

逆変分原理に基礎をおく成長ひずみ法* (最大剛性形状解析へのアプローチ)

畔上 秀幸*¹, 高見 昭康*²

The Growth-Strain Method Based on the Inverse Variational Principle (An Approach to Maximum-Stiffness Shape Analysis)

Hideyuki AZEGAMI and Akiyasu TAKAMI

The growth-strain method was previously proposed as a shape optimization method which is the deforming of shapes by generating bulk strain. Hitherto, we have shown that the uniform-strength shapes can be analyzed by the method where the bulk strain is generated according to the magnitude of a strength parameter. The objective of the present paper is to devise the formulation of the method in order to apply it to maximum-stiffness shape analysis. First, by reforming the inverse variational principle of the principle of minimum potential energy, we obtain a uniform condition of the potential energy density as a necessary condition to obtain maximum stiffness. Based on the theory, the proposed formulation is to set the potential energy density on the generation measure of the bulk strain. The effectiveness of this formulation is examined on beam and column problems. The notable advantage is confirmed with the latter problem.

Key Words: Optimum Design, Computational Mechanics, Computer-Aided Design, Structural Analysis, Finite-Element Method

1. はじめに

前報^{(1)~(3)}では、体積ひずみの発生によって形状を改善していく形状最適化法を提案した。本論文ではその方法を成長ひずみ法(growth-strain method)と呼ぶことにする。前報で示した内容は、強度パラメータの大きさに応じた体積ひずみを発生させることによって平等強さ形状が解析されるというものであった。実際の解析には有限要素法が用いられた。

本論文の目的は、この方法を最大剛性形状の解析に適用する場合の定式化を示すことである。ただし本論文では、剛性の最大をポテンシャルエネルギーの最大あるいはその絶対値の最小という意味で用いることにする。

定式化のための理論的な基礎は、形状決定問題の指導原理として注目されてきた最小ポテンシャルエネルギーの原理の逆問題変分原理(inverse variational principle)あるいは逆変分原理^{(4)~(7)}を改良することによって得られるポテンシャルエネルギー密度の均一条

件である。ここで改良の要点は、形状の表示を、これまでの外形状の座標を用いた表示から成長変位を用いた表示に改めた点である。ただしポテンシャルエネルギー密度は、ひずみエネルギー密度から単位体積当たりの体積力によるポテンシャルエネルギーを差し引いた量によって定義される。

本論文では、最初に剛性最大のための必要条件として成長変位を導入した逆変分原理からポテンシャルエネルギー密度の均一条件が導出されることを示す。その後でポテンシャルエネルギー密度を均一化するための成長ひずみ法を定式化する。最後に、その定式化の有効性を、基本的な片持ばりと柱の問題に適用した結果を通して検討する。

2. 逆変分原理の改良

これまで逆変分原理は、最大剛性形状を決定するときの規準を与えていた。汎関数は、ポテンシャルエネルギーと、体積一定の制約条件に Lagrange 乗数を掛けたものの和で与えられ、変分を受けるものは通常の弾性変位と外形状の座標で与えられていた^{(4)~(7)}。ただし第二変分の一般的な負定値性は証明されないことから、逆変分原理から導出される規準は剛性最大のための必要条件を与えており、十分性は問題設定に依存す

* 平成元年11月27日 第2回計算力学講演会において講演、原稿受付 平成元年12月14日。

*¹ 正員、豊橋技術科学大学工学部 (〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

*² 学生員、豊橋技術科学大学大学院。

ると理解する必要がある。

ここでは従来の逆変分原理と同一の汎関数に成長変位を導入した場合の汎関数停留条件、すなわち剛性最大のための必要条件を導出する。

物体には次の成長変位 u^c と弾性変位 u^e が発生するものとする。

$$u_i^c = x_i^c - x_i^o \dots\dots\dots (1)$$

$$u_i^e = x_i^e - x_i^c \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 x_i^o 、 x_i^c および x_i^e はそれぞれ変形前の座標、成長変形後の座標および成長変形後弾性変形した後の座標である。

逆変分原理の汎関数 J をこれら二つの変位と Lagrange 乗数 λ の関数として次のように定義する。

$$J(u_i^e, u_i^c, \lambda) = \int_{V^o} \{ W(u_i^e) - F_i u_i^e \} dV^c - \int_{S^o} T_i^e u_i^e dS^c - \lambda \{ V^c(u_i^c) - V^o \} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 V^o 、 $V^c(u_i^c)$ は成長変形前後の体積である。

$$V^c(u_i^c) = \int_{V^o} dV^c \dots\dots\dots (4)$$

$$dV^c = dx_1^c dx_2^c dx_3^c = \det[x_{i,j}^c] dx_1^o dx_2^o dx_3^o = \det[\delta_{ij} + u_{i,j}^c] dV^o \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 $\det[x_{i,j}^c]$ は成長変形の Jacobian、 δ_{ij} は Kronecker デルタである。微小成長を仮定すると式(5)と(4)はそれぞれ、次のように表される。

$$dV^c = (1 + u_{i,i}^c) dV^o \dots\dots\dots (6)$$

$$V^c(u_i^c) = \int_{V^o} (1 + u_{i,i}^c) dV^o \dots\dots\dots (7)$$

また、表面力 T_i^e は成長変形前後の表面 S^o 、 S^c 上で次の関係を満たしていると仮定する。

$$T_i^e dS^c = T_i^e dS^o \dots\dots\dots (8)$$

F_i は体積力である。 $W(u_i^e)$ はひずみエネルギー密度で次の関係を満たしている。

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}^e} = \sigma_{ij}^e \dots\dots\dots (9)$$

$$\epsilon_{ij}^e = \frac{1}{2} (u_{i,j}^e + u_{j,i}^e) \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 ϵ_{ij}^e は弾性ひずみテンソル、 σ_{ij}^e は弾性応力テンソルである。なお本論文では $(\)_{,i} = \partial(\) / \partial x_i^o$ と表記する。

汎関数の第一変分 δJ は、

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{V^o} \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}^e} \delta u_{i,j}^e - F_i \delta u_i^e \right) dV^c \\ &\quad - \int_{S^o} T_i^e \delta u_i^e dS^c + \int_{V^o} (W \delta u_{i,i}^c - F_j u_j^e \delta u_{i,i}^c) dV^o \\ &\quad - \lambda \int_{S^o} \delta u_i^c \nu_i dS^o - (V^c - V^o) \delta \lambda \\ &= - \int_{V^o} (\sigma_{ij,j} + F_i) \delta u_i^e dV^c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{S^o} (\sigma_{ij} \nu_j - T_i^e) \delta u_i^e dS^c \\ &- \int_{V^o} \{ W_{,i} - (F_j u_j^e)_{,i} \} \delta u_i^c dV^o \\ &+ \int_{S^o} (W - F_j u_j^e - \lambda) \delta u_i^c \nu_i dS^o \\ &- (V^c - V^o) \delta \lambda \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

したがって、汎関数 J の停留条件は、 $\delta J = 0$ とおくことによつて、

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \text{ in } V^c \dots\dots\dots (12)$$

$$\sigma_{ij} \nu_j = T_i^e \text{ on } S^c \dots\dots\dots (13)$$

$$W_{,i} - (F_j u_j^e)_{,i} = 0 \text{ in } V^o \dots\dots\dots (14)$$

$$W - F_j u_j^e = \lambda \text{ on } S^o \dots\dots\dots (15)$$

$$V^c = V^o \dots\dots\dots (16)$$

ここで、式(12)と(13)はそれぞれ内部と表面における弾性変形の力の釣り合い条件、式(14)と(15)はそれぞれ内部と表面におけるポテンシャルエネルギー密度の均一条件、式(16)は体積一定条件を表している。なお、式(15)によつて Lagrange 乗数 λ はポテンシャルエネルギー密度の意味をもつことが確認される。

以上をまとめると、剛性最大形状になるための必要条件としてポテンシャルエネルギー密度の均一条件が導出された。

3. 成長ひずみ法による最大剛性形状の解析

ポテンシャルエネルギー密度の均一条件が最大剛性形状の必要条件ということであれば、体積ひずみの発生基準をポテンシャルエネルギー密度にした成長ひずみ法によつて剛性の最大化が行えることになる。ここではこれまでの成長ひずみ法の定式化を改めて、論理立てて定式化する。ただし、本論文では微小変形理論の枠内で議論される。

ポテンシャルエネルギー密度を p 、その体積平均を \bar{p} と表す。

$$p = W - F_i u_i^e \dots\dots\dots (17)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{V^o} \int_{V^o} p dV^o \dots\dots\dots (18)$$

ここで、変位の一価性を保証しない(適合条件を満たさない)が、体積一定のもとでポテンシャルエネルギー密度を均一化させる性質をもつ体積ひずみ(bulk strain)テンソル ϵ_{ij}^b 、

$$\epsilon_{ij}^b = e \delta_{ij} \dots\dots\dots (19)$$

を導入して、成長ひずみテンソル ϵ_{ij}^c 、

$$\epsilon_{ij}^c = \frac{1}{2} (u_{i,j}^c + u_{j,i}^c) \dots\dots\dots (20)$$

との二乗誤差 $E(u_i^c)$ 、

$$E(u^c) = \int_{V_0} (\epsilon_{ij}^c - \epsilon_{ij}^b) (\epsilon_{ij}^c - \epsilon_{ij}^b) dV^0 \dots\dots\dots (21)$$

が最小になるように成長変位 u^c を評価することを考える。

体積ひずみの発生則は次のように与えられる。ポテンシャルエネルギー密度は体積が増加したときに減少する特性をもつ。そこで、体積一定のもとでポテンシャルエネルギー密度を均一化させるためには、ポテンシャルエネルギー密度の体積平均からの偏差に比例した体積変化を起こさせればよい。すなわち、

$$\frac{dV^B - dV^0}{dV^0} = \frac{p - \bar{p}}{\bar{p} - p_{\min}} h \dots\dots\dots (22)$$

ただし、 dV^B は体積ひずみ発生後の微小体積である。

$$dV^B = (1 + e)^3 dV^0 \dots\dots\dots (23)$$

また、 p_{\min} はポテンシャルエネルギー密度の最小値、 h は発生する体積ひずみの大きさを与える成長比である。したがって、体積ひずみ ϵ_{ij}^b の発生則は、式(23)を式(22)に代入して、式(19)の定義に基づいて次のように与えられる。

$$\epsilon_{ij}^b = \left(\sqrt[3]{\frac{p - \bar{p}}{\bar{p} - p_{\min}} h + 1} - 1 \right) \delta_{ij} \dots\dots\dots (24)$$

微小成長変形の仮定は、成長比を $h \ll 1$ と仮定することによって満たされる。このとき、式(24)は次のように書き換え可能である。

$$\epsilon_{ij}^b = \frac{1}{3} \frac{p - \bar{p}}{\bar{p} - p_{\min}} h \delta_{ij} \dots\dots\dots (25)$$

さらに、平面問題を考える場合には、面内成長だけを考慮することから、式(24)と(25)はそれぞれ次のように書き換えられる。

$$\epsilon_{ij}^b = \left(\sqrt{\frac{p - \bar{p}}{\bar{p} - p_{\min}} h + 1} - 1 \right) \delta_{ij} \dots\dots\dots (26)$$

$$\epsilon_{ij}^b = \frac{1}{2} \frac{p - \bar{p}}{\bar{p} - p_{\min}} h \delta_{ij} \dots\dots\dots (27)$$

ただし、式(26)と(27)については $(i, j = 1, 2)$ である。

なお、式(22)ではポテンシャルエネルギー密度の偏差を体積平均と最小値の差で規準化しているが、ポテンシャルエネルギー密度分布の標準偏差で規準化することも考えられる。また、物体力が作用しない場合には、ポテンシャルエネルギー密度 p が非負定値のひずみエネルギー密度 W に等しくなることから、 $p_{\min} = 0$ とおくのが適当と考えられる。

成長変位 u^c は、このように発生した体積ひずみに対して式(21)で定義された二乗誤差 $E(u^c)$ が最小となる条件で決定される。この二乗誤差の停留条件は、

$$\delta E(u^c) = 2 \int_{V_0} (\epsilon_{ij}^c - \epsilon_{ij}^b) \delta \epsilon_{ij}^c dV^0 = 0 \dots\dots\dots (28)$$

式(28)をマトリックス表示すると、

$$\int_{V_0} \delta \{\epsilon^c\}^T \{\epsilon^c\} dV^0 = \int_{V_0} \delta \{\epsilon^c\}^T \{\epsilon^b\} dV^0 \dots\dots\dots (29)$$

有限要素法を用いると、要素ごとに、成長ひずみベクトル $\{\epsilon^c(x_i)\}$ は節点成長変位ベクトル $\{\bar{u}^c\}$ によって次のように表される。

$$\{\epsilon^c(x_i)\} = [B(x_i)] \{\bar{u}^c\} \dots\dots\dots (30)$$

ただし $[B(x_i)]$ はひずみ-節点変位マトリックスである。なお x_i は要素内座標 (x_1, x_2, x_3) を表し、要素内で分布する変数には省略しないことにする。また $[B(x_i)]$ と $\{\bar{u}^c\}$ は全節点に対応した成分をもつものと定義する。ただし要素ごとに考える場合には、要素に含まれる節点の成分に縮小されたそれらの部分マトリックスとベクトルを考えても差支えない。すべての要素について式(30)の関係を式(29)に代入して、それらを重ね合わせると、

$$\begin{aligned} \delta \{\bar{u}^c\}^T \int_{V_0} [B(x_i)]^T [B(x_i)] dV^0 \{\bar{u}^c\} \\ = \delta \{\bar{u}^c\}^T \int_{V_0} [B(x_i)]^T \{\epsilon^b(x_i)\} dV^0 \dots\dots (31) \end{aligned}$$

したがって、成長変形の支配方程式として次の関係を得る。

$$[k] \{\bar{u}^c\} = \{g\} \dots\dots\dots (32)$$

ここで、

$$[k] = \int_{V_0} [B(x_i)]^T [B(x_i)] dV^0 \dots\dots\dots (33)$$

$$\{g\} = \int_{V_0} [B(x_i)]^T \{\epsilon^b(x_i)\} dV^0 \dots\dots\dots (34)$$

また、式(21)の二乗誤差をエネルギーの次元もつ(剛性を重み関数にした)次の二乗誤差 $\hat{E}(u^c)$ におき換えると、

$$\hat{E}(u^c) = \int_{V_0} (\epsilon_{ij}^c - \epsilon_{ij}^b) D_{ijkl} (\epsilon_{kl}^c - \epsilon_{kl}^b) dV^0 \dots\dots\dots (35)$$

成長の支配方程式は次のように得られる。

$$[\hat{k}] \{\bar{u}^c\} = \{\hat{g}\} \dots\dots\dots (36)$$

ここで、

$$[\hat{k}] = \int_{V_0} [B(x_i)]^T [D] [B(x_i)] dV^0 \dots\dots\dots (37)$$

$$\{\hat{g}\} = \int_{V_0} [B(x_i)]^T [D] \{\epsilon^b(x_i)\} dV^0 \dots\dots\dots (38)$$

ただし D_{ijkl} は弾性の剛性テンソル、 $[D]$ はそのマトリックス表示である。

なお、この定式化に従うと、これまでの平等強さ形状解析のために提案されてきた成長ひずみ法^{(1)~(3)}は、体積ひずみの発生基準として強度パラメータを、二乗誤差として式(35)の $\hat{E}(u^c)$ を用いていたものとして位置づけられる。

解析手順は、前報^{(1)~(3)}同様、図1に示す二つの解析

ステップを繰返すことによって行われる。ステップ1は体積ひずみの発生基準を解析するステップである。剛性最大化の場合はポテンシャルエネルギー密度、強度最大化の場合は強度パラメータを解析する。ステップ2はステップ1で解析された体積ひずみの発生基準の分布に基づいて成長変位を解析し、形状を変化させるステップである。収束の判定はステップ1の後で行う。また、メッシュの改善はステップ2の後で必要に応じて行う。

4. 解析例

本章では、3章で示されたポテンシャルエネルギー密度基準の成長ひずみ法が剛性の最大化に対して有効に機能するかを解析例によって検討する。比較対象は強度パラメータ基準の一つである Mises 応力基準の場合の結果である。すなわち、ポテンシャルエネルギー密度基準の場合のほうが Mises 応力基準の場合と比較して、はたしてポテンシャルエネルギーの絶対値が減少するかという点に注目する。

基本的な問題を2題取り上げた。図2にそれらの詳細を示す。ケース1は先端にせん断力を受ける片持ばり、ケース2は重力と先端に圧縮力を受ける柱である。いずれもステップ1の境界条件が問題の力学的境界条件、ステップ2の境界条件が成長変形の拘束条件を表している。ただし、ケース2は問題の対称性を考慮している。なお、いずれも平面応力状態を仮定した。また、表面の分布外力は均一に分布し、成長後もそれらの積分値は一定であると仮定した [式(8)参照]。

解析に用いた有限要素は、8節点アイソパラメトリック要素である。二乗誤差は式(21)と式(35)のどちらを用いても解析結果に有意な差は現れなかった。なお本論文では式(21)を用いた結果を示す。また成長比 h

は、式(27)で定義されたものを用いて、ポテンシャルエネルギー密度基準の解析ではケース1のとき10%、ケース2のとき2%、一方 Mises 応力基準の解析では、式(27)の ρ に Mises 応力を代入した式で定義されたものを用いて、ケース1のとき10%、ケース2のとき20%と設定した。成長解析後メッシュの改善を行った。長さ方向に並んだ周囲の節点を周囲上を移動して周囲上等間隔にして、それから内部の節点を移動して幅方向等間隔となるように改善した。

片持ばりの場合の解析結果を図3と4に示す。図3はポテンシャルエネルギー密度基準の場合の結果であり、図4は Mises 応力基準の場合の結果である。両結果を比較して、形状や Mises 応力分布、ポテンシャルエネルギー密度分布の各パラメータ(最大値、標準偏差および平均値)に大きな差は現れなかった。その理由は、物体力が作用しなかったために、体積ひずみの発生基準にしたポテンシャルエネルギー密度はひずみエネルギー密度に等しくなり、一方の Mises 応力はそのせん断成分の平方根に対応していたために、両分布が類似したものになっていたためと考えられる。

一方、図5と6は柱の場合の解析結果である。図5はポテンシャルエネルギー密度基準の場合の結果であり、図6は Mises 応力基準の場合の結果である。この問題では形状および Mises 応力分布、ポテンシャルエネルギー密度分布ともに有意な差が現れた。ポテンシャルエネルギーの絶対値に注目すると、成長回数50

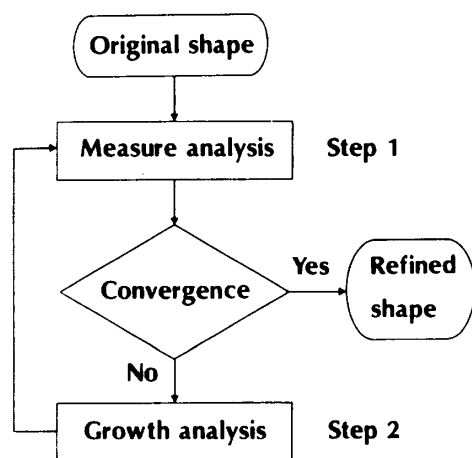
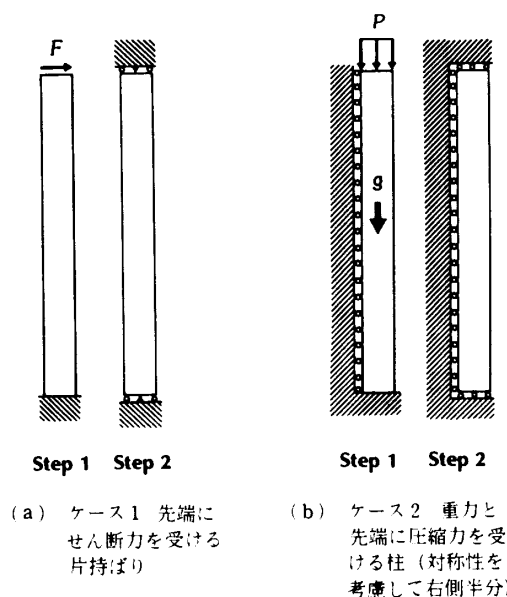


図1 成長ひずみ法



幅=6 m、長さ=60 m；ヤング率 $E=210\text{GPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、密度 $\rho=7.8 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 、重力加速度 $g=9.8 \text{m/s}^2$

図2 問題設定

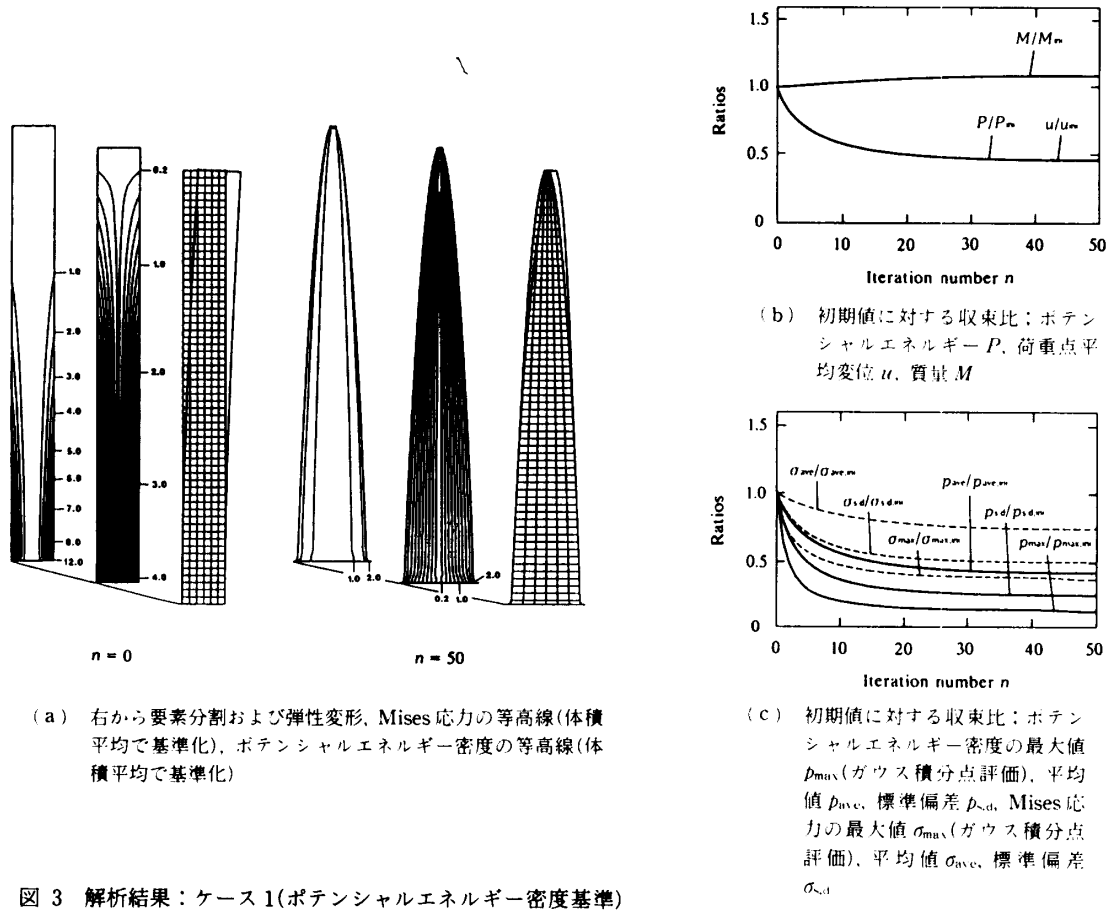


図 3 解析結果: ケース 1 (ポテンシャルエネルギー密度基準)

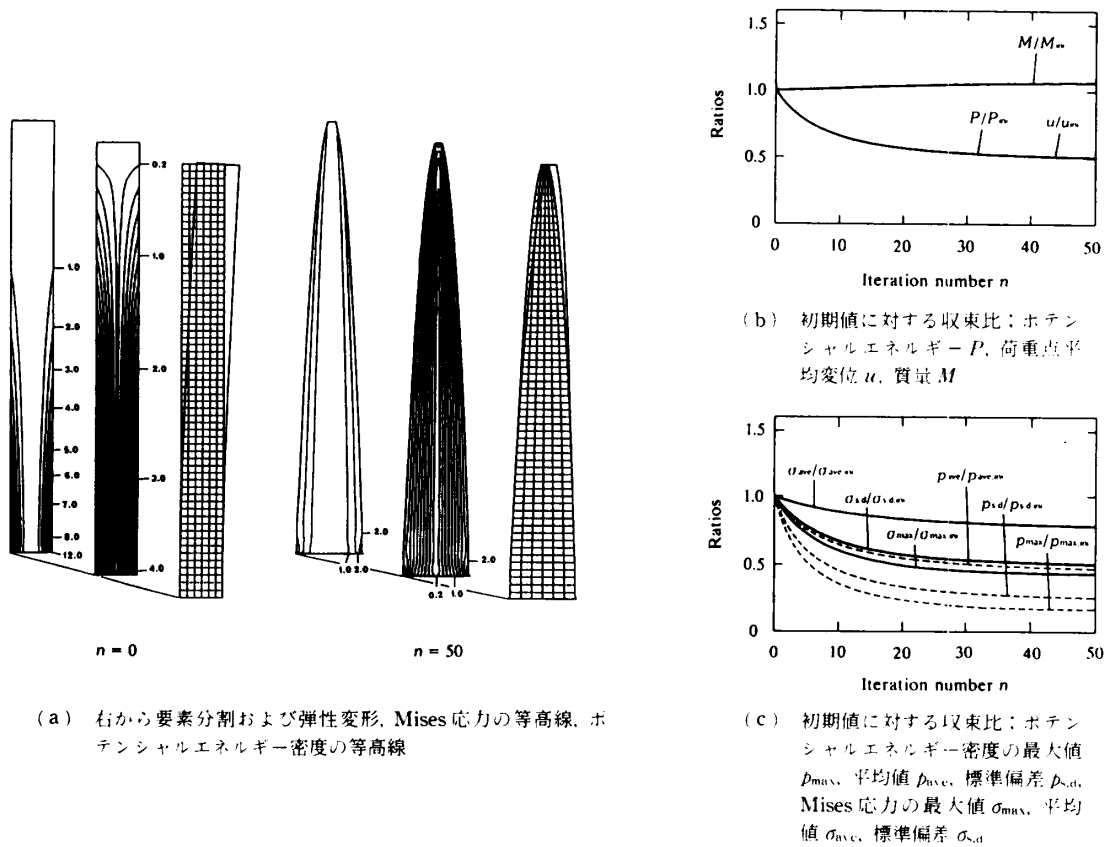
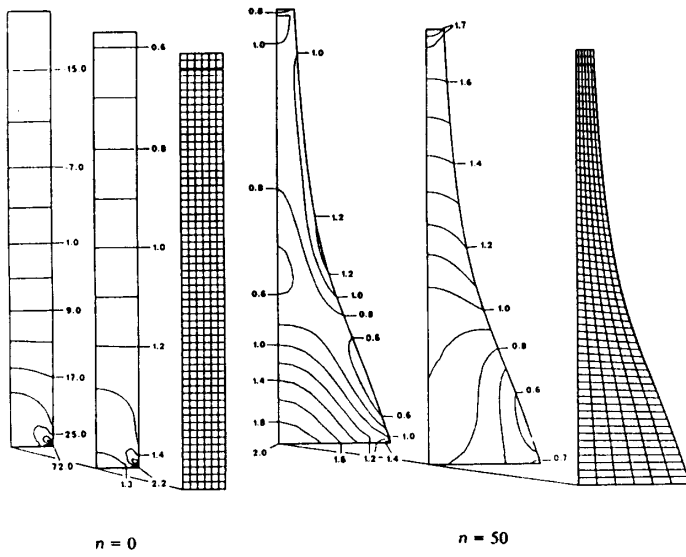
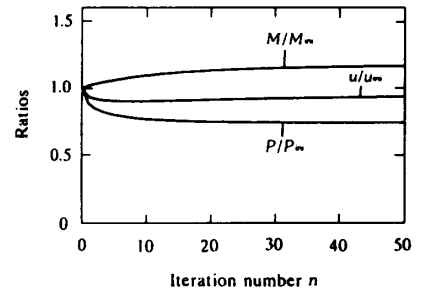


図 4 解析結果: ケース 1 (Mises 応力基準)

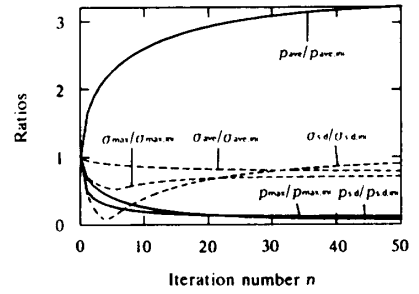


(a) 右から要素分割および弾性変形, Mises 応力の等高線, ポテンシャルエネルギー密度の等高線

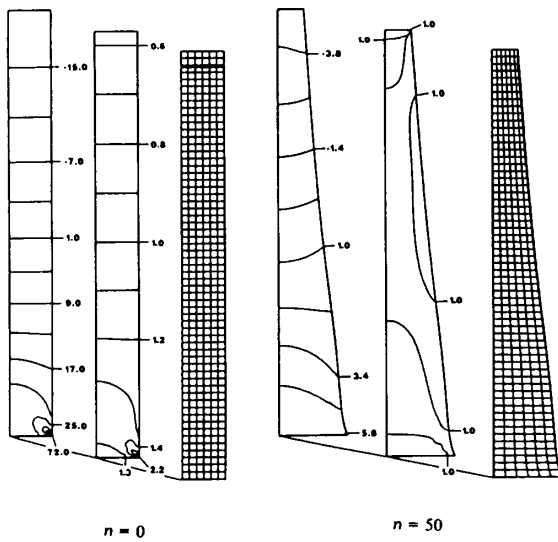
図 5 解析結果: ケース 2(ポテンシャルエネルギー密度基準)



(b) 初期値に対する収束比: ポテンシャルエネルギー P , 荷重点平均変位 u , 質量 M

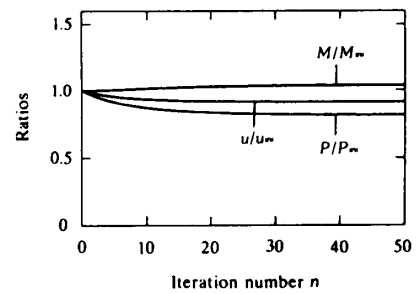


(c) 初期値に対する収束比: ポテンシャルエネルギー密度の最大値 p_{max} , 平均値 p_{ave} , 標準偏差 p_{std} , Mises 応力の最大値 σ_{max} , 平均値 σ_{ave} , 標準偏差 σ_{std}

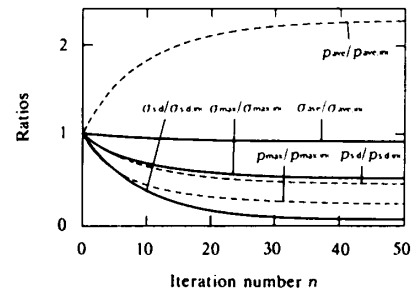


(a) 右から要素分割および弾性変形, Mises 応力の等高線, ポテンシャルエネルギー密度の等高線

図 6 解析結果: ケース 2(Mises 応力基準)



(b) 初期値に対する収束比: ポテンシャルエネルギー P , 荷重点平均変位 u , 質量 M



(c) 初期値に対する収束比: ポテンシャルエネルギー密度の最大値 p_{max} , 平均値 p_{ave} , 標準偏差 p_{std} , Mises 応力の最大値 σ_{max} , 平均値 σ_{ave} , 標準偏差 σ_{std}

回における結果を比較して、Mises 応力基準の場合には 18% の減少、それに対してポテンシャルエネルギー密度基準の場合には 26% の減少結果が得られた。しかし、前者では 17%、後者では 4% の質量増加があったためにそれを考慮する必要がある。そこで、あらかじめ幅を一様に狭めることによって質量を 11% 減少させた形状を初期形状として、ポテンシャルエネルギー密度基準の解析を再度行った。その結果、図 5 の結果と比較して、質量増加 0% でポテンシャルエネルギーの絶対値が 22% 減少する結果を得た。したがって、ポテンシャルエネルギー密度基準の解析では 17% の質量増加が 4% のポテンシャルエネルギーの減少を生む関係を考慮すると、Mises 応力基準の場合と比較してポテンシャルエネルギー密度基準の場合にはポテンシャルエネルギーの絶対値でおよそ 5% の減少がみられた結果になる。一方、Mises 応力分布の最大値に注目すると、成長回数 50 回で比較して、ポテンシャルエネルギー密度基準の場合には 29% の減少、それに対して Mises 応力基準の場合には 49% の減少結果を得た。したがって、この問題に対しては、強度を犠牲にしても剛性を最大化させる目的に対してはポテンシャルエネルギー密度基準の成長ひずみ法が有効であることが確認された。

5. ま と め

本論文では、これまで平等強さ形状を解析する方法として提案されてきた成長ひずみ法が、最大剛性形状を解析する方法としても役立つことが示された。これ

までの成長ひずみ法との相違点は、体積ひずみの発生基準として強度パラメータの代わりにポテンシャルエネルギー密度を用いて、その分布を均一化させる点であった。その理論的な根拠は、成長変位を導入した逆変分原理から導出されたポテンシャルエネルギー密度分布の均一条件であった。

ポテンシャルエネルギー密度基準の成長ひずみ法が剛性の最大化に対して有効に機能することは、基本的な二つの例題(図 2)に対する解析例によって調べられた。比較対象は Mises 応力基準の成長ひずみ法による解析結果であった。その結果、先端にせん断力を受ける片持ばりの問題では、両結果に大差なく、ポテンシャルエネルギー密度基準の優位性を特に示すことはできなかった。それに対して重力と先端に圧縮力を受ける柱の問題では、ポテンシャルエネルギーの絶対値を比較することによって、ポテンシャルエネルギー密度基準の優位性が確認された。

文 献

- (1) 畔上, 機論, 54-508, A(1988), 2167.
- (2) Azegami, H., Okitsu, A., Ogihara, T. and Takami, A., *Current Topics in Structural Mechanics 1989 (ASME 1989 Pressure Vessels and Piping Conference, Honolulu, Hawaii)*, (1989), 199.
- (3) 畔上・萩原・高見, 機論, 56-523, C (1990), 589.
- (4) Horák, V., *Inverse Variational Principles of Continuum Mechanics*, (1969), Rozprawy Československe Akad. Ved.
- (5) 瀬口・多田, 機論, 44-381(1978), 1469.
- (6) 浜田・瀬口・多田, 機論, 46-402, (1980), 187.
- (7) 多田・竹谷, 機論, 53-487, A (1987), 667.