

## Overlay モデルによる回転対称殻の弾/粘塑性動的応答\*

埤 克己<sup>\*1</sup>, 竹園茂男<sup>\*1</sup>, 大坪一三<sup>\*2</sup>  
持留裕之<sup>\*3</sup>, 松岡展伸<sup>\*4</sup>

## Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of Thin Shells of Revolution by Means of Overlay Model

Katsumi TAO, Shigeo TAKEZONO, Kazumi OHTSUBO,  
Hiroyuki MOCHIDOME, and Hironobu MATSUOKA

The numerical analysis of the elasto/visco-plastic dynamic response of axisymmetrical thin shells subjected to arbitrary loads is carried out by the elasto/visco-plastic overlay model which is able to express the Bauschinger effect and the strain rate dependence. Namely, Perzyna's equation is used for the constitutive relation of each layer of the overlay model, and as a whole, the Bauschinger effect and the influence of viscosity in plastic range of the material are taken into account. The equations of motion and the relations between the strains and displacements are derived by extending the Sanders linear theory in elastic shells. The numerical method selected for this problem is a method using finite difference in both space and time. In order to check the adequacy of the numerical analysis, experiments are performed on the elasto/visco-plastic response of an aluminum cylindrical shell subjected to locally distributed impulsive loads. On the whole, relatively good agreement is obtained between the experimental results and analytical solutions.

**Key Words:** Structural Analysis, Inelasticity, FDM, Elasto/Visco-Plasticity, Dynamic Response, Thin Shells of Revolution, Overlay Model, Experiment on Aluminum Shell

## 1. 緒 言

殻構造物に衝撃荷重が作用する場合の弾塑性応答問題に関しては、ひずみ速度が大きくなるため、塑性域において材料の粘性の影響を考慮に入れることが重要であり、これまでに軸対称殻に限らず、一般の非軸対称殻についても材料粘性を考慮した解析が行われてきた<sup>(1)~(8)</sup>。また応力が反転する場合にはバウシinger効果を無視することはできず、著者らは弾/粘塑性 Overlay モデルを考案して材料のひずみ速度依存性とバウシinger効果を表し、この場合の解析を行ってきた<sup>(9)</sup>。しかしながら、これらの解析結果の妥当性については、比較すべき他の研究報告、文献等があまりなく、実験で確かめる必要がある。

本論文では一般軸対称殻に非軸対称な動的荷重が作用した場合の弾/粘塑性 Overlay モデル<sup>(9)</sup>による解法を示すとともに、両端自由のアルミ円筒殻の中央部に局所的な衝撃荷重を負荷し、荷重および変形の時間的

変化を求め、実験結果と解析結果の比較検討を行った。

## 2. 解 法

**2.1 基礎関係式** 図1に示すように、殻の中央面上に子午線方向に  $\xi$ 、円周方向に  $\theta$ 、中央面から外向きに  $r$  の座標軸をとる。対称軸から中央面までの距離を  $r$  とし、殻の中央面の形を  $r=r(\xi)$  とすると、点 P における無次元曲率  $\omega_\xi (=a/R_\xi)$ 、 $\omega_\theta (=a/R_\theta)$  および無次元半径  $\rho (=r/a)$  の間には、次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= -(\gamma' + \gamma^2)/\omega_\theta, \quad \omega_\theta = \sqrt{1 - (\rho')^2}/\rho, \\ \omega'_\theta &= \gamma(\omega_\xi - \omega_\theta) \\ \rho''/\rho &= -\omega_\xi \omega_\theta, \quad \gamma = \rho'/\rho, \quad \xi = s/a, \quad (\ )' = d(\ )/d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $s$  は子午線方向の距離であり、 $a$  は代表長さである。

Sanders の殻理論<sup>(10)</sup>による軸対称殻の平衡方程式に慣性項を加え、横せん断力  $Q_\xi$ 、 $Q_\theta$  を消去すると、運動方程式は増分形式で次のようになる。ただし、回転慣性の項は省略する。

\* 平成元年1月24日 第955回講演会において講演、原稿受付 昭和63年8月1日。

<sup>\*1</sup> 正員、豊橋技術科学大学 (〒440 豊橋市天伯町)。

<sup>\*2</sup> 学生員、豊橋技術科学大学大学院。

<sup>\*3</sup> 准員、三菱重工業(株) (〒729-03 三原市糸崎町)。

<sup>\*4</sup> 正員、月星化成(株) (〒830 久留米市白山町)。

$$\begin{aligned}
 & a \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta N_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{N}_{\xi\theta}) - \rho' \Delta N_\theta \right] + \omega_\xi \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta M_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi\theta}) - \rho' \Delta M_\theta \right] \\
 & \quad + \frac{1}{2} (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi\theta}) + \rho a^2 \left[ \Delta P_\xi - \rho_0 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta U_\xi) \right] = 0 \\
 & a \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta N_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta \bar{N}_{\xi\theta}) + \rho' \Delta \bar{N}_{\xi\theta} \right] + \omega_\theta \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta M_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta \bar{M}_{\xi\theta}) + \rho' \Delta \bar{M}_{\xi\theta} \right] \\
 & \quad + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial \xi} [(\omega_\theta - \omega_\xi) \Delta \bar{M}_{\xi\theta}] + \rho a^2 \left[ \Delta P_\theta - \rho_0 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta U_\theta) \right] = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta M_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi\theta}) - \rho' \Delta M_\theta \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta M_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta \bar{M}_{\xi\theta}) + \rho' \Delta \bar{M}_{\xi\theta} \right] \\
 & \quad - a \rho (\omega_\xi \Delta N_\xi + \omega_\theta \Delta N_\theta) + \rho a^2 \left[ \Delta P_\xi - \rho_0 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta W) \right] = 0 \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

ここで  $\Delta$  は増分を表し、慣性項に含まれる  $h, t, \rho_0$  はそれぞれ殻厚、時間および密度である。 $N_\xi, N_\theta, N_{\xi\theta}$  および  $M_\xi, M_\theta, M_{\xi\theta}$  は図 1 に示すように殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントであり、 $P_\xi, P_\theta, P_\xi$  は殻の単位面積当たりの分布荷重である。また  $\bar{N}_{\xi\theta}, \bar{M}_{\xi\theta}$  は修正面内せん断力および修正ねじりモーメントで、

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \bar{N}_{\xi\theta} &= (\Delta N_{\xi\theta} + \Delta N_{\theta\xi}) / 2 + [(1/R_\theta) - (1/R_\xi)] (\Delta M_{\xi\theta} - \Delta M_{\theta\xi}) / 4 \\
 \Delta \bar{M}_{\xi\theta} &= (\Delta M_{\xi\theta} + \Delta M_{\theta\xi}) / 2
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

で表される。

なお、殻の境界に作用する単位長さ当たりの有効面内せん断力と有効横せん断力を  $\hat{N}_{\xi\theta}, \hat{Q}_\xi$  とし、次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \hat{N}_{\xi\theta} &= \Delta \bar{N}_{\xi\theta} + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{R_\theta} - \frac{1}{R_\xi} \right) \Delta \bar{M}_{\xi\theta} \\
 \Delta \hat{Q}_\xi &= \frac{1}{a \rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta M_\xi) + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi\theta}) - \rho' \Delta M_\theta \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

次に中央面のひずみ  $\varepsilon_{\xi m}, \varepsilon_{\theta m}$  および  $\varepsilon_{\xi\theta m}$  を  $\xi, \theta, \zeta$  方向の変位  $U_\xi, U_\theta, W$  で表すと、

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \varepsilon_{\xi m} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta U_\xi) + \omega_\xi \Delta W \right] \\
 \Delta \varepsilon_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta U_\theta) + \gamma \Delta U_\xi + \omega_\theta \Delta W \right] \\
 \Delta \varepsilon_{\xi\theta m} &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta U_\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta U_\theta) - \gamma \Delta U_\theta \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $\varepsilon_{\xi\theta m}$  は工学上のせん断ひずみの 1/2 である。また、曲率の変化量  $\chi_\xi, \chi_\theta, \chi_{\xi\theta}$  と変位成分との関係は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \chi_\xi &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \Phi_\xi), \Delta \chi_\theta = \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \Phi_\theta) + \gamma (\Delta \Phi_\xi) \right] \\
 \Delta \chi_{\xi\theta} &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \Phi_\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \Phi_\theta) - \gamma (\Delta \Phi_\theta) + \frac{1}{2a} (\omega_\xi - \omega_\theta) \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta U_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta U_\theta) - \gamma \Delta U_\theta \right\} \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\Phi_\xi, \Phi_\theta$  は中央面の回転を示し、

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \Phi_\xi &= \frac{1}{a} \left[ -\frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta W) + \omega_\xi \Delta U_\xi \right] \\
 \Delta \Phi_\theta &= \frac{1}{a} \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta W) + \omega_\theta \Delta U_\theta \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

Kirchhoff の仮説を用いて、殻厚中央面から  $\zeta$  の距離にある点のひずみ成分は次式で表される。

$$\{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta \varepsilon_m\} + \zeta \{\Delta \chi\} \dots\dots\dots (8)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 \{\Delta \varepsilon\}^T &= \{\Delta \varepsilon_\xi, \Delta \varepsilon_\theta, \Delta \varepsilon_{\xi\theta}\} \\
 \{\Delta \varepsilon_m\}^T &= \{\Delta \varepsilon_{\xi m}, \Delta \varepsilon_{\theta m}, \Delta \varepsilon_{\xi\theta m}\} \\
 \{\Delta \chi\}^T &= \{\Delta \chi_\xi, \Delta \chi_\theta, \Delta \chi_{\xi\theta}\}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9) **1$$

\*\*1 { }<sup>T</sup> は転置行列を示す。

本研究では、塑性領域においてひずみ速度依存性とバウシinger 効果を表すために、図 2 に示すように Besseling<sup>(11)</sup> によって提案された Overlay モデル (多層モデル) の各層の塑性領域に、Perzyna の式<sup>(12)</sup> を適用する<sup>(9)</sup>。このモデルは降伏曲面が膨張しない移動硬化モデルに相当する。平面応力状態の場合には、各層の構成関係式は次のようになる。

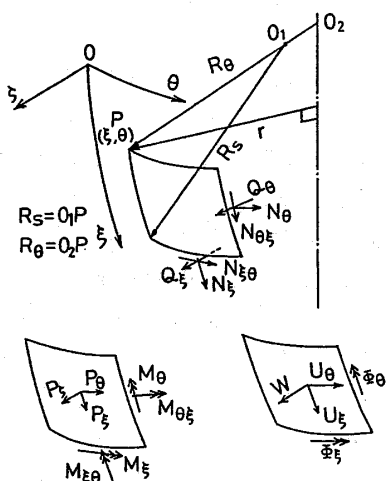


図 1 座標と諸記号

$$\{\Delta \epsilon\} = [D]^{-1} \{\Delta \sigma_k\} + \{\Delta \epsilon_k^{vp}\} \dots (10)$$

ただし

$$\{\Delta \sigma_k\}^T = \{\Delta \sigma_{\xi k}, \Delta \sigma_{\theta k}, \Delta \sigma_{\xi \theta k}\}$$

$$\{\Delta \epsilon_k^{vp}\}^T = \{\Delta \epsilon_{\xi k}^{vp}, \Delta \epsilon_{\theta k}^{vp}, \Delta \epsilon_{\xi \theta k}^{vp}\}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}$$

$$\{\Delta \epsilon_k^{vp}\} = \gamma_k \langle \Psi(f_k) \rangle$$

$$\times \frac{1}{\bar{\sigma}_k} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \{\sigma_k\} \Delta t \dots (11)$$

$$\bar{\sigma}_k = (\sigma_{\xi k}^2 + \sigma_{\theta k}^2 - \sigma_{\xi \theta k} \sigma_{\theta \xi k} + 3\sigma_{\xi \theta k}^2)^{1/2} \dots (12)$$

ここで、 $E, \nu$  は縦弾性係数およびポアソン比であり、粘性係数  $\gamma_k$ 、応力成分  $\sigma_k$  および粘塑性ひずみ成分  $\epsilon_k^{vp}$  の添字  $k$  は  $k$  番めの層を意味する。また、 $\langle \Psi(f_k) \rangle$  は次の定義によるものである。

$$\langle \Psi(f_k) \rangle = \begin{cases} 0, & f_k \leq 0 \\ \Psi(f_k), & f_k > 0 \end{cases} \dots (13)$$

ここに  $f_k$  は

$$f_k = (\bar{\sigma}_k - \sigma_{Yk}) / \sigma_{Yk} \dots (14)$$

で、 $f_k = 0$  はミーゼスの降伏曲面を表す。また  $\bar{\sigma}_k$  は相当応力、 $\sigma_{Yk}$  はひずみ速度が十分小さい場合の各層の降伏応力である。

式(8)を式(10)に代入し、モデルの各層の応力について解くと、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta \sigma_k\} &= [D] \{ \{\Delta \epsilon_m\} + \zeta \{\Delta \chi\} \} \\ &\quad - \{\Delta \sigma_k^{vp}\} \\ \{\Delta \sigma_k^{vp}\} &= [D] \{\Delta \epsilon_k^{vp}\} \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

ただし

$$\{\Delta \sigma_k^{vp}\}^T = \{\Delta \sigma_{\xi k}^{vp}, \Delta \sigma_{\theta k}^{vp}, \Delta \sigma_{\xi \theta k}^{vp}\}$$

任意の点の応力は、モデルの各層の内力の和となる。

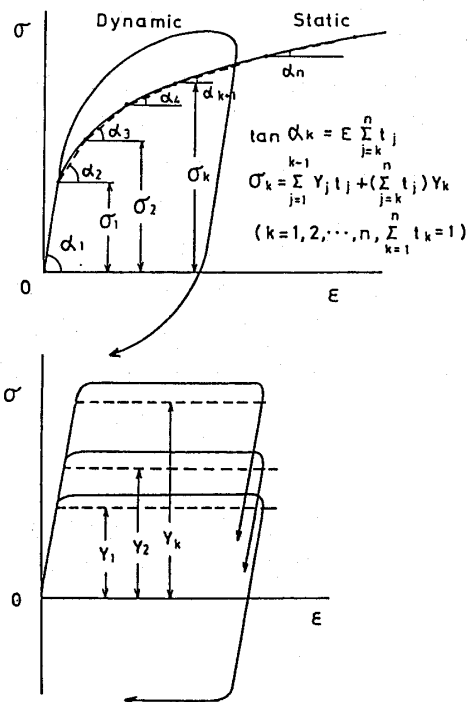


図 2 弾/粘塑性 Overlay モデル

$$\{\Delta \sigma\} = \sum_{k=1}^n \{\Delta \sigma_k\} t_k, \quad \{\Delta \sigma^{vp}\} = \sum_{k=1}^n \{\Delta \sigma_k^{vp}\} t_k \dots (16)$$

ここで

$$\sum_{k=1}^n t_k = 1$$

$$\{\Delta \sigma\}^T = \{\Delta \sigma_{\xi}, \Delta \sigma_{\theta}, \Delta \sigma_{\xi \theta}\}$$

$$\{\Delta \sigma^{vp}\}^T = \{\Delta \sigma_{\xi}^{vp}, \Delta \sigma_{\theta}^{vp}, \Delta \sigma_{\xi \theta}^{vp}\}$$

殻の単位長さ当たりの合応力、合モーメントは、次式から求められる。

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta N_{\xi}, \Delta N_{\theta}, \Delta \bar{N}_{\xi \theta}\}^T &= h [D] \{\Delta \epsilon_m\} \\ &\quad - \{\Delta N_{\xi}^{vp}, \Delta N_{\theta}^{vp}, \Delta \bar{N}_{\xi \theta}^{vp}\}^T \\ \{\Delta M_{\xi}, \Delta M_{\theta}, \Delta \bar{M}_{\xi \theta}\}^T &= \frac{h^3}{12} [D] \{\Delta \chi\} \\ &\quad - \{\Delta M_{\xi}^{vp}, \Delta M_{\theta}^{vp}, \Delta \bar{M}_{\xi \theta}^{vp}\}^T \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

ここで  $( )^{vp}$  は粘塑性によるみかけの内力成分を示し、次式によってみかけの応力増分から計算できる。

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta N_{\xi}^{vp}, \Delta N_{\theta}^{vp}, \Delta \bar{N}_{\xi \theta}^{vp}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\Delta \sigma^{vp}\} d\zeta \\ \{\Delta M_{\xi}^{vp}, \Delta M_{\theta}^{vp}, \Delta \bar{M}_{\xi \theta}^{vp}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\Delta \sigma^{vp}\} \zeta d\zeta \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

以上で、38個の未知数  $\Delta N_{\xi}, \Delta N_{\theta}, \Delta \bar{N}_{\xi \theta}, \Delta M_{\xi}, \Delta M_{\theta}, \Delta \bar{M}_{\xi \theta}, \Delta U_{\xi}, \Delta U_{\theta}, \Delta W, \Delta \epsilon_{\xi m}, \Delta \epsilon_{\theta m}, \Delta \epsilon_{\xi \theta m}, \Delta \chi_{\xi}, \Delta \chi_{\theta}, \Delta \chi_{\xi \theta}, \Delta \Phi_{\xi}, \Delta \Phi_{\theta}, \Delta \sigma_{\xi}, \Delta \sigma_{\theta}, \Delta \sigma_{\xi \theta}, \Delta \sigma_{\xi k}, \Delta \sigma_{\theta k}, \Delta \sigma_{\xi \theta k}, \Delta \sigma_{\xi}^{vp}, \Delta \sigma_{\theta}^{vp}, \Delta \sigma_{\xi \theta}^{vp}, \Delta \sigma_{\xi k}^{vp}, \Delta \sigma_{\theta k}^{vp}, \Delta \sigma_{\xi \theta k}^{vp}, \Delta \epsilon_{\xi k}^{vp}, \Delta \epsilon_{\theta k}^{vp}, \Delta \epsilon_{\xi \theta k}^{vp}$

$\Delta N_{\xi}^{vp}, \Delta N_{\delta}^{vp}, \Delta \bar{N}_{\xi\delta}^{vp}, \Delta M_{\xi}^{vp}, \Delta M_{\delta}^{vp}, \Delta \bar{M}_{\xi\delta}^{vp}$  に対して式(2), (5)~(7), (11), (15)~(18)の38個の式が得られたことになる。

**2・2 無次元方程式** 一般に非対称問題を解析するには、各変数を  $\theta$  方向にフーリエ級数で表し、その係数を定めればよい。そこで上に示した38個の未知数のうち、モデルの各層に生ずる応力増分  $\{\Delta\sigma_n\}$ 、粘塑性によるみかけの応力増分  $\{\Delta\sigma_n^{vp}\}$  および粘塑性ひずみ増分  $\{\Delta\varepsilon_n^{vp}\}$  を除く29個の変数と分布荷重をフーリエ級数に展開する。フーリエ係数には一般に対応する小文字を採用するが、 $\sigma$  には  $s$  を用いる<sup>(13)</sup>。次にこれらのフーリエ展開式を前述の基礎式に代入し、フーリエ係数に関する対応する式をつくり、これらの式から順次未知数を消去すると、最後に変位  $\Delta u_{\xi}^{(n)}, \Delta u_{\delta}^{(n)}, \Delta w^{(n)}$  および曲げモーメント  $\Delta m_{\xi}^{(n)}$  に関する次の四元連立二階微分方程式が得られる。

$$A_1 z'' + A_2 z' + A_3 z = A_4 N' + A_5 N + A_6 M' + A_7 M + A_8 P + A_9 \ddot{z} \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 $A_1 \sim A_9$  は殻の形状と材質によって定まる  $4 \times 4$  の行列であり<sup>(13)</sup>、 $z, N, M, P$  は、

$$z = \{\Delta u_{\xi}^{(n)}, \Delta u_{\delta}^{(n)}, \Delta w^{(n)}, \Delta m_{\xi}^{(n)}\}^T, \quad N = \{\Delta n_{\xi}^{vp(n)}, \Delta n_{\delta}^{vp(n)}, \Delta \bar{n}_{\xi\delta}^{vp(n)}, 0\}^T$$

$$M = \{\Delta m_{\xi}^{vp(n)}, \Delta m_{\delta}^{vp(n)}, \Delta \bar{m}_{\xi\delta}^{vp(n)}, 0\}^T, \quad P = \{\Delta p_{\xi}^{(n)}, \Delta p_{\delta}^{(n)}, \Delta p_{\xi\delta}^{(n)}, 0\}^T$$

である。

さらにフーリエ係数で表した内力成分と解  $z$  との関係ならびに内力成分と応力との関係が得られ<sup>(13)</sup>、これらの式ならびに式(19)に含まれる粘塑性に関する内力成分の増分のフーリエ係数は、式(15), (16), (18)からそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{\Delta n_{\xi}^{vp(n)}, \Delta m_{\xi}^{vp(n)}\} \cos n\theta &= \frac{E}{h} \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=1}^n \left\{ 1, \frac{a\zeta}{h^2} \right\} (\Delta\varepsilon_{\xi k}^{vp} + \nu \Delta\varepsilon_{\delta k}^{vp}) t_k d\zeta \\ \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{\Delta n_{\delta}^{vp(n)}, \Delta m_{\delta}^{vp(n)}\} \cos n\theta &= \frac{E}{h} \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=1}^n \left\{ 1, \frac{a\zeta}{h^2} \right\} (\Delta\varepsilon_{\delta k}^{vp} + \nu \Delta\varepsilon_{\xi k}^{vp}) t_k d\zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{\Delta \bar{n}_{\xi\delta}^{vp(n)}, \Delta \bar{m}_{\xi\delta}^{vp(n)}\} \sin n\theta &= \frac{E}{h} \frac{1}{1+\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=1}^n \left\{ 1, \frac{a\zeta}{h^2} \right\} \Delta\varepsilon_{\xi\delta k}^{vp} t_k d\zeta \\ \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{\Delta s_{\xi}^{vp(n)}, \Delta s_{\delta}^{vp(n)}\} \cos n\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^n \{\Delta\varepsilon_{\xi k}^{vp} + \nu \Delta\varepsilon_{\delta k}^{vp}, \Delta\varepsilon_{\delta k}^{vp} + \nu \Delta\varepsilon_{\xi k}^{vp}\} t_k \\ \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \Delta s_{\xi\delta}^{vp(n)} \sin n\theta &= \frac{E}{1+\nu} \sum_{k=1}^n \Delta\varepsilon_{\xi\delta k}^{vp} t_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

式(20), (21)の右辺に含まれるモデルの各層の粘塑性ひずみ増分は、各層の応力値から式(11)を用いて計算できる。また積分にはシンプソンの1/3則を用いる。

**3. 数値計算法**

ある任意の計算段階における変位と曲げモーメント  $m_{\xi}$  の増分は、式(19)を適当な境界条件のもとで解けば得られ、またこれらを用いて、内力成分の増分は、式(5)~(7)を式(17)に代入したものから求められる。しかしながら、式(19)を厳密に理論解析することは困難であるから、差分法によって数値的に解を求め、境界 ( $i=1, N$ ) と不連続点では前進および後退三点差分式を、その他の点では中間差分式を用いる。また慣性項には Houbolt の後退時間差分式<sup>(14)</sup>を適用する。これらの差分式<sup>(9)</sup>を式(19)および境界条件式、接続条件式に用いると、 $z_i (i=1 \sim N)$  に関する  $N$  元連立方程式が得られる。一般に弾/粘塑性問題の解は、これらの各計算段階の増分を積分することによって得られる。

**4. 実験**

ここでは形状が単純で、実験の容易な両端自由の円筒殻について実験を行い、計算結果と実験結果を比較する。

**4・1 円筒殻試験片および材料定数** 塑性領域でひずみ速度依存性が大きく現れる材料として、アルミニウム (A 1050) を選び、中実丸棒 (直径 100 mm) よ

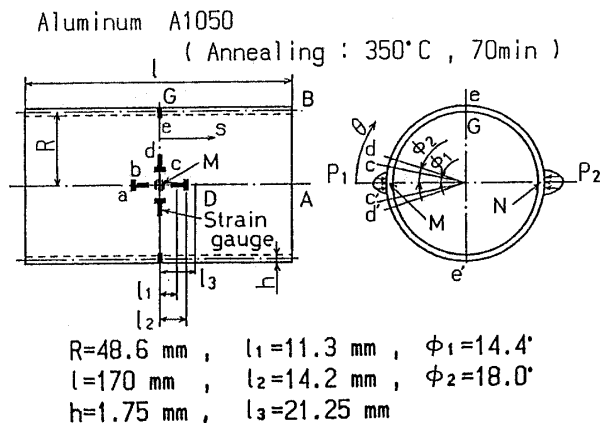


図 3 円筒殻試験片およびひずみゲージ貼付位置

り切削によって、円筒殻試験片を作製した。作製後、350°C、70 分の焼鈍を施している。円筒殻の形状寸法は、平均半径  $R=48.6$  mm、殻厚  $h=1.75$  mm、長さ  $l=170$  mm とし、寸法比  $R/h$  は 27.8 である (図 3)。

一方、この材料の材料特性を調べるために、中実丸棒外周部の円筒殻試験片採取位置付近から、軸方向および円周方向の単軸引張試験片を切り出し、円筒殻試験片と同一条件で熱処理 (焼鈍) した後、 $\dot{\epsilon}=2.0 \times 10^{-5}$  1/s 程度のひずみ速度で引張試験を行った。この試験結果 (図 4) より、次のように材料定数の値を定めた。

$E=70.6$  GPa,  $\nu=0.34$   
 初期降伏応力:  $\sigma_v=34.0$  MPa  
 静的応力-ひずみ関係式:

$$\sigma^* = 119(4.59 \times 10^{-4} + \epsilon^{vp})^{0.162} \text{ MPa} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで  $\epsilon^{vp}$  は粘塑性ひずみである。図 4 より、350°C、70 分の焼鈍を施すと、異方性は納入時に比べてかなり緩和される。式 (22) は、軸方向と円周方向の試験片による結果の平均値から定めた。また密度は  $\rho_0=2.71$  g/cm<sup>3</sup> である。

次に動的な応力-ひずみ関係は、Split Hopkinson Bar 法試験装置による衝撃圧縮試験より求めた。試験装置はスプリングの力を利用した発射装置、直径 12 mm の応力棒 (打撃棒 ( $l_1=500$  mm)、入出力棒 ( $l_2=1200$  mm)、出力吸収棒 ( $l_3=500$  mm)) および測定系から構成され、各棒は軸線が一致するように V ブロック上に並べられている。試験片は中実丸棒の円筒殻試験片採取位置付近から軸方向に、直径 12 mm (応力棒と同一径)、長さ 12 mm の円柱状のものを切り出し、両端面を注意深く機械仕上げした後、焼鈍を施した。両端面は二硫化モリブデンで潤滑し、入出力棒間には

さみ、軸方向に無視できる程度の力で押し付けながら、衝撃荷重を加えた。

試験片に負荷される圧縮応力は、長さ  $l_2$  の入力棒上の試験片側端面より  $l_2/2$ ,  $l_2/4$  の 2 箇所に、それぞれ円周上 180° の位置に貼ったひずみゲージ (ゲージ長 1 mm) の出力より算出した<sup>(15)(16)</sup>。試験片が受けるひずみは、試験片の中央に貼付したひずみゲージ (ゲージ長 2 mm) による値から求めた。ひずみゲージは同一円周上に 2 枚貼付した。

図 5 に動的応力-ひずみ関係を示す。衝撃試験に用いた試験片は、供試材の軸方向より採取しているの、図 4 の  $\sigma^*-\epsilon$  曲線と軸方向試験片の  $\sigma-\epsilon$  曲線の差を考慮して、実験から得られた各一定ひずみ速度での  $\sigma-\epsilon$  曲線と同じ比率で修正している。図中の実線は、5 層の弾/完全粘塑性体から成る Overlay モデルで実験値を近似したものである。各層の材料定数は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rk} &= [\sigma_{r1} \sim \sigma_{r5}] \\ &= [34.1, 217, 716, 1606, 3424] \text{ (MPa)} \\ t_k &= [t_1 \sim t_5] \\ &= [0.936, 0.042, 0.012, 0.004, 0.006] \\ \gamma_k &= [\gamma_1 \sim \gamma_5] \\ &= [1380, 220, 77, 42, 18] \text{ (1/s)} \\ \Psi(f_k) &= \left( \frac{\bar{\sigma}_k - \sigma_{rk}}{\sigma_{rk}} \right)^{1.18} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

4.2 円筒殻衝撃試験 実験装置の概略を図 6 に示す。Split Hopkinson Bar 法衝撃圧縮試験装置を利用したもので、衝撃荷重は、発射装置のスプリングの力を利用した、打撃棒 (直径 12 mm、長さ 1800 mm) によって、円筒殻の中央点  $M (s=0)$  に負荷される。試

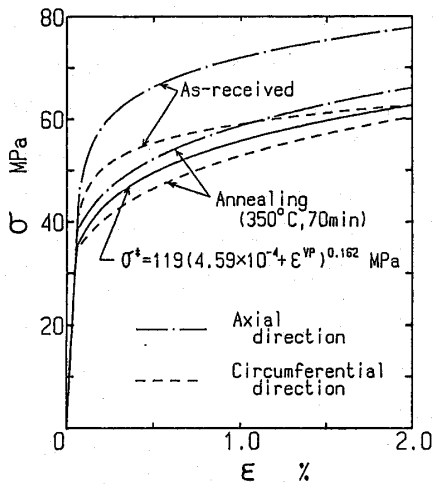


図 4 静的応力-ひずみ関係

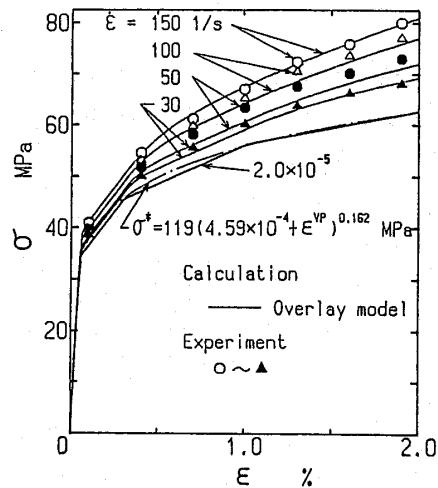


図 5 動的応力-ひずみ関係

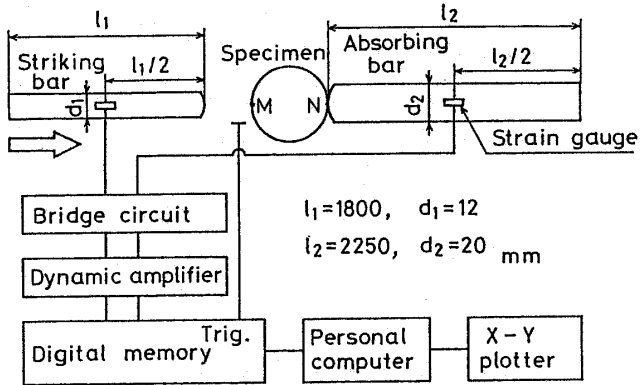


図 6 円筒殻衝撃試験装置

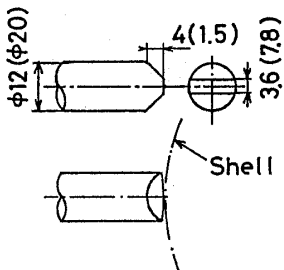


図 7 打撃棒（吸収棒）の先端の形状寸法

験片は、点 M と反対の点 (点 N) が吸収棒 (直径 20 mm, 長さ 2250 mm) と接触するように、糸で吊しておく。打撃棒, 吸収棒の円筒殻接触側端面は、図 7 に示す形状に作製し、圧力分布が円周方向にある程度の幅をもつようにしている。先端には測定に影響を与えない程度の微小な突起を設けて、衝突点の位置決めを容易にしている。

円筒殻に加わる荷重は、打撃棒および吸収棒の各中央点に貼ったひずみゲージの出力より算出した<sup>(15)(16)</sup>。円筒殻試験片のひずみの測定は、図 3 に示すように、荷重作用点 M に対して対称的に 5 組計 10 枚のひずみゲージ (a~e) を、子午線方向と円周方向に貼付して行った。

**4.3 計算条件の設定** 問題の対称性から計算は円筒殻の 1/4 形状について行う。円筒殻の形状パラメータは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a=l, \xi=s/l, \rho=R/l, \rho'=0 \\ \gamma=0, \omega_\theta=l/R, \omega_\xi=\omega'_\xi=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{境界条件は、円筒殻の自由端および中央断面では、} \\ \text{自由端: } N_\xi = \bar{N}_{\xi\theta} = M_\xi = \bar{Q}_\xi = 0 \\ \text{中央断面: } U_\xi = \bar{N}_{\xi\theta} = \bar{Q}_\xi = \Phi_\xi = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

を用いた。

荷重負荷部 (点 M, N) の近傍では、変位および内力の分布の子午線方向の変化が著しいので、円筒を MD 部 (21.25 mm) と DA 部 (63.35 mm) に 2 分割し、MD

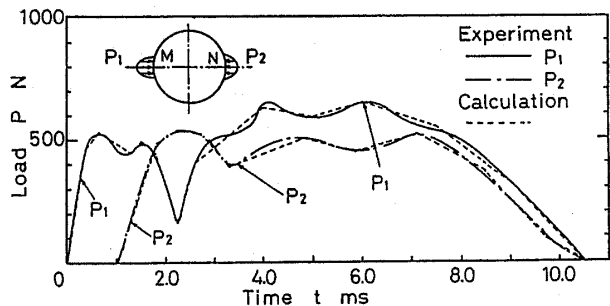


図 8 衝撃荷重

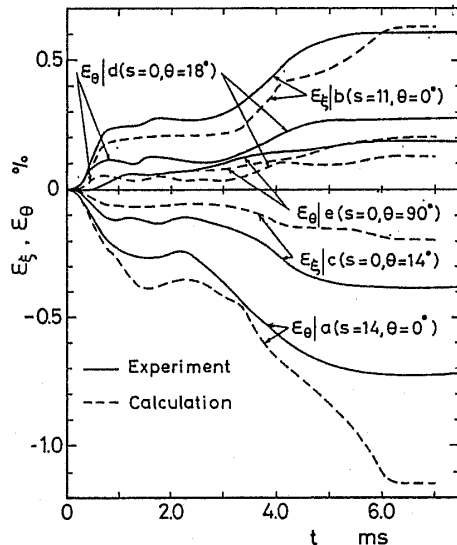


図 9 εξ, εθ の時間的变化

部の差分間隔を小さくした。差分点数は MD 間で 31, DA 間で 37 の合計  $N=68$  とし、殻厚方向には 13 個の格子点を採用した。またフーリエ級数の項数は  $n=50$  とし、時間間隔  $\Delta t$  は  $2 \mu s$  とした。これらの数値は、解の収束性と計算機的能力 (FACOM VP-200) を考慮して決定した。

円筒殻の中央部に局所的に作用する衝撃圧力の分布領域は、円筒殻の荷重負荷部に貼った圧力判別シートの色の变化から、打撃棒側 (点 M 側) では子午線方向に 3.6 mm, 円周方向に 7.8 mm の、また吸収棒側 (点 N 側) では子午線方向に 7.8 mm, 円周方向に 9.8 mm のほぼ矩形状であることがわかった。本解析では、打撃棒側および吸収棒側とも子午線方向に一様で、円周方向には余弦状の荷重分布を仮定した。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \text{入力棒側: } p_1 \cos 20\theta \\ (0 \leq s \leq 1.77 \text{ mm}, 0 \leq \theta \leq \pi/40) \\ \text{吸収棒側: } p_2 \cos 16\theta \\ (0 \leq s \leq 3.90 \text{ mm}, 31\pi/32 \leq \theta \leq \pi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ここで  $p_1, p_2$  は荷重  $P_1, P_2$  と次の関係にある。

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= 4p_1(R+h/2) \times 1.77 \int_0^{\pi/40} \cos 20\theta d\theta \\ P_2 &= 4p_2(R+h/2) \times 3.90 \int_{\pi}^{31\pi/32} \cos 16\theta d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

実験より得られた荷重  $P_1, P_2$  の時間的变化を図 8 に示す。 $P_1, P_2$  とも複雑な変化を示しているが、数値計算は破線のように折線近似して行った。

4.4 実験値と計算値の比較 実験と計算は数個の殻について行い、ほぼ同様の結果を得たので、その中の一つについて記述する。本計算では負荷開始後 7 ms まで計算を行い、実験結果と比較した。

図 9 は、ひずみゲージ(図 3)より得られた、各点のひずみの時間的变化と計算結果とを示したものであ

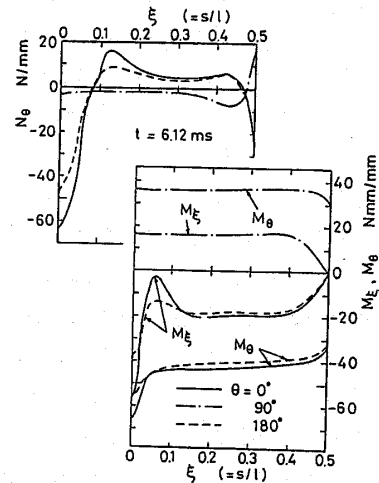


図 11  $N_\theta, M_\theta, M_\phi$  の軸方向分布の時間的变化 ( $t=6.12$  ms)

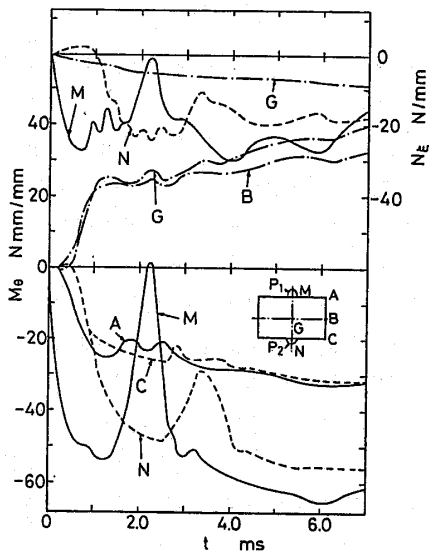


図 10  $N_\theta, M_\theta$  の時間的变化

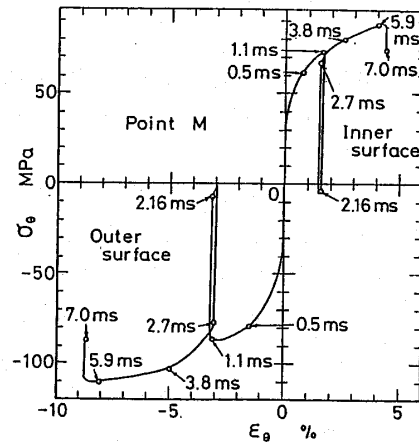


図 12  $\sigma_\theta - \epsilon_\theta$  線図 (点 M の内外面)

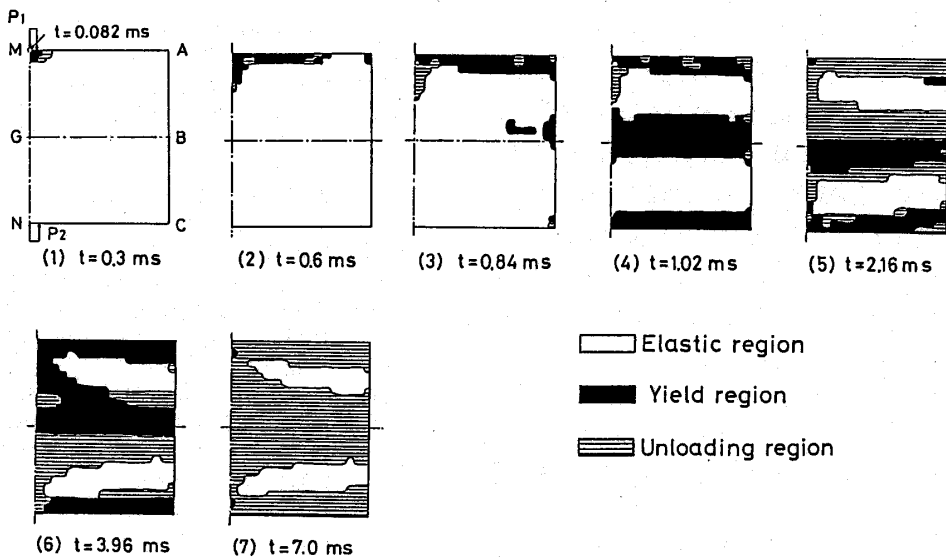


図 13 降伏域の進展 (外表面)

る。実験値は対称位置に貼ったゲージ値を平均したが、両者の差はほとんどなく、ひずみの対称性が確認できた。図中実線は実験値を、また破線は計算結果を示す。各ひずみは階段状に増加していることがわかる。実験値と計算値を比較すると、点 G の  $\epsilon_{\theta}|e(s=0, \theta=90^\circ)$  は荷重負荷部から離れているため、荷重の分布形状の影響をあまり受けないこと、またひずみの分布もこの付近では急変しないことから、両者は良く一致しているものと考えられる。荷重点に近い所に貼付したゲージの値と計算値との間には差が見られるものもあり、特に中央断面上の  $\epsilon_{\theta}|c(s=0, \theta=14^\circ)$ ,  $\epsilon_{\theta}|d(s=0, \theta=18^\circ)$  の実験値は、計算値のほぼ 2 倍の大きさを推移している。これは荷重の円周方向分布の時間的変化や、殻の微小な局所的座屈の問題があるのかも知れない。材料の粘性定数の評価、材料の異方性の問題等も含めて両結果を完全に一致させることは極めて困難であり、この程度でほぼ良好な結果が得られたと思われる。

図 10~13 に、計算による内力成分の時間的変化、特定の点の応力-ひずみ関係および降伏領域の進展の様子を示す。

図 10 は  $\xi=0$  上の点 M, G, N の  $N_{\xi}$  および  $M_{\theta}$ 、ならびに  $\xi=0.5$  上の点 A, B, C の  $M_{\theta}$  の時間的変化を示したものである。点 M および N の  $N_{\xi}$ ,  $M_{\theta}$  は、応答初期の立ち上がり部を除いて、それぞれ図 8 の荷重  $P_1$  および  $P_2$  と似た形を示し、各々  $t=2.2$  ms および 3.4 ms 時の前後で急激な変動を見せる。他の点ではこのような急激な変動は見られず、時間とともに緩やかに変化している。図には示さなかったが、各点の  $N_{\theta}$ ,  $M_{\xi}$  成分もほぼ同じ傾向を示している。

図 11 は時刻  $t=6.12$  ms における  $N_{\theta}$ ,  $M_{\xi}$  および  $M_{\theta}$  の  $\theta=0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  の子午線上の分布を示す。荷重負荷部で局所的に大きな負の面内力ならびに曲げモーメントを示し、自由端付近でも分布の急変が見られる。 $\theta=90^\circ$  の子午線上では、自由端付近を除いてほぼ一様な値を示す。他の時刻でも荷重負荷部付近(図 10)を除いて、図 11 とほぼ似た分布になっている。

図 12 は点 M の内外面の  $\sigma_{\theta}-\epsilon_{\theta}$  線図である。除荷後応力が反転するほど  $t=2.16$  ms で再降伏が生じている。点 M の外面では 8.7% と大きなひずみを生じているが、少し離れるとひずみは図 9 に示したように約 1% 以下になり、ひずみの大きい領域は荷重負荷部に限られていることがわかる。なお点 M の外面の最大ひずみ速度は、ほぼ  $\dot{\epsilon}_{\theta}=90$  1/s( $t=0.4$  ms) である。

図 13 は、殻の外面の降伏領域の進展の様子を示す。図において除荷域とは、一度以上降伏を経験した後、

応力が降伏点以下になっている領域を意味する。ここには示さなかったが、内表面も降伏域の広がり方はほぼ同様である。図に示すように、まず  $t=0.082$  ms で点 M の外面で降伏を起し、これが子午線方向に広がる。続いて  $t=0.84$  ms には点 B 付近に、さらに遅れて GB, NC の子午線上に降伏域が発生し、円周方向に広がる。降伏した領域は殻の振動とともに部分的に除荷ならびに再降伏を繰り返す。

なお実験による殻の最終形状は、荷重負荷部が少しくぼんだほぼ一様な楕円筒である。最初の円筒殻の荷重方向の直径の減少量は、荷重部で 5.4 mm、他の部分でほぼ一様に 3.5 mm であり、荷重に垂直な方向の直径の増加量は、子午線方向にほぼ一様に 3.1 mm である。

## 5. 結 言

一般軸対称殻に非軸対称な動的荷重が作用する場合を、弾/粘塑性 Overlay モデルを用いて、ひずみ速度依存性とバンシinger 効果の影響を考慮に入れて解析した。殻の運動方程式ならびに変位-ひずみ関係式には Sanders の殻の線形理論式に慣性項を加えたものを用い、数値解法には差分法を適用した。

また両端自由のアルミ円筒殻中央部に、局所的な衝撃荷重を負荷した実験を行い、計算結果と比較したところ、荷重負荷部に近い所では差が見られるものもあったが、全体的に見て比較的良好な一致を示した。

なお本計算で使用した計算機は FACOM VP-200 で、1 ms の現象の解析に約 150 分の計算時間を要した。

## 文 献

- (1) Nagarajan, S. and Popov, E. P., *Int. J. for Numerical Methods in Engng.*, 9-3 (1975), 535.
- (2) 竹園・埜, 機論, 44-381, 第 1 部 (昭 53), 1478.
- (3) 竹園・埜, 機論, 47-421, A (昭 56), 949.
- (4) Atkatsh, R. S., ほか 2 名, *Trans. ASME, Ser. E*, 50-1 (1983), 131.
- (5) Wojewódzki, W. and Bukowski, R., *Trans. ASME, Ser. E*, 51 (1984), 114.
- (6) 村瀬・ほか 3 名, 機論, 51-463, A (昭 60), 750.
- (7) 竹園・ほか 2 名, 機論, 52-476, A (昭 61), 997.
- (8) 竹園・ほか 2 名, 機論, 52-482, A (昭 61), 2395.
- (9) Takezono, S., ほか 2 名, *Trans. ASME, Ser. J*, 102-3 (1980), 257.
- (10) Sanders, J. L., Jr., *NASA Rep.*, R-24 (1959), 1.
- (11) Besseling, J. F., *Trans. ASME, Ser. E*, 25-4 (1958), 529.
- (12) Perzyna, P., *Advances in Applied Mechanics*, 9 (1966), 243, Academic Press.
- (13) 竹園・埜, 機論, 46-402, A (昭 55), 227.
- (14) Houbolt, J. C., *J. Aeronaut. Sci.*, 17-9 (1950), 540.
- (15) 柳原, 機論, 43-375, 第 1 部 (昭 52), 4048.
- (16) 松本・ほか 2 名, 非破壊検査, 31-4 (昭 57), 258.