

多層厚肉回転対称殻の弾/粘塑性変形*

竹園茂男*¹, 埜 克己*¹, 谷 清之*²Elasto/Visco-Plastic Deformation of Multi-Layered
Moderately Thick Shells of Revolution

Shigeo TAKEZONO, Katsumi TAO, and Kiyoyuki TANI

This paper is concerned with an analytical formulation and a numerical solution of the elasto/visco-plastic problems of multi-layered moderately thick shells of revolution under asymmetrical loads with application to a cylindrical shell. The analytical formulation is developed by extending the Reissner-Naghdi theory on elastic shells. It is assumed that the total strain rates are composed of an elastic part and a part due to visco-plasticity. The elastic strains are proportional to the stresses by Hooke's law. The visco-plastic strain rates are related to the stresses according to Perzyna's equation. As a numerical example, the elasto/visco-plastic deformation of a two-layered cylindrical shell composed of a titanium and a mild steel layer subjected to locally distributed loads is analyzed. Numerical computations are carried out for three cases of the ratio of the thickness of the titanium layer to the shell thickness. It is found from the computations that the stress distributions and the deformation vary significantly depending on the thickness ratio.

Key Words: Structural Analysis, Computational Mechanics, Laminated Construction, FDM, Elasto/Visco-Plasticity, Thick Shells

1. 緒 言

回転対称殻の弾/粘塑性変形問題の解法に関しては、従来から、多くの研究結果が報告されている^{(1)~(5)}。また薄肉の殻ばかりでなく、比較的厚い殻**¹についても二、三の研究がなされている^{(6)~(8)}。しかしながら、これらの研究は、単一材質から成るものを対象としており、近年広く実用されている異種材質を組合せた多層回転対称殻の弾/粘塑性変形に関する研究は、まだあまり行われていないようである。

そこで、著者らはこの研究に着手し、すでに薄肉の多層回転対称殻に非対称荷重が作用する場合について解析を行ってきたが⁽⁹⁾、本研究では、中程度の厚さの多層回転対称殻**¹に一般の非対称な荷重が作用する場合の弾/粘塑性変形問題の解法を取扱った。本解法は、Reissner-Naghdiによる単層殻の弾性変形問題の解法⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾を多層殻の弾/粘塑性変形問題に拡張したもので、構成関係には、塑性領域において粘性の影響

を考慮した Perzyna の構成式⁽¹²⁾を用いている。導かれた基礎式の数値解法には、差分法を適用した。

数値例として、実用上重要な内側にチタン、外側に軟鋼の層を配した二層構造の円筒殻に、局所的分布荷重が作用する場合を取上げ、変形と内力の様子を解析するとともに、せん断変形の影響を無視した薄肉理論による解⁽⁹⁾と比較した。

2. 解 法

2.1 基礎式 図1に示すように、対称軸から殻の中央面上の任意点 P までの距離を r とし、殻の中央面の形を $r=r(s)$ で与えると、中央面の点 P における無次元曲率 $\omega_\xi (=a/R_\xi)$, $\omega_\theta (=a/R_\theta)$ および無次元半径 $\rho (=r/a)$ の間には次の関係が成立する。ただし、 s は殻の子午線方向の長さであり、 a は代表長さである。

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= -(\gamma' + \gamma^2)/\omega_\theta, \quad \omega_\theta = \sqrt{1 - (\rho')^2/\rho} \\ \omega'_\theta &= \gamma(\omega_\xi - \omega_\theta), \quad \rho''/\rho = -\omega_\xi \omega_\theta \\ \gamma &= \rho'/\rho, \quad \xi = s/a, \quad ()' = d()/d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

また、殻の任意点を表すのに、直交座標 (ξ, θ, ζ) を用いる。ここに、 θ は円周方向の角であり、 ζ は中央面か

* 平成元年10月14日 第67期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成元年4月5日。

*¹ 正員、豊橋技術科学大学 (〒440 豊橋市天伯町1-1)。

*² (株)日興システムセンター (〒141 東京都品川区西五反田2丁目)。

**¹ $1/20 < h/R < 1/5$ 程度 (h : 殻厚, R : 主曲率半径)。

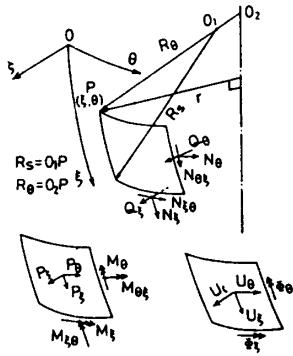


図 1 諸記号

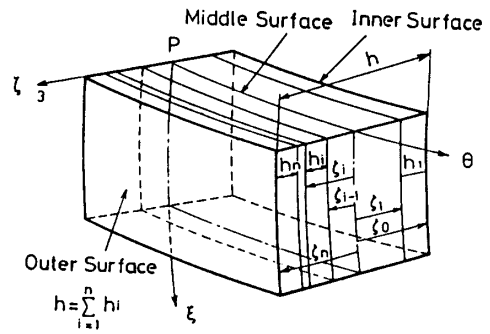


図 2 多層殻要素

ら外向きに測った長さである。

さて、Reissner の殻理論⁽¹⁰⁾ による平衡方程式を軸対称殻に適用し、時間または荷重について微分すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{N}_e}{\partial \xi} + \gamma(\dot{N}_e - \dot{N}_o) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{N}_{eo}}{\partial \theta} + \omega_e \dot{Q}_e + a \dot{P}_e &= 0 \\ \frac{\partial \dot{N}_{eo}}{\partial \xi} + \gamma(\dot{N}_{eo} + \dot{N}_{oe}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{N}_o}{\partial \theta} + \omega_o \dot{Q}_o + a \dot{P}_o &= 0 \\ \frac{\partial \dot{Q}_e}{\partial \xi} + \gamma \dot{Q}_e + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{Q}_o}{\partial \theta} - (\omega_e \dot{N}_e + \omega_o \dot{N}_o) + a \dot{P}_e &= 0 \\ \dot{Q}_e - \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \dot{M}_e}{\partial \xi} + \gamma(\dot{M}_e - \dot{M}_o) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{M}_{eo}}{\partial \theta} \right] &= 0 \\ \dot{Q}_o - \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \dot{M}_{eo}}{\partial \xi} + \gamma(\dot{M}_{eo} + \dot{M}_{oe}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{M}_o}{\partial \theta} \right] &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $N_e, N_o, N_{eo}, N_{oe}, Q_e, Q_o$ および M_e, M_o, M_{eo}, M_{oe} は図 1 に示すように殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントである。 P_e, P_o, P_e は殻の中央面の単位面積当たりの分布荷重であり、殻の内外面に作用する分布荷重 $\{P_e^-, P_o^-, P_e^-\}, \{P_e^+, P_o^+, P_e^+\}$ と次の関係にある。

$$\{P_e, P_o, P_e\} = \{P_e^-, P_o^-, P_e^-\} h^- - \{P_e^+, P_o^+, P_e^+\} h^+ \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 P_e, P_e などは座標方向のものを正とし、 P_e^+ などはこれと反対方向のものを正とする。また、

$$h^+ = 1 \pm \frac{h}{2} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_o} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{1}{R_s R_o} \quad \dots\dots\dots (4)$$

次に中央面のひずみ $\epsilon_{em}, \epsilon_{om}$ および ϵ_{eom} を ξ, θ, ζ 方向の変位 U_e, U_o, U_ζ で表すと、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{em} &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial U_e}{\partial \xi} + \omega_e U_\zeta \right] \\ \epsilon_{om} &= \frac{1}{a} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial U_o}{\partial \theta} + \gamma U_e + \omega_o U_\zeta \right] \\ \epsilon_{eom} &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial U_e}{\partial \theta} + \frac{\partial U_o}{\partial \xi} - \gamma U_o \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 ϵ_{eom} は工学上のせん断ひずみの 1/2 である。

また、曲率の変化量 $\chi_e, \chi_o, \chi_{eo}, \chi_{oe}$ と変位成分との関係は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\chi}_e &= \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{\Phi}_e}{\partial \xi}, \quad \dot{\chi}_o = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{\Phi}_o}{\partial \theta} + \gamma \dot{\Phi}_e \right) \\ \dot{\chi}_{eo} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{\partial \dot{\Phi}_o}{\partial \xi} - 2\omega_e \dot{\Phi}_n \right) \\ \dot{\chi}_{oe} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{\Phi}_e}{\partial \theta} - \gamma \dot{\Phi}_o + 2\omega_o \dot{\Phi}_n \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 Φ_e, Φ_o, Φ_n は中央面の回転を示し、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}_e &= \frac{1}{a} \left(-\frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} + \omega_e U_e \right) + 2\epsilon_{em} \\ \dot{\Phi}_o &= \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\zeta}{\partial \theta} + \omega_o U_o \right) + 2\epsilon_{om} \\ \dot{\Phi}_n &= \frac{1}{2a} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial U_e}{\partial \theta} + \frac{\partial U_o}{\partial \xi} + \gamma U_o \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

殻厚中央面から ζ の距離にある点 Q のひずみ速度成分は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_e &= (\dot{\epsilon}_{em} + \zeta \dot{\chi}_e) / L_e, \quad \dot{\epsilon}_o = (\dot{\epsilon}_{om} + \zeta \dot{\chi}_o) / L_o \\ \dot{\epsilon}_{eo} &= \left\{ \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{eom} + \dot{\Phi}_n) + \zeta (\dot{\chi}_{eo} + \dot{\Phi}_n / R_s) \right\} / L_e \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{eom} - \dot{\Phi}_n) + \zeta (\dot{\chi}_{oe} - \dot{\Phi}_n / R_o) \right\} / L_o \\ \dot{\epsilon}_{e\zeta} &= \dot{\epsilon}_{em} / L_e, \quad \dot{\epsilon}_{o\zeta} = \dot{\epsilon}_{om} / L_o \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $L_e = 1 + \zeta / R_s, L_o = 1 + \zeta / R_o$
さて、本研究では構成関係に塑性領域において粘性の影響を考慮したつぎの Perzyna の式⁽¹²⁾ を用いる。

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \dot{S}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{S} \delta_{ij} \\ &\quad + \gamma_0 < \Phi(F) > S_{ij} J_2^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここで、 $(\dot{\quad})$ は時間に関する微分を示し、 S_{ij}, S および ϵ_{ij} は偏差応力、平均垂直応力およびひずみである。 E, ν および γ_0 はそれぞれ縦弾性率、ポアソン比および粘性を表す定数であり、 J_2 は偏差応力の第 2 不変量である。また、 $< \Phi(F) >$ は次の定義によるものである。

$$\langle \Phi(F) \rangle = 0 : F \leq 0, \langle \Phi(F) \rangle = \Phi(F) : F > 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに, F は

$$F = (\bar{\sigma} - \sigma^*) / \sigma^* \quad \dots\dots\dots (11)$$

で, $\bar{\sigma}$ はミーゼスの相当応力 ($=\sqrt{3}J_2$) であり, $F=0$ はミーゼスの降伏曲面を表す. また, σ^* はひずみ速度

が十分小さい通常の引張試験における応力-ひずみ関係から得られ, 一般に相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^{vp}$ の関数となる.

式(9)は, かくの応力状態において次のようになる.

$$\{\dot{\epsilon}\} = [D]^{-1} \{\dot{\sigma}\} + \{\dot{\epsilon}^{vp}\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{\epsilon}\} &= \{\dot{\epsilon}_\epsilon, \dot{\epsilon}_\theta, \dot{\epsilon}_{\epsilon\theta}, \dot{\epsilon}_{\epsilon\zeta}, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta}\}^T, \{\dot{\sigma}\} = \{\dot{\sigma}_\epsilon, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_{\epsilon\theta}, \dot{\sigma}_{\epsilon\zeta}, \dot{\sigma}_{\theta\zeta}\}^T \\ \{\dot{\epsilon}^{vp}\} &= \{\dot{\epsilon}_\epsilon^{vp}, \dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_{\epsilon\theta}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\epsilon\zeta}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta}^{vp}\}^T = \gamma_1 \langle \Phi \left(\frac{\bar{\sigma} - \sigma^*}{\sigma^*} \right) \rangle > \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \{\dot{\sigma}\} \\ \gamma_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_0, [D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

式(12)に式(8)を代入し, 応力について解くと,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_\epsilon &= \frac{E}{1-\nu^2} \{ (\dot{\epsilon}_{\epsilon m} + \zeta \dot{\chi}_\epsilon) / L_\epsilon + \nu (\dot{\epsilon}_{\theta m} + \zeta \dot{\chi}_\theta) / L_\theta \} - \dot{\sigma}_\epsilon^{vp} \\ \dot{\sigma}_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \{ (\dot{\epsilon}_{\theta m} + \zeta \dot{\chi}_\theta) / L_\theta + \nu (\dot{\epsilon}_{\epsilon m} + \zeta \dot{\chi}_\epsilon) / L_\epsilon \} - \dot{\sigma}_\theta^{vp} \\ \dot{\sigma}_{\epsilon\theta} &= \frac{E}{1+\nu} \left[\left\{ \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{\epsilon\theta m} + \dot{\Phi}_n) + \zeta (\dot{\chi}_{\epsilon\theta} + \frac{\dot{\Phi}_n}{R_s}) \right\} / L_\epsilon + \left\{ \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{\theta\epsilon m} - \dot{\Phi}_n) + \zeta (\dot{\chi}_{\theta\epsilon} - \frac{\dot{\Phi}_n}{R_\theta}) \right\} / L_\theta \right] - \dot{\sigma}_{\epsilon\theta}^{vp} \\ \dot{\sigma}_{\epsilon\zeta} &= \frac{E}{1+\nu} \dot{\epsilon}_{\epsilon\zeta m} / L_\epsilon - \dot{\sigma}_{\epsilon\zeta}^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\zeta} = \frac{E}{1+\nu} \dot{\epsilon}_{\theta\zeta m} / L_\theta - \dot{\sigma}_{\theta\zeta}^{vp} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここに,

$$\{\dot{\sigma}^{vp}\} = [D] \{\dot{\epsilon}^{vp}\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントは, 式(14)を用い, かつ近似

$$\frac{L_\theta}{L_\epsilon} \approx 1 - \left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \zeta + \frac{1}{R_s} \left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \zeta^2 \quad \dots\dots\dots (16)$$

を用いると(図2),

$$\left\{ \begin{matrix} \dot{N} \\ \dot{M} \end{matrix} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} [L] \left\{ \begin{matrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\sigma}^* \zeta \end{matrix} \right\} d\zeta = [A] \left\{ \begin{matrix} \dot{\epsilon}_m \\ \dot{\chi} \\ \dot{\Phi}_n \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \dot{N}^{vp} \\ \dot{M}^{vp} \end{matrix} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \{\dot{N}\} &= \{\dot{N}_\epsilon, \dot{N}_\theta, \dot{N}_{\epsilon\theta}, \dot{N}_{\theta\zeta}, \dot{Q}_\epsilon, \dot{Q}_\theta\}^T, \{\dot{M}\} = \{\dot{M}_\epsilon, \dot{M}_\theta, \dot{M}_{\epsilon\theta}, \dot{M}_{\theta\zeta}\}^T \\ [L] &= \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix}, [L_1] = \begin{bmatrix} L_\theta & & & & \\ & L_\epsilon & 0 & & \\ & & L_\theta & & \\ & & & L_\epsilon & \\ 0 & & & & L_\theta \\ & & & & & L_\epsilon \end{bmatrix}, [L_2] = \begin{bmatrix} L_\theta & 0 \\ & L_\epsilon \\ & & L_\theta \\ 0 & & & L_\epsilon \end{bmatrix} \\ (\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}^T)^* &= \{a_1, a_2, a_3\}^T, \{\dot{\epsilon}_m\} = \{\dot{\epsilon}_{\epsilon m}, \dot{\epsilon}_{\theta m}, \dot{\epsilon}_{\epsilon\theta m}, \dot{\epsilon}_{\epsilon\zeta m}, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta m}\}^T, \{\dot{\chi}\} = \{\dot{\chi}_\epsilon, \dot{\chi}_\theta, \dot{\chi}_{\epsilon\theta}, \dot{\chi}_{\theta\zeta}\}^T \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$[A] = \sum_{i=1}^n [E_i][A_i] \dots\dots\dots (19)$$

$$[E_i] = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} [1, 1, 1-\nu_i, 1-\nu_i, 1-\nu_i, 1-\nu_i, 1, 1, 1-\nu_i, 1-\nu_i] : (\text{対角行列}) \dots\dots\dots (20)$$

$$[A_i] = \left[\begin{array}{cccccccccccc} \zeta_{1,i}^* & \nu_i \zeta_{1,i} & 0 & 0 & 0 & \zeta_{2,i}^* & \nu_i \zeta_{2,i} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_i \zeta_{1,i} & \zeta_{1,i}^{**} & 0 & 0 & 0 & \nu_i \zeta_{2,i} & \zeta_{2,i}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\zeta_{1,i}^* + \zeta_{1,i}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{2,i}^* & \zeta_{2,i} & (a) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\zeta_{1,i}^{**} + \zeta_{1,i}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{2,i} & \zeta_{2,i}^{**} & (b) \\ 0 & 0 & 0 & 5/6 \zeta_{1,i}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 \zeta_{1,i}^{**} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_{2,i}^* & \nu_i \zeta_{2,i} & 0 & 0 & 0 & \zeta_{3,i}^* & \nu_i \zeta_{3,i} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_i \zeta_{2,i} & \zeta_{2,i}^{**} & 0 & 0 & 0 & \nu_i \zeta_{3,i} & \zeta_{3,i}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\zeta_{2,i}^* + \zeta_{2,i}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{3,i}^* & \zeta_{3,i} & (c) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\zeta_{2,i}^{**} + \zeta_{2,i}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{3,i} & \zeta_{3,i}^{**} & (d) \end{array} \right] \dots\dots\dots (21)$$

$$(a) = \frac{1}{2}(\zeta_{1,i}^* - \zeta_{1,i}) + \frac{\omega_\epsilon}{a} \zeta_{2,i}^* - \frac{\omega_\theta}{a} \zeta_{2,i}, (b) = \frac{1}{2}(\zeta_{1,i} - \zeta_{1,i}^{**}) + \frac{\omega_\epsilon}{a} \zeta_{2,i} - \frac{\omega_\theta}{a} \zeta_{2,i}^{**}$$

$$(c) = \frac{1}{2}(\zeta_{2,i}^* - \zeta_{2,i}) + \frac{\omega_\epsilon}{a} \zeta_{3,i}^* - \frac{\omega_\theta}{a} \zeta_{3,i}, (d) = \frac{1}{2}(\zeta_{2,i} - \zeta_{2,i}^{**}) + \frac{\omega_\epsilon}{a} \zeta_{3,i} - \frac{\omega_\theta}{a} \zeta_{3,i}^{**}$$

$$\zeta_{n,i} = \frac{1}{n}(\zeta_i^n - \zeta_{i-1}^n) \quad (n=1, 2, \dots, 5)$$

$$\zeta_{n,i}^* = \zeta_{n,i} - \frac{1}{a}(\omega_\epsilon - \omega_\theta)\zeta_{n+1,i} + \frac{\omega_\epsilon}{a^2}(\omega_\epsilon - \omega_\theta)\zeta_{n+2,i}, \zeta_{n,i}^{**} = \zeta_{n,i} - \frac{1}{a}(\omega_\theta - \omega_\epsilon)\zeta_{n+1,i} + \frac{\omega_\theta}{a^2}(\omega_\theta - \omega_\epsilon)\zeta_{n+2,i} \quad (n=1, 2, 3)$$

\dots\dots\dots (22)

また,

$$\dot{N}^{vp} = \{\dot{N}_\epsilon^{vp}, \dot{N}_\theta^{vp}, \dot{N}_{\epsilon\theta}^{vp}, \dot{N}_{\theta\epsilon}^{vp}, \dot{Q}_\epsilon^{vp}, \dot{Q}_\theta^{vp}\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} [L_1] \{\dot{\sigma}^{vp}\} d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_1][D_i] \{\dot{\epsilon}^{vp}\} d\zeta$$

$$\dot{M}^{vp} = \{\dot{M}_\epsilon^{vp}, \dot{M}_\theta^{vp}, \dot{M}_{\epsilon\theta}^{vp}, \dot{M}_{\theta\epsilon}^{vp}\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} [L_2] \{\dot{\sigma}^{vp}\}^* \zeta d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_2][\bar{D}_i] \{\dot{\epsilon}^{vp}\}^* \zeta d\zeta \dots\dots\dots (23)$$

$$[\bar{D}_i] = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu_i \end{bmatrix}$$

以上で50個の独立変数 $\dot{U}_\epsilon, \dot{U}_\theta, \dot{U}_\zeta, \dot{\Phi}_\epsilon, \dot{\Phi}_\theta, \dot{\Phi}_n, \{\dot{N}\}, \{\dot{N}^{vp}\}, \{\dot{M}\}, \{\dot{M}^{vp}\}, \{\dot{\epsilon}_m\}, \{\dot{x}\}, \{\dot{\epsilon}^{vp}\}, \{\dot{\sigma}\}, \{\dot{\sigma}^{vp}\}$ に対して、式(2), (5)~(8), (12), (15), (17), (23)の50個の式が得られたことになる。なお、式(19)~(23)で $n=1$ とおくと、単層の場合に帰着する⁽⁷⁾。

2・2 無次元方程式 一般に非対称問題を解析するには、各変数を θ 方向にフーリエ級数で表し、その係数を定めればよい。そこで上に示した50個の変数のうち、 $\{\dot{\epsilon}^{vp}\}$ を除く45個の変数を次のようにフーリエ級数で表す。

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{N}_\epsilon, \dot{N}_\epsilon^{vp}, \dot{N}_\theta, \dot{N}_\theta^{vp}, \dot{Q}_\epsilon, \dot{Q}_\epsilon^{vp}\} &= \sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{n}_\epsilon^{(n)}, \dot{n}_\epsilon^{vp(n)}, \dot{n}_\theta^{(n)}, \dot{n}_\theta^{vp(n)}, \dot{q}_\epsilon^{(n)}, \dot{q}_\epsilon^{vp(n)}\} \cos n\theta \\ \{\dot{N}_{\epsilon\theta}, \dot{N}_{\epsilon\theta}^{vp}, \dot{N}_{\theta\epsilon}, \dot{N}_{\theta\epsilon}^{vp}, \dot{Q}_\theta, \dot{Q}_\theta^{vp}\} &= \sigma_0 h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{\dot{n}_{\epsilon\theta}^{(n)}, \dot{n}_{\epsilon\theta}^{vp(n)}, \dot{n}_{\theta\epsilon}^{(n)}, \dot{n}_{\theta\epsilon}^{vp(n)}, \dot{q}_\theta^{(n)}, \dot{q}_\theta^{vp(n)}\} \sin n\theta \\ \{\dot{M}_\epsilon, \dot{M}_\epsilon^{vp}, \dot{M}_\theta, \dot{M}_\theta^{vp}\} &= \frac{\sigma_0 h_0^3}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{m}_\epsilon^{(n)}, \dot{m}_\epsilon^{vp(n)}, \dot{m}_\theta^{(n)}, \dot{m}_\theta^{vp(n)}\} \cos n\theta \\ \{\dot{M}_{\epsilon\theta}, \dot{M}_{\epsilon\theta}^{vp}, \dot{M}_{\theta\epsilon}, \dot{M}_{\theta\epsilon}^{vp}\} &= \frac{\sigma_0 h_0^3}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \{\dot{m}_{\epsilon\theta}^{(n)}, \dot{m}_{\epsilon\theta}^{vp(n)}, \dot{m}_{\theta\epsilon}^{(n)}, \dot{m}_{\theta\epsilon}^{vp(n)}\} \sin n\theta \\ \{\dot{U}_\epsilon, \dot{U}_\zeta, \dot{\epsilon}_{\epsilon m}, \dot{\epsilon}_{\theta m}, \dot{\epsilon}_{\zeta m}, \dot{x}_\epsilon, \dot{x}_\theta, \dot{\Phi}_\epsilon\} &= \frac{\sigma_0}{E_0} \sum_{n=0}^{\infty} \{a\dot{u}_\epsilon^{(n)}, a\dot{u}_\zeta^{(n)}, \dot{\epsilon}_{\epsilon m}^{(n)}, \dot{\epsilon}_{\theta m}^{(n)}, \dot{\epsilon}_{\zeta m}^{(n)}, \frac{\dot{k}_\epsilon^{(n)}}{a}, \frac{\dot{k}_\theta^{(n)}}{a}, \dot{\phi}_\epsilon^{(n)}\} \cos n\theta \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \{ \dot{U}_\theta, \dot{\epsilon}_{\theta\theta}, \dot{\epsilon}_{\theta\tau}, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta}, \dot{\epsilon}_{\theta\phi}, \dot{\epsilon}_{\theta\psi}, \dot{\Phi}_\theta, \dot{\Phi}_\tau \} &= \frac{\sigma_0}{E_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a \dot{u}_\theta^{(n)}, \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^{(n)}, \dot{\epsilon}_{\theta\tau}^{(n)}, \frac{\dot{k}_{\theta\theta}^{(n)}}{a}, \frac{\dot{k}_{\theta\tau}^{(n)}}{a}, \dot{\phi}_\theta^{(n)}, \dot{\phi}_\tau^{(n)} \right\} \sin n\theta \\
 \{ \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_\theta^{vp}, \dot{\sigma}_\tau, \dot{\sigma}_\tau^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\tau}, \dot{\sigma}_{\theta\tau}^{vp} \} &= \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \dot{s}_\theta^{(n)}, \dot{s}_\theta^{vp(n)}, \dot{s}_\tau^{(n)}, \dot{s}_\tau^{vp(n)}, \dot{s}_{\theta\tau}^{(n)}, \dot{s}_{\theta\tau}^{vp(n)} \right\} \cos n\theta \\
 \{ \dot{\sigma}_{\theta\theta}, \dot{\sigma}_{\theta\theta}^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\tau}, \dot{\sigma}_{\theta\tau}^{vp} \} &= \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \dot{s}_\theta^{(n)}, \dot{s}_\theta^{vp(n)}, \dot{s}_\tau^{(n)}, \dot{s}_\tau^{vp(n)} \right\} \sin n\theta
 \end{aligned} \tag{24}$$

また、分布荷重もフーリエ級数に展開する。

$$\{ \dot{P}_\theta, \dot{P}_\tau \} = \frac{\sigma_0 h_0}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{p}_\theta^{(n)}, \dot{p}_\tau^{(n)} \} \cos n\theta, \quad \dot{P}_\theta = \frac{\sigma_0 h_0}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{p}_\theta^{(n)} \sin n\theta \tag{25}$$

ただし、 σ_0 は代表応力である。なお式(24)、(25)は、 $\theta=0^\circ$ の子午線面に対して面对称な荷重が作用する場合であるが、より一般性を持たせるには、各フーリエ展開式において、sin で表されているものには cos の級数を、cos で表されているものには sin の級数を付加する。

さて、これらのフーリエ展開式を前述の基礎式に代入し、フーリエ係数に関する式をつくり、これらの式から順次未知数を消去すると、最後に平衡方程式は変位 $u_\theta, u_\tau, u_\zeta$ および回転 ϕ_θ, ϕ_τ に関する次の 5 元連立 2 階微分方程式になる。なお、フーリエ級数の添字 (n) は便宜上省略する。

$$\begin{aligned}
 a_1 \ddot{u}_\theta + a_2 \ddot{u}_\tau + a_3 \ddot{u}_\zeta + a_4 \ddot{\phi}_\theta + a_5 \ddot{\phi}_\tau + a_6 \ddot{u}_\zeta + a_7 \ddot{u}_\tau + a_8 \ddot{\phi}_\theta + a_9 \ddot{\phi}_\tau + a_{10} \dot{\phi}_\theta + a_{11} \dot{\phi}_\tau + a_{12} \dot{\phi}_\theta &= C_1 \\
 a_{13} \ddot{u}_\theta + a_{14} \ddot{u}_\tau + a_{15} \ddot{u}_\zeta + a_{16} \ddot{\phi}_\theta + a_{17} \ddot{\phi}_\tau + a_{18} \ddot{u}_\zeta + a_{19} \ddot{\phi}_\theta + a_{20} \dot{\phi}_\theta + a_{21} \dot{\phi}_\tau + a_{22} \dot{\phi}_\theta + a_{23} \dot{\phi}_\tau &= C_2 \\
 a_{24} \ddot{u}_\theta + a_{25} \ddot{u}_\tau + a_{26} \ddot{u}_\zeta + a_{27} \ddot{\phi}_\theta + a_{28} \ddot{\phi}_\tau + a_{29} \ddot{u}_\zeta + a_{30} \dot{\phi}_\theta + a_{31} \dot{\phi}_\tau + a_{32} \dot{\phi}_\theta &= C_3 \\
 a_{33} \ddot{u}_\theta + a_{34} \ddot{u}_\tau + a_{35} \ddot{u}_\zeta + a_{36} \ddot{\phi}_\theta + a_{37} \ddot{\phi}_\tau + a_{38} \ddot{u}_\zeta + a_{39} \ddot{\phi}_\theta + a_{40} \dot{\phi}_\theta + a_{41} \dot{\phi}_\tau + a_{42} \dot{\phi}_\theta + a_{43} \dot{\phi}_\tau + a_{44} \dot{\phi}_\theta &= C_4 \\
 a_{45} \ddot{u}_\theta + a_{46} \ddot{u}_\tau + a_{47} \ddot{u}_\zeta + a_{48} \ddot{\phi}_\theta + a_{49} \ddot{\phi}_\tau + a_{50} \ddot{u}_\zeta + a_{51} \dot{\phi}_\theta + a_{52} \dot{\phi}_\tau + a_{53} \dot{\phi}_\theta + a_{54} \dot{\phi}_\tau + a_{55} \dot{\phi}_\theta &= C_5
 \end{aligned} \tag{26}$$

ここで、 $a_1 \sim a_{55}$ は殻の形状と各層の弾性係数 E_i, ν_i とから定まる係数であり、 $C_1 \sim C_5$ は殻の形状のほかに、分布荷重と粘塑性によるみかけの内力成分から定まる定数で、次式によって与えられる。

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \dot{n}_\theta^{vp} + \gamma(\dot{n}_\theta^{vp} - \dot{n}_\theta^{vp}) + \frac{n}{\rho} \dot{n}_\theta^{vp} + \omega_e \dot{q}_\theta^{vp} - \dot{p}_\theta, & C_2 &= \dot{n}_\tau^{vp} + \gamma(\dot{n}_\tau^{vp} + \dot{n}_\tau^{vp}) - \frac{n}{\rho} \dot{n}_\tau^{vp} + \omega_e \dot{q}_\tau^{vp} - \dot{p}_\tau \\
 C_3 &= \dot{q}_\theta^{vp} + \gamma \dot{q}_\theta^{vp} + \frac{n}{\rho} \dot{q}_\theta^{vp} - \omega_e \dot{n}_\theta^{vp} - \omega_\theta \dot{n}_\theta^{vp} - \dot{p}_\tau, & C_4 &= \dot{q}_\tau^{vp} - \lambda^2 \dot{m}_\theta^{vp} - \lambda^2 \gamma \dot{m}_\theta^{vp} + \lambda^2 \gamma \dot{m}_\theta^{vp} - \lambda^2 \frac{n}{\rho} \dot{m}_\theta^{vp} \\
 C_5 &= \dot{q}_\theta^{vp} - \lambda^2 \dot{m}_\theta^{vp} - \lambda^2 \gamma(\dot{m}_\theta^{vp} + \dot{m}_\theta^{vp}) + \lambda^2 \frac{n}{\rho} \dot{m}_\theta^{vp}
 \end{aligned} \tag{27}$$

ここに、 $\lambda = h/a$ である。

式(27)の粘塑性による内力成分の変化率の各フーリエ係数は、式(23)、(24)からそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} [A_n] \{ \dot{n}_\theta^{vp(n)}, \dot{n}_\theta^{vp(n)}, \dot{n}_\theta^{vp(n)}, \dot{n}_\theta^{vp(n)}, \dot{q}_\theta^{vp(n)}, \dot{q}_\theta^{vp(n)} \}^T &= \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_1] [D_i] \{ \dot{\epsilon}^{vp} \} d\zeta \\
 \frac{\sigma_0 h_0^3}{a} \sum_{n=0}^{\infty} [B_n] \{ \dot{m}_\theta^{vp(n)}, \dot{m}_\theta^{vp(n)}, \dot{m}_\theta^{vp(n)}, \dot{m}_\theta^{vp(n)} \}^T &= \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_2] [\bar{D}_i] \{ \dot{\epsilon}^{vp} \}^* \zeta d\zeta
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$[A_n] = [\cos n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta, \sin n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta]$$

$$[B_n] = [\cos n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta, \sin n\theta]$$

ここに、 $[A_n], [B_n]$ は対角行列で、式(28)の右辺の粘塑性ひずみ速度は、応力値から式(13)によって計算できる。また、積分にはシンプソンの 1/3 則を用いる。

3. 数値計算法

ある任意の計算段階における変位と回転の変化率は式(26)を適当な境界条件のもとで解けば得られ、任意の時刻の解は、各段階の解の増分を積分することによって得られる。しかしながら、式(26)を厳密に理論解析することは困難であるから、差分法によって数値的に解を求める。この数値解法は著者らがすでに発表した単層殻の場合⁽³⁾とほぼ同様であるので、ここでは紙

面の都合もあり省略する。

4. 数値例

数値例として、両端可動支持で、内側にチタンの層を、外側に軟鋼の層を配した二層構造の円筒殻に、時間に対して階段状の局所的分布荷重が作用する問題を取扱った(図3)。チタン層の殻厚に対する比 h_1/h は、 $h_1/h=0, 0.1, 0.3$ の 3 通りとした。

問題の対称性から、計算は円筒殻の 1/8 形状についてのみ行えば十分である。円筒殻の形状パラメータは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a=L, \xi=s/L, \rho=1/3, \omega_0=3 \\ \rho'=\gamma=\omega_\xi=\omega'_\xi=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

また ξ の差分間隔 Δ は、差分点の数を N として、
 $\Delta=1/2(N-1) \dots\dots\dots (30)$
 となる。

境界条件は、点 A では対称性により、
 $\dot{U}_\xi=\dot{U}_\xi=\dot{\Phi}_\xi=\dot{N}_{\xi 0}=\dot{M}_{\xi 0}=0 \dots\dots\dots (31)$

ただし、 $t=0$ のときは()を取り除くものとする。点 B では、単純可動支持の条件を用いて、

$$\dot{U}_0=\dot{U}_\xi=\dot{M}_0=\dot{\Phi}_0=\dot{N}_\xi=0 \dots\dots\dots (32)$$

なお、式(24)の σ_0 は本計算では $\sigma_0=1$ とした。

チタンと軟鋼の材料特性は、実験より求めた次のものを用いた⁽¹²⁾⁽¹³⁾。

チタン：

$$\left. \begin{aligned} E=9.1 \times 10^4 \text{ MPa} \\ \nu=0.33, \gamma_1=800 \text{ 1/s} \\ \Phi(F)=\{(\bar{\sigma}-\sigma^*)/\sigma^*\}^{7.4} \\ \sigma^*=656(0.0101+\bar{\varepsilon}^{0.252})^{0.252} \text{ MPa} \\ \text{初期降伏応力 } \sigma_Y=206.1 \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

軟鋼：

$$\left. \begin{aligned} E=2.0 \times 10^5 \text{ MPa} \\ \nu=0.29, \gamma_1=40.4 \text{ 1/s} \\ \Phi(F)=\{(\bar{\sigma}-\sigma^*)/\sigma^*\}^{5.0} \\ \sigma^*=261.7 \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

差分点数は、子午線方向に $N=101$ 、板厚方向には各層ごとに、11個 ($h_1/h=0$ の場合のみ 19 個) の格子点を採用した。またフーリエ級数の項数[項数 $= (n+2)/2$] は $n=38$ とした。

ひずみ速度は時間とともに変化するので、時間間隔 Δt_j の選び方によっては、計算のむだや誤差が大きくなる。本計算では、Zienkiewicz と Corneau⁽¹⁴⁾ による時間間隔 Δt_j の安定限界

$$\Delta t_j \leq \frac{4(1+\nu)}{3\gamma_0 E} \left(\frac{\sigma^*}{d\Phi/dF} \right)_j = \Delta t_0 \dots\dots\dots (35)$$

(j : 計算段階)

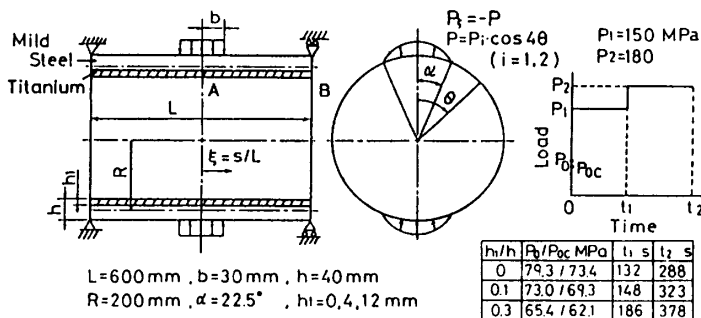
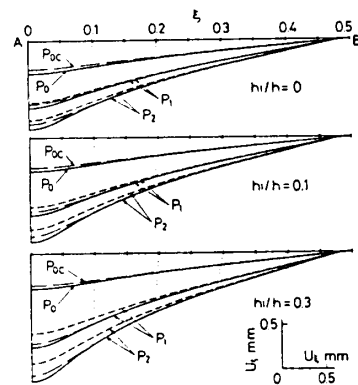


図 3 数値例

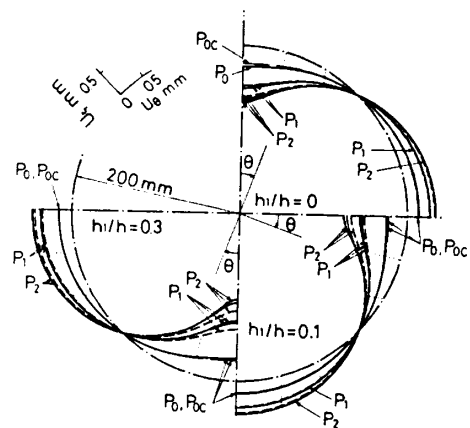
を参考にし、 $\Delta t_j=0.9\Delta t_0$ とした。

定常状態の判定には、最大粘塑性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{\max}^{vp}$ と各荷重段階の負荷直後の最大ひずみ ε_{\max} との比 $|\dot{\varepsilon}_{\max}^{vp}/\varepsilon_{\max}|$ を用い、これが 1×10^{-4} 以下となったとき、定常状態に達したものとして、その段階の計算を打ち切り、次の荷重段階に移った。これらの数値は、これらを種々変化させたときの解の収束性と、利用した計算機の能力を考慮して決定した。

図 4~13 に計算結果を例示する。図において、破線は、荷重 $P=P_1, P_2$ のときの負荷直後の値であり、実線と一点鎖線は、負荷後十分に時間が経過した定常状態の値を示す。破線と実線は本理論によるものであり、一点鎖線はせん断変形の影響を考慮しない薄肉理論(古典理論)によるものである。P₀ と P_{0c} はそれぞれ本理論と薄肉理論による弾性限を示し、初期降伏ははず



(a) $\theta=0^\circ$



(b) $\xi=0$

..... Particle path
 Present theory
 Instantaneous state -----
 Stationary state -----
 Classical theory

図 4 変形

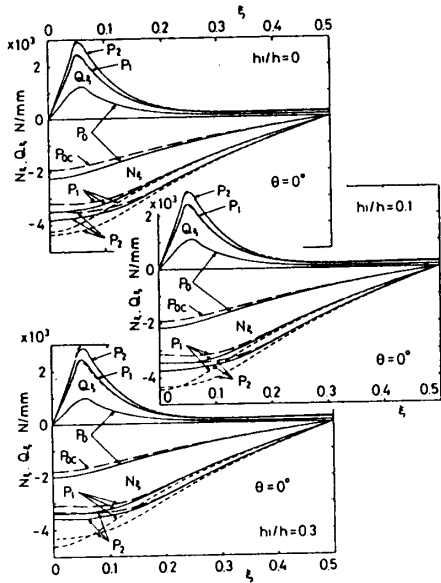


図 5 合応力 N_ξ , Q_ξ の子午線方向分布

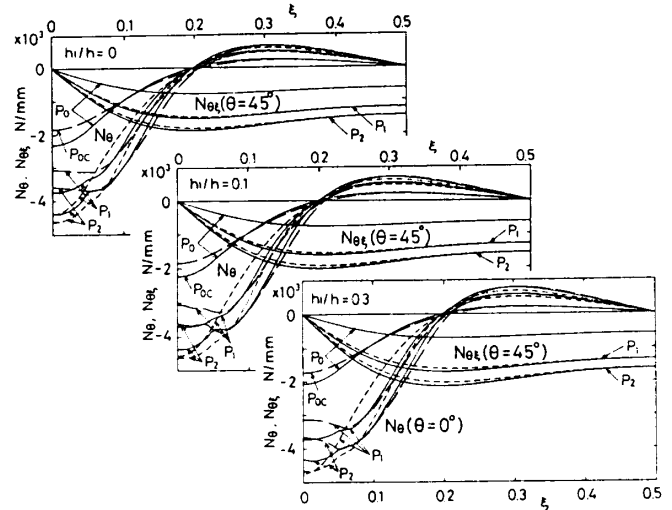


図 6 合応力 N_θ , $N_{\theta\xi}$ の子午線方向分布

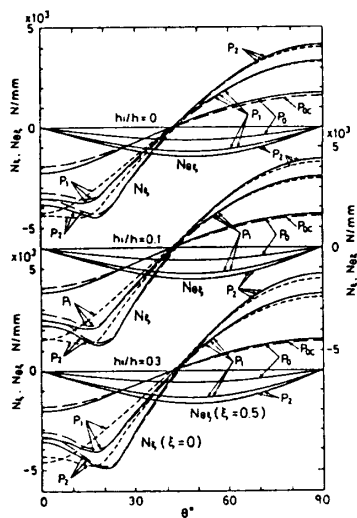


図 7 合応力 N_ξ , $N_{\theta\xi}$ の円周方向分布

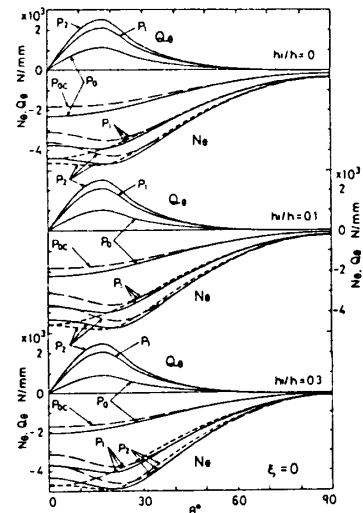


図 8 合応力 N_θ , Q_θ の円周方向分布

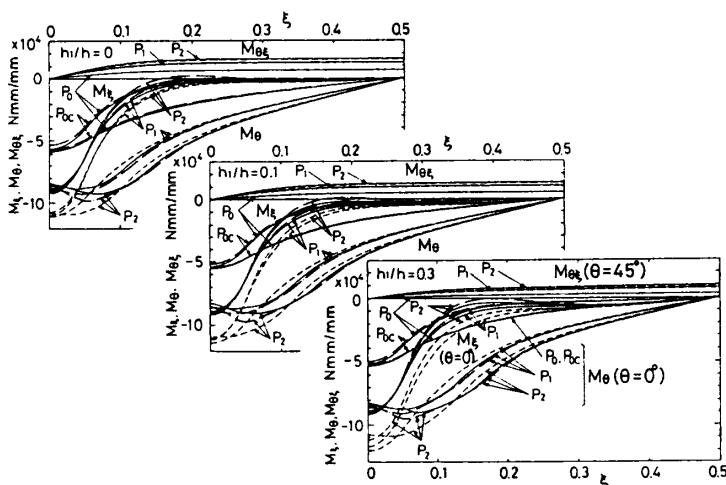


図 9 合モーメント M_ξ , M_θ , $M_{\theta\xi}$ の子午線方向分布

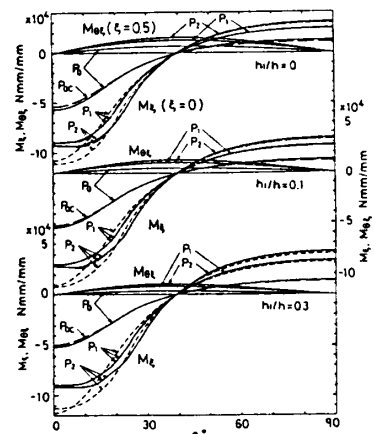


図 10 合モーメント M_ξ , $M_{\theta\xi}$ の円周方向分布

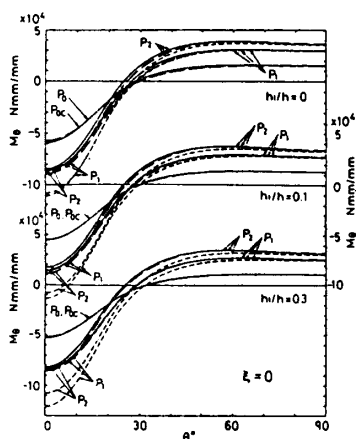


図 11 合モーメント M_θ の円周方向分布

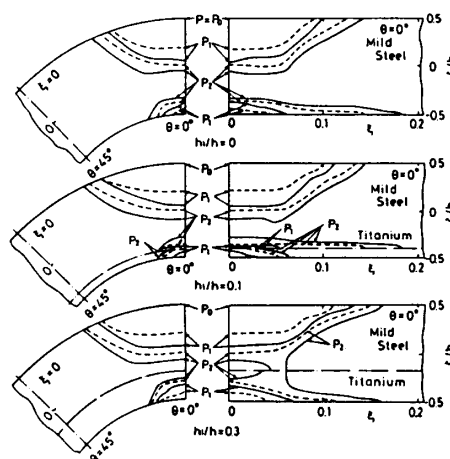


図 13 塑性域の進展の様子

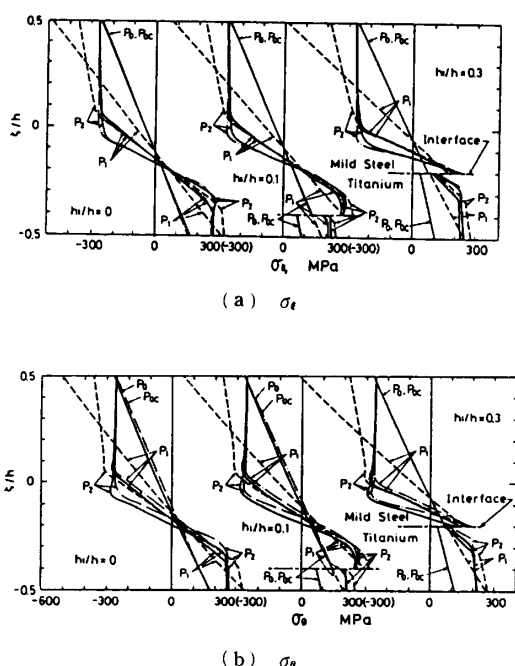


図 12 殻厚方向の応力分布 (点 A, $\xi=0, \theta=0^\circ$)

れの理論によっても、点 A ($\xi=0, \theta=0^\circ$) の外表面に現われる。

図 4 (a) は、 $\theta=0^\circ$ の子午線断面、図 4 (b) は、 $\xi=0$ の軸断面の変形状態を示す。点線は変位経路を示す。点 A ($\xi=0, \theta=0^\circ$) で大きく変形し、荷重が増すにつれて降伏領域が広がるため、負荷直後と定常状態の変形量の差が顕著になっている。また、チタンのほうが軟鋼よりも縦弾性係数、初期降伏点とも低く、粘塑性ひずみが生じやすいため、チタンの層の厚さが増すほど変形量は大きくなっている。図 4 (a), (b) から、円筒殻の変形のだいたいの様子が把握できる。荷重負荷部で、本理論による結果と薄肉理論による結果との間に見られる。

図 5 ~ 8 は合応力の子午線方向と円周方向の分布である。 N_ξ, N_θ は、荷重負荷部で大きく緩和し、チタン層の厚さが増すと、緩和量も多少増加する。また薄肉理論による解との差は、荷重負荷部で大きく現れ、 N_ξ に比べて N_θ が特に大きい。その他の合応力は、絶対値も時間的変化も小さく、 h_1/h による差異もほとんど認められない。

図 9 ~ 11 は合モーメントの子午線方向と円周方向の分布である。 M_ξ, M_θ は荷重負荷部で大きく緩和するが、 M_θ のほうがとくに緩和量が多い。またチタン層が厚くなると、時間的変動がやや増加するが、各荷重段階における最終値 (定常値) には、大きな差は見られない。 $M_{\xi\theta}$ と $M_{\theta\xi}$ の値はほぼ等しく、絶対値、時間的変化ともに小さい。合モーメントの薄肉理論による解との差は、いずれも比較的小さい。

図 12 (a), (b) は、それぞれ点 A における σ_ξ と σ_θ の殻厚方向分布である。軟鋼の層では、いずれの h_1/h の値の場合にも、ほぼ同様に、外面付近で応力が緩和するのに対し、チタンの層では、内面付近で応力が増加する等複雑な挙動を示す。薄肉理論による結果との差は、弾塑性境界付近で大きくなっている。

図 13 は塑性域の進展の様子を示したものである。 $P=P_0$ のとき初めて降伏し、その位置は点 A の外表面である。荷重 P とともに塑性域は、荷重負荷部の内、外面を中心に、子午線方向、厚さ方向および円周方向に広がっていく。二層殻では、境界面で、塑性域が不連続になり、軟鋼のみの場合よりも、塑性域が大きくなっている。

5. 結 言

本論文では、一般の非対称荷重が作用する中程度の厚さの多層回転対称殻の弾/粘塑性変形問題の解法を

示した。弾/粘塑性の構成関係には、Perzyna の式を用い、Reissner-Naghdi の単層殻の弾性変形問題の解法を多層回転対称殻の弾/粘塑性変形問題に拡張した。導かれた基礎式の解法には、差分法を適用した。

数値例として、内側にチタンの層を、外側に軟鋼の層を配した二層構造の両端支持円筒殻に局所的分布荷重が作用する場合を、チタン層の厚さを変えて解析した。その結果、チタンの層の厚さが増すほど、変形は大きくなった。合応力と合モーメントには、チタン層の厚さによる大きな相違はなかったが、塑性域の進展の様子と殻厚方向の応力分布には顕著な差異が認められた。また、この程度の厚さの円筒殻になると、本理論による結果とせん断変形の影響を無視した薄肉理論による結果との間には、かなりの差が生じることがわかった。

本計算には、名古屋大学大型計算機センターの FACOM M 780/20 を使用した。

文 献

- (1) 竹園・ほか2名, 機論, 45-396, A(1979), 908.
- (2) 村瀬・西村, 機論, 45-400, A(1979), 1554.
- (3) 竹園・埜, 機論, 46-402, A(1980), 227.
- (4) Atkatsch, R. S., ほか2名, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 50-1 (1983), 131.
- (5) Kollmann, F. G. and Mukherjee, S., *Ing. Arch.*, 54 (1984), 355.
- (6) 竹園・ほか2名, 機論, 47-423, A (1981), 1165.
- (7) 竹園・ほか2名, 機論, 51-472, A (1985), 2829.
- (8) 竹園・ほか2名, 機論, 53-495, A (1987), 2166.
- (9) 竹園・ほか2名, 機論, 54-498, A (1988), 405.
- (10) Reissner, E., *Am. J. Math.*, 63-1 (1941), 177.
- (11) Naghdi, P. M., *Q. Appl. Math.*, 14-4 (1957), 369.
- (12) Perzyna, P., *Advances in Applied Mechanics*, 9 (1966), 243, Academic Press.
- (13) Takezono, S. and Satoh, M., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Tech.*, 104-4 (1982), 257.
- (14) Zienkiewicz, O. C. and Cormeau, I. C., *Int. J. for Numerical Methods in Engng.*, 8 (1974), 821.