) で引張試験を行った。試験片の採取方法については、著者らがすでに発表した軸対称荷重を受ける場合⁽⁷⁾と全く同様なので、ここでは省略する。この引張試験の結果から次のように材料定数の値を定めた。

$$\left. \begin{aligned} \text{ヤング率: } E_{\epsilon} &= E_{\theta} = 107 \text{ GPa} \\ \text{ポアソン比: } \nu_{\theta\theta} &= \nu_{\theta\epsilon} = 0.35 \\ \text{静的応力-ひずみ関係式:} & \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma^* &= 482(9.18 \times 10^{-5} + \bar{\epsilon}^{vp})^{0.13} \text{ MPa} \\ \text{初期降伏応力: } \sigma_Y &= 144 \text{ MPa} \\ \text{粘性パラメータ: } \gamma &= 0.0015 \text{ 1/s} \\ \Psi(f) &= [(\bar{\sigma} - \sigma^*)/\sigma^*]^{3.8} \\ \text{異方性パラメータ: } G/F &= 1.59 \\ H/F &= 2.20, N/F = 6.30 \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

異方性パラメータ L, M については、殻厚方向の試験片採取が困難なこと、またその影響が小さいことのために、 $S_{\theta\epsilon} = \sigma_{\theta\epsilon}, S_{\epsilon\epsilon} = \sigma_{\epsilon\epsilon}$ [式(11)] とみなし、 $L/F = M/F = 4.79$ とした。

4.2 実験方法 実験装置の概略を図3に示す。荷重は、定荷重負荷装置を有する試験機によって、上下ポンチを介してチタン円筒殻試験片に、半径方向の圧縮力を時間に対してステップ状に加えた(図4)。図4

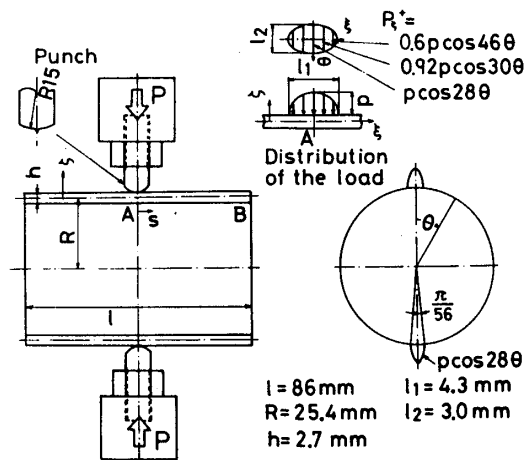


図3 実験装置および円筒殻試験片

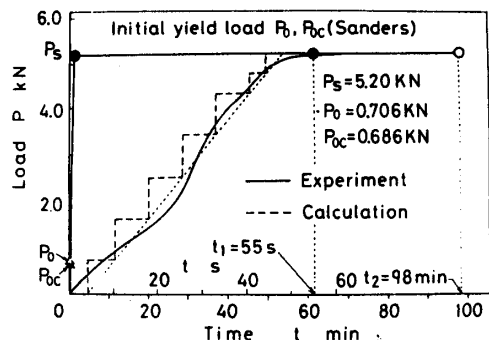


図4 荷重

の P_0 は初期降伏荷重 (計算値) を示し, P_{0c} は殻厚方向のせん断変形を考慮しない薄肉理論による値である。ひずみの測定は試験片外表面の子午線上 ($\theta=0, 90, 180, 270^\circ$) および円周上 ($\xi=0$) に, それぞれ子午線方向と円周方向に計 62 枚のひずみゲージをてん付して行った。この中, 特に荷重点近傍の数箇所のひずみゲージには, X-Y レコーダを接続して時間に対して連続的にひずみを測定した。ほかの点のひずみは, 1~10 分ごとに測定した。測定は負荷後ほぼひずみが一定になる 98 分まで行った。

4.3 実験値と計算値の比較 問題の対称性から, 計算は円筒殻の 1/8 形状についてのみ行えば十分である。円筒殻の形状パラメータは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a=l, \xi=s/l, \rho=1, \rho'=0, \gamma=0 \\ \omega_\theta=1, \omega_\xi=\omega_\xi'=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

また ξ の差分間隔 Δ は, 差分点の数を N として,

$$\Delta=l/\{2a(N-1)\}=1/\{2(N-1)\} \dots\dots\dots (28)$$

となる。

境界条件は, 点 A では対称性により,

$$\dot{U}_\xi = \dot{\Phi}_\xi = \dot{N}_{\xi\theta} = \dot{M}_{\xi\theta} = \dot{Q}_\xi = 0 \dots\dots\dots (29)$$

点 B では自由端の条件を用いて,

$$\dot{N}_\xi = \dot{N}_{\xi\theta} = \dot{M}_\xi = \dot{M}_{\xi\theta} = \dot{Q}_\xi = 0 \dots\dots\dots (30)$$

差分点数は子午線方向に $N=51$ とし, 板厚方向には 19 個の格子点を採用した。また, フーリエ級数の項数 $[=(n+1)/2]$ は $n=79$ とした。これらの数値は, これを種々変化させたときの解の収束性と, 利用した計算機の能力 (FACOM M-382) を考慮して決定した。

円筒殻の中央部に局部的に作用する圧力の分布は, ポンチと試験片との間にはさんだ圧力判別シートの色の変化から, 子午線方向に 4.3 mm, 円周方向に 3.0 mm のほぼだ円形であることがわかった。本解析では, 子午線方向 ($0 \leq s \leq 2.15$ mm) にだ円状で, 円周方向には \cos 状の次式に示す分布荷重を仮定した (図 3)。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq s \leq 0.43 \text{ mm} : P_\xi^+ = p \cos 28\theta \\ 0.43 \leq s \leq 1.29 \text{ mm} : P_\xi^+ = 0.92p \cos 30\theta \\ 1.29 \leq s \leq 2.15 \text{ mm} : P_\xi^+ = 0.6p \cos 46\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ここで, p は点 A ($s=0, \theta=0^\circ$) での分布荷重の大きさを示し, 荷重 P と次の関係にある。

$$\left. \begin{aligned} P = 4p(R+h/2) \left[0.43 \int_0^{\pi/56} \cos 28\theta d\theta \right. \\ \left. + 0.86 \int_0^{\pi/60} 0.92 \cos 30\theta d\theta \right. \\ \left. + 0.86 \int_0^{\pi/92} 0.6 \cos 46\theta d\theta \right] = 5.67p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

荷重の時間的变化に対しては, 図 4 に示すように立上り部分を階段状に近似して計算を行った。

ひずみ速度は時間とともに変化するので, 時間間隔 $(\Delta t)_i$ の選び方によっては, 計算の無駄や誤差が大きくなる。本計算では, Zienkiewicz および Cormeau⁽¹¹⁾ による時間間隔の安定限界

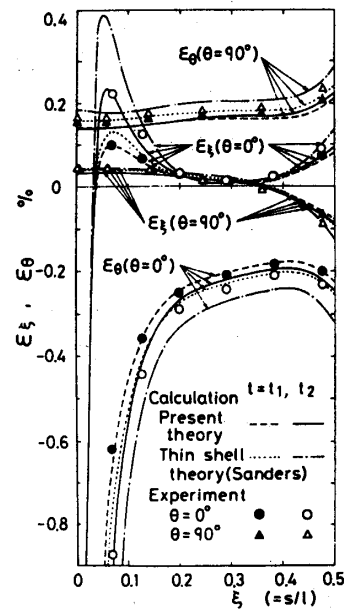
$$(\Delta t)_i \leq \frac{4(1+\nu)}{3\gamma E} \left(\frac{\sigma^*}{\Psi'} \right)_i = \Delta t_0 \dots\dots\dots (33)$$

(ここで, $\Psi' = d\Psi/df, i$: 計算段階)

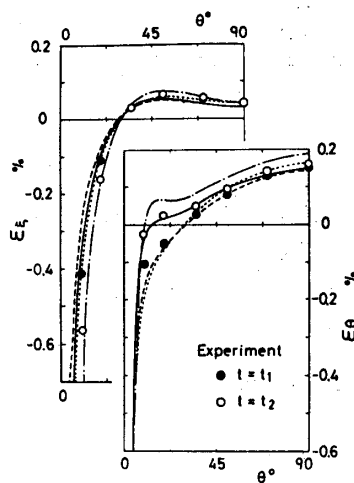
を参考にし, $(\Delta t)_i = 0.9\Delta t_0$ を用いた。

次に実験値と計算値の比較について述べる。

図 5 (a), (b) は, それぞれ $\theta=0^\circ$ と 90° の外表面の軸方向ひずみ ϵ_ξ と円周方向ひずみ ϵ_θ の分布, ならびに $\xi=0$ の外表面の $\epsilon_\xi, \epsilon_\theta$ の分布を示す。黒印 (●, ▲) と破線は, 負荷開始 55 秒後 ($t=t_1$) における実験値と計算値であり, 白印 (○, △) と実線は, 負荷後 98



(a) $\theta=0, 90^\circ$



(b) $\xi=0$

図 5 $\epsilon_\xi, \epsilon_\theta$ 分布

分 ($t=t_2$) のものである。点線および一点鎖線は、殻厚方向のせん断変形を考慮しない薄肉理論による計算値である**1。

図から、円筒殻中央部の荷重負荷部近傍で t_1 から t_2 までの間のひずみの増加が顕著になっていることがわかる。また薄肉理論による解と、せん断変形の影響を考慮した本理論による解との間には差が見られ、薄肉理論による方がひずみの増加量が大きくなっている。実験値と計算値とは比較的よく一致している。

図6は、荷重負荷部近傍の点E ($s=0, \theta=10^\circ, \xi=h/2$)、F ($s=6, \theta=0^\circ, \xi=h/2$) での、ひずみ $\epsilon_\xi, \epsilon_\theta$ の時間的変化である。実線は実験値を示し、破線および点線は両理論による計算値である。左図は負荷直後の90秒間の時間的変化を、時間軸を拡大して示したものであ

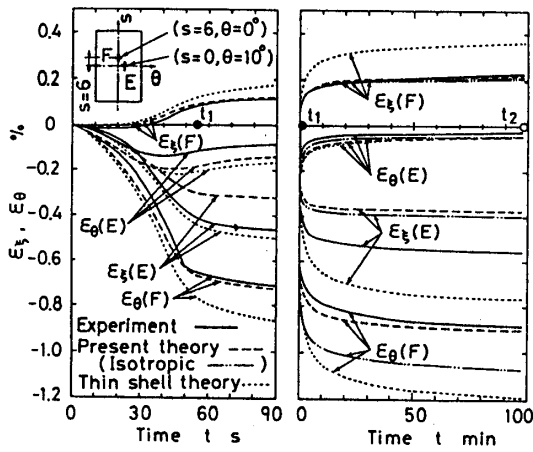


図6 $\epsilon_\xi, \epsilon_\theta$ の時間的変化

る。点Eでの ϵ_θ は、実験値と理論値の間に多少差があるが、ほかのひずみはよく一致しており、図5の結果と合せ考えて、本解法の妥当性がうかがえる。なお、本解法で異方性を無視した解を二点鎖線で示す。ひずみが大きくなると、異方性を無視できないことがわかる。

図7~9に、計算による変位成分、内力成分の分布、ならびに降伏領域の進展の様子を示す。図には、初期降伏荷重 P_0 、および時刻 t_1 と t_2 における分布を、それぞれ破線と実線で示す。本解法と比較するため、せん断変形の影響を考慮しない薄肉理論による解も合せ

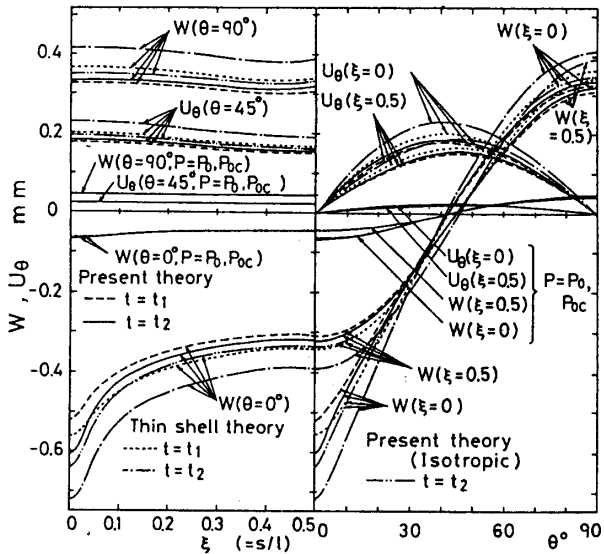
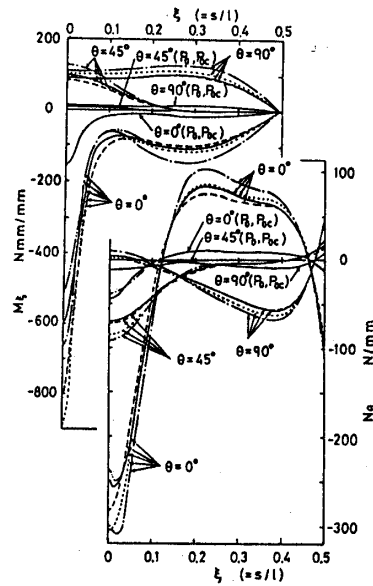
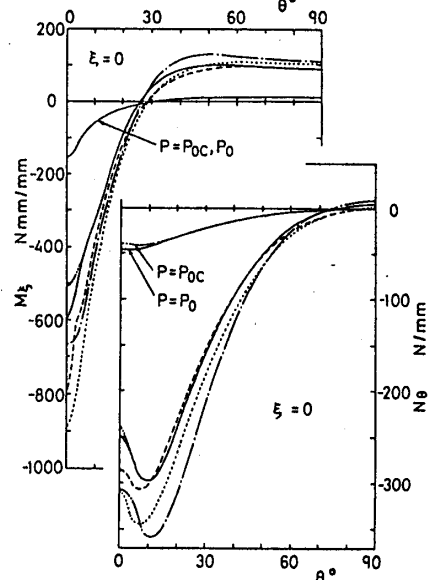


図7 W, U_θ 分布 ($\theta=0, 45, 90^\circ, \xi=0, 0.5$)



(a) $\theta=0, 45, 90^\circ$



(b) $\xi=0$

図8 N_θ, M_ξ 分布

**1 著者らが別途計算したもので未発表。

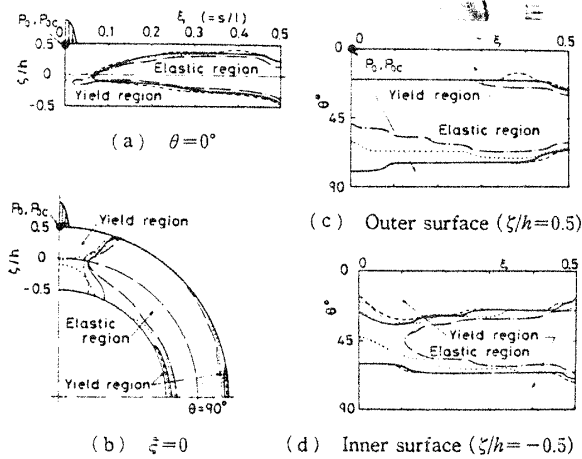


図9 降伏領域の進展

示す。なお、図中の二点鎖線は、本解法で異方性を無視した解である。

図7は W の子午線 $\theta=0, 90^\circ$ 上と、円周 $\xi=0, 0.5$ 上の分布、および U_θ の子午線 $\theta=45^\circ$ 上と円周 $\xi=0, 0.5$ 上の分布である。 W は荷重負荷部で大きい、ほかの部分では自由端までほぼ一様である。 U_θ は $\theta=45^\circ$ 付近で大きな値を示すが、子午線方向にはあまり変化しない。ここには示さなかったが、 U_θ は W に比べて非常に小さい。したがって変形後の形状は全体としては、ほぼだ円筒となり、荷重負荷部のみが大きく内側に変位することになる。 t_1 から t_2 までの時間的変化は負荷部で大きく、また薄肉理論による解のほうが、本理論に比べて一般に大きな値を示している。

図8(a), (b)は、それぞれ N_θ と M_ξ の子午線 $\theta=0, 45, 90^\circ$ 上および円周 $\xi=0$ 上の分布である。 N_θ, M_ξ とも時刻 t_1 から t_2 までの間に荷重負荷部では緩和し、その他の領域では増加している。また殻全体にわたって薄肉殻理論による値のほうが本理論値よりも大きな値を示している。

図9は降伏領域の進展の様子である。本理論では $P_0=706$ N、薄肉理論では $P_{0c}=686$ Nのとき、円筒殻の点A($\xi=0, \theta=0^\circ$)の外表面において初めて降伏する。塑性領域は $\theta=0, 90^\circ$ の子午線に沿って、軸方向に急速に進展する。また塑性領域の広がり方は、薄肉理論によるほうが大きい。

以上図5~9に見るように、荷重負荷部近傍では解の時間的変動が大きく、また一般に両理論による結果の差は、かなり大きくなり、異方性の影響も無視できなくなることがわかる。

なお計算には、九州大学大型計算機センターFACOM M-382を使用し、本計算例の計算時間はおよそ70分である。

5. 結 言

本論文では、直交異方性材料から成る、非対称荷重を受ける中程度の厚さの回転対称殻の、弾/粘塑性変形問題の解法を示した。弾/粘塑性の構成関係には、Hillの直交異方性塑性理論にならって、Perzynaの式を直交異方性の場合に拡張したものを用い、厚肉の場合に考慮すべきせん断変形には、Reissner-Naghdiの理論(ひずみ-変位関係)を採用した。数値解法には差分法を適用した。

またチタン円筒殻(殻厚と直径の比0.05)による実験を行って、計算結果と比較したところ、かなりよい一致をみた。

なお、本理論による結果とせん断変形の影響を無視した薄肉理論による結果とを比較すると、この程度の厚さの円筒殻でも、時間が経過して変形が大きくなると、かなりの差が生じることが認められた。

文 献

- (1) Findlay, G. E., ほか2名, *J. Strain Analysis*, 6-3 (1971), 147.
- (2) 竹園・ほか2名, 機論, 45-396, A (昭54), 908.
- (3) 竹園・埜, 機論, 46-402, A (昭55), 227.
- (4) Takezono, S., ほか2名, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 47-3 (1980), 741.
- (5) 竹園・ほか2名, 機論, 47-423, A (昭56), 1165.
- (6) 竹園・ほか2名, 機論, 51-472, A (昭60), 2829.
- (7) Takezono, S., ほか2名, *Trans. 8th Int. Conf. SMiRT*, L (1985), L 5/2.
- (8) Perzyna, P., *Adv. Appl. Mech.*, 9 (1966), 243, Academic Press.
- (9) Reissner, E., *Am. J. Math.*, 63-1 (1941), 177.
- (10) Naghdi, P. M., *Q. Appl. Math.*, 14-4 (1957), 369.
- (11) Zienkiewicz, O. C. and Corneau, I. C., *Int. J. Numerical Methods Eng.*, 8 (1974), 821.

討 論

〔質問〕 谷 順二〔東北大学高速力学研究所〕

(1) 異方性パラメータ G, H, F , 粘性パラメータ γ などの値の求め方をお教え願いたい。

(2) 点 E での実験値と理論値の差は, ε_θ が小さく ε_ξ が大きいのはなぜか。

(3) $E_\xi \neq E_\theta, \nu_{2\theta} \neq \nu_{\theta 2}$ の場合だと異方性の影響はどのようなになると考えられるか。

〔回答〕 (1) 円筒の軸方向, 円周方向および 45° 方向から採取した単軸試験片に, それぞれ試験片の引張軸方向と直角方向にひずみゲージ (ゲージ長 2 mm) を貼付し, 静的引張試験 ($\dot{\varepsilon} = 0.05 \mu/s$) によって, 引張軸方向のひずみ増分 $d\varepsilon_\xi^p$ と幅方向のひずみ増分 $d\varepsilon_\theta^p$ を求めると, 幅方向と厚さ方向のひずみ増分の比 $r (= d\varepsilon_\theta^p / d\varepsilon_\xi^p)$ は, それぞれ

$$r_{0^\circ} = \frac{H}{G}, r_{90^\circ} = \frac{H}{F}, r_{45^\circ} = \frac{2N - F - G}{2(F + G)}$$

F を基準とする式(26)の形で表すと,

$$\frac{H}{F} = r_{90^\circ}, \frac{G}{F} = \frac{r_{90^\circ}}{r_{0^\circ}}, \frac{N}{F} = \left(r_{45^\circ} + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{r_{90^\circ}}{r_{0^\circ}} \right)$$

次に式(14)によると, 材料の塑性異方性パラメータがわかれば, 各方向の粘塑性ひずみ速度は同一の粘性パラメータ γ および関数 $\Psi(f)$ によって決定される

ことになる。例えば, ξ, θ 方向の単軸引張りの場合には, 粘塑性ひずみ速度はそれぞれ次式ようになる。

$$\dot{\varepsilon}_\xi^{vp} = \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{G+H}{F+G+H}} \left\langle \Psi \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\xi^*}{\sigma_\xi^*} \right) \right\rangle$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta^{vp} = \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{F+H}{F+G+H}} \left\langle \Psi \left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_\theta^*}{\sigma_\theta^*} \right) \right\rangle$$

ここでは, 各方向の試験片に対し, 種々のひずみ速度 ($\dot{\varepsilon} = 0.05 \sim 300 \mu/s$) で引張試験を行い, $\sigma_\xi - \varepsilon_\xi, \sigma_\theta - \varepsilon_\theta, \sigma_{45^\circ} - \varepsilon_{45^\circ}$ の関係を求めて, 粘性パラメータ γ および Ψ の関数形を式(26)のように決定した。

(2) 図6を見ると, 確かに点 E における実験値と理論値の差は絶対値で言えば ε_θ が小さく ε_ξ が大きい, 差の比率を考えれば, 同程度かむしろ ε_θ のほうが大きいと言える。

(3) 一般に金属材料には弾性域では等方性であっても, 塑性域に入ると異方性を示すものが多い。本実験に用いたチタン試験片もこのような場合であり, 弾性定数 (E, ν) には異方性は見られなかった。 $E_\xi \neq E_\theta, \nu_{2\theta} \neq \nu_{\theta 2}$ の場合は計算していないが, 弾性領域にも異方性がある場合には, 弾性領域における異方性と塑性領域における異方性とが重なって, 異方性の影響はより複雑になるものと考えられる。