

## 多層回転対称殻の弾/粘塑性変形\*

竹園茂男\*<sup>1</sup>, 右田康治\*<sup>2</sup>, 平河昭久\*<sup>3</sup>

## Elasto/Visco-Plastic Deformation of Multi-Layered Shells of Revolution

Shigeo TAKEZONO, Kohji MIGITA, and Akihisa HIRAKAWA

This paper is concerned with an analytical formulation and a numerical solution of the elasto/visco-plastic problems of multi-layered shells of revolution under asymmetrical loads with application to a cylindrical shell. The analytical formulation is developed by extending the Sanders theory on elastic shells. It is assumed that the total strain rates are composed of an elastic part and a part due to visco-plasticity. The elastic strains are proportional to the stresses by Hooke's law. The visco-plastic strain rates are related to the stresses by Perzyna's equation. As a numerical example, the elasto/visco-plastic deformation of a two-layered cylindrical shell composed of a titanium and a mild steel layer subjected to locally distributed loads is analyzed. Numerical computations have been carried out for three cases of the ratio of the thickness of the titanium layer to the shell thickness. It is found from the computations that the stress distributions and the deformation are significantly varied depending on the ratio.

**Key Words:** Structural Analysis, Multi-layered shells of Revolution, Elasto/Visco-Plastic Deformation, Asymmetrical Loads, FDM

## 1. 緒 言

軸対称殻の弾/粘塑性変形問題の解法については、これまでに、多くの研究結果が報告されている<sup>(1)~(5)</sup>。しかしながら、これらの研究は、単一材質から成る殻を対象としており、近年広く実用されている異種材質を組合せた多層軸対称殻の非弾性解析に関する研究はまだあまり行われていないようである。

本研究では、一般の非対称荷重を受ける多層軸対称殻の弾/粘塑性変形問題の解法を示した。本解析は、Sanders, Jr.の単層殻の弾性変形問題の解法<sup>(6)</sup>を多層殻の弾/粘塑性変形問題に拡張したもので、構成関係には、塑性領域において粘性の影響を考慮したPerzynaの構成式<sup>(7)</sup>を用いている。導かれた基礎式の数値解法には、差分法を適用した。

数値例として、実用上重要な内側にチタン、外側に軟鋼の層を配した二層構造の円筒殻に、局所的分布荷重が作用する場合を取り上げ、変形と内力のようすを解析した。

## 2. 解 法

**2.1 基礎式** 図1に示すように、対称軸から殻の中央面上の任意点Pまでの距離を $r$ とし、殻の中央面の形を $r=r(s)$ で与えると、中央面の点Pにおける無次元曲率 $\omega_\xi (=a/R_s)$ 、 $\omega_\theta (=a/R_\theta)$ および無次元半径 $\rho (=r/a)$ の間にはつぎの関係が成立する。ただし、 $s$ は殻の中央面において子午線に沿って測った長さであり、 $a$ は代表長さである。

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= -(\gamma' + \gamma^2)\omega_\theta, \quad \omega_\theta = \sqrt{1 - (\rho')^2}/\rho \\ \omega'_\theta &= \gamma(\omega_\xi - \omega_\theta), \quad \rho''/\rho = -\omega_\xi\omega_\theta \\ \gamma &= \rho'/\rho, \quad \xi = s/a, \quad (\gamma' = d(\gamma)/d\xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

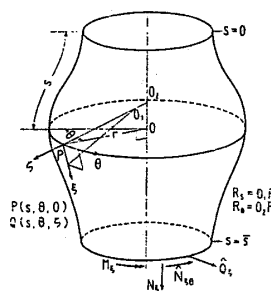


図1 殻の形状と座標

\* 昭和62年10月31日 山梨地方講演会において講演、原稿受付 昭和62年1月14日。

\*<sup>1</sup> 正員、豊橋技術科学大学 (〒440 豊橋市天伯町1-1)。

\*<sup>2</sup> 学生員、熊本大学大学院 (〒860 熊本市黒髪2-39-1)。

\*<sup>3</sup> 准員、直方立石電機(株) (〒882 直方市上境飛熊2770)。

また、殻の任意点 Q を表すのに、直交座標  $(\xi, \theta, \zeta)$  を用いる。ここに、 $\theta$  は円周方向の角であり、 $\zeta$  は中央面から外向きに測った長さである。

さて、Sanders の殻理論<sup>(6)</sup> による軸対称殻の平衡方程式から横せん断力  $Q_\xi, Q_\theta$  を消去し、時間または荷重について微分すると、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} & a \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{N}_\xi) + \frac{\partial \dot{N}_{\xi\theta}}{\partial \theta} - \rho' \dot{N}_\theta \right] \\ & + \omega_\xi \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_\xi) + \frac{\partial \dot{M}_{\xi\theta}}{\partial \theta} - \rho' \dot{M}_\theta \right] \\ & + \frac{1}{2} (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\partial \dot{M}_{\xi\theta}}{\partial \theta} + a^2 \rho \dot{P}_\xi = 0 \\ & a \left[ \frac{\partial \dot{N}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{N}_{\xi\theta}) + \rho' \dot{N}_{\xi\theta} \right] \\ & + \omega_\theta \left[ \frac{\partial \dot{M}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_{\xi\theta}) + \rho' \dot{M}_{\xi\theta} \right] \\ & + \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} [(\omega_\theta - \omega_\xi) \dot{M}_{\xi\theta}] + a^2 \rho \dot{P}_\theta = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_\xi) + \frac{\partial \dot{M}_{\xi\theta}}{\partial \theta} - \rho' \dot{M}_\theta \right] \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial \dot{M}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_{\xi\theta}) + \rho' \dot{M}_{\xi\theta} \right] \\ & - a \rho (\omega_\xi \dot{N}_\xi + \omega_\theta \dot{N}_\theta) + a^2 \rho \dot{P}_\zeta = 0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

ここに、 $N_\xi, N_\theta, N_{\xi\theta}$  および  $M_\xi, M_\theta, M_{\xi\theta}$  は図 2 に示すように殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントであり、 $P_\xi, P_\theta, P_\zeta$  は殻の単位面積当たりの分布荷重の  $\xi, \theta, \zeta$  方向の成分である。また、 $\dot{N}_{\xi\theta}$  および、 $\dot{M}_{\xi\theta}$  は修正面内せん断力および修正ねじりモーメントで

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}_{\xi\theta} &= (\dot{N}_{\xi\theta} + \dot{N}_{\theta\xi})/2 \\ & + [(1/R_\theta) - (1/R_\xi)] (\dot{M}_{\xi\theta} - \dot{M}_{\theta\xi})/4 \dots \dots \dots (3) \\ \dot{M}_{\xi\theta} &= (\dot{M}_{\xi\theta} + \dot{M}_{\theta\xi})/2 \end{aligned} \right\}$$

で表される。

なお図 1 に示す  $\dot{N}_{\xi\theta}$  と  $\dot{Q}_\xi$  は境界  $s=0$  または  $s=\bar{s}$  に作用する単位長さ当たりの有効面内せん断力と有効横せん断力で、つぎに定義されるものである。

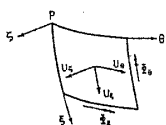
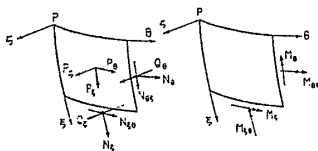


図 2 内力と変位

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}_{\xi\theta} &= \dot{N}_{\xi\theta} + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{R_\theta} - \frac{1}{R_\xi} \right) \dot{M}_{\xi\theta} \\ \dot{Q}_\xi &= \frac{1}{a\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_\xi) + 2 \frac{\partial \dot{M}_{\xi\theta}}{\partial \theta} - \rho' \dot{M}_\theta \right] \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

つぎに中央面のひずみ  $\epsilon_{\xi m}, \epsilon_{\theta m}$  および  $\epsilon_{\xi\theta m}$  を  $\xi, \theta, \zeta$  方向の変位  $U_\xi, U_\theta, U_\zeta$  で表すと

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\xi m} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \xi} + \omega_\xi \dot{U}_\zeta \right] \\ \dot{\epsilon}_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \theta} + \gamma \dot{U}_\xi + \omega_\theta \dot{U}_\zeta \right] \\ \dot{\epsilon}_{\xi\theta m} &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \xi} - \gamma \dot{U}_\theta \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 $\epsilon_{\xi\theta m}$  は工学上のせん断ひずみの 1/2 である。また、曲率の変化量  $\kappa_\xi, \kappa_\theta, \kappa_{\xi\theta}$  と変位との関係はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\kappa}_\xi &= \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{\Phi}_\xi}{\partial \xi}, \quad \dot{\kappa}_\theta = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{\Phi}_\theta}{\partial \theta} + \gamma \dot{\Phi}_\xi \right) \\ \dot{\kappa}_{\xi\theta} &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{\Phi}_\xi}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{\Phi}_\theta}{\partial \xi} - \gamma \dot{\Phi}_\theta \right. \\ & \left. + \frac{1}{2a} (\omega_\xi - \omega_\theta) \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \theta} - \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \xi} - \gamma \dot{U}_\theta \right) \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

ここに  $\dot{\Phi}_\xi, \dot{\Phi}_\theta$  は中央面の回転を示し

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}_\xi &= \frac{1}{a} \left( -\frac{\partial \dot{U}_\zeta}{\partial \xi} + \omega_\xi \dot{U}_\xi \right) \\ \dot{\Phi}_\theta &= \frac{1}{a} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{U}_\zeta}{\partial \theta} + \omega_\theta \dot{U}_\theta \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

である。Kirchhoff の仮説を用い、 $\zeta/R_\xi, \zeta/R_\theta$  は 1 に比較して十分小さいものとする、中央面から  $\zeta$  の距離にある点 Q のひずみ  $\epsilon_\xi, \epsilon_\theta, \epsilon_{\xi\theta}$  はつぎのように表される。

$$\{\dot{\epsilon}\} = \{\dot{\epsilon}_m\} + \zeta \{\dot{\kappa}\} \dots \dots \dots (8)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{\epsilon}\} &= \{\dot{\epsilon}_\xi, \dot{\epsilon}_\theta, \dot{\epsilon}_{\xi\theta}\}^T, \quad \{\dot{\epsilon}_m\} = \{\dot{\epsilon}_{\xi m}, \dot{\epsilon}_{\theta m}, \dot{\epsilon}_{\xi\theta m}\}^T \\ \{\dot{\kappa}\} &= \{\dot{\kappa}_\xi, \dot{\kappa}_\theta, \dot{\kappa}_{\xi\theta}\}^T \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

さて、本研究では構成関係に塑性領域において粘性の影響を考慮したつぎの Perzyna の式<sup>(7)</sup> を用いる。

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \dot{S}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{S} \delta_{ij} \\ & + \gamma_0 \langle \Phi(F) \rangle S_{ij} J_2^{-1/2} \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

ここで、 $(\dot{\quad})$  は時間に関する微分を示し、 $S_{ij}, S$  および  $\epsilon_{ij}$  は偏差応力、平均垂直応力およびひずみである。 $E, \nu$  および  $\gamma_0$  はそれぞれ縦弾性係数、ポアソン比および粘性を表す定数であり、 $J_2$  は偏差応力の第 2 不変量である。また、 $\langle \Phi(F) \rangle$  はつぎの定義によるものである。

$$\langle \Phi(F) \rangle = 0, F \leq 0 \} \\ = \Phi(F), F > 0 \} \dots\dots\dots (11)$$

ここに,  $F$  は

$$F = (\bar{\sigma} - \sigma^*) / \sigma^* \dots\dots\dots (12)$$

で,  $\bar{\sigma}$  はミーゼスの相当応力 ( $=\sqrt{3}J_2$ ) であり,  $F=0$  はミーゼスの降伏曲面を表す. また,  $\sigma^*$  はひずみ速度が十分小さい通常の引張試験における応力-ひずみ関係から得られ, 一般に相当塑性ひずみ  $\bar{\epsilon}^{vp}$  の関数となる.

式(10)は, 殻の理論で通常仮定される平面応力状態においてつぎのようになる.

$$\{\dot{\epsilon}\} = [D]^{-1} \{\dot{\sigma}\} + \{\dot{\epsilon}^{vp}\} \dots\dots\dots (13)$$

ただし

$$\{\dot{\sigma}\} = \{\dot{\sigma}_\epsilon, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_{\epsilon\theta}\}^T, \{\dot{\epsilon}^{vp}\} = \{\dot{\epsilon}_\epsilon^{vp}, \dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_{\epsilon\theta}^{vp}\}^T \\ [D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

$$\{\dot{\epsilon}^{vp}\} = \gamma_1 \langle \Phi \left( \frac{\bar{\sigma} - \sigma^*}{\sigma^*} \right) \rangle > \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \{\dot{\sigma}\} \\ \gamma_1 = (2/\sqrt{3})\gamma_0 \dots\dots\dots (15)$$

式(13)に式(8)を代入し,  $\{\dot{\sigma}\}$  について解くと, 次式が得られる.

$$\{\dot{\sigma}\} = [D] \{ \{\dot{\epsilon}_m\} + \zeta \{\dot{\kappa}\} \} - \{\dot{\sigma}^{vp}\} \dots\dots\dots (16)$$

ここに,  $\{\dot{\sigma}^{vp}\}$  は粘塑性ひずみによる見掛けの応力で, 次式で表される.

$$\{\dot{\sigma}^{vp}\} = [D] \{\dot{\epsilon}^{vp}\} \dots\dots\dots (17)$$

式(16)を用いると, 多層殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントは次のようになる(図3).

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{N} \\ \dot{M} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\sigma}\zeta \end{Bmatrix} d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\sigma}\zeta \end{Bmatrix} d\zeta \\ &= \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_m \\ \dot{\kappa} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{N}^{vp} \\ \dot{M}^{vp} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここに

$$\begin{aligned} \{\dot{N}\} &= \{\dot{N}_\epsilon, \dot{N}_\theta, \dot{N}_{\epsilon\theta}\}^T, \{\dot{M}\} = \{\dot{M}_\epsilon, \dot{M}_\theta, \dot{M}_{\epsilon\theta}\}^T \\ \{\dot{N}^{vp}\} &= \{\dot{N}_\epsilon^{vp}, \dot{N}_\theta^{vp}, \dot{N}_{\epsilon\theta}^{vp}\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}^{vp}\} d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \{\dot{\epsilon}^{vp}\} d\zeta \\ \{\dot{M}^{vp}\} &= \{\dot{M}_\epsilon^{vp}, \dot{M}_\theta^{vp}, \dot{M}_{\epsilon\theta}^{vp}\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}^{vp}\} \zeta d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \{\dot{\epsilon}^{vp}\} \zeta d\zeta \end{aligned}$$

$$[D_i] = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu_i \end{bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

また

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= \int_{-h/2}^{h/2} [D] d\zeta = \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n [D_i] (\zeta_i - \zeta_{i-1}) \\ \bar{B} &= \int_{-h/2}^{h/2} [D] \zeta d\zeta = \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \zeta d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [D_i] (\zeta_i^2 - \zeta_{i-1}^2) \\ \bar{C} &= \int_{-h/2}^{h/2} [D] \zeta^2 d\zeta = \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \zeta^2 d\zeta \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n [D_i] (\zeta_i^3 - \zeta_{i-1}^3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

式(18)~(20)において, 添字  $i$  は殻の内側から  $i$  番目の層(任意の層)を意味する. また,  $\zeta_i$  は  $i$  番目の層と  $i+1$  番目の層の間の境界面(接着面)の  $\zeta$  座標値である.

以上で 32 個の未知数  $\dot{N}_\epsilon, \dot{N}_\theta, \dot{N}_{\epsilon\theta}, \dot{M}_\epsilon, \dot{M}_\theta, \dot{M}_{\epsilon\theta}, \dot{U}_\epsilon, \dot{U}_\theta, \dot{U}_{\epsilon\theta}, \dot{\epsilon}_{\epsilon m}, \dot{\epsilon}_{\theta m}, \dot{\epsilon}_{\epsilon\theta m}, \dot{\kappa}_\epsilon, \dot{\kappa}_\theta, \dot{\kappa}_{\epsilon\theta}, \dot{\Phi}_\epsilon, \dot{\Phi}_\theta, \dot{\sigma}_\epsilon, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_{\epsilon\theta}, \dot{\sigma}_\epsilon^{vp}, \dot{\sigma}_\theta^{vp}, \dot{\sigma}_{\epsilon\theta}^{vp}, \dot{\epsilon}_\epsilon^{vp}, \dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_{\epsilon\theta}^{vp}, \dot{N}_\epsilon^{vp}, \dot{N}_\theta^{vp}, \dot{N}_{\epsilon\theta}^{vp}, \dot{M}_\epsilon^{vp}, \dot{M}_\theta^{vp}, \dot{M}_{\epsilon\theta}^{vp}$  に対して, 式(2), (5)~(7), (15)~(19)の 32 個の式が得られたことになる.

**2.2 無次元方程式** 一般に非対称問題を解析するには, 各変数を  $\theta$  方向にフーリエ級数で表し, その係数を定めればよい. そこで, 上に示した 32 個の変数のうち  $\dot{\epsilon}_\epsilon^{vp}, \dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_{\epsilon\theta}^{vp}$  を除く 29 個の変数および分布荷重をつぎのようにフーリエ級数で表す.

$$\begin{aligned} \{\dot{N}_\epsilon, \dot{N}_\theta, \dot{N}_{\epsilon\theta}\} &= \sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{n}_\epsilon^{(n)}, \dot{n}_\theta^{(n)}, \dot{n}_{\epsilon\theta}^{(n)} \} [A_n] \\ \{\dot{M}_\epsilon, \dot{M}_\theta, \dot{M}_{\epsilon\theta}\} &= (\sigma_0 h_0^3 / a) \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{m}_\epsilon^{(n)}, \dot{m}_\theta^{(n)}, \dot{m}_{\epsilon\theta}^{(n)} \} [A_n] \\ \{\dot{U}_\epsilon, \dot{U}_\theta, \dot{U}_{\epsilon\theta}\} &= (a \sigma_0 / E_0) \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{u}_\epsilon^{(n)}, \dot{u}_\theta^{(n)}, \dot{u}_{\epsilon\theta}^{(n)} \} [A_n] \\ \{\dot{\epsilon}_{\epsilon m}, \dot{\epsilon}_{\theta m}, \dot{\epsilon}_{\epsilon\theta m}\} &= (\sigma_0 / E_0) \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{e}_{\epsilon m}^{(n)}, \dot{e}_{\theta m}^{(n)}, \dot{e}_{\epsilon\theta m}^{(n)} \} [A_n] \end{aligned}$$

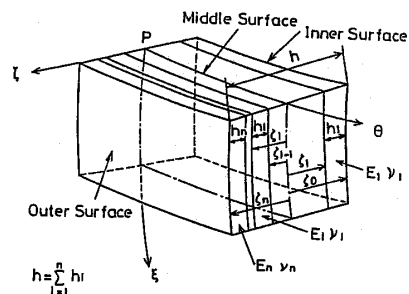


図3 多層殻要素

$$\begin{aligned} \{\dot{\kappa}_\varepsilon, \dot{\kappa}_\theta, \dot{\kappa}_{\varepsilon\theta}\} &= (\sigma_0/aE_0) \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{k}_\varepsilon^{(n)}, \dot{k}_\theta^{(n)}, \dot{k}_{\varepsilon\theta}^{(n)}\} [A_n] \\ \{\dot{\Phi}_\varepsilon, \dot{\Phi}_\theta\} &= (\sigma_0/E_0) \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{\phi}_\varepsilon^{(n)} \cos n\theta, \dot{\phi}_\theta^{(n)} \sin n\theta\} \\ \{\dot{N}_\varepsilon^{vp}, \dot{N}_\theta^{vp}, \dot{N}_{\varepsilon\theta}^{vp}\} \\ &= \sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{n}_\varepsilon^{vp(n)}, \dot{n}_\theta^{vp(n)}, \dot{n}_{\varepsilon\theta}^{vp(n)}\} [A_n] \\ \{\dot{M}_\varepsilon^{vp}, \dot{M}_\theta^{vp}, \dot{M}_{\varepsilon\theta}^{vp}\} \\ &= (\sigma_0 h_0^3/a) \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{m}_\varepsilon^{vp(n)}, \dot{m}_\theta^{vp(n)}, \dot{m}_{\varepsilon\theta}^{vp(n)}\} [A_n] \\ \{\dot{\sigma}_\varepsilon, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_{\varepsilon\theta}\} &= \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{s}_\varepsilon^{(n)}, \dot{s}_\theta^{(n)}, \dot{s}_{\varepsilon\theta}^{(n)}\} [A_n] \\ \{\dot{\sigma}_\varepsilon^{vp}, \dot{\sigma}_\theta^{vp}, \dot{\sigma}_{\varepsilon\theta}^{vp}\} \\ &= \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{s}_\varepsilon^{vp(n)}, \dot{s}_\theta^{vp(n)}, \dot{s}_{\varepsilon\theta}^{vp(n)}\} [A_n] \\ \{\dot{P}_\varepsilon, \dot{P}_\zeta, \dot{P}_\theta\} &= (\sigma_0 h_0/a) \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{p}_\varepsilon^{(n)}, \dot{p}_\zeta^{(n)}, \dot{p}_\theta^{(n)}\} [A_n] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここに,

$$[A_n] = [\cos n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta] \text{ (対角行列)} \quad \dots\dots\dots (22)$$

で,  $\sigma_0, h_0, E_0$  はそれぞれ代表応力, 代表厚さ, 代表縦弾性係数である。

なお, 式(21)は,  $\theta=0^\circ$  の子午線面に対して面対称な荷重が作用する場合であるが, より一般性を持たせるには, 各フーリエ展開式に,  $[A_n]$  を次の  $[B_n]$  で置きかえた級数を付加する必要がある。

$$[B_n] = [\sin n\theta, \sin n\theta, \cos n\theta] \text{ (対角行列)} \quad \dots\dots\dots (23)$$

式(21)を前節の基礎式に代入する。まず, 平衡方程式(2)は

$$\begin{aligned} \dot{n}_\varepsilon + \gamma(\dot{n}_\varepsilon - \dot{n}_\theta) + (n/\rho)\dot{n}_{\varepsilon\theta} + \lambda^2\{\omega_\varepsilon \dot{m}_\varepsilon \\ + \gamma\omega_\varepsilon(\dot{m}_\varepsilon - \dot{m}_\theta) + (n/2\rho)(3\omega_\varepsilon - \omega_\theta)\dot{m}_{\varepsilon\theta}\} \\ + \dot{p}_\varepsilon = 0 \\ \dot{n}_{\varepsilon\theta} + 2r\dot{n}_{\varepsilon\theta} - (n/\rho)\dot{n}_\theta + \lambda^2\{-(n/\rho)\omega_\theta \dot{m}_\theta \\ + (1/2)(3\omega_\theta - \omega_\varepsilon)\dot{m}_{\varepsilon\theta} + (1/2)[\gamma(3\omega_\theta + \omega_\varepsilon) \\ - \omega_\varepsilon]\dot{m}_{\varepsilon\theta}\} + \dot{p}_\theta = 0 \\ -\omega_\varepsilon \dot{n}_\varepsilon - \omega_\theta \dot{n}_\theta + \lambda^2\{\dot{m}_\varepsilon + 2\gamma\dot{m}_\varepsilon - \omega_\varepsilon \omega_\theta \dot{m}_\varepsilon \\ + [\omega_\varepsilon \omega_\theta - (n/\rho)^2]\dot{m}_\theta - \gamma\dot{m}_\theta + (2n/\rho)\dot{m}_{\varepsilon\theta} \\ + (2\gamma n/\rho)\dot{m}_{\varepsilon\theta}\} + \dot{p}_\zeta = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに, フーリエ係数の添字 ( $n$ ) は便宜上省略する。

式(5)~(7)はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \dot{e}_{\varepsilon m} &= \dot{u}'_\varepsilon + \omega_\varepsilon \dot{u}_\zeta, \quad \dot{e}_{\theta m} = (n/\rho)\dot{u}_\theta + \gamma \dot{u}_\varepsilon + \omega_\theta \dot{u}_\zeta \\ \dot{e}_{\varepsilon\theta m} &= (1/2)[\dot{u}'_\theta - \gamma \dot{u}'_\theta - (n/\rho)\dot{u}_\varepsilon] \\ \dot{k}_\varepsilon &= \dot{\phi}'_\varepsilon, \quad \dot{k}_\theta = (n/\rho)\dot{\phi}_\theta + \gamma \dot{\phi}_\varepsilon \\ \dot{k}_{\varepsilon\theta} &= (1/2)\{- (n/\rho)\dot{\phi}_\varepsilon + \dot{\phi}'_\theta + \gamma \dot{\phi}_\theta \\ &\quad + (1/2)(\omega_\theta - \omega_\varepsilon)[(n/\rho)\dot{u}_\varepsilon + \dot{u}'_\theta + \gamma \dot{u}_\theta]\} \end{aligned}$$

$$\dot{\phi}_\varepsilon = -\dot{u}'_\zeta + \omega_\varepsilon \dot{u}_\varepsilon, \quad \dot{\phi}_\theta = (n/\rho)\dot{u}_\zeta + \omega_\theta \dot{u}_\theta \quad \dots\dots\dots (25)$$

式(18)は,

$$\begin{aligned} \dot{n}_\varepsilon &= A_1 \dot{e}_{\varepsilon m} + A_2 \dot{e}_{\theta m} + B_1 \dot{k}_\varepsilon + B_2 \dot{k}_\theta - \dot{n}_\varepsilon^{vp} \\ \dot{n}_\theta &= A_1 \dot{e}_{\theta m} + A_2 \dot{e}_{\varepsilon m} + B_1 \dot{k}_\theta + B_2 \dot{k}_\varepsilon - \dot{n}_\theta^{vp} \\ \dot{n}_{\varepsilon\theta} &= A_3 \dot{e}_{\varepsilon\theta m} + B_3 \dot{k}_{\varepsilon\theta} - \dot{n}_{\varepsilon\theta}^{vp} \\ \dot{m}_\varepsilon &= (B_1/\lambda^2) \dot{e}_{\varepsilon m} + (B_2/\lambda^2) \dot{e}_{\theta m} + C_1 \dot{k}_\varepsilon + C_2 \dot{k}_\theta \\ &\quad - \dot{m}_\varepsilon^{vp} \\ \dot{m}_\theta &= (B_1/\lambda^2) \dot{e}_{\theta m} + (B_2/\lambda^2) \dot{e}_{\varepsilon m} + C_1 \dot{k}_\theta + C_2 \dot{k}_\varepsilon \\ &\quad - \dot{m}_\theta^{vp} \\ \dot{m}_{\varepsilon\theta} &= (B_3/\lambda^2) \dot{e}_{\varepsilon\theta m} + C_3 \dot{k}_{\varepsilon\theta} - \dot{m}_{\varepsilon\theta}^{vp} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & 0 \\ A_2 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} &= \frac{\bar{A}}{h_0 E_0}, \quad \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & 0 \\ B_2 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{bmatrix} = \frac{\bar{B}}{ah_0 E_0} \\ \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 \\ C_2 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} &= \frac{\bar{C}}{h_0^3 E_0}, \quad \lambda = h_0/a \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

式(24)~(26)によって, 17個のフーリエ係数  $\dot{n}_\varepsilon, \dot{n}_\theta, \dot{n}_{\varepsilon\theta}, \dot{m}_\varepsilon, \dot{m}_\theta, \dot{m}_{\varepsilon\theta}, \dot{u}_\varepsilon, \dot{u}_\theta, \dot{u}_\zeta, \dot{\phi}_\varepsilon, \dot{\phi}_\theta, \dot{e}_{\varepsilon m}, \dot{e}_{\theta m}, \dot{e}_{\varepsilon\theta m}, \dot{k}_\varepsilon, \dot{k}_\theta, \dot{k}_{\varepsilon\theta}$  の間の関係が, 各  $n$  に対して, 与えられたことになる。

式(25), (26)を式(24)に代入すると,  $\dot{u}_\varepsilon, \dot{u}_\theta, \dot{u}_\zeta$  の3変数に関する三元連立微分方程式を導き出せるが,  $\dot{u}_\zeta$  の4階の導関数が現れ, 差分法による数値計算の精度上好ましくない。そこで,  $\dot{u}_\varepsilon, \dot{u}_\theta, \dot{u}_\zeta$  のほかに  $\dot{m}_\varepsilon$  を未知数として残し,  $\dot{u}_\varepsilon, \dot{u}_\theta, \dot{u}_\zeta, \dot{m}_\varepsilon$  に関する四元連立2階微分方程式を導く。まず, 式(26)において, 第4式を第1, 2, 5式に代入して  $\dot{u}'_\zeta$  を含む  $\dot{k}_\varepsilon$  を消去すると, それぞれ,

$$\begin{aligned} \dot{n}_\varepsilon &= (B_1/C_1)\dot{m}_\varepsilon + [A_1 - (B_1^2/\lambda^2 C_1)] \dot{e}_{\varepsilon m} \\ &\quad + [A_2 - (B_1 B_2/\lambda^2 C_1)] \dot{e}_{\theta m} + [B_2 - (B_1 C_2/C_1)] \dot{k}_\theta \\ &\quad - \dot{n}_\varepsilon^{vp} + (B_1/C_1)\dot{m}_\varepsilon^{vp} \\ \dot{n}_\theta &= (B_2/C_1)\dot{m}_\varepsilon + [A_2 - (B_1 B_2/\lambda^2 C_1)] \dot{e}_{\varepsilon m} \\ &\quad + [A_1 - (B_2^2/\lambda^2 C_1)] \dot{e}_{\theta m} + [B_1 - (B_2 C_2/C_1)] \dot{k}_\varepsilon \\ &\quad - \dot{n}_\theta^{vp} + (B_2/C_1)\dot{m}_\varepsilon^{vp} \\ \dot{m}_\theta &= (C_2/C_1)\dot{m}_\varepsilon + (1/\lambda^2)[B_2 - (B_1 C_2/C_1)] \dot{e}_{\varepsilon m} \\ &\quad + (1/\lambda^2)[B_1 - (B_2 C_2/C_1)] \dot{e}_{\theta m} \\ &\quad + [C_1 - (C_2^2/C_1)] \dot{k}_\theta \\ &\quad - \dot{m}_\theta^{vp} + (C_2/C_1)\dot{m}_\varepsilon^{vp} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (28)$$

式(28)および式(26)の第3, 6式を式(24)に代入し, 式(25)を用いて,  $\dot{e}_{\varepsilon m}, \dot{e}_{\theta m}, \dot{e}_{\varepsilon\theta m}, \dot{k}_\varepsilon, \dot{k}_\theta, \dot{k}_{\varepsilon\theta}$  を消去すると, 数値計算上好ましい  $\dot{u}_\varepsilon, \dot{u}_\theta, \dot{u}_\zeta, \dot{m}_\varepsilon$  に関する2

階の微分方程式が3個得られる。残りの1個は式(26)の第4式に式(25)を代入して  $\dot{\epsilon}_{em}$ ,  $\dot{\epsilon}_{om}$ ,  $\dot{k}_\epsilon$ ,  $\dot{k}_\theta$  を消去したものを用いる。すなわち

$$\begin{aligned} & a_1 \ddot{u}_\xi'' + a_2 \ddot{u}_\xi' + a_3 \ddot{u}_\xi + a_4 \ddot{u}_\theta' + a_5 \ddot{u}_\theta + a_6 \ddot{u}_\xi'' \\ & + a_7 \ddot{u}_\xi' + a_8 \ddot{u}_\xi + a_9 \dot{m}_\xi' + a_{10} \dot{m}_\xi = c_1 \\ & a_{11} \ddot{u}_\xi' + a_{12} \ddot{u}_\xi + a_{13} \ddot{u}_\theta' + a_{14} \ddot{u}_\theta + a_{15} \ddot{u}_\theta + a_{16} \ddot{u}_\xi'' \\ & + a_{17} \ddot{u}_\xi' + a_{18} \ddot{u}_\xi + a_{19} \dot{m}_\xi = c_2 \\ & a_{20} \ddot{u}_\xi'' + a_{21} \ddot{u}_\xi' + a_{22} \ddot{u}_\xi + a_{23} \ddot{u}_\theta' + a_{24} \ddot{u}_\theta + a_{25} \ddot{u}_\theta \\ & + a_{26} \ddot{u}_\xi'' + a_{27} \ddot{u}_\xi' + a_{28} \ddot{u}_\xi + a_{29} \dot{m}_\xi' + a_{30} \dot{m}_\xi \\ & + a_{31} \dot{m}_\xi = c_3 \\ & a_{32} \ddot{u}_\xi' + a_{33} \ddot{u}_\xi + a_{34} \ddot{u}_\theta + a_{35} \ddot{u}_\xi' + a_{36} \ddot{u}_\xi \\ & + a_{37} \ddot{u}_\xi + a_{38} \dot{m}_\xi = c_4 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで、 $a_1 \sim a_{38}$  は殻の形状と材料定数の値から定まる係数であり、 $c_1 \sim c_4$  は殻の形状のほかに荷重と粘塑性による見掛けの内力成分から定まる定数で次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} a_1 &= A_1 - B_1^2 / (\lambda^2 C_1), \quad a_2 = \gamma A_1 \\ a_3 &= (\gamma \omega_\epsilon - \omega_\epsilon^2 \omega_\theta) B_2 - \gamma^2 A_1 - 2\gamma^2 \omega_\epsilon B_1 \\ & + (1/2)(n/\rho)^2 (\omega_\theta - 3\omega_\epsilon) B_3 - \omega_\epsilon \omega_\theta A_2 \\ & - (1/2)(n/\rho)^2 A_3 - \lambda^2 \gamma^2 \omega_\epsilon^2 C_1 - (1/8)(n/\rho)^2 \lambda^2 (\omega_\theta \\ & - 3\omega_\epsilon)^2 C_3 + (\omega_\epsilon^2 \omega_\theta - \gamma \omega_\epsilon) B_1 C_2 / C_1 \\ & + \omega_\epsilon \omega_\theta B_1 B_2 / (\lambda^2 C_1) + \gamma^2 B_2^2 / (\lambda^2 C_1) \\ & + 2\gamma^2 \omega_\epsilon B_2 C_2 / C_1 + \lambda^2 \gamma^2 \omega_\epsilon^2 C_2^2 / C_1 \\ a_4 &= (n/\rho) A_2 + (n/\rho) \omega_\theta B_2 + (1/2)(n/\rho) A_3 \\ & + (1/2)(n/\rho) (\omega_\theta + \omega_\epsilon) B_3 + (1/8)(n/\rho) \lambda^2 (3\omega_\epsilon \\ & - \omega_\theta) (3\omega_\theta - \omega_\epsilon) C_3 - (n/\rho) B_1 B_2 / (\lambda^2 C_1) \\ & - (n/\rho) \omega_\theta B_1 C_2 / C_1 \\ a_5 &= -\gamma (n/\rho) A_1 - (\gamma/2)(n/\rho) A_3 - (\gamma/2)(n/\rho) (\omega_\epsilon \\ & + \omega_\theta) B_3 + (\gamma/8)(n/\rho) \lambda^2 (3\omega_\epsilon - \omega_\theta) (\omega_\epsilon - 3\omega_\theta) C_3 \\ & - (n/\rho) \gamma (\omega_\epsilon - \omega_\theta) B_1 C_2 / C_1 + (\gamma \lambda^2)(n/\rho) B_2^2 / C_1 \\ & - \gamma (n/\rho) (\omega_\theta + \omega_\epsilon) (B_1 - B_2 C_2 / C_1) \\ & + (n\gamma/\rho) (\omega_\epsilon - \omega_\theta) B_2 \\ & - \lambda^2 \gamma (n/\rho) \omega_\epsilon \omega_\theta (C_1 - C_2^2 / C_1) \\ a_6 &= -\gamma (B_2 - B_1 C_2 / C_1) \\ a_7 &= \omega_\epsilon A_1 + \omega_\theta A_2 + \{ (n/\rho)^2 + \omega_\epsilon \omega_\theta \} B_2 + \gamma^2 B_1 \\ & + (n/\rho)^2 B_3 + \lambda^2 \gamma^2 \omega_\epsilon C_1 + (\lambda^2/2)(n/\rho)^2 (3\omega_\epsilon \\ & - \omega_\theta) C_3 - \omega_\epsilon B_1^2 / (\lambda^2 C_1) \\ & - \omega_\theta B_1 B_2 / (\lambda^2 C_1) - \{ (n/\rho)^2 \\ & + \omega_\epsilon \omega_\theta \} B_1 C_2 / C_1 - \gamma^2 B_2 C_2 / C_1 - \lambda^2 \gamma^2 \omega_\epsilon C_2^2 / C_1 \\ a_8 &= (\omega_\epsilon + \gamma \omega_\epsilon - \gamma \omega_\theta) A_1 - \gamma \{ (n/\rho)^2 + \omega_\epsilon \omega_\theta \} B_1 \\ & - \lambda^2 \gamma \omega_\epsilon (n/\rho)^2 C_1 - \gamma (n/\rho)^2 B_3 \\ & - (\gamma/2)(n/\rho)^2 \lambda^2 (3\omega_\epsilon - \omega_\theta) C_3 \\ & - (\omega_\epsilon + \gamma \omega_\epsilon) B_1^2 / (\lambda^2 C_1) + \gamma \omega_\theta B_2^2 / (\lambda^2 C_1) \\ & + \gamma \{ (n/\rho)^2 + \omega_\epsilon \} B_1 C_2 / C_1 \\ & + \lambda^2 \gamma \omega_\epsilon (n/\rho)^2 C_2^2 / C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\gamma \{ \omega_\epsilon^2 + (n/\rho)^2 \} B_2 + \gamma \{ \omega_\epsilon \omega_\theta + (n/\rho)^2 \} B_2 C_2 / C_1 \\ a_9 &= B_1 / C_1 + \lambda^2 \omega_\epsilon \\ a_{10} &= (\gamma / C_1) \{ B_1 - B_2 + \lambda^2 \omega_\epsilon (C_1 - C_2) \} \text{ など} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= -\dot{p}_\epsilon + \dot{n}_\epsilon^{vp'} + \gamma \dot{n}_\epsilon^{vp} - \gamma \dot{n}_\theta^{vp} + (n/\rho) \dot{n}_\theta^{vp} \\ & - (B_1 / C_1) \dot{m}_\xi^{vp'} + (\gamma / C_1) (B_2 - B_1 + \lambda^2 \omega_\epsilon C_2) \dot{m}_\xi^{vp} \\ & - \lambda^2 \gamma \omega_\epsilon \dot{m}_\theta^{vp} + (n\lambda^2/2\rho) (3\omega_\epsilon - \omega_\theta) \dot{m}_\theta^{vp} \text{ など} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (31)$$

なお、式(20)において  $i=1$ ,  $\zeta_1=h/2$ ,  $\zeta_0=-h/2$  とおくと  $\bar{B}$  が零になり、式(29)~(31)は以前に著者らが導いた単層殻の諸式に一致する<sup>(3)</sup>。

式(29)の解  $\dot{z} = \{ \dot{u}_\epsilon, \dot{u}_\theta, \dot{u}_\xi, \dot{m}_\xi \}^T$  が求められると、各層の応力は次式から計算できる。

$$\{ \dot{s}_i \} = \{ F_i \} \{ \dot{z} \} + \{ H_i \} \{ \dot{z} \} + \{ \dot{s}^{pp} \} \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \{ \dot{s}_i \} &= \{ \dot{s}_{\epsilon i}, \dot{s}_{\theta i}, \dot{s}_{\xi i} \}^T \\ \{ \dot{s}_i^{pp} \} &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{E_i}{E_0} \frac{\zeta}{a} \frac{1}{1-\nu_i^2} \frac{1}{C_1} \dot{m}_\xi^{vp} - \dot{s}_{\xi i}^{vp} \\ \frac{E_i}{E_0} \frac{\zeta}{a} \frac{1}{1-\nu_i^2} \frac{\nu}{C_1} \dot{m}_\xi^{vp} - \dot{s}_{\theta i}^{vp} \\ - \dot{s}_{\epsilon i}^{vp} \end{array} \right\} \\ \zeta_{i-1} &\leq \zeta \leq \zeta_i \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (33)$$

$F_i$  と  $H_i$  は殻の形状、各層の材質と厚さなどから定まる係数である。

粘塑性に関する内力成分の変化率の各フーリエ係数は、式(17), (19), (21)からそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} & \sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{n}_\epsilon^{vp(n)}, \dot{n}_\theta^{vp(n)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{vp(n)} \} [A_n] \\ & = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \{ \dot{\epsilon}_\epsilon^{vp}, \dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_{\xi\theta}^{vp} \} [D_i] d\zeta \\ & (\sigma_0 h_0^3/a) \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{m}_\xi^{vp(n)}, \dot{m}_\theta^{vp(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{vp(n)} \} [A_n] \\ & = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \{ \dot{\epsilon}_\epsilon^{vp}, \dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_{\xi\theta}^{vp} \} [D_i] \zeta d\zeta \\ & \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{s}_\epsilon^{vp(n)}, \dot{s}_\theta^{vp(n)}, \dot{s}_{\xi\theta}^{vp(n)} \} [A_n] \\ & = \{ \dot{\epsilon}_\epsilon^{vp}, \dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_{\xi\theta}^{vp} \} [D_i] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (34)$$

右辺の粘塑性ひずみ速度は、応力値から式(15)を用いて計算できる。また積分にはシンプソンの1/3則を用いる。

### 3. 数値計算法

ある任意の計算段階における解は式(29)を適当な境界条件のもとで解けば得られ、任意の時刻の解は、各段階の解の増分を積分することによって得られる。しかしながら、式(29)を厳密に理論解析することは困難

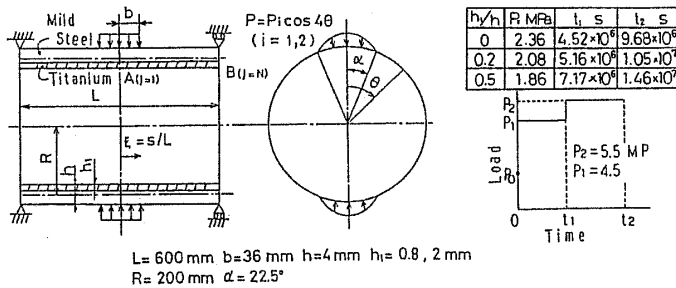


図 4 円筒殻

であるから、差分法によって数値的に解を求める。この数値解析法は著者らがすでに発表した単層殻の場合<sup>(3)</sup>とほぼ同様であるので、ここでは紙面の都合もあり省略する。

4. 数 値 例

計算例として、両端支持で、内側にチタンの層を、外側に軟鋼の層を配した二層構造の円筒殻に、時間に対して階段状の局所的分布荷重が作用する問題を取扱った(図4)。チタン層の殻厚に対する比  $h_1/h$  は、 $h_1/h = 0, 0.2, 0.5$  の3とおりとした。

問題の対称性から、計算は円筒殻の1/8形状についてのみ行えば十分である。円筒殻の形状パラメータはつぎようになる。

$$\left. \begin{aligned} a=L, \xi=s/L, \rho=1/3, \omega_\theta=3 \\ \rho'=\gamma=\omega_\xi=\omega'_\xi=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

また  $\xi$  の差分間隔  $\Delta$  は、差分点の数を  $N$  として、  
 $\Delta=1/2(N-1) \dots\dots\dots (36)$

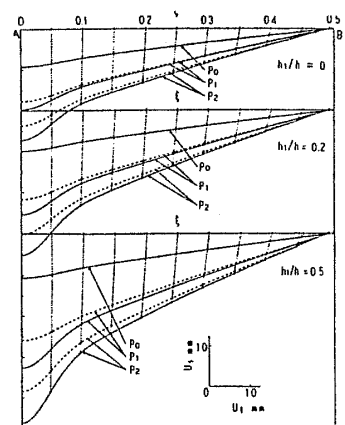
境界条件は、点 A では対称性により  
 $\dot{U}_\xi = \dot{U}'_\xi = \dot{M}_\xi = \dot{N}_{\xi\theta} = 0 \dots\dots\dots (37)$

ただし、 $t=0$  のときは ( ) を取り除くものとする。点 B では、単純可動支持の条件を用いて、  
 $\dot{U}_\theta = \dot{U}_\xi = \dot{M}_\xi = \dot{N}_\xi = 0 \dots\dots\dots (38)$

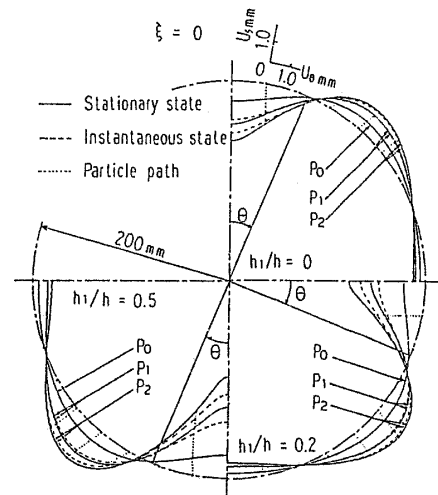
なお、式(21)の  $\sigma_0$  は、本計算では  $\sigma_0=1$  とした。  
 チタンと軟鋼の材料特性は、実験より求めた次のものを用いた<sup>(7)(8)</sup>。

チタン：  
 $E=9.1 \times 10^4 \text{ MPa}, \nu=0.33$   
 $\gamma_1=800 \text{ 1/s}, \Phi(F) = \{(\bar{\sigma} - \sigma^*)/\sigma^*\}^{7.4}$   
 $\sigma^*=656(0.0101 + \bar{\epsilon}^{vp})^{0.252} \text{ MPa}$   
 初期降伏応力  $\sigma_Y=206.1 \text{ MPa}$  } \dots\dots\dots (39)

軟鋼：  
 $E=2.0 \times 10^5 \text{ MPa}, \nu=0.29$   
 $\gamma_1=40.4 \text{ 1/s}, \Phi(F) = \{(\bar{\sigma} - \sigma^*)/\sigma^*\}^{5.0}$   
 $\sigma^*=261.7 \text{ MPa}$  } \dots\dots\dots (40)



(a)  $\theta=0^\circ$



(b)  $\xi=0^\circ$

図 5 変形

差分点数は、子午線方向に  $N=101$ 、板厚方向には各層ごとに、11個の格子点を採用した。また、フーリエ級数の項数 [項数  $= (n+2)/2$ ] は  $n=38$  とした。定常状態の判定には、最大粘塑性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{\max}^{vp}$  と各荷重段階の負荷直後の最大ひずみ  $\epsilon_{\max}$  との比  $|\dot{\epsilon}_{\max}^{vp}/\epsilon_{\max}|$  を用い、これが  $3.5 \times 10^{-10}$  以下となったとき、定常状態に達したものとして、その段階の計算を打ち切り、つぎの荷重段階に移った。これらの数値は、これらを種々変化させたときの解の収束性と、利用した計算機の能力を考慮して決定した。

図5~12に計算結果を例示する。図において、破線は、荷重  $P=P_1, P_2$  のときの負荷直後の値であり、実線は、負荷後十分に時間が経過した定常状態の値を示す。また、 $P_0$  は弾性限であり、初期降伏は点 A ( $\xi=0, \theta=0^\circ$ ) の外表面に現れる。

図5(a)は、 $\theta=0^\circ$  の子午線断面、図5(b)は、 $\xi=$

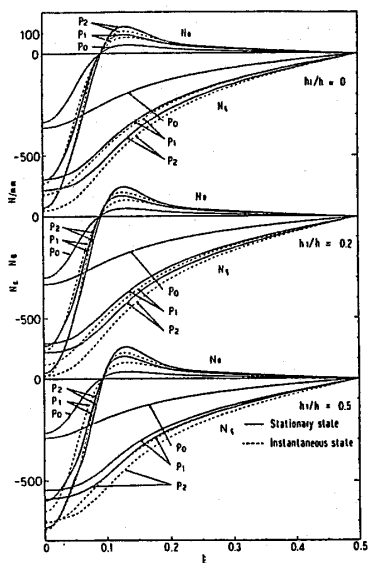


図 6 合応力  $N_\xi, N_\theta$  の子午線方向分布

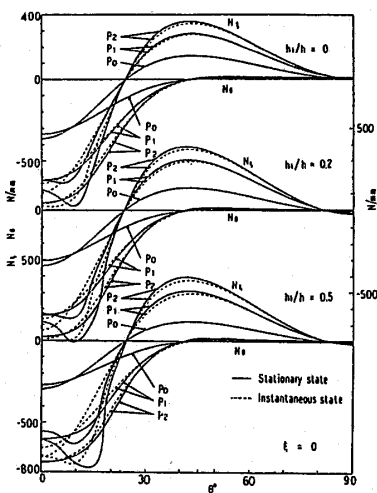


図 7 合応力  $N_\xi, N_\theta$  の円周方向分布

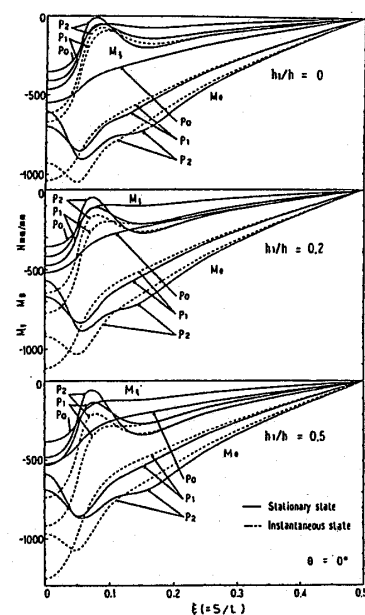


図 8 合モーメント  $M_\xi, M_\theta$  の子午線方向分布

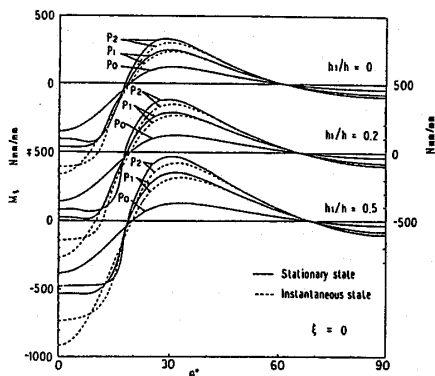


図 9 合モーメント  $M_\xi$  の円周方向分布

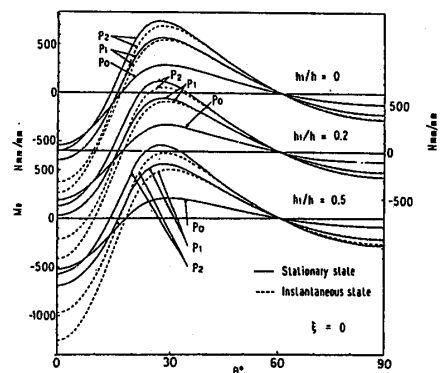


図 10 合モーメント  $M_\theta$  の円周方向分布

0 の軸断面の変形状態を示す。点線は変位経路を示す。点 A ( $\xi=0, \theta=0^\circ$ ) で大きく変形し、荷重が増すにつれて降伏領域が広がるため、荷重直後と定常状態の変形量の差が顕著になっている。また、チタンのほうが軟鋼よりも縦弾性係数、初期降伏点とも低く、粘塑性ひずみが生じやすいため、チタンの層の厚さが増すほ

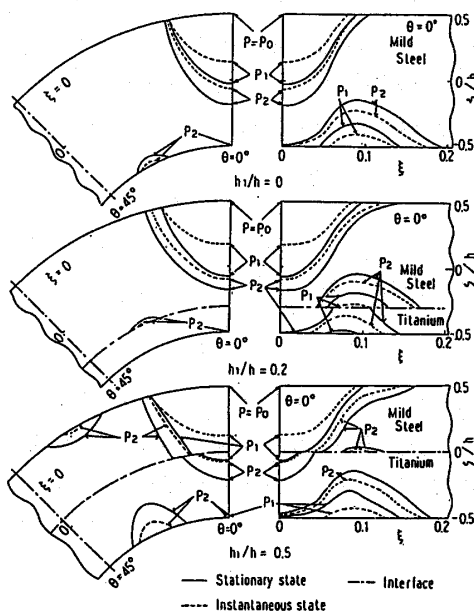
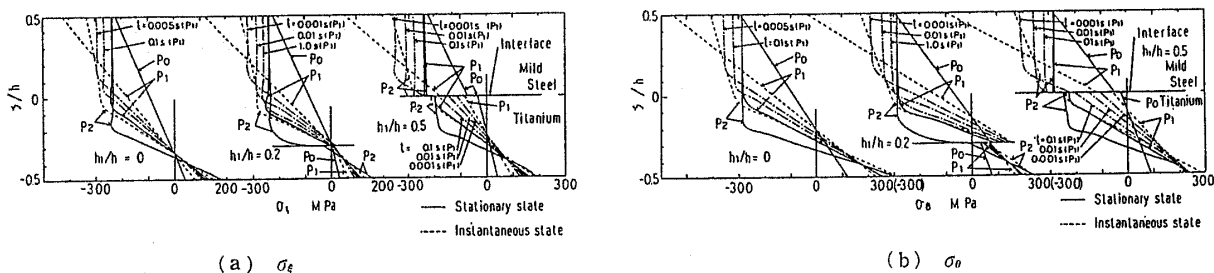


図 11 塑性域の進展のようす

ど、変形量は大きくなっている。

図 6, 7 は合応力  $N_\xi, N_\theta$  の子午線方向と円周方向の分布である。荷重負荷部で  $N_\theta$  よりも  $N_\xi$  のほうが大きく緩和する。 $h_1/h$  の値による顕著な差異は認められない。

図 8~10 は合モーメント  $M_\xi, M_\theta$  の子午線方向と円周方向の分布を示す。荷重負荷部でいずれも大きく緩和するが、 $M_\theta$  のほうがとくに緩和量大きい。 $h_1/h$  が大きくなると時間的変動が顕著になるが、各荷重段階における最終値(定常値)には、あまり大きな差異はな

図 12 殻厚方向の応力分布(点 A,  $\xi=0, \theta=0^\circ$ )

い。

図 11 は塑性域の進展のようすを示したものである。 $P=P_0$  のとき初めて降伏し、その位置は点 A の外表面である。荷重  $P$  とともに塑性域は、外側は荷重部を中心に、また内側は  $\xi=0.09$  付近を中心に、子午線方向、厚さ方向および円周方向に広がっていく。二層殻では、境界面で、塑性域が不連続になり、軟鋼の層のみの場合よりも、塑性域が大きくなっている。

図 12(a), (b) は、それぞれ点 A における  $\sigma_\xi$  と  $\sigma_r$  の殻厚方向分布である。軟鋼の層では、いずれの  $h_1/h$  の値の場合にも、ほぼ同様に、中央面から外側で応力が緩和するのに対し、チタンの層では複雑な挙動を示す。なお一点鎖線は、 $P=P_1$  の負荷時から一定時間経過したときの応力分布である。

本計算には、九州大学大型計算機センターの FACOM M-380 S+VP-100 を使用し、それぞれの数値例の計算時間は約 20~40 min である。

## 5. 結 言

本論文では、一般の非対称荷重が作用する多層軸対称殻の弾・粘塑性変形問題の解融を示した。弾/粘塑性の構成関係には、Perzyna の式を用い、Sanders, Jr.

の単層殻の弾性変形問題の解法を多層軸対称殻の弾・粘塑性変形問題に拡張した。導かれた基礎式の解法には、差分法を適用した。

数値例として、内側にチタンの層を、外側に軟鋼の層を配した二層構造の両端支持円筒殻に局所的分布荷重が作用する場合を、 $h_1/h$  の値を変えて解析した。その結果、まず変形については、チタンの層の厚さが増すほど、変形は大きくなった。また合応力と合モーメントには、 $h_1/h$  の値による大きな相違はなかったが、塑性域の進展のようすと殻厚方向の応力分布には顕著な差異が認められた。

## 文 献

- (1) 竹園・ほか 2 名, 機論, 45-396, A (昭 54), 908.
- (2) 村瀬・西村, 機論, 45-400, A (昭 54), 1554.
- (3) 竹園・埜, 機論, 46-402, A (昭 55), 227.
- (4) Atkatsh, R. S., ほか 2 名, *Trans. ASME, T. Appl. Mech.*, 50-1 (1983), 131.
- (5) Kollmann, F. G. and Mukherjee, S., *Ing. Arch.*, 54 (1984), 355.
- (6) Sanders, J. L., Jr., *NASA Rep.*, R-24 (1959-6), 1.
- (7) Perzyna, P., *Advances in Applied Mechanics*, 9 (1966), 243, Academic Press.
- (8) 竹園・ほか 3 名, 材料, 31-350 (昭 57), 1128.