

Overlay モデルによる薄肉殻の弾/粘塑性動的応答の解法*

埜 克己^{*1}, 竹園 茂男^{*1}

Analysis of Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of General Thin Shells by Means of Overlay Model

Katsumi TAO and Shigeo TAKEZONO

The numerical analysis of the elasto/visco-plastic dynamic response of the general thin shells to arbitrary loads is carried out by the use of the elasto/visco-plastic overlay model which is able to express the Bauschinger effect and the strain rate dependence. Namely Perzyna's equation is used for the constitutive relation of each layer of the overlay model and as a whole the Bauschinger effect and the influence of viscosity in the plastic range of the material are taken into account. The equations of motion derived from the Sanders nonlinear theory for thin shells by adding the inertia terms are used, and the relations between strains and displacements where rotations of the shell are considered for the membrane strains are employed. The equations are numerically solved by the finite difference method. As a numerical example a cylindrical shell under a semisinusoidal external load with respect to time is analyzed and the results are compared with those in the case of isotropic hardening.

Key Words: Structural Analysis, Elasto/Visco-Plasticity, Dynamic Response, General Thin Shells, Bauschinger Effect, Overlay Model, FDM

1. 緒 言

構造物が材料の降伏点を超えるような高応力の衝撃荷重を受ける場合には、構造解析において材料の粘性的挙動を考慮に入れることが重要である。殻構造物の粘塑性動的応答問題に関しては、これまでに軸対称殻^{(1)~(6)}に限らず、一般の薄肉殻⁽⁷⁾についても解析がなされてきた。しかしながらこれらの研究は、塑性領域においてバウシinger効果を無視して等方硬化を仮定しているため、応力が反転する場合には十分正確な解とは言えない。

本論文では、弾/粘塑性 Overlay モデル(多層モデル)を用いてバウシinger効果とひずみ速度依存性を表し、この難点の解決を試みた。すなわち Overlay モデル⁽⁸⁾の各層の塑性領域において構成関係に Perzyna の式⁽⁹⁾を用い、全体としてバウシinger効果と塑性領域における粘性の影響を導入している。著者らはすでにこの弾/粘塑性 Overlay モデルを用いて軸対称殻の微小変形問題の解析⁽¹⁰⁾を行ったが、本論文では一般の形状を有する薄肉殻に動的荷重が作用する場合の、比

較的大きな変形まで考慮に入れた解法を示した。

殻の運動方程式には、Sanders⁽¹¹⁾の殻の非線形理論式に慣性項を加えたものを用い、またひずみ-変位式には膜ひずみに殻の回転の項を考慮している。数値解法には差分法を適用した。

数値例として両端固定のアルミ円筒殻に、時間に対して半正弦波状の非軸対称な局所的分布荷重が作用する問題を取り上げ、変位および内力の時間的変化の様子を解析し、等方硬化による結果と比較した。

2. 基 礎 式

図1に示すように、殻の中央面の形を次の式で与える。

$$x^i = x^i(\xi_a) \quad (i=1, 2, 3; \quad a=1, 2) \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 x^i は平行座標、 ξ_a は中央面の曲線座標である。 ξ_a が直交曲線座標を形成するとき、線素 ds はラーメのパラメータ a_1, a_2 を用いて次式のように表される。

$$ds^2 = a_1^2 d\xi_1^2 + a_2^2 d\xi_2^2 \dots\dots\dots (2)$$

Sandersの薄肉殻の非線形理論⁽¹¹⁾による平衡方程式に慣性項を加え、それらの式から横せん断力 Q_1, Q_2 を消去すると、運動方程式は次のようになる。ただし回転慣性の項は省略する。

* 平成元年1月24日 第955回講演会において講演、原稿受付 昭和63年6月6日。

*1 正員、豊橋技術科学大学 (〒440 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

$$\left. \begin{aligned} & (\alpha_2 N_{11})_{,1} + (\alpha_1 N_{12})_{,2} + \alpha_{1,2} N_{12} - \alpha_{2,1} N_{22} + R_1^{-1} [(\alpha_2 M_{11})_{,1} + (\alpha_1 M_{12})_{,2} + \alpha_{1,2} M_{12} - \alpha_{2,1} M_{22}] + (\alpha_1/2) [(R_1^{-1} \\ & - R_2^{-1}) M_{12}]_{,2} - \alpha_1 \alpha_2 R_1^{-1} (\phi_1 N_{11} + \phi_2 N_{12}) - (\alpha_1/2) [\phi (N_{11} + N_{22})]_{,2} + \alpha_1 \alpha_2 (P_1 - \rho_0 h \partial^2 U_1 / \partial t^2) = 0 \\ & [(1/\alpha_1) \{(\alpha_2 M_{11})_{,1} + (\alpha_1 M_{12})_{,2} + \alpha_{1,2} M_{12} - \alpha_{2,1} M_{22}\}]_{,1} + [(1/\alpha_2) \{(\alpha_1 M_{22})_{,2} + (\alpha_2 M_{12})_{,1} + \alpha_{2,1} M_{12} - \alpha_{1,2} M_{11}\}]_{,2} \\ & - \alpha_1 \alpha_2 (R_1^{-1} N_{11} + R_2^{-1} N_{22}) - (\alpha_2 \phi_1 N_{11} + \alpha_2 \phi_2 N_{12})_{,1} - (\alpha_1 \phi_1 N_{12} + \alpha_1 \phi_2 N_{22})_{,2} + \alpha_1 \alpha_2 (P - \rho_0 h \partial^2 W / \partial t^2) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

他の一つの式は第1式の添字1, 2を入れ換えることによって得られる。ここに, $(\)_{,1} = \partial(\) / \partial \xi_1$, $(\)_{,2} = \partial(\) / \partial \xi_2$ である。 N_{11} , N_{22} , N_{12} および M_{11} , M_{22} , M_{12} は図1に示すように, 殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントであり, P_1 , P_2 , P は殻の単位面積当たりの分布荷重である。 R_1 , R_2 は殻の中央面の ξ_1 , ξ_2 方向の曲率半径である。慣性項の中の h , t および ρ_0 はそれぞれ殻厚, 時間および密度である。非線形項に含まれる ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ は殻の中央面の回転を示し, 中央面の変位 U_1 , U_2 , W と次の関係で結ばれている⁽¹¹⁾。

$$\phi_1 = -\alpha_1^{-1} W_{,1} + R_1^{-1} U_1, \quad \phi_2 = -\alpha_2^{-1} W_{,2} + R_2^{-1} U_2, \quad \phi = 1/2(\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [(\alpha_2 U_2)_{,1} - (\alpha_1 U_1)_{,2}] \dots\dots\dots (4)$$

次にやや変形が大きい場合の中央面のひずみ ϵ_{11m} , ϵ_{22m} , ϵ_{12m} を中央面の変位と回転で表すと⁽¹¹⁾,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11m} &= (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [\alpha_2 U_{1,1} + \alpha_{1,2} U_2 + \alpha_1 \alpha_2 R_1^{-1} W + 1/2 \alpha_1 \alpha_2 \phi_1^2 + 1/2 \alpha_1 \alpha_2 \phi^2] \\ \epsilon_{22m} &= (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [\alpha_1 U_{2,2} + \alpha_{2,1} U_1 + \alpha_1 \alpha_2 R_2^{-1} W + 1/2 \alpha_1 \alpha_2 \phi_2^2 + 1/2 \alpha_1 \alpha_2 \phi^2] \\ \epsilon_{12m} &= 1/2(\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [\alpha_2 U_{2,1} + \alpha_1 U_{1,2} - \alpha_{1,2} U_1 - \alpha_{2,1} U_2 + \alpha_1 \alpha_2 \phi_1 \phi_2] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに ϵ_{12m} は工学上のせん断ひずみの1/2である。

また曲率の変化量 χ_{11} , χ_{22} , χ_{12} と回転との関係は次のようになる⁽¹¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \chi_{11} &= (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [\alpha_2 \phi_{1,1} + \alpha_{1,2} \phi_2] \\ \chi_{22} &= (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [\alpha_1 \phi_{2,2} + \alpha_{2,1} \phi_1] \\ \chi_{12} &= 1/2(\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [\alpha_2 \phi_{2,1} + \alpha_1 \phi_{1,2} - \alpha_{1,2} \phi_1 \\ & \quad - \alpha_{2,1} \phi_2 + \alpha_1 \alpha_2 (R_2^{-1} - R_1^{-1}) \phi] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

Kirchhoff の仮説を用い, ζ/R_1 , ζ/R_2 は1に比較して十分小さいものとする, 中央面から ζ の距離にある点のひずみ ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{12} は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= \epsilon_{11m} + \zeta \chi_{11} \\ \epsilon_{22} &= \epsilon_{22m} + \zeta \chi_{22} \\ \epsilon_{12} &= \epsilon_{12m} + \zeta \chi_{12} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

本研究では, 塑性領域においてひずみ速度依存性とバウシinger 効果を表すために, 図2に示すように Besseling⁽⁸⁾によって提案された Overlay モデル(多層モデル)の各層の塑性領域に, Perzyna の式⁽⁹⁾を適用する。このモデルは降伏曲面が膨張しない移動硬化モデルに相当する。平面応力状態の場合には, 各層の構成関係式は次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{12} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} \dot{\sigma}_{11k} \\ \dot{\sigma}_{22k} \\ \dot{\sigma}_{12k} \end{aligned} \right\} + \left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11k}^{vp} \\ \dot{\epsilon}_{22k}^{vp} \\ \dot{\epsilon}_{12k}^{vp} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11k}^{vp} \\ \dot{\epsilon}_{22k}^{vp} \\ \dot{\epsilon}_{12k}^{vp} \end{aligned} \right\} = \gamma_k \langle \Psi(f_k) \rangle \frac{1}{\sigma_k} \times \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} \sigma_{11k} \\ \sigma_{22k} \\ \sigma_{12k} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$\bar{\sigma}_k = (\sigma_{11k}^2 + \sigma_{22k}^2 - \sigma_{11k} \sigma_{22k} + 3\sigma_{12k}^2)^{1/2} \dots\dots\dots (10)$$

ここで, $(\dot{\ })$ は時間に関する微分を示し, 粘性係数 γ_k , 各応力成分 σ_k および粘塑性ひずみ成分 ϵ_k^{vp} の添字 k は k 番目の層を意味する。また, $\langle \Psi(f_k) \rangle$ は次の定義によるものである。

$$\langle \Psi(f_k) \rangle = \begin{cases} 0, & f_k \leq 0 \\ \Psi(f_k), & f_k > 0 \end{cases} \dots\dots\dots (11)$$

ここに f_k は

$$f_k = (\bar{\sigma}_k - \sigma_{vk}) / \sigma_{vk} \dots\dots\dots (12)$$

で, $f_k = 0$ はミーゼスの降伏曲面を表す。また $\bar{\sigma}_k$ は相当応力, σ_{vk} はひずみ速度が十分小さい場合の各層の

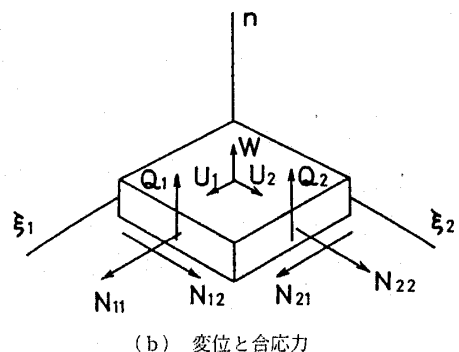
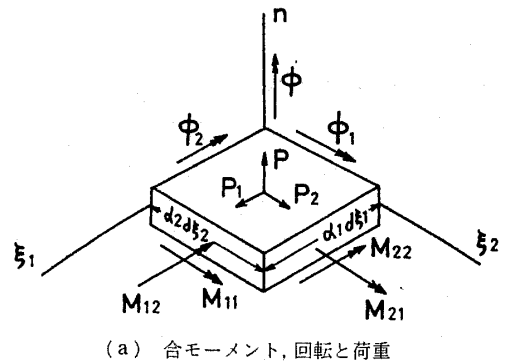


図1 座標と諸記号

降伏応力である。

式(8)より、モデルの各層の応力について解くと、次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11k} \\ \dot{\sigma}_{22k} \\ \dot{\sigma}_{12k} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11k}^{vp} \\ \dot{\epsilon}_{22k}^{vp} \\ \dot{\epsilon}_{12k}^{vp} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

任意の点の応力は、モデルの各層の内力の和となる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{Bmatrix} \sigma_{11k} \\ \sigma_{22k} \\ \sigma_{12k} \end{Bmatrix} t_k \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\sum_{k=1}^n t_k = 1$$

殻の単位長さ当たりの合応力、合モーメントは、次式で求められる。

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} d\zeta, \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \zeta d\zeta \quad \dots\dots\dots (15)$$

(i, j=1, 2)

以上で、30個の未知数 $N_{11}, N_{22}, N_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}, U_1, U_2, W, \epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}, \epsilon_{11m}, \epsilon_{22m}, \epsilon_{12m}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}, \phi_1, \phi_2, \phi, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{11k}, \sigma_{22k}, \sigma_{12k}, \dot{\epsilon}_{11k}^{vp}, \dot{\epsilon}_{22k}^{vp}, \dot{\epsilon}_{12k}^{vp}$ に対して式(3)~(7), (9), (13)~(15)の30個の式が得られたことになる。

3. 数値解法

上に得られた30個の式を適当な境界条件のもとで解けば、解が得られることになるが、これを解析的に解くことは困難であるから、差分法によって数値的に解を求める。

図3に示すように、殻の ξ_1 および ξ_2 の方向に各々等間隔に、 M_1 および M_2 個の差分点を取ると、 ξ_1, ξ_2 の増分 $\Delta\xi_1, \Delta\xi_2$ はそれぞれ次のようになる。

$$\Delta\xi_1 = \frac{\bar{s}_1}{\alpha_1(M_1-1)}, \quad \Delta\xi_2 = \frac{\bar{s}_2}{\alpha_2(M_2-1)} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに \bar{s}_1, \bar{s}_2 は殻の ξ_1, ξ_2 方向の長さである。

また式(15)を用いて応力から合応力および合モーメントを求める際、殻厚方向に等間隔に L 個の点を取ってシンプソンの1/3法則を使用する。

次に差分点 (i, j) における諸量を f_{ij} とし、差分表示の際に境界では3点差分を、その他の点では中間差分式を適用すると、 $\partial f_{ij}/\partial \xi_1, \partial f_{ij}/\partial \xi_2, \partial^2 f_{ij}/\partial \xi_1^2, \partial^2 f_{ij}/\partial \xi_2^2, \partial^2 f_{ij}/\partial \xi_1 \partial \xi_2$ について、4境界線 $\{\xi_1=0, \bar{\xi}_1, \xi_2=0, \bar{\xi}_2\}$,

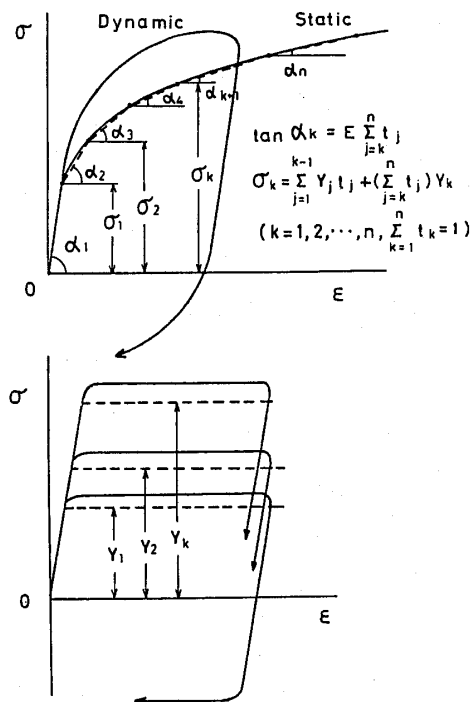


図2 弾/粘塑性 Overlay モデル

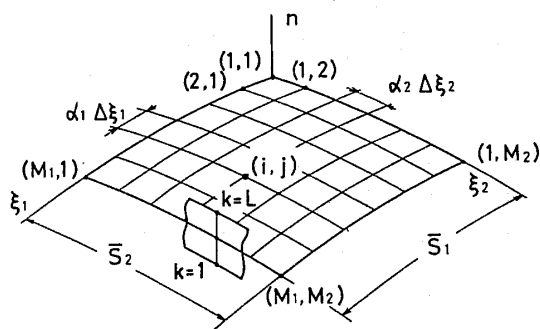


図3 格子点 (i, j, k)

4すみの境界点 $\{(\xi_1, \xi_2) = (0, 0), (\bar{\xi}_1, 0), (0, \bar{\xi}_2), (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)\}$ および境界を除く各点に対し、それぞれ9種類の差分式が求められる。また運動方程式の慣性項に現われる時間に関する2階導関数に対しては、次の中間差分式を用いる。

$$\partial^2 f / \partial t^2 = \frac{1}{(\Delta t)^2} (f_{t-\Delta t} - 2f_t + f_{t+\Delta t}) \quad \dots\dots\dots (17)$$

以上の差分式を用いて式(3)を差分近似すると、点 (i, j) に対して次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} U_1(t+\Delta t) &= -U_1(t-\Delta t) + 2U_1(t) + \{\Delta t^2 / (\alpha_1 \alpha_2 \rho_0 h)\} [a_1 N_{11}(t) + a_2 N_{11}(t)_{,1} + a_3 N_{11}(t)_{,2} + a_4 N_{22}(t) \\ &\quad + a_5 N_{22}(t)_{,2} + a_6 N_{12}(t) + a_7 N_{12}(t)_{,2} + a_8 M_{11}(t) + a_9 M_{11}(t)_{,1} + a_{10} M_{22}(t) + a_{11} M_{12}(t) + a_{12} M_{12}(t)_{,2} + a_{13} P(t)] \\ W(t+\Delta t) &= -W(t-\Delta t) + 2W(t) + \{\Delta t^2 / (\alpha_1 \alpha_2 \rho_0 h)\} [c_1 N_{11}(t) + c_2 N_{11}(t)_{,1} + c_3 N_{22}(t) + c_4 N_{22}(t)_{,2} \\ &\quad + c_5 N_{12}(t) + c_6 N_{12}(t)_{,1} + c_7 N_{12}(t)_{,2} + c_8 M_{11}(t)_{,11} + c_9 M_{22}(t)_{,22} + c_{10} M_{12}(t)_{,12} + c_{11} P(t)] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

など。ここに係数 $a_i(i, j)$, $c_i(i, j)$ などは形状パラメータと時刻 $T=t$ における回転とからなる。

式(18)から時刻 $T=t-\Delta t$ および $T=t$ における各変位と時刻 $T=t$ での各内力成分がすべての空間差分点 (i, j) で既知ならば、時刻 $T=t+\Delta t$ での各差分点における変位が計算できる。

$T=t+\Delta t$ における各変位が求められると、 Δt 間の変位増分は次式から計算できる。

$$\delta U_1(i, j, t) = U_1(i, j, t+\Delta t) - U_1(i, j, t) \dots\dots\dots (19)$$

など。

式(4)~(7)から殻の任意の点 (i, j, k) のひずみ増分 $\delta \varepsilon_{ij}$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \delta \varepsilon_{11}(i, j, k, t) &= (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [\alpha_2 \delta U_1(i, j, t)_{,1} + \alpha_{1,2} \delta U_2(i, j, t) + \alpha_1 \alpha_2 R_1^{-1} \delta W(i, j, t)] + \phi_1(i, j, t) \delta \phi_1(i, j, t) \\ &+ \frac{1}{2} \delta \phi_1^2(i, j, t) + \phi_1(i, j, t) \delta \phi_1(i, j, t) + \frac{1}{2} \delta \phi_2^2(i, j, t) + h \left(\frac{k-1}{L-1} - \frac{1}{2} \right) (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [\alpha_2 \delta \phi_1(i, j, t)_{,1} + \alpha_{1,2} \delta \phi_2(i, j, t)] \\ \delta \varepsilon_{12}(i, j, k, t) &= \frac{1}{2} (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [-\alpha_{1,2} \delta U_1(i, j, t) + \alpha_1 \delta U_1(i, j, t)_{,2} - \alpha_{2,1} \delta U_2(i, j, t) + \alpha_2 \delta U_2(i, j, t)_{,1}] \\ &+ \frac{1}{2} \phi_1(i, j, t) \delta \phi_2(i, j, t) + \frac{1}{2} \delta \phi_1(i, j, t) \phi_2(i, j, t) + \frac{1}{2} \delta \phi_1(i, j, t) \delta \phi_2(i, j, t) \\ &+ h \left(\frac{k-1}{L-1} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [\alpha_2 \delta \phi_2(i, j, t)_{,1} + \alpha_1 \delta \phi_1(i, j, t)_{,2} - \alpha_{1,2} \delta \phi_1(i, j, t) - \alpha_{2,1} \delta \phi_2(i, j, t) \\ &+ \alpha_1 \alpha_2 (R_2^{-1} - R_1^{-1}) \delta \phi(i, j, t)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

など。ここに k は、 $k=1$ および L でそれぞれ殻の内表面および外表面を表す。

次にひずみ増分 $\delta \varepsilon_{ij}$ と $T=t$ における Overlay モデル各層の応力 σ_{ijk} (前段階で求められ、既知である) とから、式(9), (13)を用いて各層の応力増分 $\delta \sigma_{ijk}$ が求められる。時刻 $T=t$ におけるモデルの各層の応力にこの応力増分を加えることによって、時刻 $T=t+\Delta t$ における各層の応力 σ_{ijk} が得られる。

殻の任意の点の $T=t+\Delta t$ における応力 σ_{ij} は、式(14)によりモデルの各層の内力の和として表され、さらに式(15)からシンプソンの1/3則による数値積分によって、 $T=t+\Delta t$ における各内力成分が得られる。これらの内力成分を式(18)に代入すると、次の時刻の変位が求められる。

ここで計算の最初の段階として、時刻 $T=\Delta t$ に対する初期変位(変位増分)を設定しなければならない。この際、初期近似誤差を小さくするため、 $\Delta t_0 = \Delta t/n$ (例えば $n=10$) を用いる。衝撃荷重としては、インパルス荷重(単位面積当たりの力積で与える)を受ける場合と一定時間持続する表面荷重(単位面積当たりの力積で与える)を受ける場合を考える。インパルス荷重を受ける場合、単位面積当たりの力積を $I_1(\xi_1, \xi_2)$, $I_2(\xi_1, \xi_2)$, $I(\xi_1, \xi_2)$ とすると、初期変位増分は、

$$\left. \begin{aligned} U_1 = \delta U_1 &= \frac{I_1(\xi_1, \xi_2)}{\rho_0 h} \Delta t_0 = \dot{U}_1 \Delta t_0 \\ U_2 = \delta U_2 &= \frac{I_2(\xi_1, \xi_2)}{\rho_0 h} \Delta t_0 = \dot{U}_2 \Delta t_0 \\ W = \delta W &= \frac{I(\xi_1, \xi_2)}{\rho_0 h} \Delta t_0 = \dot{W} \Delta t_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

また表面荷重の場合には、単位面積当たりの分布力を P_1, P_2, P とすると、

$$\left. \begin{aligned} U_1 = \delta U_1 &= \frac{P_1 \Delta t_0^2}{2 \rho_0 h} \\ U_2 = \delta U_2 &= \frac{P_2 \Delta t_0^2}{2 \rho_0 h} \\ W = \delta W &= \frac{P \Delta t_0^2}{2 \rho_0 h} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

なお $t \leq 0$ において $U_1 = U_2 = W = 0$ である。

4. 数 値 例

数値例として、両端固定のアルミニウム (Al 1100-O) 円筒殻に、時間に対して半正弦波状の局所的分布荷重が作用する場合(図4)を取扱った。

本例題では座標 ξ_1 を円筒殻の軸方向(ξ)に、 ξ_2 を周方向(θ)にとる。問題の対称性から、計算は1/4形状(ACNM)についてののみ行えば十分である。ACNM部分の形状諸量は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 &= R, \quad \Delta \xi = l/2R(M_1 - 1) \\ \Delta \theta &= \pi/(M_2 - 1), \quad R_1 = \infty, \quad R_2 = R \end{aligned} \right\} \dots\dots (23)$$

境界条件は、

固定端 AC で

$$U_\xi = U_\theta = W = \partial W / \partial \xi = 0$$

対称面 MN で

$$U_\xi = \partial U_\theta / \partial \xi = \partial W / \partial \xi = 0$$

対称面 AMNC で

$$U_\theta = \partial U_\xi / \partial \theta = \partial W / \partial \theta = 0$$

初期条件は

$$\left. \begin{aligned} t=0 \text{ のとき} \\ U_\xi = U_\theta = W = 0 \\ t = \Delta t \text{ のとき} \\ U_\xi = \delta U_\xi = 0, U_\theta = \delta U_\theta = 0 \\ W = \delta W = \frac{P \Delta t^2}{2 \rho_0 h} = \frac{P_0 \Delta t^2 \sin(\pi \Delta t / t_0)}{2 \rho_0 h} \end{aligned} \right\} \dots\dots (24)$$

である。

Al 1100-O 材の構成関係として、実験から求めた単軸応力-ひずみ線図を、6 層から成る弾/粘塑性 Overlay モデルで近似したもの⁽¹⁰⁾を採用する。各層の材料定数は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} E &= 70.0 \text{ GPa}, \nu = 0.33, \rho_0 = 2.71 \text{ g/cm}^3 \\ \sigma_{Yk} &= [\sigma_{Y1} \sim \sigma_{Y6}] = [15.7, 25.5, 38.8, \\ & 59.5, 99.3, 213] \text{ (MPa)} \\ t_k &= [t_1 \sim t_6] = [0.778, 0.070, 0.046, \\ & 0.035, 0.030, 0.041] \\ \gamma_k &= [\gamma_1 \sim \gamma_6] = [45.0, 39.7, 35.4, 30.3, \\ & 24.6, 19.1] \text{ (1/s)} \\ \Psi(f_k) &= \left(\frac{\bar{\sigma}_k - \sigma_{Yk}}{\sigma_{Yk}} \right)^{2.0} \end{aligned} \right\} \dots\dots (26)$$

なお、得られた応力-ひずみ線図から、単層のモデルによる構成関係式を求めると、次のようになる (等方

硬化)。

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_\xi^{vp} \\ \dot{\epsilon}_\theta^{vp} \\ \dot{\epsilon}_\phi^{vp} \end{aligned} \right\} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_0 \langle \Psi(f) \rangle \\ &\times \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{\xi k} \\ \sigma_{\theta k} \\ \sigma_{\phi k} \end{bmatrix} \\ \Psi(f) &= ((\bar{\sigma} - \sigma^*) / \sigma^*)^{2.0}, \gamma_0 = 61 \text{ 1/s} \\ \sigma^* &= 112(0.00298 + \bar{\epsilon}^{vp})^{0.245} \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \dots\dots (27)$$

ここで、 $\bar{\epsilon}^{vp}$ は相当粘塑性ひずみである。これらの材料定数を用いて、種々のひずみ速度で単軸引張りを行った場合の応力-ひずみ線図を図 5 に、また単軸両振りりで時間に対して正弦波状のひずみを与えたときの応力-ひずみ線図を図 6 に示す。弾/粘塑性 Overlay モデルを用いることによって、パウシンガー効果と塑性領

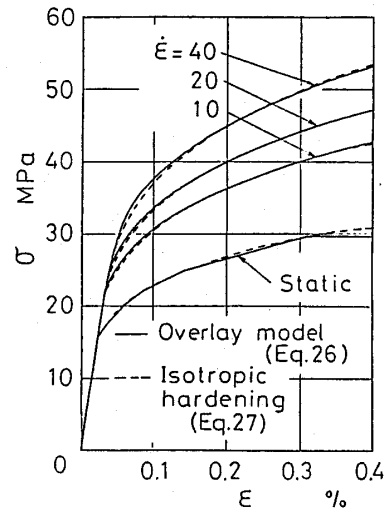


図 5 応力-ひずみ線図 ($\dot{\epsilon}$: 一定)

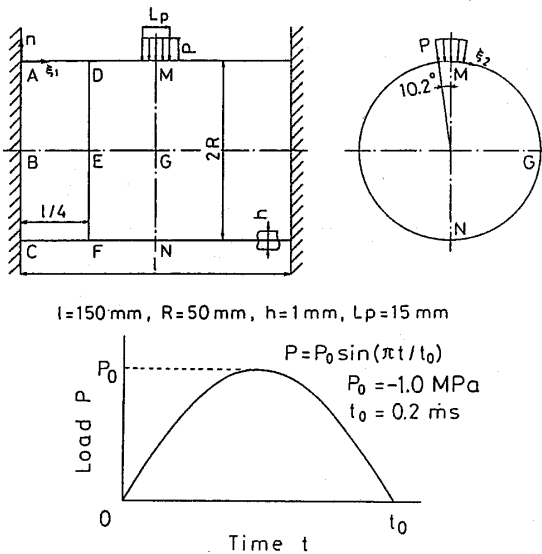


図 4 円筒殻および荷重

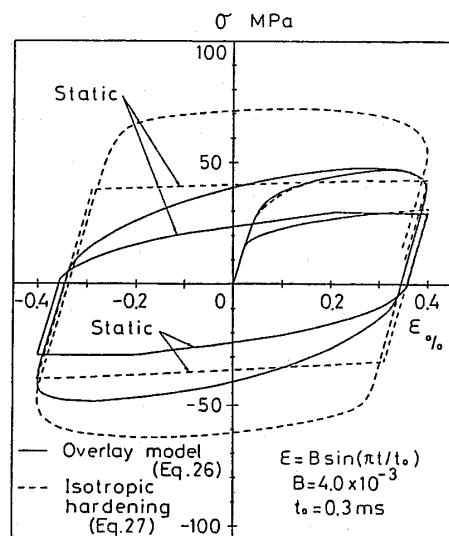


図 6 応力-ひずみ線図 (ひずみ振幅一定)

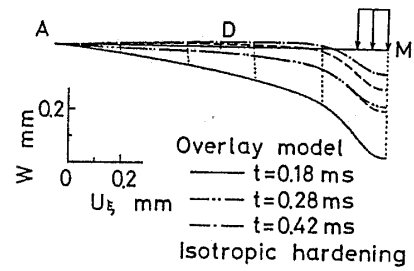
域におけるひずみ速度依存性が、よく表現されていることがわかる。

差分点数と殻厚方向の分割数は、それぞれ $M_1=26$, $M_2=45$, $K=17$ で、時間増分 Δt は 5.0×10^{-4} ms を用いた。

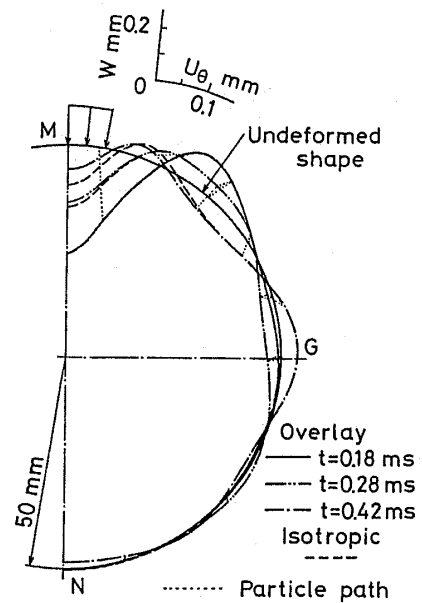
次に計算結果について考察する。計算は殻が衝撃荷重を受け始めてから 0.8 ms まで行い、変位および内力の時間的変化について、等方硬化の場合と Overlay モデルを採用した場合とを比較した。図中、実線および鎖線は Overlay モデルによる計算結果であり、破線は等方硬化によるものである。ひずみならびにひずみ速度の最大値(絶対値)は点 M の外表面の円周方向に生じ、各々 0.41%、ならびに 42 1/s である。

図 7 は、点 M, G, N の半径方向変位 W , 点 G の円周方向変位 U_θ , および点 D の子午線方向変位 U_ξ の時間的変化を示したものである。 W に比べて U_ξ , U_θ は極めて小さい。荷重が作用している点 M で大きく内側に変位し、 $t=0.2$ ms を過ぎると、等方硬化の場合と Overlay モデルの場合との間に大きな差が生じてくる。点 G, N では時間的に遅れて変形し始めるが、点 M に比べて両モデルによる結果の差は小さい。点 M の W , 点 D の U_ξ では、 $t=0.4$ ms 以後両モデルによる結果の差はほぼ一定となり、等方硬化モデルによる値のほうが初めの変形からの戻りが小さい。

図 8 に時刻 $t=0.18, 0.28, 0.42$ ms における $\theta=0^\circ$ の子午線断面および $\xi=1.5$ の中央断面の形状を示す。 $t=0.18$ ms で点 M の近傍で大きく内側に変位し、そ



(a) $\theta=0^\circ$



(b) $\xi=1.5$

図 8 変形の時間的変化

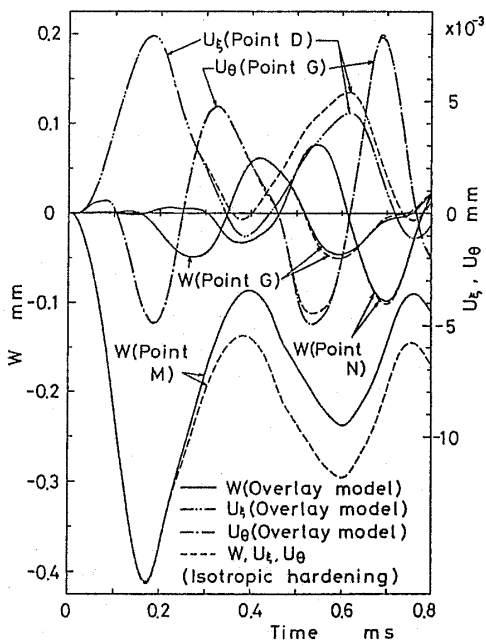


図 7 変位 U_ξ , U_θ , W の時間的変化

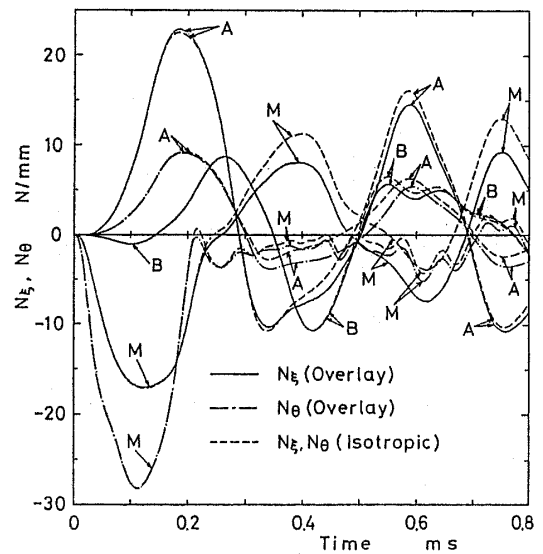


図 9 面内力 N_ξ , N_θ の時間的変化

の後、時間の経過とともに等方硬化の場合との間に差が現れる。荷重が作用する M 点近傍では両モデルの差が顕著であるが、荷重負荷部から離れた GN 部分ではほとんど差が見られない。

図 9 は、点 A, B, M の面内力 N_x , および点 A, M の面内力 N_θ の時間的变化を示す。点 M では N_x, N_θ とも最初大きな圧縮となり、 $t=0.2$ ms を過ぎた時点で等方硬化との間に差が生じている。その後 N_θ は小さな振幅で変動する。点 A では N_x, N_θ とも最初大きな引張りとなり、点 M よりも遅れて $t=0.3$ ms あた

りから等方硬化との間に差が出てくる。この差は以後ほぼ一定の値となっている。点 M の N_x は、振動の中心の値は等方硬化のほうが大きくなっている。点 B の N_x は $t=0.5$ ms 以降で差が見られる。

図 10 は点 A, M の曲げモーメント M_x ならびに点 M, G, N の曲げモーメント M_θ の時間的变化を示したものである。点 M では最初負の大きな曲げモーメントを生じる。その後 $t=0.2$ ms あたりから等方硬化と

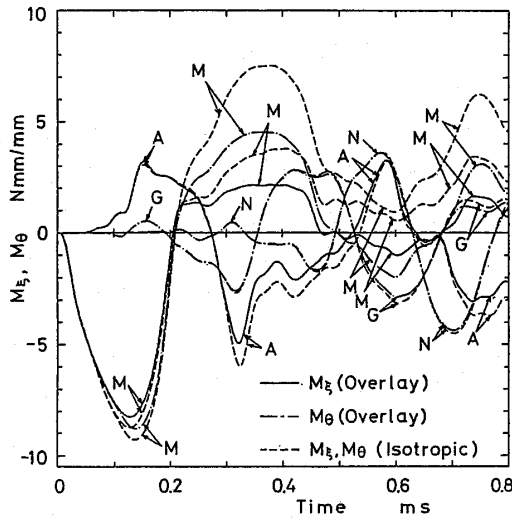


図 10 曲げモーメント M_x, M_θ の時間的变化

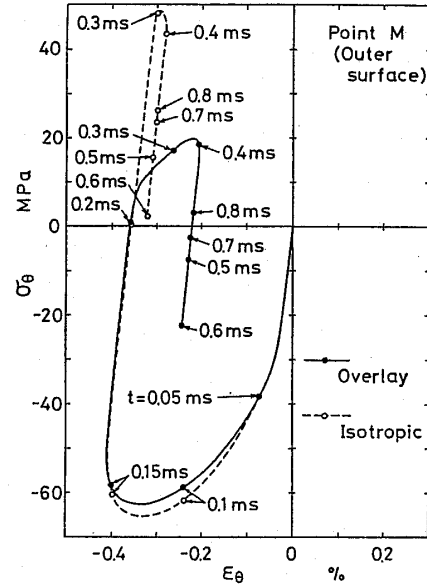


図 11 点 M の外表面の σ_θ - ϵ_θ 線図

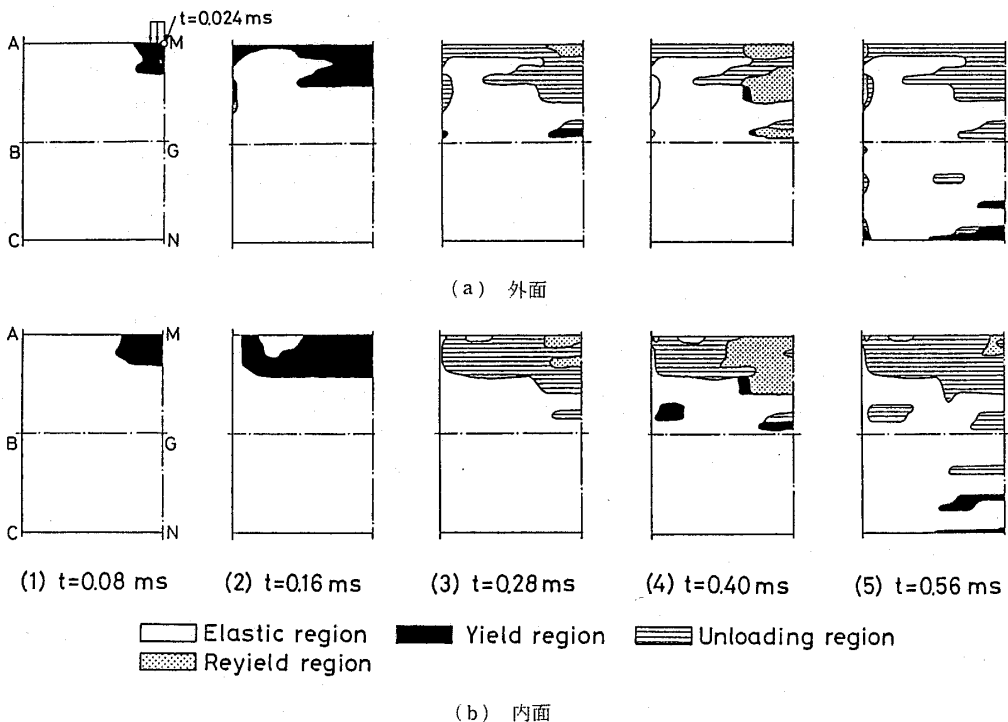


図 12 本理論による降伏域の進展の様子

の間に差が生じ、その差は M_e よりも M_o が大きい。また生じた差は、面内力と同様にほぼ一定の大きさで推移している。 $t=0.1$ ms あたりのピーク時で、再降伏が生じていないにもかかわらず両モデルによる結果に差が見られるのは、両モデルの応力-ひずみ曲線の差(図5)に起因するものと思われる。点Aの M_e は N_o と同じく $t=0.3$ ms あたりから差が生じている。点Nでは殻の振動とともに振幅が増大しているが、両モデルの差はあまり見られない。点N付近では $t=0.56$ ms 以降で除荷と再降伏を繰返しており、降伏域がさらに広がれば両モデルの差も大きくなるものと思われる。

図11は点Mの外表面の $\sigma_\theta - \epsilon_\theta$ 線図である。除荷後応力が反転する $t=0.2$ ms から、等方硬化モデルと Overlay モデルによる結果の間に大きな差が生じており、これは図7~10の点Mの各変位および内力成分が、時刻 $t=0.2$ ms 以降に差を生じることと対応している。時刻 $t=0.1$ ms 付近で両モデルの間に差がでているのは、両モデルの応力-ひずみ曲線の差によるものと思われる。

図12に本理論による殻の内外面の降伏域の進展の様子を示す。図において除荷域とは一度以上降伏を経験した後、応力が降伏点以下になっている領域を意味する。ここには示さなかったが、等方硬化モデルの場合も降伏域の広がり方はほぼ同様であり、一部除荷域と再降伏域に違いが見られる程度である。図に示すように、まず $t=0.024$ ms で点Mの外表面で降伏を起こし、これが子午線方向に広がる。続いて $t=0.28$ ms には点GのM点寄り部分が、さらに遅れて点Nの内外面で降伏域が発生するが、広がり方は小さい。降伏した領域は、殻の振動とともに部分的に除荷ならびに再降伏を繰返す。円筒殻のBCNG部分はほとんどが再降伏域とならず、等方硬化モデルによる結果との差がこの部分であまり見られなかったことと対応している。

使用した計算機は FACOM VP-200 で、本計算例の

計算時間は Overlay モデルの場合約 42 分、等方硬化の場合は約 10 分である。

5. 結 言

薄肉殻に衝撃荷重が作用する場合の弾/粘塑性動的応答問題の解法に、弾/粘塑性 Overlay モデルを導入して、ひずみ速度依存性とバウシinger効果の影響を考慮した。

殻の運動方程式には Sanders の殻の非線形理論式に慣性項を加えたものを用い、またひずみ-変位式には膜ひずみに殻の回転の項を考慮した。数値解法には差分法を適用した。

数値例として、両端固定のアルミ円筒殻に、時間に対して半正弦波状の非軸対称な局所的分布荷重が作用する問題を取り上げ、内力および変位の時間的変化の様子を解析し、等方硬化による結果と比較した。その結果、応力が反転して再降伏が生じると、変位、内力成分とも両モデルによる結果に差が現れ、等方硬化モデルによると、再降伏直後の変動を変位については小さめに、内力については大きめに見積もることになることがわかった。

文 献

- (1) Nagarajan, S. and Popov, E. P., *Int. J. for Numerical Methods in Engng.*, 9-3(1975), 535.
- (2) 竹園・埜, 機論, 44-381(昭53), 1478.
- (3) Atkatsch, R. S., ほか2名, *Trans. ASME, Ser. E*, 50-1(1983), 131.
- (4) Wojewódzki, W. and Bukowski, R., *Trans. ASME, Ser. E*, 51(1984), 114.
- (5) 竹園・ほか2名, 機論, 52-476, A(昭61), 997.
- (6) 竹園・ほか2名, 機論, 52-482, A(昭61), 2395.
- (7) 竹園・埜, 機論, 47-421, A(昭56), 949.
- (8) Besseling, J. F., *Trans. ASME, Ser. E*, 25-4(1958), 529.
- (9) Perzyna, P., *Adv. in Appl. Mech.*, 9(1966), 243, Academic Press.
- (10) Takezono, S., ほか2名, *Trans. ASME, Ser. J*, 102-3(1980), 257.
- (11) Sanders, J. L., *Q. Appl. Math.*, 21-1(1963), 21.

討 論

〔質問〕 鈴木章彦〔石川島播磨重工業(株)〕

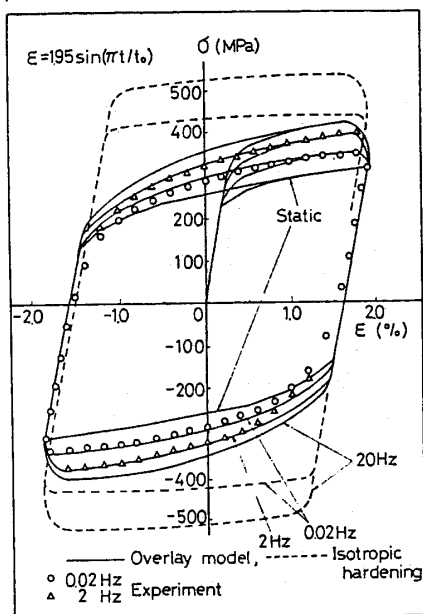
精密な構成式モデルを用いてシェルの動的弾塑性解析を実施されたことに敬意を表す。以下の点につきご教授願いたい。

(1) オーバレイモデルを用いた計算結果が等方硬化モデルを用いたものより実際に近いということに対

する実験的裏付けはあるか。

(2) 衝撃負荷を受けるシェルの解析にオーバーレイモデルを用いることの意義はなにか。応力のピーク値やその発生時点を知るためなら等方硬化モデルで十分と思うがいかがか。

〔回答〕 (1) 一般に実験するまでもなく、金属



付図 1 応力-ひずみ線図 (工業用純チタン) (付1)

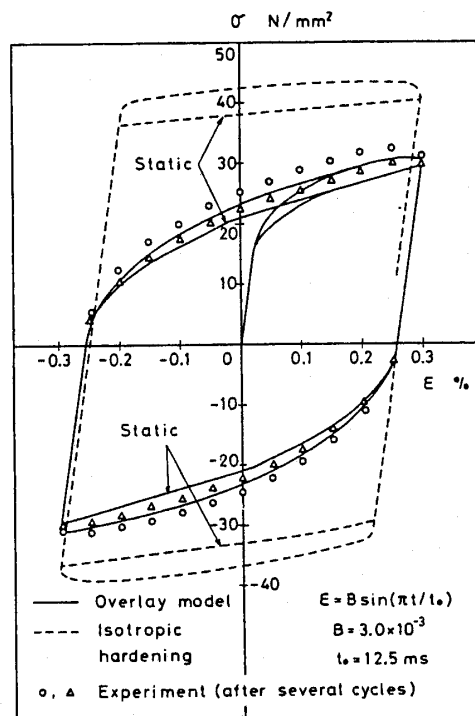
材料にはバウシング効果の現象があり、等方硬化モデルよりも Overlay モデルを用いたほうが、より正確な解が得られるものと思われる。著者らは一軸応力状態で繰返し負荷を与える実験を行ったが、チタンやアルミ等では付図 1, 2 に示すように、明らかに Overlay モデルのほうが材料特性を良く表現している。それゆえ、Overlay モデルを用いて得られた解析結果は、より現実に近い解を与えることになると考えられる。

(2) 応力が反転して再降伏する場合には、バウシング効果を考慮に入れるほうが、より現実的な解を与えるものと考えられる。本計算例では、応力のピーク値やその発生時点に関しては、両モデルによる解に差がなかったので、これらを知るだけなら等方硬化モデルで十分である。しかしながら、殻の形状、境界条件、材質、衝撃負荷にはいろいろのものがあ、Overlay モデルを用いたほうが、解に一般性があると言える。

〔質問〕 宇治橋 貞幸〔東京工業大学工学部〕

Overlay モデルにより実在の材料の特性をどこまで表現しうるかについてご意見をお聞かせいただきたい。

〔回答〕 本モデル (弾/粘塑性 Overlay モデル) で



付図 2 応力-ひずみ線図 (A 1100-0) (付2)

は、ひずみ速度依存性とバウシング効果 (降伏曲面が膨張しない移動硬化モデルに相当する) が表現可能である。

これを拡張すると、温度によるひずみ速度依存性の変化や、異方性をも考慮に入れることができ、著者の一人はすでに異方性を考慮したモデルを用いて、異方性材料の疲労き裂進展や発生を解析を行っている (付3)(付4)。

さらに、応力の繰返しに伴う材料の軟化および硬化、クリープ回復、凝固や溶融のような相変化を伴う場合の材料特性、また不均質材料等に対する適用も考えられるが、まだこれらの問題については十分検討していない。今後の課題としたいと思っている。

(付1) 竹園・ほか2名, 材料, 33-371(1984), 1052.

(付2) Takezono, S., ほか2名, *Trans. ASME, Ser. J.*, 102-3 (1980), 257.

(付3) 坂本・ほか2名, 材料, 35-397(1986), 1170.

(付4) 坂本・ほか2名, 材料, 35-399(1986), 1392.