

# 回転対称殻の弾/粘塑性動的応答\* (荷重と温度負荷を受ける場合)

埤 克己<sup>\*1</sup>, 竹園 茂男<sup>\*1</sup>  
田口 智弘<sup>\*2</sup>, 穂多田 一男<sup>\*3</sup>

## Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of Axisymmetrical Shells under Mechanical and/or Thermal Loading.

Katsumi Tao, Shigeo Takezono,  
Toshihiro Taguchi, and Kazuo Hotada

An analytical method for the elasto/visco-plastic dynamic problems of axisymmetrical thin shells subjected to mechanical and/or thermal loads is developed. The equations of motion and the relations between the strains and displacements are derived by extending Sanders' elastic shell theory. For the constitutive relations, the Perzyna elasto/visco-plastic equations including the temperature effect are employed. The fundamental equations derived are numerically solved by the finite difference method. As numerical examples, the simply supported cylindrical shells made of mild steel are treated and the following two cases are analyzed; a nonuniform temperature cylinder subjected to impulsive internal pressure, and an internal pressure cylinder subjected to impulsive thermal load. In both cases the variations of displacements and internal forces with time are discussed.

**Key Words:** Structural Analysis, Elasto/Visco-Plastic Deformation, Dynamic Response, Mechanical and/or Thermal Loads, FDM.

### 1. 緒 言

殻構造物に衝撃荷重が作用する場合の弾/粘塑性動的応答問題に関しては、これまでに回転対称殻ばかりでなく、一般の非軸対称殻についても解析がなされてきた<sup>(1)~(6)</sup>。しかしながら、これらの研究は殻体内の温度分布を一定と仮定しており、温度の影響を考慮に入れて殻の弾/粘塑性動的応答問題を取扱った研究は少ないようである<sup>(7)(8)</sup>。

本論文では、荷重と温度負荷を受ける回転対称殻の、弾/粘塑性動的応答問題を取扱った。殻の運動方程式には、Sanders, Jr. の薄肉殻理論式<sup>(9)</sup>に慣性項を加えたものを用いた。構成関係には、温度の影響を考慮したPerzynaの弾/粘塑性式<sup>(10)</sup>を採用した。基礎式の数値解法には、差分法を適用した。

数値例として、両端単純支持の軟鋼円筒殻を取り上げ、非対称な温度分布を有する殻に、衝撃内圧が作用する問題と、内圧が作用している殻に非対称な熱衝撃が作用する問題を取り上げた。

### 2. 解 法

**2.1 基礎関係式** 図1に示すように、殻の中央面上に子午線方向に $\xi$ 、円周方向に $\theta$ 、中央面から外向きに $z$ の座標軸をとる。対称軸から中央面までの距離を $r$ とし、殻の中央面の形を $r=r(\xi)$ とすると、点Pにおける無次元曲率 $\omega_\xi(=a/R_\xi)$ 、 $\omega_\theta(=a/R_\theta)$ および無次元半径 $\rho(=r/a)$ の間には、次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= -(\gamma' + \gamma^2)/\omega_\theta, \quad \omega_\theta = \sqrt{1 - (\rho')^2}/\rho, \quad \omega'_\theta = \gamma(\omega_\xi - \omega_\theta) \\ \rho''/\rho &= -\omega_\xi\omega_\theta, \quad \gamma = \rho'/\rho, \quad \xi = s/a, \quad (\quad)' = d(\quad)/d\xi \end{aligned} \right\}$$

..... (1)

ここで、 $s$ は子午線方向の距離であり、 $a$ は代表長さである。

Sanders, Jr. の殻理論<sup>(9)</sup>による軸対称殻の平衡方程式に慣性項を加え、横せん断力 $Q_\xi$ 、 $Q_\theta$ を消去すると、動的問題の平衡方程式は増分形式で次のようになる。ただし回転慣性の項は省略する。

$$\begin{aligned} & a \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta N_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{N}_{\xi\theta}) - \rho' \Delta N_\theta \right] \\ & + \omega_\xi \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta M_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi\theta}) - \rho' \Delta M_\theta \right] \\ & + \frac{1}{2} (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi\theta}) + \rho a^2 \end{aligned}$$

\* 昭和63年4月1日 第65期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和62年10月5日。

<sup>\*1</sup> 正員、豊橋技術科学大学 (〒440 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

<sup>\*2</sup> 学生員、豊橋技術科学大学大学院。

<sup>\*3</sup> 准員、東陶機器(株) (〒802 北九州市小倉北区)。

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \Delta P_{\xi} - \rho_0 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta U_{\xi}) \right] = 0 \\
& a \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta N_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta \bar{N}_{\theta}) + \rho' \Delta \bar{N}_{\theta} \right] \\
& + \omega_{\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta M_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta \bar{M}_{\theta}) + \rho' \Delta \bar{M}_{\theta} \right] \\
& + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial \xi} [(\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) \Delta \bar{M}_{\theta}] + \rho a^2 \\
& \times \left[ \Delta P_{\theta} - \rho_0 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta U_{\theta}) \right] = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta M_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi}) - \rho' \Delta M_{\theta} \right] \\
& + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \dot{M}_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta \bar{M}_{\theta}) + \rho' \Delta \bar{M}_{\theta} \right] \\
& - a \rho (\omega_{\xi} \Delta N_{\xi} + \omega_{\theta} \Delta N_{\theta}) + \rho a^2 \\
& \times \left[ \Delta P_{\xi} - \rho_0 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta W) \right] = 0
\end{aligned}
\tag{2}$$

ここで  $\Delta$  は増分を表し、慣性項に含まれる  $h, t, \rho_0$  はそれぞれ殻厚、時間および密度である。 $N_{\xi}, N_{\theta}, N_{\xi\theta}$  および  $M_{\xi}, M_{\theta}, M_{\xi\theta}$  は図 1 に示すように殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントであり、 $P_{\xi}, P_{\theta}, P_{\xi}$  は殻の単位面積当たりの分布荷重である。また  $\bar{N}_{\xi\theta}, \bar{M}_{\xi\theta}$  は修正面内せん断力および修正ねじりモーメントで、

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{M}_{\xi\theta} &= (\Delta M_{\xi\theta} + \Delta M_{\theta\xi})/2 \\
\Delta \bar{N}_{\xi\theta} &= (\Delta N_{\xi\theta} + \Delta N_{\theta\xi})/2 \\
&+ [(1/R_{\theta}) - (1/R_{\xi})](\Delta M_{\xi\theta} - \Delta M_{\theta\xi})/4
\end{aligned}
\tag{3}$$

で表される。

なお、殻の境界に作用する単位長さ当たりの有効面内せん断力と有効横せん断力を  $\bar{N}_{\xi\theta}, \bar{Q}_{\xi}$  とし、次のように定義する。

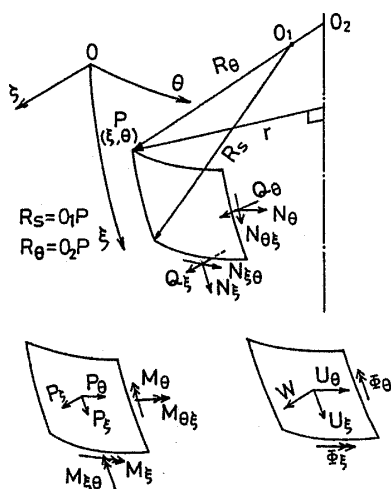


図 1 座標と諸記号

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{N}_{\xi\theta} &= \Delta \bar{N}_{\theta\xi} + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{R_{\theta}} - \frac{1}{R_{\xi}} \right) \Delta \bar{M}_{\xi\theta} \\
\Delta \bar{Q}_{\xi} &= \frac{1}{a \rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta M_{\xi}) + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi\theta}) - \rho' \Delta M_{\theta} \right]
\end{aligned}
\tag{4}$$

次に中央面のひずみ  $\varepsilon_{\xi m}, \varepsilon_{\theta m}$  および  $\varepsilon_{\xi\theta m}$  を  $\xi, \theta, \zeta$  方向の変位  $U_{\xi}, U_{\theta}, W$  で表すと、

$$\begin{aligned}
\Delta \varepsilon_{\xi m} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta U_{\xi}) + \omega_{\xi} \Delta W \right] \\
\Delta \varepsilon_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta U_{\theta}) + \gamma \Delta U_{\xi} + \omega_{\theta} \Delta W \right] \\
\Delta \varepsilon_{\xi\theta m} &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta U_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta U_{\theta}) - \gamma \Delta U_{\theta} \right]
\end{aligned}
\tag{5}$$

ここに、 $\varepsilon_{\xi\theta m}$  は工学上のせん断ひずみの 1/2 である。

また、曲率の変化量  $\chi_{\xi}, \chi_{\theta}, \chi_{\xi\theta}$  と変位成分との関係は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\Delta \chi_{\xi} &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \Phi_{\xi}), \Delta \chi_{\theta} = \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \Phi_{\theta}) + \gamma (\Delta \Phi_{\xi}) \right] \\
\Delta \chi_{\xi\theta} &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \Phi_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \Phi_{\theta}) - \gamma (\Delta \Phi_{\theta}) + \frac{1}{2a} (\omega_{\xi} \right. \\
&\quad \left. - \omega_{\theta}) \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta U_{\xi}) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta U_{\theta}) - \gamma \Delta U_{\theta} \right\} \right]
\end{aligned}
\tag{6}$$

ここに、 $\Phi_{\xi}, \Phi_{\theta}$  は中央面の回転を示し、

$$\begin{aligned}
\Delta \Phi_{\xi} &= \frac{1}{a} \left[ -\frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta W) + \omega_{\xi} \Delta U_{\xi} \right] \\
\Delta \Phi_{\theta} &= \frac{1}{a} \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta W) + \omega_{\theta} \Delta U_{\theta} \right]
\end{aligned}
\tag{7}$$

Kirchhoff の仮説を用いて、殻厚中央面から  $\zeta$  の距離にある点のひずみ成分は次式で表される。

$$\{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta \varepsilon_m\} + \zeta \{\Delta \chi\}
\tag{8}$$

ただし

$$\begin{aligned}
\{\Delta \varepsilon\}^T &= \{\Delta \varepsilon_{\xi}, \Delta \varepsilon_{\theta}, \Delta \varepsilon_{\xi\theta}\} \\
\{\Delta \varepsilon_m\}^T &= \{\Delta \varepsilon_{\xi m}, \Delta \varepsilon_{\theta m}, \Delta \varepsilon_{\xi\theta m}\} \\
\{\Delta \chi\}^T &= \{\Delta \chi_{\xi}, \Delta \chi_{\theta}, \Delta \chi_{\xi\theta}\}
\end{aligned}
\tag{9}^{**1}$$

さて、本研究では構成関係に温度の影響を考慮した Perzyna の弾/粘塑性式<sup>(10)</sup>を用いると、粘塑性ひずみ速度  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$  は、

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \gamma_0(T) \langle \Psi(F) \rangle S_{ij} J_2^{-1/2}
\tag{10}$$

ここで、 $(\cdot)$  は時間に関する微分を示す。 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}, S_{ij}, J_2$  および  $\gamma_0(T)$  は粘塑性ひずみ、偏差応力、偏差応力の第 2 不変量および粘性を表す定数であり、 $\gamma_0$  は次に示す  $\sigma^*$  とともに、絶対温度  $T$  の関数である。また、 $\Psi(F)$  は次の定義によるものである。

$$\begin{aligned}
F \leq 0 \text{ のとき } & \langle \Psi(F) \rangle = 0 \\
F > 0 \text{ のとき } & \langle \Psi(F) \rangle = \Psi(F)
\end{aligned}
\tag{11}$$

ここに、 $F$  は

<sup>\*\*1</sup>  $\{\cdot\}^T$  は転置行列を示す。

$$F = [\bar{\sigma} - \sigma^*(T)] / \sigma^*(T) \dots\dots\dots (12)$$

で、 $\bar{\sigma}$  はミーゼスの相当応力 ( $=\sqrt{3}J_2$ ) であり、 $F=0$  はミーゼスの降伏曲面を表す。また  $\sigma^*(T)$  は静的な降伏応力である。

全ひずみ増分が弾性ひずみ増分と粘塑性ひずみ増分及び熱ひずみ増分の和で表せると仮定すると、平面応力状態において全ひずみ増分は次式ようになる。

$$\{\Delta \varepsilon\} = [D]^{-1} \{\Delta \sigma\} + \{\Delta \varepsilon^{vp}\} + \{\Delta \varepsilon^t\} \dots\dots\dots (13)$$

ただし

$$\begin{aligned} \{\Delta \sigma\}^T &= \{\Delta \sigma_{\xi}, \Delta \sigma_{\theta}, \Delta \sigma_{\xi\theta}\} \\ \{\Delta \varepsilon^{vp}\}^T &= \{\Delta \varepsilon_{\xi}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\theta}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\xi\theta}^{vp}\} \\ \{\Delta \varepsilon^t\}^T &= \{\alpha \Delta T_e, \alpha \Delta T_e, 0\} \\ [D] &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \\ \{\Delta \varepsilon^{vp}\} &= \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} \Delta t \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_0(T) \times \psi \left( \frac{\bar{\sigma} - \sigma^*(T)}{\sigma^*(T)} \right) \times \frac{1}{\bar{\sigma}} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \{\sigma\} \Delta t \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$E, \nu$  および  $\alpha$  は縦弾性係数、ポアソン比および線膨張係数である。また  $T_e$  は基準温度  $T_0$  からの温度変化で、時刻  $t$  における殻の任意点の温度を  $T$  とすると、

$$T_e(\xi, \theta, \zeta, t) = T(\xi, \theta, \zeta, t) - T_0 \dots\dots\dots (15)$$

となる。

式(13)に式(8)を代入し、 $\{\Delta \sigma\}$  について解くと、次式が得られる。

$$\{\Delta \sigma\} = [D] \{ \{\Delta \varepsilon_m\} + \zeta \{\Delta \chi\} \} - \{\Delta \sigma^{vp}\} - \{\Delta \sigma^t\} \} \dots\dots\dots (16)$$

ただし

$$\{\Delta \sigma^{vp}\}^T = \{\Delta \sigma_{\xi}^{vp}, \Delta \sigma_{\theta}^{vp}, \Delta \sigma_{\xi\theta}^{vp}\}$$

$$\{\Delta \sigma^t\}^T = \{\Delta \sigma^t, \Delta \sigma^t, 0\}$$

ここに  $\{\Delta \sigma^{vp}\}$  および  $\{\Delta \sigma^t\}$  はそれぞれ粘塑性による見掛けの応力および温度変化による応力で、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta \sigma^{vp}\} &= [D] \{\Delta \varepsilon^{vp}\} \\ \{\Delta \sigma^t\} &= [D] \{\Delta \varepsilon^t\} = \frac{\alpha E}{1-\nu} \{\Delta T_e, \Delta T_e, 0\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

式(16)を用いると、殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta N_{\xi}, \Delta N_{\theta}, \Delta \bar{N}_{\xi\theta}\}^T &= h [D] \{\Delta \varepsilon_m\} \\ &\quad - \{\Delta N_{\xi}^{vp}, \Delta N_{\theta}^{vp}, \Delta \bar{N}_{\xi\theta}^{vp}\}^T - \{\Delta N^t, \Delta N^t, 0\}^T \\ \{\Delta M_{\xi}, \Delta M_{\theta}, \Delta \bar{M}_{\xi\theta}\}^T &= \frac{h^3}{12} [D] \{\Delta \chi\} \\ &\quad - \{\Delta M_{\xi}^{vp}, \Delta M_{\theta}^{vp}, \Delta \bar{M}_{\xi\theta}^{vp}\}^T - \{\Delta M^t, \Delta M^t, 0\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 $( )^{vp}, ( )^t$  はそれぞれ粘塑性による見掛けの内力成分および温度変化  $T_e$  による内力成分を示し、次式によって見掛けの応力および熱応力の増分から計算できる。

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta N_{\xi}^{vp}, \Delta N_{\theta}^{vp}, \Delta \bar{N}_{\xi\theta}^{vp}, \Delta N^t\} \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} (\Delta \sigma_{\xi}^{vp}, \Delta \sigma_{\theta}^{vp}, \Delta \sigma_{\xi\theta}^{vp}, \Delta \sigma^t) d\zeta \\ \{\Delta M_{\xi}^{vp}, \Delta M_{\theta}^{vp}, \Delta \bar{M}_{\xi\theta}^{vp}, \Delta M^t\} \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} (\Delta \sigma_{\xi}^{vp} \zeta, \Delta \sigma_{\theta}^{vp} \zeta, \Delta \sigma_{\xi\theta}^{vp} \zeta, \Delta \sigma^t \zeta) d\zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

以上で36個の未知数  $\Delta N_{\xi}, \Delta N_{\theta}, \Delta \bar{N}_{\xi\theta}, \Delta M_{\xi}, \Delta M_{\theta}, \Delta \bar{M}_{\xi\theta}, \Delta N_{\xi}^{vp}, \Delta N_{\theta}^{vp}, \Delta \bar{N}_{\xi\theta}^{vp}, \Delta N^t, \Delta M_{\xi}^{vp}, \Delta M_{\theta}^{vp}, \Delta \bar{M}_{\xi\theta}^{vp}, \Delta M^t, \Delta \sigma_{\xi}, \Delta \sigma_{\theta}, \Delta \sigma_{\xi\theta}, \Delta \sigma_{\xi}^{vp}, \Delta \sigma_{\theta}^{vp}, \Delta \sigma_{\xi\theta}^{vp}, \Delta \sigma^t, \Delta \varepsilon_{\xi m}, \Delta \varepsilon_{\theta m}, \Delta \varepsilon_{\xi\theta m}, \Delta \varepsilon_{\xi}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\theta}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\xi\theta}^{vp}, \Delta \varepsilon^t, \Delta U_{\xi}, \Delta U_{\theta}, \Delta W, \Delta \chi_{\xi}, \Delta \chi_{\theta}, \Delta \chi_{\xi\theta}, \Delta \Phi_{\xi}, \Delta \Phi_{\theta}$  に対して、式(2), (5)~(7), (14), (16)~(19)の36個の式が得られたことになる。

**2.2 支配方程式** 一般に非対称問題を解析するには、各変数を  $\theta$  方向にフーリエ級数で表し、その係数を定めればよい。そこで上に示した36個の変数のうち、粘塑性ひずみ増分  $\Delta \varepsilon_{\xi}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\theta}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\xi\theta}^{vp}$ 、熱ひずみ増分  $\Delta \varepsilon^t$  を除く32個の変数と分布荷重および温度変化をフーリエ級数で次のように表す。

$$\begin{aligned} \{\Delta N_{\xi}, \Delta N_{\xi}^{vp}, \Delta N_{\theta}, \Delta N_{\theta}^{vp}, \Delta N^t\} &= \sigma_0 h \sum_{n=0}^{\infty} \{\Delta n_{\xi}^{(n)}, \Delta n_{\xi}^{vp(n)}, \Delta n_{\theta}^{(n)}, \Delta n_{\theta}^{vp(n)}, \Delta n^{t(n)}\} \cos n\theta \\ \{\Delta M_{\xi}, \Delta M_{\xi}^{vp}, \Delta M_{\theta}, \Delta M_{\theta}^{vp}, \Delta M^t\} &= \frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \{\Delta m_{\xi}^{(n)}, \Delta m_{\xi}^{vp(n)}, \Delta m_{\theta}^{(n)}, \Delta m_{\theta}^{vp(n)}, \Delta m^{t(n)}\} \cos n\theta \\ \{\Delta \bar{N}_{\xi\theta}, \Delta \bar{N}_{\xi\theta}^{vp}\} &= \sigma_0 h \sum_{n=1}^{\infty} \{\Delta \bar{n}_{\xi\theta}^{(n)}, \Delta \bar{n}_{\xi\theta}^{vp(n)}\} \sin n\theta, \{\Delta \bar{M}_{\xi\theta}, \Delta \bar{M}_{\xi\theta}^{vp}\} = \frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \{\Delta \bar{m}_{\xi\theta}^{(n)}, \Delta \bar{m}_{\xi\theta}^{vp(n)}\} \sin n\theta \\ \{\Delta U_{\xi}, \Delta W, \Delta \varepsilon_{\xi m}, \Delta \varepsilon_{\theta m}, \Delta \chi_{\xi}, \Delta \chi_{\theta}, \Delta \Phi_{\xi}\} \\ &= \frac{\sigma_0}{E} \sum_{n=0}^{\infty} \{a \Delta u_{\xi}^{(n)}, a \Delta w^{(n)}, \Delta e_{\xi m}^{(n)}, \Delta e_{\theta m}^{(n)}, \frac{1}{a} \Delta k_{\xi}^{(n)}, \frac{1}{a} \Delta k_{\theta}^{(n)}, \Delta \varphi_{\xi}^{(n)}\} \cos n\theta \\ \{\Delta U_{\theta}, \Delta \varepsilon_{\xi\theta m}, \Delta \chi_{\xi\theta}, \Delta \Phi_{\theta}\} &= \frac{\sigma_0}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \{a \Delta u_{\theta}^{(n)}, \Delta e_{\xi\theta m}^{(n)}, \frac{1}{a} \Delta k_{\xi\theta}^{(n)}, \Delta \varphi_{\theta}^{(n)}\} \sin n\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{\Delta\sigma_\theta, \Delta\sigma_\theta^{vp}, \Delta\sigma_\theta, \Delta\sigma_\theta^{vp}, \Delta\sigma^t, \Delta P_\theta, \Delta P_\theta, \Delta T_\theta\} \\ & = \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{\Delta s_\theta^{(n)}, \Delta s_\theta^{vp(n)}, \Delta s_\theta^{(n)}, \Delta s_\theta^{vp(n)}, \Delta s_\theta^{t(n)}, \frac{h}{a} \Delta p_\theta^{(n)}, \frac{h}{a} \Delta p_\theta^{(n)}, \frac{1}{aE} \Delta t_\theta^{(n)}\} \cos n\theta \\ & \{\Delta\sigma_{\theta\theta}, \Delta\sigma_{\theta\theta}^{vp}, \Delta P_\theta\} = \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{\Delta s_{\theta\theta}^{(n)}, \Delta s_{\theta\theta}^{vp(n)}, \frac{h}{a} \Delta p_\theta^{(n)}\} \sin n\theta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 $\sigma_0$  は代表応力である。なお式(20)は、 $\theta=0$  の子午線面に対して面対称な荷重が作用する場合であるが、より一般性を持たせるには、各フーリエ展開式において  $\sin$  で表されているものには  $\cos$  の級数を、 $\cos$  で表されているものには  $\sin$  の級数を付加する。

これらのフーリエ展開式を前述の基礎式に代入し、フーリエ係数に関する対応する式をつくり、これらの式から順次未知数を消去すると、最後に平衡方程式は変位  $\Delta u_\theta^{(n)}$ ,  $\Delta u_\theta^{(n)}$ ,  $\Delta w^{(n)}$  および曲げモーメント  $\Delta m_\theta^{(n)}$  に関する次の四元連立二階微分方程式になる。なお以後の記述において、フーリエ級数の添字 ( $n$ ) は便宜上省略する。

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & a_{15} & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{24} & a_{27} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \end{bmatrix} Z'' + \begin{bmatrix} a_2 & a_4 & a_6 & a_8 \\ a_{10} & a_{13} & a_{16} & 0 \\ a_{19} & a_{22} & a_{25} & a_{28} \\ a_{30} & 0 & a_{34} & 0 \end{bmatrix} Z' + \begin{bmatrix} a_3 & a_5 & a_7 & a_9 \\ a_{11} & a_{14} & a_{17} & a_{18} \\ a_{20} & a_{23} & a_{26} & a_{29} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} & a_{36} \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \ddot{u}_\theta \\ \Delta \ddot{u}_\theta \\ \Delta \ddot{w} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで  $a_1 \sim a_{36}$  は殻の形状と  $\nu$  の値から定まる係数であり<sup>(11)</sup>、また  $Z = \{\Delta u_\theta, \Delta u_\theta, \Delta w, \Delta m_\theta\}^T$  である。 $c_1 \sim c_4$  は殻の形状のほかに、分布荷重、温度負荷および粘塑性による見掛けの内力成分から定まる定数で、次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} c_1 &= -\Delta p_\theta + \Delta n_\theta^{vp'} + \gamma(\Delta n_\theta^{vp} - \Delta n_\theta^{vp}) + \frac{n}{\rho} \Delta \bar{n}_{\theta\theta}^{vp} - \lambda^2 \gamma \omega_\theta (\Delta m_\theta^{vp} - \nu \Delta m_\theta^{vp}) \\ & \quad + \frac{n \lambda^2}{2\rho} (3\omega_\theta - \omega_\theta) \Delta \bar{m}_{\theta\theta}^{vp} + \Delta n_\theta^{t'} - \lambda^2 \gamma \omega_\theta (1 - \nu) \Delta m_\theta^t \\ c_2 &= -\Delta p_\theta + \Delta \bar{n}_{\theta\theta}^{vp'} + 2\gamma \Delta \bar{n}_{\theta\theta}^{vp} - \frac{n}{\rho} \Delta n_\theta^{vp} + \frac{1}{\rho} n \lambda^2 \omega_\theta (\nu \Delta m_\theta^{vp} - \Delta m_\theta^{vp}) + \frac{1}{2} (3\omega_\theta - \omega_\theta) \lambda^2 \Delta \bar{m}_{\theta\theta}^{vp'} \\ & \quad + \frac{1}{2} \lambda^2 [\gamma(3\omega_\theta + \omega_\theta) - \omega_\theta'] \Delta \bar{m}_{\theta\theta}^{vp} - \frac{n}{\rho} \Delta n_\theta^t - \frac{1}{\rho} n \lambda^2 \omega_\theta (1 - \nu) \Delta m_\theta^t \\ c_3 &= -\Delta p_\theta - \omega_\theta \Delta n_\theta^{vp} - \omega_\theta \Delta n_\theta^{vp} + \lambda^2 \left( \omega_\theta \omega_\theta - \frac{n^2}{\rho^2} \right) (\Delta m_\theta^{vp} - \nu \Delta m_\theta^{vp}) - \gamma \lambda^2 (\Delta m_\theta^{vp'} - \nu \Delta m_\theta^{vp'}) \\ & \quad + \frac{2}{\rho} n \lambda^2 \Delta \bar{m}_{\theta\theta}^{vp'} + \frac{2}{\rho} \gamma n \lambda^2 \Delta \bar{m}_{\theta\theta}^{vp} - (\omega_\theta + \omega_\theta) \Delta n_\theta^t + \lambda^2 (1 - \nu) \left( \omega_\theta \omega_\theta - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \Delta m_\theta^t - \gamma \lambda^2 (1 - \nu) \Delta m_\theta^{t'} \\ c_4 &= \Delta m_\theta^{vp} + \Delta m_\theta^t \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 $\lambda = h/a$  である。

また、式(16)、(18)からひずみと曲率の変化量を消去し、フーリエ級数表示することにより、応力は合応力および合モーメントから次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta s_\theta &= \Delta n_\theta + \Delta n_\theta^{vp} + \Delta n_\theta^t + 12 \frac{\xi}{a} (\Delta m_\theta + \Delta m_\theta^{vp} + \Delta m_\theta^t) - \Delta s_\theta^{vp} - \Delta s_\theta^t \\ \Delta s_\theta &= \Delta n_\theta + \Delta n_\theta^{vp} + \Delta n_\theta^t + 12 \frac{\xi}{a} (\Delta m_\theta + \Delta m_\theta^{vp} + \Delta m_\theta^t) - \Delta s_\theta^{vp} - \Delta s_\theta^t \\ \Delta s_{\theta\theta} &= \Delta \bar{n}_{\theta\theta} + \Delta \bar{n}_{\theta\theta}^{vp} + 12 \frac{\xi}{a} (\Delta \bar{m}_{\theta\theta} + \Delta \bar{m}_{\theta\theta}^{vp}) - \Delta s_{\theta\theta}^{vp} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

式(21)～(23)の、粘塑性と温度変化に関する内力成分の増分のフーリエ係数は、式(17)、(19)、(20)からそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{\Delta n_\theta^{vp}, \Delta m_\theta^{vp}\} \cos n\theta &= \frac{E}{h} \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ 1, \frac{a\xi}{h^2} \right\} (\Delta \varepsilon_\theta^{vp} + \nu \Delta \varepsilon_\theta^{vp}) d\xi \\ \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{\Delta n_\theta^{vp}, \Delta m_\theta^{vp}\} \cos n\theta &= \frac{E}{h} \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ 1, \frac{a\xi}{h^2} \right\} (\Delta \varepsilon_\theta^{vp} + \nu \Delta \varepsilon_\theta^{vp}) d\xi \\ \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{\Delta \bar{n}_{\theta\theta}^{vp}, \Delta \bar{m}_{\theta\theta}^{vp}\} \sin n\theta &= \frac{E}{h} \frac{1}{1+\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ 1, \frac{a\xi}{h^2} \right\} \Delta \varepsilon_{\theta\theta}^{vp} d\xi, \quad \{\Delta n_\theta^t, \Delta m_\theta^t\} = \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ 1, \frac{a}{h^2} \xi \right\} \Delta t_\theta d\xi \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{\Delta s_{\theta}^{vp}, \Delta s_{\theta}^{vp}\} \cos n\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \{\Delta \varepsilon_{\theta}^{vp} + \nu \Delta \varepsilon_{\theta}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\theta}^{vp} + \nu \Delta \varepsilon_{\theta}^{vp}\}, \quad \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \Delta s_{\theta}^{vp} \sin n\theta = \frac{E}{1+\nu} \Delta \varepsilon_{\theta}^{vp} \quad \dots\dots\dots (25)$$

式(24), (25)の右辺の粘塑性ひずみ増分は、応力値から式(14)によって計算できる。また積分にはシンプソンの1/3則を用いる。

### 3. 数値計算法

ある任意の計算段階における変位と曲げモーメント  $M_{\theta}$  の増分は、式(21)を適当な境界条件のもとで解けば得られ、またこれらを用いて、内力成分の増分は、式(5)～(7)を式(18)に代入したもの、ならびに式(23)から求められる。しかしながら、式(21)を厳密に理論解析することは困難であるから、差分法によって数値的に解を求める。境界と不連続点では前進および後退3点差分式を、その他の点では中間差分式を用いる<sup>(12)</sup>。また慣性項には次の Houbolt の後退時間差分式<sup>(13)</sup>を用いる。

$$\ddot{Z}_{i,j} = a_j Z_{i,j} + b_j Z_{i,j-1} + c_j Z_{i,j-2} + d_j Z_{i,j-3} \quad (j=0, 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここで係数  $a_j, b_j, c_j, d_j$  は初期条件によって決まり、初期変位、初速度、初期加速度が零のときには次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= b_0 = c_0 = d_0 = 0 \\ a_1 &= 6/(\Delta t)^2, \quad b_1 = c_1 = d_1 = 0 \\ a_2 &= 2/(\Delta t)^2, \quad b_2 = -4/(\Delta t)^2, \quad c_2 = d_2 = 0 \\ a_j &= 2/(\Delta t)^2, \quad b_j = -5/(\Delta t)^2 \\ c_j &= 4/(\Delta t)^2, \quad d_j = -1/(\Delta t)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

これらの差分式を式(21)および境界条件式、接続条件式に用いると、 $Z_{i,j}$  に関する多元連立方程式が得られる。一般に弾/粘塑性問題の解は、これらの各計算段階の増分を積分することによって得られる。

### 4. 数値例

計算例として、不均一温度の軟鋼製の両端単純支持

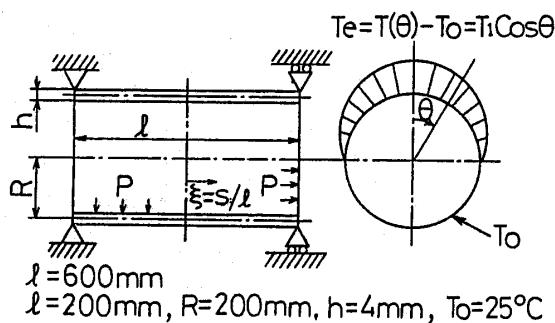


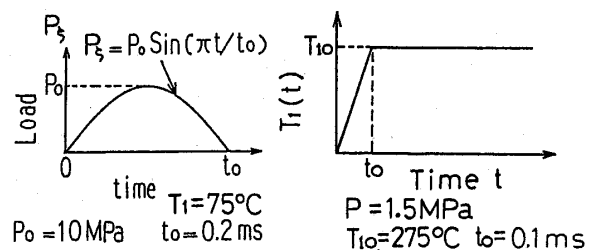
図2 円筒殻と温度分布

円筒殻に、時間に対して半正弦波状の衝撃内圧が作用する問題、および一定内圧の上記円筒殻に、非対称な温度分布の熱衝撃が作用する問題を解析した。

**4.1 計算例1 (衝撃内圧が作用する不均一温度の円筒殻)** 子午線方向に一樣で、円周の上半分に cosine 状の温度分布を有する、閉じた両端可動支持軟鋼円筒殻(図2)に、時間に対して sine 状に衝撃内圧が作用する場合[図3(a)]を取り上げた。全長  $l=200$ ,  $600$  mm の2種類の円筒殻について、同一の荷重条件で計算を行った。図中の温度および内圧負荷に関する各パラメータの値は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \text{基準温度 } T_0 &= 25^\circ\text{C}, \quad \text{最大温度差 } T_1 = 75^\circ\text{C} \\ \text{最大衝撃内圧 } P_0 &= 10 \text{ MPa}, \quad \text{荷重継続時間 } t_0 = 0.2 \text{ ms} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

円筒殻の形状諸量は次のようになる。



(a) 計算例1

(b) 計算例2

図3 衝撃荷重

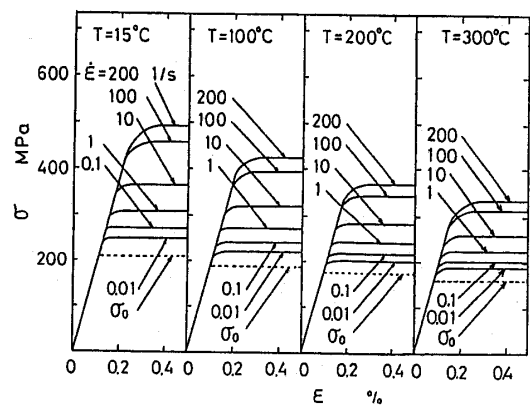


図4 応力-ひずみ線図

$$\left. \begin{aligned} a=l, \xi=s/l, \rho=1, 1/3, \rho'=0, \gamma=0 \\ \omega_\theta=1, 3, \omega_\xi=\omega'_\xi=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (29)$$

また  $\xi$  の差分間隔  $\Delta\xi$  は、差分点の数を  $N$  として、  
 $\Delta\xi=1/2(N-1) \dots\dots (30)$

境界条件は、点 A では対称性により、

$$\Delta U_\xi = \Delta \tilde{N}_\theta = \Delta \tilde{Q}_\xi = \Delta \Phi_\xi = 0 \dots\dots (31)$$

点 B では単純可動支持の条件を用いて、

$$\Delta U_\theta = \Delta W = \Delta M_\xi = 0, \Delta N_\xi = \Delta P_\xi \cdot R/2 \dots\dots (32)$$

なお式(20)の  $\sigma_0$  は本計算では  $\sigma_0=1$  とした。

計算に用いた軟鋼の材料定数は次のとおりである<sup>(10)</sup>。

ヤング率  $E=189.5$  GPa, ポアソン比  $\nu=0.3$

線膨張係数  $\alpha=11.7 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , 密度  $\rho_0$

$=7.78 \text{ g/cm}^3$ , 静的応力-ひずみ関係式  $\sigma^*(T)$

$=207 \exp\{0.45(288/T-1)\} \text{ MPa}$ , 粘性パラメータ

$\gamma_0(T)=30.12[1+2.6\{(220-T)/273\}^2] \text{ s}^{-1}$

$$\Psi(F)=[(\bar{\sigma}-\sigma^*(T))/\sigma^*(T)]^5 \dots\dots (33)$$

これらの材料定数を用いた場合の、15, 100, 200, 300  $^\circ\text{C}$  の各温度での応力-ひずみ線図を図 4 に示す。

差分点数は短い円筒殻で  $N=51$ , 長い殻で 101 とし、板厚方向の格子点は 19 個とした。また、フーリエ級数の項数は  $n=20$  とし、時間間隔  $\Delta t$  は  $\Delta t=1.0 \times 10^{-3} \text{ ms}$  とした。これらの値は、解の収束性と利用した計算機 (FACOM M-382) の容量および計算時間を考慮して決定した。

次に計算結果について考察する。図 5 は円筒殻の  $\xi=0, \theta=0, 90, 180^\circ$  の各点の半径方向変位  $W$  の時間的変化である。図 6 は  $\xi=0.5, \theta=0, 90, 180^\circ$  の各点の子午線方向変位  $U_\xi$  および  $\xi=0, \theta=90^\circ$  の点の円周方向変位  $U_\theta$  の時間的変化を示したものである。時刻  $t=0$  で温度負荷のために、 $W$  と  $U_\xi$  は高温部の  $\theta=0^\circ$  で低温部に比べて大きな値を示し、その後の内圧の負荷によってその差は大きくなる傾向を示す。また、 $U_\xi$ ,

$U_\theta$  について長短の円筒殻を比較すると、長い円筒殻のほうが変動幅は大きい、時間的には緩慢な応答を示している。

図 7 は  $\xi=0, \theta=0, 90, 180^\circ$  の各点の面内力  $N_\xi$  の時間的変化を示す。殻の 3 点における  $N_\xi$  の値にはあまり大きな差は見られないが、円筒殻の長短による差は時刻  $t=0.2 \text{ ms}$  以後で顕著である。

次に、両円筒殻の  $\theta=0, 90, 180^\circ$  の子午線上の変位

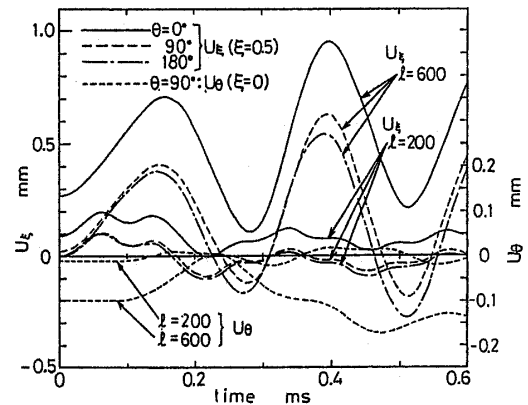


図 6 変位  $U_\xi, U_\theta$  の時間的変化

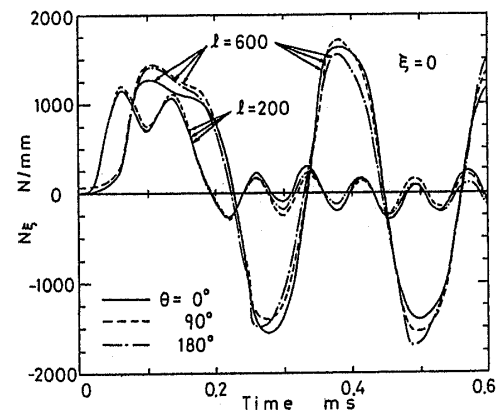


図 7 面内力  $N_\xi$  の時間的変化

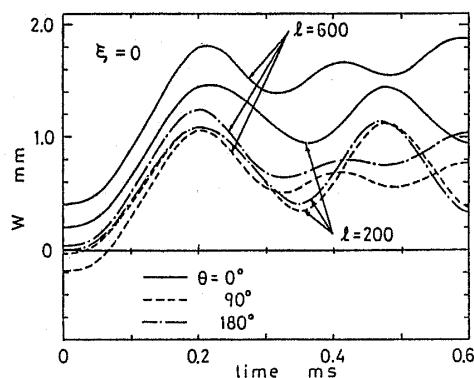


図 5 変位  $W$  の時間的変化

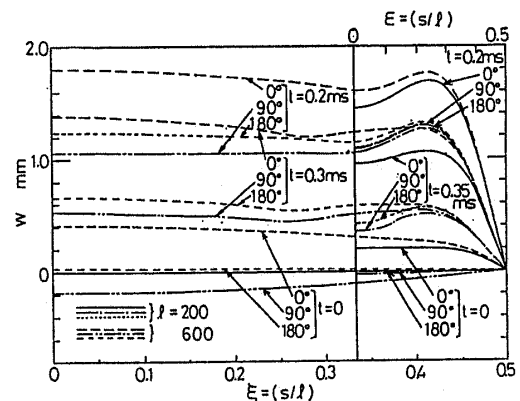


図 8 変位  $W$  の子午線方向分布

$W$ , 面内力  $N_\theta$  および  $\theta=0, 90^\circ$  上の曲げモーメント  $M_\xi$  を, 各々図 8~10 に示す。図において両円筒殻の子午線座標  $\xi$  は, 実長  $s$  が等しくなるように取っている。これらの図より, 長い円筒殻の端部付近の変位  $W$  と内力  $N_\theta, M_\xi$  の分布は, 短い円筒殻の全長にわたる分布とよく類似していることがわかる。また長い円筒殻では, 端部付近を除いて変位  $W$  および面内力  $N_\theta$  は子午線方向にほぼ一様で, 曲げモーメント成分はかなり小さく, ほぼ膜応力状態になっている。

なお, 降伏域の進展のようすは図には示していないが, 長短の殻とも時刻  $t=0.017$  ms において, 端部の  $\theta=0^\circ$  で初期降伏を生じ, 急速に降伏域が広がって  $t=0.1$  ms でほぼ殻全体にわたり, その後時間の経過とともに降伏域および再降伏域が繰返し現れる。

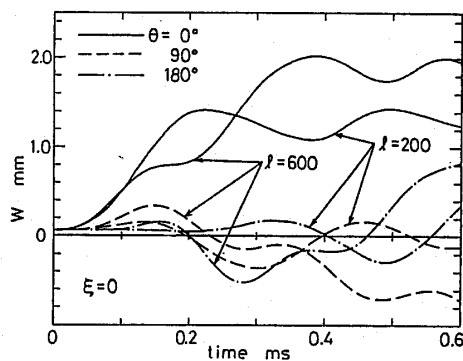
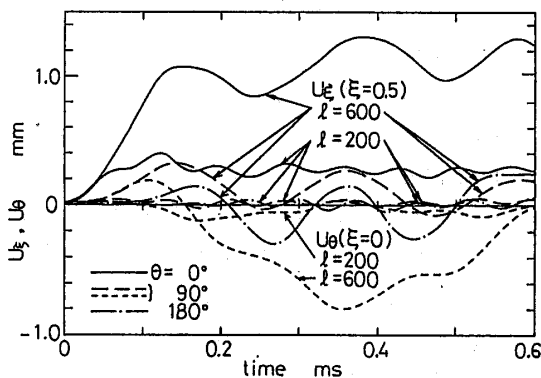
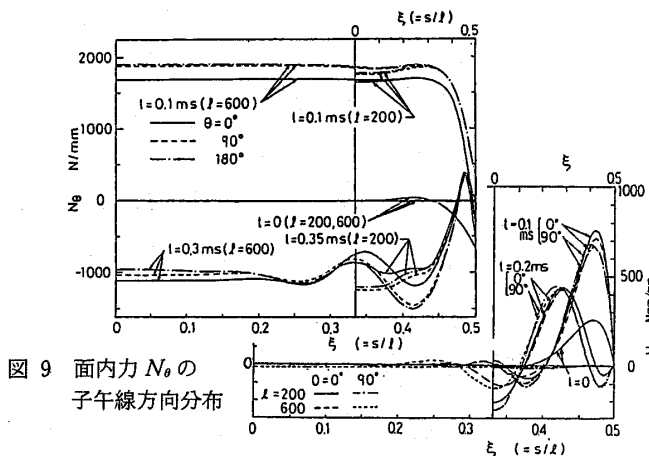
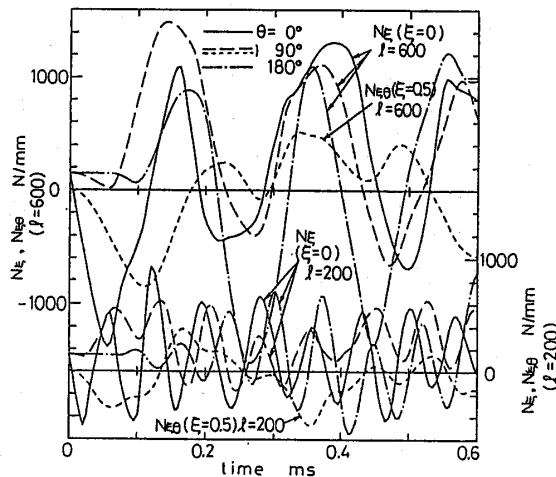
**4.2 計算例 2 (不均一な温度分布の熱衝撃が作用する内圧円筒殻)** 内圧が作用している閉じた両端可動支持薄肉円筒殻 (図 2) に, 子午線方向に一様で円周方向の上半分に cosine 状の温度分布の熱衝撃が, 時間に対して図 3 (b) に示すように作用する問題を取扱った。円筒殻の形状諸量, 材料定数, 境界条件は計算例 1 と同様である。図中の内圧および温度負荷に関する各パラメータの値は次のとおりである。

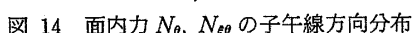
内圧  $P=1.5$  MPa, 基準温度  $T_0=25^\circ\text{C}$ , 最大温度  
到達時刻  $t_0=0.1$  ms, 最大温度差  $T_{10}=275^\circ\text{C}$   
..... (34)

また差分点数, 板厚方向の格子点数, フーリエ項数および時間間隔とも計算例 1 と同じ値を採用した。

計算結果を図 11~15 に示す。図 11 は円筒殻の  $\xi=0$ ,  $\theta=0, 90, 180^\circ$  の各点の変位  $W$  の時間的変化である。図 12 は  $\xi=0.5$ ,  $\theta=0, 90, 180^\circ$  の各点の変位  $U_\xi$

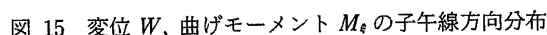
および  $\xi=0$ ,  $\theta=90^\circ$  の点の変位  $U_\theta$  の時間的変化を示したものである。内圧を受けて  $U_\xi, W$  とともに正の方向にわずかに変位した殻は, 熱衝撃の作用により時間的遅れを伴って大きく変位し, 特に高温部で顕著である。また短い殻に比べて長い殻では, 立上り時間が長く変位量も大きい。特に, 変位  $U_\xi, U_\theta$  は長い殻のほうが時間的変動が緩慢である。

図 11 変位  $W$  の時間的変化図 12 変位  $U_\xi, U_\theta$  の時間的変化図 9 面内力  $N_\theta$  の子午線方向分布図 10 曲げモーメント  $M_\xi$  の子午線方向分布図 13 面内力  $N_\xi, N_\theta$  の時間的変化



図には示していないが、初期降伏は長短の殻とも、 $t = 0.03 \text{ ms}$ において $\xi = 0.5$ ,  $\theta = 0^\circ$ の点に生じ、 $t = 0.2 \text{ ms}$ で熱衝撃の強い円筒殻の上半分に降伏域が広がる。その後短い殻では、殻の下半分の一部に降伏域が生じる程度で弾性域が広く残るが、長い殻では $\xi = 0.5$ ,  $\theta = 180^\circ$ 付近を除いて、ほとんどの領域で降伏する。降伏した領域は殻の振動とともに部分的に除荷ならびに再降伏を繰返す。

本論文では、荷重と温度負荷を受ける薄肉回転対称殻の、弾/粘塑性動的応答問題の解法を示した。構成関係には、温度の影響を考慮した Perzyna の式を適



なお計算には、九州大学および名古屋大学の大型計算機センターのFACOM M-382を使用し、本計算例の計算時間は計算例1、2ともおよそ30minである。

- (1) Nagarajan, S. and Popov, E. P., *Int. J. Numer. Method Eng.*, 9-3(1975), 535.
- (2) 竹園・埤, 機論, 44-381, (昭53), 1478.
- (3) 竹園・埤, 機論, 47-421, A (昭56), 949.
- (4) Atkatsch, R. S., ほか 2 名, *Trans. ASME*, Ser. E, 50-1(1983), 131.
- (5) 村瀬・ほか 3 名, 機論, 51-463, A(昭60), 750.
- (6) 竹園・ほか 2 名, 機論, 52-482, A(昭61), 2395.
- (7) Wojewódzki, W., *Proc. 2nd Int. Conf. Struct. Mech. Reactor Technol.*, L6/7, Berlin, (1973), 1.
- (8) Wojewódzki, W. and Bukowski, R., *Trans. ASME*, Ser. E, 51-2(1984), 114.
- (9) Sanders, J. L., Jr., *NASA Rep.*, R-24(1959), 1.
- (10) Perzyna, P., *Adv. Appl. Mech.*, 9(1966), 243, Academic Press.
- (11) Budiansky, B. and Radkowsky, P. P., *AIAA J.*, 1-8(1963), 1833.
- (12) 竹園・埤, 機論, 46-402, A(昭55), 227.
- (13) Houbolt, J. C., *J. Aeronaut. Sci.*, 17-9(1950), 540.