

## 多層厚肉回転対称殻の弾/粘塑性動的応答\*

竹園 茂男<sup>\*1</sup>, 埴 克己<sup>\*1</sup>, 田口 智弘<sup>\*2</sup>Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of Multilayered  
Moderately Thick Shells of Revolution

Shigeo TAKEZONO, Katsumi TAO and Toshihiro TAGUCHI

This paper is concerned with an analytical formulation and a numerical solution of the elasto/visco-plastic dynamic response of multilayered moderately thick shells of revolution subjected to impulsive loads with application to a cylindrical shell. The equations of motion and the relationships between the strains and displacements are derived by extending the Reissner-Naghdi theory in elastic shells with consideration given to the effect of shear deformation. As the constitutive relation, Hooke's law is used in the linear elastic range, and the elasto/visco-plastic equations by Perzyna are employed in the plastic range. The numerical method related for this problem is a method using finite difference in both space and time. As a numerical example, the elasto/visco-plastic dynamic response of a fixed supported two-layered cylindrical shell composed of a titanium and a mild steel layer subjected to impulsive load is analyzed. Numerical computations are carried out for three cases of the ratio of the thickness of the titanium layer to the shell thickness. It is found from the computations that the stress distributions and the deformation vary significantly depending on the thickness ratio.

**Key Words:** Structural Analysis, Computational Mechanics, Laminated Construction, FDM, Elasto/Visco-Plasticity, Dynamic Response, Thick Shells

## 1. 結 言

殻構造物に衝撃荷重が作用する場合の弾/粘塑性動的応答問題に関しては、従来から多くの研究結果が報告されている<sup>(1)~(6)</sup>。また薄肉の殻ばかりでなく、比較的厚い殻<sup>\*\*1</sup>についても解析がなされている<sup>(7)(8)</sup>。しかしながら、これらの研究は、単一材質から成る殻を対象としており、近年広く実用されている異種材質を組合せた多層回転対称殻に関する研究は、まだあまり行われていないようである。

そこで著者らはこの研究に着手し、すでに薄肉の多層回転対称殻に非軸対称な衝撃荷重が作用する場合について解析を行ってきたが<sup>(9)</sup>、本論文では、中程度の厚さの多層回転対称殻<sup>\*\*1</sup>に、一般の非軸対称な荷重が作用する場合の弾/粘塑性動的応答問題の解法を示した。弾/粘塑性の構成関係には、Perzyna の弾/粘塑性式<sup>(10)</sup>を用い、厚肉の場合に考慮すべき殻厚方向のせん断変形には、Reissner-Naghdi の理論<sup>(11)(12)</sup>(ひずみ-変位関係)を採用した。導かれた基礎式の数値解法には、差分法を適用した。

数値例として、実用上重要な内側にチタン、外側に軟鋼の層を配した二層構造の円筒殻に、非軸対称な衝撃外圧が作用する場合を取り上げ、本解法による結果とせん断変形の影響を無視した薄肉理論(Sanders, Jr. の殻理論<sup>(13)</sup>に基づく解法)による結果<sup>(9)</sup>とを比較した。

## 2. 解 法

**2.1 基礎関係式** 図1に示すように、対称軸から殻の中央面上の任意点Pまでの距離を $r$ とし、殻の中央面の形を $r=r(s)$ で与えると、中央面の点Pにおける無次元曲率 $\omega_\xi(=a/R_\xi)$ ,  $\omega_\theta(=a/R_\theta)$ および無次元半径 $\rho(=r/a)$ の間には、次の関係が成立する。ただし、 $s$ は子午線方向の長さであり、 $a$ は代表長さである。

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= -(\gamma' + \gamma^2)/\omega_\theta, \quad \omega_\theta = \sqrt{1 - (\rho')^2}/\rho \\ \omega'_\theta &= \gamma(\omega_\xi - \omega_\theta), \quad \rho''/\rho = -\omega_\xi\omega_\theta \\ \gamma &= \rho'/\rho, \quad \xi = s/a, \quad (\quad)' = d(\quad)/d\xi \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (1)$$

また、殻の任意点を表すのに、直交座標 $(\xi, \theta, \zeta)$ を用いる。ここに、 $\theta$ は円周方向の角であり、 $\zeta$ は中央面から外向きに測った長さである。

さて、Reissner の殻理論<sup>(11)</sup>による平衡方程式に慣

\* 原稿受付 平成2年2月6日。

<sup>\*1</sup> 正員, 豊橋技術科学大学 (〒441 豊橋市天伯町)。<sup>\*2</sup> 准員, (株)島津製作所 (〒603 京都市北区紫野西御所田町)。<sup>\*\*1</sup>  $1/20 \leq h/R \leq 1/5$  程度( $h$ : 殻厚,  $R$ : 主曲率半径)。

性項を加え、これを回転対称殻に適用すると、増分形式で表した運動方程式は次のようになる。ただし回転慣性の項は省略する。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial(\Delta N_{\xi})}{\partial \xi} + \gamma(\Delta N_{\xi} - \Delta N_{\theta}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta N_{\theta\xi})}{\partial \theta} \\ & + \omega_{\xi} \Delta Q_{\xi} + a \left[ \Delta P_{\xi} - \rho_0 h \frac{\partial^2(\Delta U_{\xi})}{\partial t^2} \right] = 0 \\ & \frac{\partial(\Delta N_{\theta\xi})}{\partial \xi} + \gamma(\Delta N_{\theta\xi} + \Delta N_{\theta\theta}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta N_{\theta\theta})}{\partial \theta} \\ & + \omega_{\theta} \Delta Q_{\theta} + a \left[ \Delta P_{\theta} - \rho_0 h \frac{\partial^2(\Delta U_{\theta})}{\partial t^2} \right] = 0 \\ & \frac{\partial(\Delta Q_{\xi})}{\partial \xi} + \gamma \Delta Q_{\xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta Q_{\theta})}{\partial \theta} - (\omega_{\xi} \Delta N_{\xi} \\ & + \omega_{\theta} \Delta N_{\theta}) + a \left[ \Delta P_{\xi} - \rho_0 h \frac{\partial^2(\Delta W)}{\partial t^2} \right] = 0 \\ & \Delta Q_{\xi} - \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial(\Delta M_{\xi})}{\partial \xi} + \gamma(\Delta M_{\xi} - \Delta M_{\theta}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta M_{\theta\xi})}{\partial \theta} \right] = 0 \\ & \Delta Q_{\theta} - \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial(\Delta M_{\theta\xi})}{\partial \xi} + \gamma(\Delta M_{\theta\xi} + \Delta M_{\theta\theta}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta M_{\theta\theta})}{\partial \theta} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに  $\Delta$  は増分を表す。  $N_{\xi}$ ,  $N_{\theta}$ ,  $N_{\theta\xi}$ ,  $N_{\theta\theta}$ ,  $Q_{\xi}$ ,  $Q_{\theta}$  および  $M_{\xi}$ ,  $M_{\theta}$ ,  $M_{\theta\xi}$ ,  $M_{\theta\theta}$  は、図1に示すように殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントであり、慣性項に含まれる  $h$ ,  $t$ ,  $\rho_0$  はそれぞれ殻厚、時間および殻厚方向の平均密度である。  $P_{\xi}$ ,  $P_{\theta}$ ,  $P_{\xi}$  は殻の中央面の単位面積当たりの分布荷重の  $\xi$ ,  $\theta$ ,  $\xi$  方向の成分であり、殻の内外面に作用する分布荷重  $\{P_{\xi}^-, P_{\theta}^-, P_{\xi}^+\}$ ,  $\{P_{\xi}^+, P_{\theta}^+, P_{\xi}^+\}$  と次の関係にある。

$$\{P_{\xi}, P_{\theta}, P_{\xi}\} = \{P_{\xi}^-, P_{\theta}^-, P_{\xi}^-\} h^- - \{P_{\xi}^+, P_{\theta}^+, P_{\xi}^+\} h^+ \quad \dots\dots\dots (3)$$

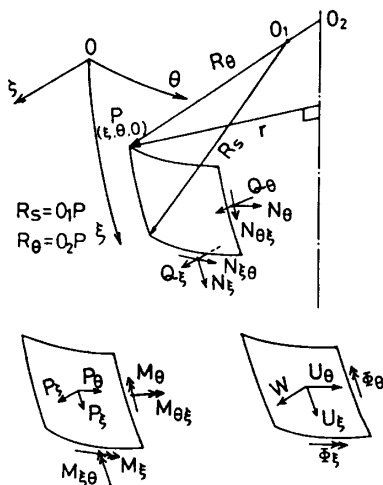


図1 諸記号

ただし、  $P_{\xi}$ ,  $P_{\theta}$  などは座標方向のものを正とし、  $P_{\xi}^+$  などはこれと反対方向のものを正とする。また、

$$h^{\pm} = 1 \pm \frac{h}{2} \left( \frac{1}{R_{\xi}} + \frac{1}{R_{\theta}} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{1}{R_{\xi} R_{\theta}} \quad \dots\dots\dots (4)$$

次に中央面のひずみ  $\epsilon_{\xi m}$ ,  $\epsilon_{\theta m}$  および  $\epsilon_{\xi\theta m}$  を、  $\xi$ ,  $\theta$ ,  $\xi$  方向の変位  $U_{\xi}$ ,  $U_{\theta}$ ,  $W$  で表すと<sup>(12)</sup>,

$$\left. \begin{aligned} \Delta \epsilon_{\xi m} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial(\Delta U_{\xi})}{\partial \xi} + \omega_{\xi} \Delta W \right] \\ \Delta \epsilon_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta U_{\theta})}{\partial \theta} + \gamma \Delta U_{\xi} + \omega_{\theta} \Delta W \right] \\ \Delta \epsilon_{\xi\theta m} &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta U_{\xi})}{\partial \theta} + \frac{\partial(\Delta U_{\theta})}{\partial \xi} - \gamma \Delta U_{\theta} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、  $\epsilon_{\xi\theta m}$  は工学上のせん断ひずみの 1/2 である。

また、曲率の変化量  $\chi_{\xi}$ ,  $\chi_{\theta}$ ,  $\chi_{\xi\theta}$ ,  $\chi_{\theta\xi}$  と変位成分との関係は、次のようになる<sup>(12)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \chi_{\xi} &= \frac{1}{a} \frac{\partial(\Delta \Phi_{\xi})}{\partial \xi} \\ \Delta \chi_{\theta} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta \Phi_{\theta})}{\partial \theta} + \gamma \Delta \Phi_{\xi} \right] \\ \Delta \chi_{\xi\theta} &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{\partial(\Delta \Phi_{\theta})}{\partial \xi} - 2\omega_{\xi} \Delta \Phi_{\theta} \right] \\ \Delta \chi_{\theta\xi} &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta \Phi_{\xi})}{\partial \theta} - \gamma \Delta \Phi_{\theta} + 2\omega_{\theta} \Delta \Phi_{\xi} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、  $\Phi_{\xi}$ ,  $\Phi_{\theta}$ ,  $\Phi_{\xi}$  は中央面の回転を示し、

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Phi_{\xi} &= \frac{1}{a} \left[ -\frac{\partial(\Delta W)}{\partial \xi} + \omega_{\xi} \Delta U_{\xi} \right] + 2\Delta \epsilon_{\xi\theta m} \\ \Delta \Phi_{\theta} &= \frac{1}{a} \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta W)}{\partial \theta} + \omega_{\theta} \Delta U_{\theta} \right] + 2\Delta \epsilon_{\theta\xi m} \\ \Delta \Phi_{\xi} &= \frac{1}{2a} \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta U_{\xi})}{\partial \theta} + \frac{\partial(\Delta U_{\theta})}{\partial \xi} + \gamma \Delta U_{\theta} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

殻厚中央面から  $\zeta$  の距離にある点のひずみ成分は、次式で表される<sup>(12)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \epsilon_{\xi} &= (\Delta \epsilon_{\xi m} + \zeta \Delta \chi_{\xi}) / L_{\xi} \\ \Delta \epsilon_{\theta} &= (\Delta \epsilon_{\theta m} + \zeta \Delta \chi_{\theta}) / L_{\theta} \\ \Delta \epsilon_{\xi\theta} &= \{ (\Delta \epsilon_{\xi\theta m} + \Delta \Phi_{\theta}) / 2 + \zeta (\Delta \chi_{\xi\theta} + \Delta \Phi_{\theta} / R_{\xi}) \} / L_{\xi} \\ & + \{ (\Delta \epsilon_{\theta\xi m} - \Delta \Phi_{\xi}) / 2 + \zeta (\Delta \chi_{\theta\xi} - \Delta \Phi_{\xi} / R_{\theta}) \} / L_{\theta} \\ \Delta \epsilon_{\xi\zeta} &= \Delta \epsilon_{\xi\zeta m} / L_{\xi}, \quad \Delta \epsilon_{\theta\zeta} = \Delta \epsilon_{\theta\zeta m} / L_{\theta} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、  $L_{\xi} = 1 + \zeta / R_{\xi}$ ,  $L_{\theta} = 1 + \zeta / R_{\theta}$

さて、本研究では構成関係に塑性領域において粘性の影響を考慮した次の Perzyna の式<sup>(10)</sup>を用いる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{S}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{S} \delta_{ij} + \gamma_0 \langle \Phi(F) \rangle S_{ij} J_2^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、  $(\dot{\phantom{x}})$  は時間に関する微分を示し、  $S_{ij}$ ,  $S$  およ

び  $\varepsilon_{ij}$  は偏差応力, 平均垂直応力およびひずみである。 $E, \nu$  および  $\gamma_0$  はそれぞれ縦弾性係数, ポアソン比および粘性を表す定数であり,  $J_2$  は偏差応力の第2不変量である。また,  $\langle \Phi(F) \rangle$  は次の定義によるものである。

$$\langle \Phi(F) \rangle = 0 \quad : F \leq 0 \\ = \Phi(F) : F > 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに,  $F$  は

$$F = (\bar{\sigma} - \sigma^*) / \sigma^* \quad \dots\dots\dots (11)$$

で,  $\bar{\sigma}$  はミーゼスの相当応力 ( $= \sqrt{3} J_2$ ) であり,  $F=0$  はミーゼスの降伏曲面を表す。また  $\sigma^*$  はひずみ速度が十分小さい通常の引張試験における応力-ひずみ関係から得られ, 一般に相当塑性ひずみ  $\varepsilon^{vp}$  の関数となる。

仮定される殻の応力状態(殻厚方向の垂直応力  $\sigma_z = 0$ )において, 式(9)は次のようになる。

$$\{\Delta \varepsilon\} = [D]^{-1} \{\Delta \sigma\} + \{\Delta \varepsilon^{vp}\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ただし

$$\begin{aligned} \{\Delta \varepsilon\} &= \{\Delta \varepsilon_\theta, \Delta \varepsilon_\phi, \Delta \varepsilon_{\theta\phi}, \Delta \varepsilon_{\theta z}, \Delta \varepsilon_{\phi z}\}^T \\ \{\Delta \sigma\} &= \{\Delta \sigma_\theta, \Delta \sigma_\phi, \Delta \sigma_{\theta\phi}, \Delta \sigma_{\theta z}, \Delta \sigma_{\phi z}\}^T \\ [D] &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (13)^{**2}$$

$$\{\Delta \varepsilon^{vp}\} = \{\Delta \varepsilon_\theta^{vp}, \Delta \varepsilon_\phi^{vp}, \Delta \varepsilon_{\theta\phi}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\theta z}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\phi z}^{vp}\}^T$$

$$= \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} \Delta t = \gamma_1 \left\langle \Phi \left( \frac{\bar{\sigma} - \sigma^*}{\sigma^*} \right) \right\rangle$$

$$\times \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \{\sigma\} \Delta t$$

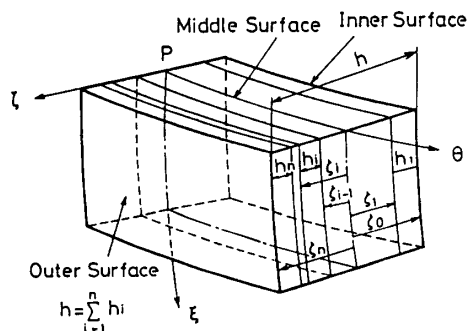


図 2 多層殻要素

$$\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_0$$

..... (14)

式(12)に式(8)を代入し, 応力について解くと,

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \{ (\Delta \varepsilon_{\theta m} + \zeta \Delta x_\theta) / L_\theta \\ &\quad + \nu (\Delta \varepsilon_{\theta m} + \zeta \Delta x_\theta) / L_\theta \} - \Delta \sigma_\theta^{vp} \\ \Delta \sigma_\phi &= \frac{E}{1-\nu^2} \{ (\Delta \varepsilon_{\phi m} + \zeta \Delta x_\phi) / L_\phi \\ &\quad + \nu (\Delta \varepsilon_{\phi m} + \zeta \Delta x_\phi) / L_\phi \} - \Delta \sigma_\phi^{vp} \\ \Delta \sigma_{\theta\phi} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \left\{ \frac{1}{2} (\Delta \varepsilon_{\theta\phi m} + \Delta \Phi_n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \zeta \left( \Delta x_{\theta\phi} + \frac{\Delta \Phi_n}{R_s} \right) \right\} / L_\theta + \left\{ \frac{1}{2} (\Delta \varepsilon_{\theta\phi m} - \Delta \Phi_n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \zeta \left( \Delta x_{\theta\phi} - \frac{\Delta \Phi_n}{R_\theta} \right) \right\} / L_\phi \right] - \Delta \sigma_{\theta\phi}^{vp} \\ \Delta \sigma_{\theta z} &= \frac{E}{1+\nu} \Delta \varepsilon_{\theta z m} / L_\theta - \Delta \sigma_{\theta z}^{vp} \\ \Delta \sigma_{\phi z} &= \frac{E}{1+\nu} \Delta \varepsilon_{\phi z m} / L_\phi - \Delta \sigma_{\phi z}^{vp} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに,  $\{\Delta \sigma^{vp}\}$  は粘塑性ひずみによるみかけの応力増分であり,

$$\{\Delta \sigma^{vp}\} = [D] \{\Delta \varepsilon^{vp}\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし,  $\{\Delta \sigma^{vp}\} = \{\Delta \sigma_\theta^{vp}, \Delta \sigma_\phi^{vp}, \Delta \sigma_{\theta\phi}^{vp}, \Delta \sigma_{\theta z}^{vp}, \Delta \sigma_{\phi z}^{vp}\}^T$

殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントは, 式(15)を用い, かつ近似

$$\frac{L_\theta}{L_\phi} \approx 1 - \left( \frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \zeta + \frac{1}{R_s} \left( \frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \zeta^2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

を用いると(図2),

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} [L] \begin{Bmatrix} \Delta \sigma \\ \Delta \sigma^+ \zeta \end{Bmatrix} d\zeta \\ &= [A] \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_m \\ \Delta x \\ \Delta \Phi_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta N^{vp} \\ \Delta M^{vp} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} \{\Delta N\} &= \{\Delta N_\theta, \Delta N_\phi, \Delta N_{\theta\phi}, \Delta N_{\theta z}, \Delta N_{\phi z}\}^T \\ \{\Delta M\} &= \{\Delta M_\theta, \Delta M_\phi, \Delta M_{\theta\phi}, \Delta M_{\theta z}, \Delta M_{\phi z}\}^T \\ [L] &= \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \\ [L_1] &= \begin{bmatrix} L_\theta & & & & \\ & L_\theta & 0 & & \\ & & L_\phi & & \\ & & & L_\theta & \\ 0 & & & & L_\theta \\ & & & & & L_\phi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

\*\*2 { }<sup>T</sup> は転置行列を示す。

$$[L_2] = \begin{bmatrix} L_\theta & 0 \\ & L_\epsilon \\ & & L_\theta \\ 0 & & & L_\epsilon \end{bmatrix} \quad \left. \begin{aligned} (\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}^T)^+ &= \{a_1, a_2, a_3\}^T \\ \{\Delta \epsilon_m\} &= \{\Delta \epsilon_{\theta m}, \Delta \epsilon_{\theta \theta m}, \Delta \epsilon_{\theta \theta m}, \Delta \epsilon_{\theta \theta m}, \Delta \epsilon_{\theta \theta m}\}^T \\ \{\Delta x\} &= \{\Delta x_\theta, \Delta x_\theta, \Delta x_{\theta\theta}, \Delta x_{\theta\theta}\}^T \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$[A] = \sum_{i=1}^n [E_i][A_i] \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$[E_i] = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} [1, 1, 1-\nu_i, 1-\nu_i, 1-\nu_i, 1-\nu_i, 1, 1, 1-\nu_i, 1-\nu_i], \text{ (対角行列)} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$[A_i] = \left[ \begin{array}{cccccccccccc} \zeta_{1,i}^*, & \nu_i \zeta_{1,i}, & 0, & 0, & 0, & \zeta_{2,i}^*, & \nu_i \zeta_{2,i}, & 0, & 0, & 0 \\ \nu_i \zeta_{1,i}, & \zeta_{1,i}^{**}, & 0, & 0, & 0, & \nu_i \zeta_{2,i}, & \zeta_{2,i}^{**}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1/2(\zeta_{1,i}^* + \zeta_{1,i}), & 0, & 0, & 0, & 0, & \zeta_{2,i}^*, & \zeta_{2,i}, & (a) \\ 0, & 0, & 1/2(\zeta_{1,i}^{**} + \zeta_{1,i}), & 0, & 0, & 0, & 0, & \zeta_{2,i}, & \zeta_{2,i}^{**}, & (b) \\ 0, & 0, & 0, & 5/6 \zeta_{1,i}^*, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 5/6 \zeta_{1,i}^{**}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \zeta_{2,i}^*, & \nu_i \zeta_{2,i}, & 0, & 0, & 0, & \zeta_{3,i}^*, & \nu_i \zeta_{3,i}, & 0, & 0, & 0 \\ \nu_i \zeta_{2,i}, & \zeta_{2,i}^{**}, & 0, & 0, & 0, & \nu_i \zeta_{3,i}, & \zeta_{3,i}^{**}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1/2(\zeta_{2,i}^* + \zeta_{2,i}), & 0, & 0, & 0, & 0, & \zeta_{3,i}^*, & \zeta_{3,i}, & (c) \\ 0, & 0, & 1/2(\zeta_{2,i}^{**} + \zeta_{2,i}), & 0, & 0, & 0, & 0, & \zeta_{3,i}, & \zeta_{3,i}^{**}, & (d) \end{array} \right] \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\begin{aligned} (a) &= (\zeta_{1,i}^* - \zeta_{1,i})/2 + (\omega_\epsilon/a) \zeta_{2,i}^* - (\omega_\theta/a) \zeta_{2,i}, \quad (b) = (\zeta_{1,i} - \zeta_{1,i}^{**})/2 + (\omega_\epsilon/a) \zeta_{2,i} - (\omega_\theta/a) \zeta_{2,i}^{**} \\ (c) &= (\zeta_{2,i}^* - \zeta_{2,i})/2 + (\omega_\epsilon/a) \zeta_{3,i}^* - (\omega_\theta/a) \zeta_{3,i}, \quad (d) = (\zeta_{2,i} - \zeta_{2,i}^{**})/2 + (\omega_\epsilon/a) \zeta_{3,i} - (\omega_\theta/a) \zeta_{3,i}^{**} \\ \zeta_{n,i} &= (\zeta_i^n - \zeta_{i-1}^n)/n \quad (n=1, 2, \dots, 5) \\ \zeta_{n,i}^* &= \zeta_{n,i} - \{(\omega_\epsilon - \omega_\theta)/a\} \zeta_{n+1,i} + \{\omega_\epsilon(\omega_\epsilon - \omega_\theta)/a^2\} \zeta_{n+2,i} \\ \zeta_{n,i}^{**} &= \zeta_{n,i} - \{(\omega_\theta - \omega_\epsilon)/a\} \zeta_{n+1,i} + \{\omega_\theta(\omega_\theta - \omega_\epsilon)/a^2\} \zeta_{n+2,i} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (23)$$

(n=1, 2, 3)

また

$$\left. \begin{aligned} \Delta N^{vp} &= \{\Delta N_\epsilon^{vp}, \Delta N_\theta^{vp}, \Delta N_{\theta\theta}^{vp}, \Delta N_{\theta\theta}^{vp}, \Delta Q_\epsilon^{vp}, \Delta Q_\theta^{vp}\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} [L_1] \{\Delta \sigma^{vp}\} d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_1][D_i] \{\Delta \epsilon_i^{vp}\} d\zeta \\ \Delta M^{vp} &= \{\Delta M_\epsilon^{vp}, \Delta M_\theta^{vp}, \Delta M_{\theta\theta}^{vp}, \Delta M_{\theta\theta}^{vp}\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} [L_2] \{\Delta \sigma^{vp}\}^+ \zeta d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_2][\bar{D}_i] \{\Delta \epsilon_i^{vp}\}^+ \zeta d\zeta \\ [\bar{D}_i] &= \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu_i \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

以上で50個の独立変数  $\Delta U_\epsilon, \Delta U_\theta, \Delta W, \Delta \Phi_\epsilon, \Delta \Phi_\theta, \Delta \Phi_n, \{\Delta N\}, \{\Delta M\}, \{\Delta N^{vp}\}, \{\Delta M^{vp}\}, \{\Delta \epsilon_m\}, \{\Delta x\}, \{\Delta \epsilon^{vp}\}, \{\Delta \sigma\}, \{\Delta \sigma^{vp}\}$  に対して、式(2), (5)~(7), (14)~(16), (18), (24)の50個の式が得られたことになる。なお、式(20)~(24)で  $n=1$  とおくと、単層の場合に帰着する<sup>(7)</sup>。

**2・2 無次元方程式** 一般に非軸対称問題を解析するには、各変数を  $\theta$  方向にフーリエ級数で表し、その係数を定めればよい。そこで、上に示した50個の変数のうち、 $\{\Delta \epsilon^{vp}\}$  を除く45個の変数と分布荷重を無次元化の上、フーリエ級数に展開する<sup>(7)</sup>。

これらのフーリエ展開式を前述の基礎式に代入し、フーリエ係数(対応する小文字を使う)に関する式をつくり、これらの式から順次未知数を消去すると、最後に運動方程式は変位  $\Delta u_\epsilon, \Delta u_\theta, \Delta w$  および回転  $\Delta \varphi_\epsilon, \Delta \varphi_\theta$  に関する次の五元連立二階微分方程式になる。なおフーリエ係数の添字(n)は便宜上省略する。

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_8 & 0 \\ 0 & a_{15} & 0 & 0 & a_{21} \\ 0 & 0 & a_{27} & 0 & 0 \\ a_{33} & 0 & 0 & a_{40} & 0 \\ 0 & a_{47} & 0 & 0 & a_{53} \end{bmatrix} \mathbf{z}'' + \begin{bmatrix} a_2 & a_4 & a_6 & a_9 & a_{11} \\ a_{13} & a_{16} & 0 & a_{19} & a_{22} \\ a_{24} & 0 & a_{28} & a_{30} & 0 \\ a_{34} & a_{36} & a_{38} & a_{41} & a_{43} \\ a_{45} & a_{48} & 0 & a_{51} & a_{54} \end{bmatrix} \mathbf{z}' + \begin{bmatrix} a_3 & a_5 & a_7 & a_{10} & a_{12} \\ a_{14} & a_{17} & a_{18} & a_{20} & a_{23} \\ a_{25} & a_{26} & a_{29} & a_{31} & a_{32} \\ a_{35} & a_{37} & a_{39} & a_{42} & a_{44} \\ a_{46} & a_{49} & a_{50} & a_{52} & a_{55} \end{bmatrix} \mathbf{z} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial^2 \Delta u_\epsilon / \partial \tau^2 \\ \partial^2 \Delta u_\theta / \partial \tau^2 \\ \partial^2 \Delta w / \partial \tau^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここで、 $\mathbf{z} = \{\Delta u_\theta, \Delta u_r, \Delta w, \Delta \varphi_\theta, \Delta \varphi_r\}^T$  であり、 $\tau$  は無次元時間で、

$$\tau = \sqrt{E_0/\rho_0}(t/a), \quad \rho_0 = \sum_{i=1}^n \rho_i h_i / h \quad (E_0: \text{代表縦弾性係数}) \quad (26)$$

である。また、 $a_1 \sim a_{55}$  は殻の形状と各層の弾性係数  $E_i$ 、 $\nu_i$  とから定まる係数であり、 $c_1 \sim c_5$  は殻の形状のほかに、分布荷重と粘塑性によるみかけの内力成分から定まる定数で、次式によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \Delta n_\theta^{vp} + \gamma(\Delta n_\theta^{vp} - \Delta n_\theta^{vp}) + (n/\rho)\Delta n_\theta^{vp} + \omega_\theta \Delta q_\theta^{vp} - \Delta p_\theta \\ c_2 &= \Delta n_\theta^{vp} + \gamma(\Delta n_\theta^{vp} + \Delta n_\theta^{vp}) - (n/\rho)\Delta n_\theta^{vp} + \omega_\theta \Delta q_\theta^{vp} - \Delta p_\theta \\ c_3 &= \Delta q_\theta^{vp} + \gamma \Delta q_\theta^{vp} + (n/\rho)\Delta q_\theta^{vp} - \omega_\theta \Delta n_\theta^{vp} - \omega_\theta \Delta n_\theta^{vp} - \Delta p_\theta \\ c_4 &= \Delta q_\theta^{vp} - \lambda^2 \Delta m_\theta^{vp} - \lambda^2 \gamma \Delta m_\theta^{vp} + \lambda^2 \gamma \Delta m_\theta^{vp} - \lambda^2 (n/\rho) \Delta m_\theta^{vp} \\ c_5 &= \Delta q_\theta^{vp} - \lambda^2 \Delta m_\theta^{vp} - \lambda^2 \gamma (\Delta m_\theta^{vp} + \Delta m_\theta^{vp}) + \lambda^2 (n/\rho) \Delta m_\theta^{vp} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ここに、 $\lambda = h/a$  である。

式(27)の粘塑性による内力成分の増分の各フーリエ係数は、式(24)にフーリエ展開式を代入して、それぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} [A_n] \{ \Delta n_\theta^{vp(n)}, \Delta n_\theta^{vp(n)}, \Delta n_\theta^{vp(n)}, \Delta n_\theta^{vp(n)}, \Delta q_\theta^{vp(n)}, \Delta q_\theta^{vp(n)} \} \tau &= \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} [L_1] [D_i] \{ \Delta \varepsilon_i^{vp} \} d\xi \\ \frac{\sigma_0 h_0^3}{a} \sum_{n=0}^{\infty} [B_n] \{ \Delta m_\theta^{vp(n)}, \Delta m_\theta^{vp(n)}, \Delta m_\theta^{vp(n)}, \Delta m_\theta^{vp(n)} \} \tau &= \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} [L_2] [\bar{D}_i] \{ \Delta \varepsilon_i^{vp} \} + \zeta d\xi \\ [A_n] &= [\cos n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta, \sin n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta], [B_n] = [\cos n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta, \sin n\theta] \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ここに、 $[A_n]$ 、 $[B_n]$  は対角行列で、 $\sigma_0$ 、 $h_0$  はそれぞれ代表応力および代表厚さである。右辺の粘塑性ひずみ増分は、応力値から式(14)によって計算できる。また積分にはシンプソンの1/3則を用いる。

### 3. 数値計算法

ある任意の計算段階における変位と回転の増分は、式(25)を適当な境界条件のもとで解けば得られ、任意の時刻の解は、各段階の解の増分を積分することによって得られる。しかしながら、式(25)を厳密に理論解析することは困難であるから、差分法によって数值的に解を求める。この数値解法は著者らがすでに発表した単層殻の場合<sup>(3)</sup>とほぼ同様であるので、ここでは紙面の都合もあり省略する。

### 4. 数 値 例

計算例として、両端固定で、内側にチタンの層を、外側に軟鋼の層を配した二層構造の円筒殻を取り上げ

た。荷重は軸方向に一樣で、円周方向には余弦状で、時間に対しては半正弦波状の衝撃外圧とした(図3)。チタン層の殻厚に対する比  $h_1/h$  は、 $h_1/h=0, 0.2, 0.5$  の3通りとした。

問題の対称性から、計算は円筒殻の1/4形状についてのみ行えば十分である。円筒殻の形状パラメータは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a &= L, \quad \xi = s/L, \quad \rho = 0.5 \\ \omega_\theta &= 2, \quad \rho' = \gamma = \omega_\theta = \omega_\theta' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

また  $\xi$  の差分間隔  $\Delta \xi$  は、差分点数の数を  $N$  として、

$$\Delta \xi = 1/(2(N-1)) \quad (30)$$

となる。

境界条件は、点Aでは固定の条件を用いて、

$$\Delta U_\theta = \Delta U_r = \Delta W = \Delta \varphi_\theta = \Delta \varphi_r = 0 \quad (31)$$

点Dでは対称性により、

$$\Delta U_\theta = \Delta W' = \Delta \varphi_\theta = \Delta N_{\theta\theta} = \Delta M_{\theta\theta} = 0 \quad (32)$$

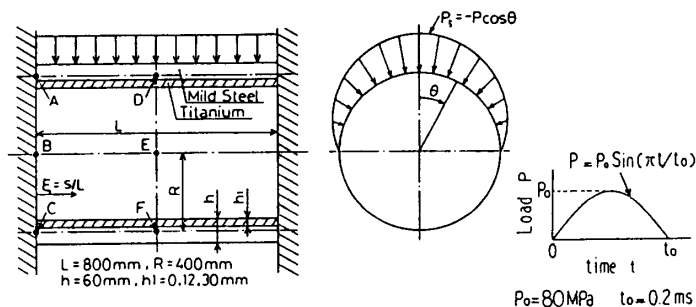


図3 円筒殻および荷重

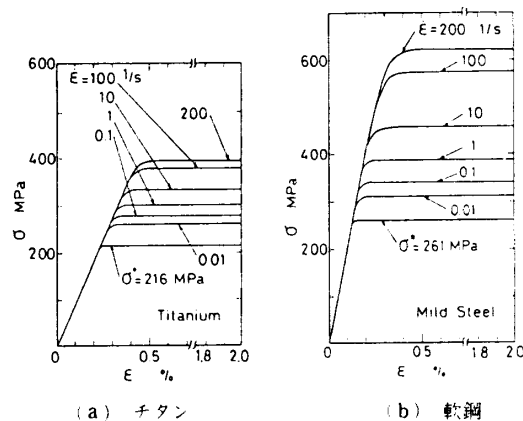


図4 応力-ひずみ線図

なお、式(28)の  $\sigma_0$  は、本計算では  $\sigma_0=1$  とした。

チタンと軟鋼の材料特性は、実験より求めた次のものを用いた<sup>(10)(14)</sup>。

チタン：

$$\left. \begin{aligned} E &= 91 \text{ GPa}, \nu = 0.33, \rho_1 = 4.51 \text{ g/cm}^3 \\ \gamma_1 &= 800 \text{ s}^{-1}, \sigma^* = 216 \text{ MPa} \\ \Phi(F) &= \{(\bar{\sigma} - \sigma^*)/\sigma^*\}^{7.4} \end{aligned} \right\} \dots\dots (33)$$

軟鋼：

$$\left. \begin{aligned} E &= 200 \text{ GPa}, \nu = 0.29, \rho_2 = 7.86 \text{ g/cm}^3 \\ \gamma_1 &= 40.4 \text{ s}^{-1}, \sigma^* = 261 \text{ MPa} \\ \Phi(F) &= \{(\bar{\sigma} - \sigma^*)/\sigma^*\}^{5.0} \end{aligned} \right\} \dots\dots (34)$$

これらの材料定数を用いた場合の応力-ひずみ線図を図4に示す。

差分点数は、子午線方向に  $N=51$ 、殻厚方向には各層ごとに11個( $h_1/h=0$ の場合のみ19個)の格子点を採用した。またフーリエ級数の項数は20とし、時間間

隔は  $\Delta t = 1.0 \mu\text{s}$  とした。これらの値は解の収束性と計算機の容量および計算時間を考慮して決定した。

次に計算結果について考察する。図5~12において、実線、一点鎖線および点線は本理論による結果であり、破線はせん断変形の影響を考慮しない薄肉理論(古典理論)による結果である。ひずみならびにひずみ速度の最大値(絶対値)は、本理論によれば、いずれも点A( $\xi=0, \theta=0^\circ$ )の内表面の子午線方向に生じ、 $h_1/h=0, 0.2, 0.5$ の殻において、各々1.0, 1.4, 2.0%, ならびに108, 142, 212 1/sである。

図5は点D, E, F( $\xi=0.5, \theta=0, 90, 180^\circ$ )の半径方向変位  $W$  と円周方向変位  $U_\theta$  の時間的变化を示す。負荷直後まず点Dが内側に変位しはじめ、続いて点Eが、さらに遅れて点Fが外側に変位する。チタンのほうが軟鋼よりも縦弾性係数、初期降伏点とも低く、粘塑性ひずみが生じやすいため、チタンの層の厚さが増すほど変形量は大きく、変動周期は長くなっている。両理論による差は時間の経過とともに、また  $h_1/h$  の値とともに、大きくなる傾向にある。

図6は時刻  $t_{1,2,3}=0.15, 0.3, 0.45 \text{ ms}$  における子午線AD上の  $W$ 、および時刻  $t_2$  における子午線BE上の  $U_\theta$  の分布を示す。固定端から中央部に向かってほぼ一定の割合で変形が増加し、チタンの層の厚さが増すほど変形量は全般的に大きくなる。なお子午線方向変位  $U_\xi$  は  $W, U_\theta$  に比べ非常に小さい。本理論による結果と薄肉理論による結果との間に差が認められ、図5と合わせ考えると、薄肉理論では本理論に比べて変形をやや小さめに評価することがわかる。

図7, 8は点D, E, Fの合応力  $N_\xi, N_\theta$ 、ならびに点

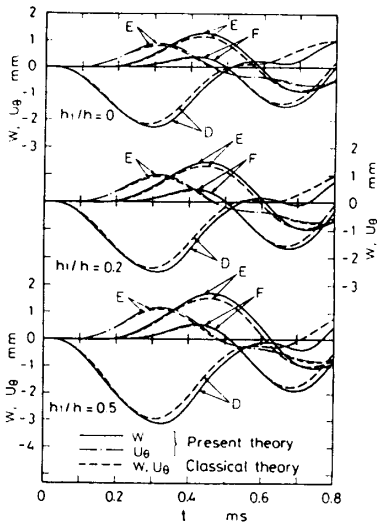


図5  $W, U_\theta$  の時間的变化

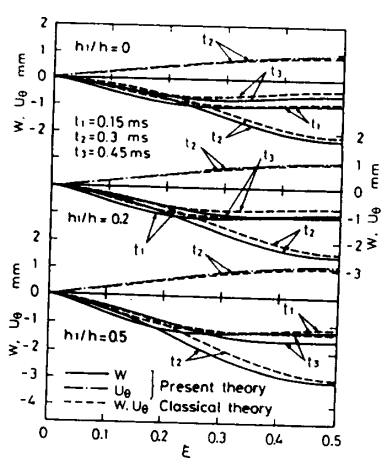


図6  $W, U_\theta$  の子午線方向分布

( $W$ : 子午線AD,  $U_\theta$ : 子午線BE)

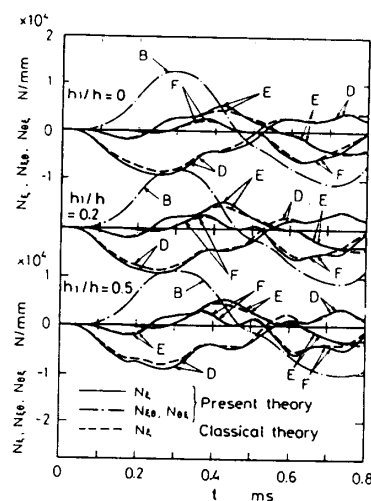


図7  $N_\xi, N_\theta, N_{\xi\theta}$  の時間的变化

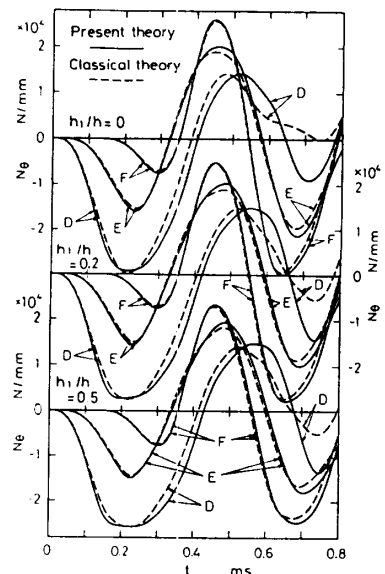


図8  $N_\theta$  の時間的变化

Bの合応力  $N_{\theta 0}$ ,  $N_{\theta \theta}$  の時間的変化を示したものである。点Bの  $N_{\theta 0}$  と  $N_{\theta \theta}$  の差は小さく、図上では差が認められない。 $h_1/h$  の値による差異は、変位成分ほど顕著ではないが各内力成分に多少現れ、チタンの層の厚さが増すほど変動は小さく、周期はやや長くなっている。両理論による結果の差は、点Dで特に大きく現れる。

図9, 10は点A, B, D, Eの合モーメントの時間的変化である。点Aの  $M_{\theta}$  は特に大きな値を示し、点Dの  $M_{\theta}$ , 点Bの  $M_{\theta 0}$ ,  $M_{\theta \theta}$  とともに、 $h_1/h$  の値による差が見られる。また点D, Eの  $M_{\theta}$  および点Bの  $M_{\theta 0}$ ,  $M_{\theta \theta}$  は、チタン層の厚さと共にその変動量は増加している。薄肉理論による結果は本理論による結果に比べて変動周期が短くなり、点A, Dで両結果の差は顕著

である。

図11は中央断面における  $N_{\theta}$  および  $M_{\theta}$  の分布の時間的変化を示す。 $N_{\theta}$  の時間的変化は全周にわたって大きく、 $h_1/h$  の値による差異も全周に生ずる。一方、 $M_{\theta}$  の分布の時間的変化は、直接荷重を受けない円筒殻の下半分では小さく、また  $h_1/h$  の値による差異は、円筒殻の上半分に限られる。両理論による結果の差は、 $N_{\theta}$ ,  $M_{\theta}$  とも円筒殻の上半分で大きく、反対側の下半

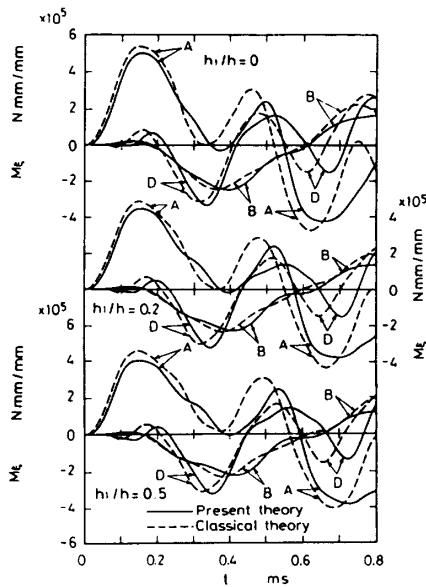


図9  $M_{\theta}$  の時間的変化

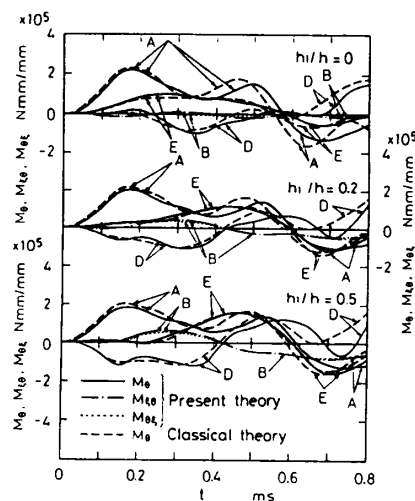


図10  $M_{\theta}$ ,  $M_{\theta 0}$ ,  $M_{\theta \theta}$  の時間的変化

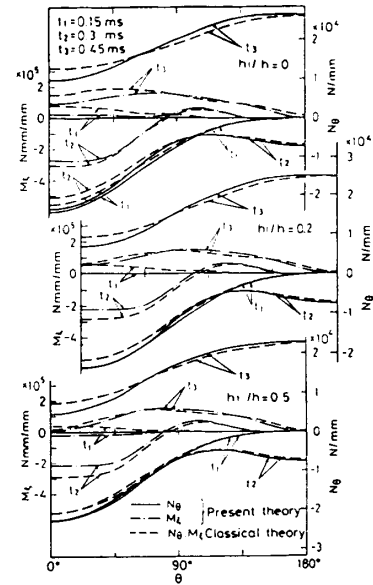


図11  $N_{\theta}$ ,  $M_{\theta}$  の円周方向分布(円周 DF)

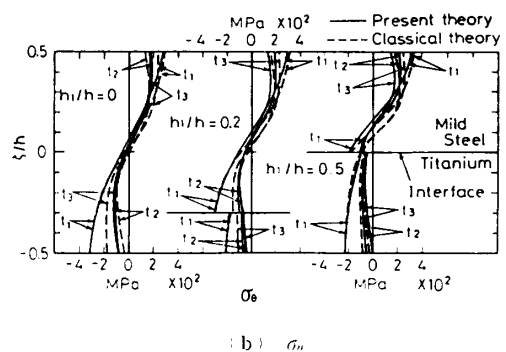
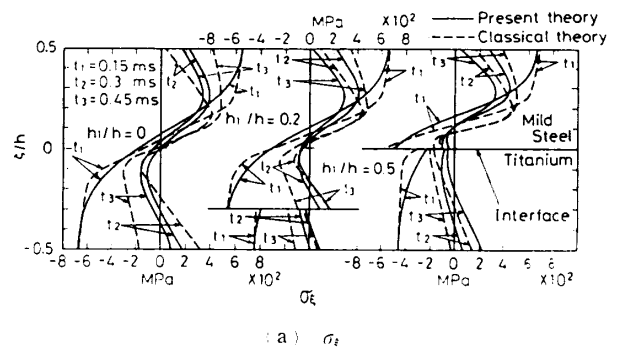


図12 殻厚方向の応力分布(点A)

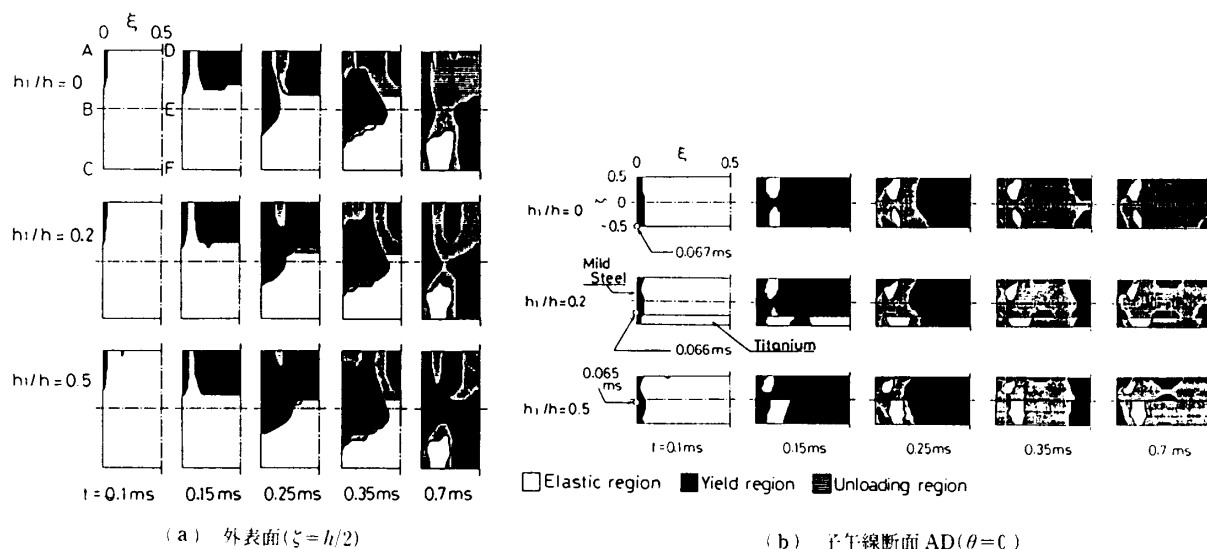


図 13 降伏領域の進展

分で小さくなっている。

次に、点 A における  $\sigma_\xi$  と  $\sigma_\theta$  の殻厚方向分布を図 12 に示す。応力分布は境界で不連続になり、境界の軟鋼側で時間的変動が大きくなり、チタン側では小さくなる。また薄肉理論による結果との差は、時間の経過とともに大きくなっている。

最後に、図 13 は塑性域の進展の様子を示したものである。図には表していないが、内表面の進展の様子は外表面とほぼ同じ傾向を示し、弾性領域が少し広い程度である。いずれの  $h_1/h$  の値の場合も、固定端の  $\theta = 0^\circ$  で初めて降伏するが、殻厚方向の位置ならびに時刻は異なる。すなわち、 $h_1/h = 0$  の場合は内面で、 $h_1/h = 0.2$  の場合は境界の軟鋼側で、また  $h_1/h = 0.5$  の場合は境界のチタン側で初期降伏を生じる。時間の経過とともに、塑性領域は厚さ方向、子午線方向および円周方向に広がり、降伏した領域は時間の経過とともに、部分的に除荷ならびに再降伏を繰返す。なお二層殻では、塑性域の進展は境界面で不連続になる。

## 5. 結 言

本論文では、一般の非軸対称荷重が作用する中程度の厚さの多層回転対称殻の弾/粘塑性動的応答問題の解法を示した。弾/粘塑性の構成関係には Perzyna の式を用い、Reissner-Naghdi の単層殻の弾性変形問題の解法を多層回転対称殻の弾/粘塑性動的応答問題に拡張した。導かれた基礎式の解法には、差分法を適用した。

数値例として、内側にチタンの層を、外側に軟鋼の

層を配した二層構造の円筒殻の半周部分に、余弦状の衝撃外圧が作用する問題を取扱い、 $h_1/h$  の値を変えて、内力および変形の時間的変化の様子を解析した。その結果、変形については、チタンの層の厚さが増すほど変形量は大きく、変動周期も長くなった。また合応力には、 $h_1/h$  の値による大きな相違は認められなかったが、合モーメントには  $h_1/h$  の値による差異が現れた。また殻厚方向の応力分布ならびに塑性域の進展の様子にも、差異が認められた。一方、この程度の厚さの円筒殻になると、本理論による結果とせん断変形の影響を無視した薄肉理論による結果との間には、かなりの差が生じることがわかった。

## 文 献

- (1) Nagarajan, S. and Popov, E. P., *Int. J. Numer. Method Eng.*, **9**-3(1975), 535.
- (2) 村瀬・西村, 機論, **45**-400, A(1979), 1554.
- (3) Takezono, S., ほか 2 名, *Trans. ASME, Ser. J.*, **102**-3(1980), 257.
- (4) Atkash, R. S., ほか 2 名, *Trans. ASME, Ser. E.*, **50**-1(1983), 131.
- (5) 埜・ほか 4 名, 機論, **55**-513, A(1989), 1145.
- (6) 埜・竹園, 機論, **55**-514, A(1989), 1453.
- (7) 竹園・ほか 2 名, 機論, **52**-476, A(1986), 997.
- (8) 竹園・ほか 2 名, 機論, **52**-482, A(1986), 2395.
- (9) 竹園・ほか 3 名, 機論, **55**-518, A(1989), 2065.
- (10) Perzyna, P., *Adv. Appl. Mech.*, **9**(1966), 243, Academic Press.
- (11) Reissner, E., *Am. J. Math.*, **63**-1(1941), 177.
- (12) Naghdi, P. M., *Q. Appl. Math.*, **14**-4(1957), 369.
- (13) Sanders, J. L., Jr., *NASA Rep.*, R-24(1959), 1.
- (14) 竹園・ほか 3 名, 材料, **31**-350(1982), 1128.