

# 流体加熱を受ける一般軸対称殻の熱弾粘塑性変形\*

竹園 茂男<sup>\*1</sup>, 埜 克己<sup>\*1</sup>  
青木 隆<sup>\*2</sup>, 稲村 栄次郎<sup>\*2</sup>

## Elasto/Visco-Plastic Deformation of Shells of Revolution under Thermal Loading due to Fluid

Shigeo TAKEZONO, Katsumi TAO,  
Takashi AOKI and Eijiroh INAMURA

An analytical method for the elasto/visco-plastic deformation of axisymmetrical thin shells subjected to thermal loads due to fluid is developed. First, the temperature distribution through the thickness is assumed to be curves of second order, and the temperature field in the shell under the appropriate initial and boundary conditions is determined using the equations of heat conduction and heat transfer. Secondly, the stresses and deformations are derived from the thermal stress equations. The equations of equilibrium and the relations between the strains and displacements are derived from the Sanders elastic shell theory. For the constitutive relations, the Perzyna elasto/visco-plastic equations which consider the temperature effect are employed. The fundamental equations derived are numerically solved using the finite difference method. As a numerical example, a simply supported internal pressure cylindrical shell made of aluminum under thermal loading due to fluid is analyzed, and the variations in displacements and internal forces with time are discussed.

**Key Words:** Structural Analysis, Thermal Stress, Shells, Elasto/Visco-Plasticity, Heat Conduction, FDM

### 1. 緒 言

高温・高応力下の殻構造物の解析において、大きな熱応力によって生じる材料の粘塑性の影響を無視することはできない。これまで、回転対称殻の弾粘塑性変形問題の一般的解法について、多数の研究結果が報告されている<sup>(1)~(7)</sup>。しかしながら、これらの研究は殻体内の温度分布を一定と仮定しており、不均一な温度の殻の弾粘塑性変形問題を取扱った研究は少ないようである<sup>(8)(9)</sup>。

そこで本論文では、殻の周囲の流体により不均一な温度負荷を受ける回転対称殻の弾粘塑性変形問題の解法を取扱った。まず、殻厚方向の温度分布を二次曲線で近似し、与えられた初期条件と熱伝達を考慮した境界条件のもとで、熱伝導方程式を解く。そして得られた温度分布をもとに、熱弾粘塑性に関する回転対称殻の基礎関係式から、変位、内力などを求める。殻の平衡方程式には、Sanders, Jr. の薄肉殻理論式<sup>(10)</sup>を用いた。構成関係には、温度の影響を考慮した Perzyna の弾粘塑性式<sup>(11)</sup>を採用した。導かれた基礎式の数値解法

には、差分法を適用した。

数値例として、内圧が作用している両端単純支持のアルミ円筒殻に、流体加熱が局所的に作用する問題を取り上げた。

### 2. 基 礎 式

図1に示すように、殻の中央面上に子午線方向に  $\xi$ 、円周方向に  $\theta$ 、中央面から外向きに  $\zeta$  の座標軸をとる。対称軸から中央面までの距離を  $r$  とし、殻の中央面の形を  $r=r(\xi)$  とすると、点 P における無次元曲率  $\omega_\xi (=a/R_\xi)$ 、 $\omega_\theta (=a/R_\theta)$  および無次元半径  $\rho (=r/a)$  の間には、次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= -(\gamma' + \gamma^2)/\omega_\theta, \quad \omega_\theta = \sqrt{1 - (\rho')^2}/\rho \\ \omega_\theta' &= \gamma(\omega_\xi - \omega_\theta), \quad \rho''/\rho = -\omega_\xi \omega_\theta \\ \xi &= s/a, \quad \gamma = \rho'/\rho, \quad ( )' = d( )/d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

ここに、 $s$  は子午線方向の長さであり、 $a$  は代表長さである。

#### 2・1 熱伝導方程式 殻体内の熱伝導方程式は、

図1に示す  $\xi$ 、 $\theta$ 、 $\zeta$  座標を用いると、次式で与えられる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\chi}{a^2} \left( \gamma \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) - \chi \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c\rho_0} \eta_0 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

\* 原稿受付 平成4年11月30日。

\*<sup>1</sup> 正員、豊橋技術科学大学(〒441 豊橋市天伯町字雲雀ヶ丘1-1)。

\*<sup>2</sup> 学生員、豊橋技術科学大学大学院。

ここに、 $T$ ：任意の時刻における殻体内の任意の点  $(\xi, \theta, \zeta)$  の温度、 $\chi$ ：温度伝導率  $(=\lambda_0/c\rho_0)$ 、 $c$ ：比熱、 $\rho_0$ ：密度、 $\lambda_0$ ：熱伝導率、 $\eta_0$ ：単位時間、単位体積当たりの発熱量である。

また、殻の内、外表面  $(\zeta=\pm h/2)$  の温度境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=-h/2} &= h_i(T_{in} - \Theta_i) \\ \left[ \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=h/2} &= -h_o(T_{out} - \Theta_o) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $h_i, h_o$ ：殻の内、外表面の相対熱伝達率  $(=k_i/\lambda_0, k_o/\lambda_0, k$ ：熱伝達率)、 $T_{in}, T_{out}$ ：殻の内、外表面の温度、 $\Theta_i, \Theta_o$ ：殻の内、外の周囲温度、 $h$ ：殻厚である。

従来、殻の殻厚方向の温度分布を直線近似する方法が多く採られていたが<sup>(12)</sup>、本研究では、応答初期の解の精度の向上を図るため、また次に示す式(5)の導出において、殻厚方向に積分する際に生じる定積分項  $[\partial T/\partial \zeta]_{\zeta=h/2}^{h/2}$  が、殻厚方向に直線分布を仮定した場合には零となる矛盾を除くために、図1に示すように、殻の殻厚方向の温度分布  $T$  を係数  $T_0, T_1, T_2$  を用い

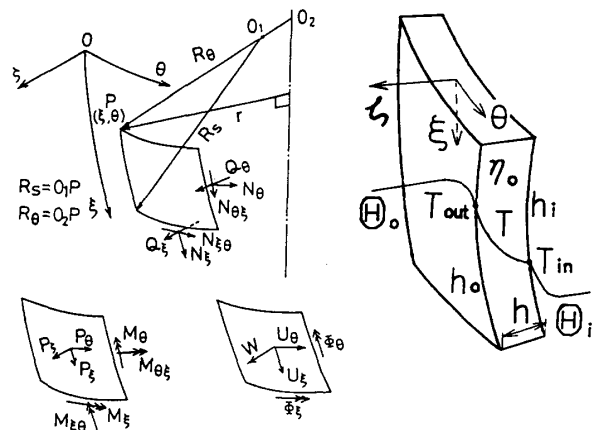


図1 座標と諸記号

て、次の二次曲線で表す。

$$T(\xi, \theta, \zeta, t) = T_0(\xi, \theta, t) + T_1(\xi, \theta, t)\zeta + T_2(\xi, \theta, t)\zeta^2 \dots\dots\dots (4)$$

式(4)を式(2)に代入し、全殻厚にわたって積分した式、両辺に  $\zeta$  を掛けて積分した式、さらに両辺に  $\zeta^2$  を掛けて積分した式は、殻の内外表面の熱伝達による温度境界条件式(3)を考慮すると、各々次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( T_0 + \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial t} T_2 \right) - \frac{\chi}{a^2} \left[ \gamma \frac{\partial}{\partial \xi} (T_0) + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (T_0) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (T_0) + \frac{h^2}{12} \left\{ \gamma \frac{\partial}{\partial \xi} (T_2) + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (T_2) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (T_2) \right\} \right] + \frac{\chi}{h} (h_o + h_i) T_0 + \frac{\chi}{2} (h_o - h_i) T_1 + \frac{\chi h}{4} (h_o + h_i) T_2 - \frac{\chi}{h} (h_o \Theta_o + h_i \Theta_i) - \frac{\chi Q_0}{\lambda_0 h} = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} (T_1) - \frac{\chi}{a^2} \left[ \gamma \frac{\partial}{\partial \xi} (T_1) + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (T_1) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (T_1) \right] + \frac{6\chi}{h^2} (h_o - h_i) T_0 + \frac{3\chi}{h} \left( h_o + h_i + \frac{4}{h} \right) T_1 \\ & \quad + \frac{3\chi}{2} (h_o - h_i) T_2 - \frac{6\chi}{h^2} (h_o \Theta_o - h_i \Theta_i) - \frac{12\chi Q_1}{\lambda_0 h^3} = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left( T_0 + \frac{3h^2}{20} \frac{\partial}{\partial t} T_2 \right) - \frac{\chi}{a^2} \left[ \gamma \frac{\partial}{\partial \xi} (T_0) + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (T_0) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (T_0) + \frac{3h^2}{20} \left\{ \gamma \frac{\partial}{\partial \xi} (T_2) + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (T_2) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (T_2) \right\} \right] + \frac{3\chi}{h} (h_o + h_i) T_0 + \frac{3\chi}{2} (h_o - h_i) T_1 + \frac{3\chi h}{4} (h_o + h_i) T_2 - \frac{3\chi}{h} (h_o \Theta_o + h_i \Theta_i) - \frac{12\chi Q_2}{\lambda_0 h^3} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $Q_0, Q_1, Q_2$  は次式で表される。

$$Q_n = \int_{-h/2}^{h/2} \eta_0 \zeta^n d\zeta \quad (n=0, 1, 2) \dots\dots\dots (6)$$

以上で3個の未知数  $T_0, T_1, T_2$  に対して、式(5)が与えられ、これを解くと殻の温度分布が求められる。

なお、近年回転対称殻の熱伝導問題に関する他の解法が、Updike と Kalnins によって発表されている<sup>(13)</sup>。

**2・2 熱変形方程式** Sanders の殻理論<sup>(10)</sup> による軸対称殻の内力の平衡方程式から、横せん断力  $Q_\xi, Q_\theta$  を消去し、時間または時間とともに単調に変化する量について微分すると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & a \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{N}_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{N}_{\xi\theta}) - \rho' \dot{N}_\theta \right] + \omega_\xi \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_{\xi\theta}) - \rho' \dot{M}_\theta \right] + \frac{1}{2} (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_{\xi\theta}) + \rho a^2 \dot{P}_\xi = 0 \\ & a \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{N}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{N}_{\xi\theta}) + \rho' \dot{N}_{\xi\theta} \right] + \omega_\theta \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_{\xi\theta}) + \rho' \dot{M}_{\xi\theta} \right] + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial \xi} [(\omega_\theta - \omega_\xi) \dot{M}_{\xi\theta}] + \rho a^2 \dot{P}_\theta = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_{\xi\theta}) - \rho' \dot{M}_\theta \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_{\xi\theta}) + \rho' \dot{M}_{\xi\theta} \right] - \alpha \rho (\omega_\xi \dot{N}_\xi + \omega_\theta \dot{N}_\theta) + \rho a^2 \dot{P}_\zeta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $N_\xi$ ,  $N_\theta$ ,  $N_{\xi\theta}$  および  $M_\xi$ ,  $M_\theta$ ,  $M_{\xi\theta}$  は、図 1 に示すように殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントであり、 $P_\xi$ ,  $P_\theta$ ,  $P_\xi$  は殻の単位面積当たりの分布荷重の  $\xi$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$  方向の成分である。また  $\bar{N}_{\xi\theta}$ ,  $\bar{M}_{\xi\theta}$  は修正面内せん断力および修正ねじりモーメントで、

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_{\xi\theta} &= (\dot{N}_{\xi\theta} + \dot{N}_{\theta\xi})/2 \\ &+ [(1/R_\theta - 1/R_\xi)(\dot{M}_{\xi\theta} - \dot{M}_{\theta\xi})/4] \\ \bar{M}_{\xi\theta} &= (\dot{M}_{\xi\theta} + \dot{M}_{\theta\xi})/2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

で表される。

次に中央面のひずみ  $\epsilon_{\xi m}$ ,  $\epsilon_{\theta m}$  および  $\epsilon_{\xi\theta m}$  を  $\xi$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$  方向の変位  $U_\xi$ ,  $U_\theta$ ,  $W$  で表すと、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\xi m} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{U}_\xi) + \omega_\xi \dot{W} \right] \\ \epsilon_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{U}_\theta) + \gamma \dot{U}_\xi + \omega_\theta \dot{W} \right] \\ \epsilon_{\xi\theta m} &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{U}_\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{U}_\theta) - \gamma \dot{U}_\theta \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\epsilon_{\xi\theta m}$  は工学上のせん断ひずみの 1/2 である。また、曲率の変化量  $\chi_\xi$ ,  $\chi_\theta$ ,  $\chi_{\xi\theta}$  と変位成分との関係は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \chi_\xi &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{\Phi}_\xi), \chi_\theta = \frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\Phi}_\theta) + \gamma \dot{\Phi}_\xi \right\} \\ \chi_{\xi\theta} &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\Phi}_\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{\Phi}_\theta) - \gamma \dot{\Phi}_\theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2a} (\omega_\xi - \omega_\theta) \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{U}_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{U}_\theta) - \gamma \dot{U}_\theta \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $\Phi_\xi$ ,  $\Phi_\theta$  は中央面の回転を示し、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_\xi &= \frac{1}{a} \left[ -\frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{W}) + \omega_\xi \dot{U}_\xi \right] \\ \Phi_\theta &= \frac{1}{a} \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{W}) + \omega_\theta \dot{U}_\theta \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

Kirchhoff の仮説を用いて、殻厚中央面から  $\zeta$  の距離にある点のひずみ成分は次式で表される。

$$\{\dot{\epsilon}\} = \{\dot{\epsilon}_m\} + \zeta \{\dot{\chi}\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{\epsilon}\} &= \{\dot{\epsilon}_\xi, \dot{\epsilon}_\theta, \dot{\epsilon}_{\xi\theta}\}^T \\ \{\dot{\epsilon}_m\} &= \{\dot{\epsilon}_{\xi m}, \dot{\epsilon}_{\theta m}, \dot{\epsilon}_{\xi\theta m}\}^T \\ \{\dot{\chi}\} &= \{\dot{\chi}_\xi, \dot{\chi}_\theta, \dot{\chi}_{\xi\theta}\}^T \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)^{**1}$$

さて、本研究では構成関係に温度の影響を考慮した Perzyna の弾/粘塑性式<sup>(11)</sup>を用いると、粘塑性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$  は、

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma_0(T) < \Psi(f) > S_{ij} J_2^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 $(\dot{\phantom{x}})$  は時間に関する微分を示す。 $\epsilon_{ij}^{vp}$ ,  $S_{ij}$ ,  $J_2$

および  $\gamma_0(T)$  はそれぞれ粘塑性ひずみ、偏差応力、偏差応力の第 2 不変量および粘性を表す定数であり、 $\gamma_0$  は次に示す  $\sigma^*$  とともに温度  $T$  の関数である。また  $\Psi(f)$  は、次の定義によるものである。

$$\left. \begin{aligned} f \leq 0 \text{ のとき } & < \Psi(f) > = 0 \\ f > 0 \text{ のとき } & < \Psi(f) > = \Psi(f) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $f$  は

$$f = \{\bar{\sigma} - \sigma^*(T)\} / \sigma^*(T) \quad \dots\dots\dots (16)$$

で、 $\bar{\sigma}$  はミーゼスの相当応力 ( $=\sqrt{3}J_2$ ) であり、 $f=0$  はミーゼスの降伏曲面を表す。また  $\sigma^*(T)$  は静的な降伏応力である。

全ひずみ速度が、弾性ひずみ速度と粘塑性ひずみ速度および熱ひずみ速度の和で表せると仮定すると、平面応力状態において全ひずみ速度は次式のようになる。

$$\{\dot{\epsilon}\} = [D]^{-1} \{\dot{\sigma}\} + \{\dot{\epsilon}^{vp}\} + \{\dot{\epsilon}^t\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{\sigma}\} &= \{\dot{\sigma}_\xi, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_{\xi\theta}\}^T \\ \{\dot{\epsilon}^{vp}\} &= \{\dot{\epsilon}_\xi^{vp}, \dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_{\xi\theta}^{vp}\}^T \\ \{\dot{\epsilon}^t\} &= \{\alpha \dot{T}_e, \alpha \dot{T}_e, 0\}^T \\ [D] &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \\ \{\dot{\epsilon}^{vp}\} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_0(T) < \Psi\left(\frac{\bar{\sigma} - \sigma^*(T)}{\sigma^*(T)}\right) > \\ &\times \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \{\dot{\sigma}\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$E$ ,  $\nu$  および  $\alpha$  は縦弾性係数、ポアソン比および線膨張係数である。また  $T_e$  は基準温度  $\bar{T}_0$  からの温度変化で、時刻  $t$  における殻の任意点の温度を  $T$  とすると、

$$T_e(\xi, \theta, \zeta, t) = T(\xi, \theta, \zeta, t) - \bar{T}_0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

となる。

式(17)に式(12)を代入し、 $\{\dot{\sigma}\}$  について解くと、次式が得られる。

$$\{\dot{\sigma}\} = [D] \{ \{\dot{\epsilon}_m\} + \zeta \{\dot{\chi}\} \} - \{\dot{\sigma}^{vp}\} - \{\dot{\sigma}^t\} \} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{\sigma}^{vp}\} &= \{\dot{\sigma}_\xi^{vp}, \dot{\sigma}_\theta^{vp}, \dot{\sigma}_{\xi\theta}^{vp}\}^T = [D] \{\dot{\epsilon}^{vp}\} \\ \{\dot{\sigma}^t\} &= \{\dot{\sigma}^t, \dot{\sigma}^t, 0\}^T = [D] \{\dot{\epsilon}^t\} \\ &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \{\dot{T}_e, \dot{T}_e, 0\}^T \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

式(20)を用いると、殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントは次のようになる。

\*\*1  $\{ \phantom{x} \}^T$  は転置行列を表す。

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{N}\} &= \{\dot{N}_\theta, \dot{N}_\phi, \dot{N}_{\theta\phi}\}^T \\ &= h[D]\{\dot{\epsilon}_m\} - \{\dot{N}^{vp}\} - \{\dot{N}^t\} \\ \{\dot{M}\} &= \{\dot{M}_\theta, \dot{M}_\phi, \dot{M}_{\theta\phi}\}^T \\ &= \frac{h^3}{12}[D]\{\dot{\chi}\} - \{\dot{M}^{vp}\} - \{\dot{M}^t\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 $(\ )^{vp}$ 、 $(\ )^t$  はそれぞれ粘塑性による見かけの内力成分および温度変化  $T_e$  による内力成分を示し、次式によって見かけの応力および熱応力の変化率から計算できる。

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{N}^{vp}, \dot{N}^t\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}^{vp}, \dot{\sigma}^t\} d\zeta \\ \{\dot{M}^{vp}, \dot{M}^t\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}^{vp}, \dot{\sigma}^t\} \zeta d\zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

以上で 36 個の未知数  $\{\dot{N}\}$ 、 $\{\dot{M}\}$ 、 $\{\dot{N}^{vp}\}$ 、 $\{\dot{M}^{vp}\}$ 、 $\{\dot{N}^t\}$ 、 $\{\dot{M}^t\}$ 、 $\{\dot{\sigma}\}$ 、 $\{\dot{\sigma}^{vp}\}$ 、 $\{\dot{\sigma}^t\}$ 、 $\{\dot{\epsilon}_m\}$ 、 $\{\dot{\epsilon}^{vp}\}$ 、 $\{\dot{\epsilon}^t\}$ 、 $\dot{U}_\theta$ 、 $\dot{U}_\phi$ 、 $\dot{W}$ 、 $\{\dot{\chi}\}$ 、 $\dot{\Phi}_\theta$ 、 $\dot{\Phi}_\phi$  に対して、式(7)、(9)～(11)、(18)、(20)～(23)の 36 個の式が得られたことになる。

### 3. 無次元方程式

一般に非軸対称問題を解析するには、各変数を  $\theta$  方向にフーリエ級数で表し、その係数を定めればよい。そこで 2 章に示した 39 個の変数のうち、粘塑性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_\theta^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_\phi^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\theta\phi}^{vp}$  ならびに熱ひずみ速度  $\dot{\epsilon}^t$  を除く 35 個の変数と分布荷重、殻の内外の周囲温度および発熱量をフーリエ級数に展開する。紙面の都合上、これらのうち既発表の論文<sup>(9)</sup>に記されているものを除き、次に示す(係数には、対応する小文字を使い、 $\sigma$  には  $s$  を用いる)。

$$\left. \begin{aligned} \{T_0, T_1, T_2\} &= \frac{\sigma_0}{Ea} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ t_0^{(n)}, \frac{t_1^{(n)}}{h}, \frac{t_2^{(n)}}{h^2} \right\} \cos n\theta \\ \{\Theta_i, \Theta_o\} &= \frac{\sigma_0}{Ea} \sum_{n=0}^{\infty} \{\theta_i^{(n)}, \theta_o^{(n)}\} \cos n\theta \\ \{Q_0, Q_1, Q_2\} &= \frac{\lambda_0}{a} \frac{\sigma_0}{Ea} \sum_{n=0}^{\infty} \{q_0^{(n)}, hq_1^{(n)}, h^2 q_2^{(n)}\} \cos n\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

ここに、 $\sigma_0$  は代表応力である。なお式(24)は、 $\theta=0^\circ$  の子午線面に対して面対称な荷重が作用する場合であるが、より一般性を持たせるには、各フーリエ展開式に  $\sin$  の級数を付加する。

これらのフーリエ展開式を前述の基礎式に代入し、フーリエ係数に関する対応する式をつくると、熱伝導方程式から  $t_0^{(n)}$ 、 $t_1^{(n)}$ 、 $t_2^{(n)}$  に関する次の三元連立二階微分方程式が得られる。

$$A_1 Y'' + A_2 Y' + A_3 Y = A_4 + A_5 (\partial Y / \partial \tau) \dots\dots\dots (25)$$

ただし、 $Y = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, t_2^{(n)}\}^T$ 、 $\tau = \chi t / a^2$ 。ここで、 $A_1 \sim A_3$  は殻の形状と殻の内外表面の相対熱伝達率から

定まる  $3 \times 3$  の定数行列であり、 $A_4$  は殻の内外の周囲温度、相対熱伝達率ならびに発熱量から定まる  $3 \times 1$  の定数行列である。また  $A_5$  も  $3 \times 3$  の定数行列である。

次に熱変形方程式は順次未知数を消去することにより、変位  $u_\theta^{(n)}$ 、 $u_\phi^{(n)}$ 、 $w^{(n)}$  および曲げモーメント  $m_\theta^{(n)}$  に関する次の四元連立二階微分方程式になる。

$$B_1 Z'' + B_2 Z' + B_3 Z = B_4 \dots\dots\dots (26)$$

ただし、 $Z = \{u_\theta^{(n)}, u_\phi^{(n)}, w^{(n)}, m_\theta^{(n)}\}^T$ 。ここで、 $B_1 \sim B_3$  は殻の形状と  $\nu$  の値から定まる  $4 \times 4$  の定数行列であり、また  $B_4$  は殻の形状のほかに、分布荷重、温度負荷および粘塑性による見かけの内力成分から定まる  $4 \times 1$  の定数行列である<sup>(9)</sup>。

さらに、フーリエ係数で表した内力成分と応力との関係が得られ<sup>(9)</sup>、これらの式ならびに式(26)に含まれる粘塑性と温度変化に関する内力成分の変化率のフーリエ係数は、式(21)、(23)からそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} &\sigma_0 h \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{n}_\theta^{vp(n)}, \dot{n}_\phi^{vp(n)}, \dot{n}_{\theta\phi}^{vp(n)}\} [A_n] \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_\phi^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta\phi}^{vp}\} [D] d\zeta \\ &\frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{m}_\theta^{vp(n)}, \dot{m}_\phi^{vp(n)}, \dot{m}_{\theta\phi}^{vp(n)}\} [A_n] \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_\phi^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta\phi}^{vp}\} [D] \zeta d\zeta \\ &\{\dot{n}^t(n), \dot{m}^t(n)\} = \frac{1}{h} \frac{1}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ 1, \frac{a\zeta}{h^2} \right\} \dot{\epsilon}^t d\zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

$$\left. \begin{aligned} &\sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{s}_\theta^{vp(n)}, \dot{s}_\phi^{vp(n)}, \dot{s}_{\theta\phi}^{vp(n)}\} [A_n] \\ &= \{\dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_\phi^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta\phi}^{vp}\} [D] \dots\dots\dots (28) \end{aligned} \right\}$$

ここで

$$[A_n] = [\cos n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta] \quad (\text{対角行列})$$

式(27)、(28)の右辺の粘塑性ひずみ速度は、応力値から式(18)によって計算できる。また積分には殻厚方向に等間隔に  $K$  個の点を取って、シンプソンの 1/3 則を適用する。

### 4. 数 値 計 算 法

ある任意の計算段階における温度と、変位ならびに曲げモーメント  $M_\theta$  の変化率とは、式(25)と式(26)を適当な境界条件のもとで解けば得られ、またこれらを用いて、内力成分の変化率は、式(9)～(11)を式(22)に代入したものから求められる。しかしながら、式(25)と式(26)を厳密に理論解析することは困難であるから、差分法によって数値的に解を求める。境界( $i=1, N$ )と不連続点では前進および後退 3 点差分式を、そ

他の点では中間差分式を用いる<sup>(3)</sup>。なお熱伝導方程式(25)の時間導関数には、クランク・ニコルソンの差分式を用いる。これらの差分式を式(25)、(26)および境界条件式、接続条件式に用いると、 $Y_{i,j}$ と $Z_{i,j}$  ( $i=1\sim N$ ,  $j$ : 計算段階)に関して各々  $N$  元連立方程式が得られる。

以上はある任意の計算段階における温度と、変位ならびに内力の変化率との計算法であるので、ある任意の計算段階における変位ならびに内力は、これらの各計算段階の増分を積分することによって得られる。

### 5. 数 値 例

数値例として、内圧が作用している両端単純可動支持のアルミ円筒殻に、局所的な流体加熱が時間に対してステップ状に作用する問題を取扱った(図2)。基準温度および円筒殻の初期温度は25°Cとし、殻の両端は断熱とした。また円筒殻内外面での相対熱伝達率  $h_i$ ,  $h_o$  ならびに内圧  $P_i$  は、 $h_i=h_o=0.23\text{ m}^{-1}$ ,  $P_i=0.5\text{ MPa}$  とし、式(24)の  $\sigma_0$  は本計算では  $\sigma_0=1$  とした。

計算に用いたアルミの材料定数は次のとおりである<sup>(11)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} E &= 69\text{ GPa}, \rho_0 = 2.71\text{ g/cm}^3 \\ \nu &= 0.33, \lambda_0 = 222\text{ W/(m}\cdot\text{K)} \\ \alpha &= 23.6 \times 10^{-6}\text{ K}^{-1}, c = 0.904\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)} \\ \sigma^*(T) &= -0.011(T/100)^4 + 0.22(T/100)^3 \\ &\quad + 0.6(T/100)^2 - 25.6(T/100) + 92.6\text{ MPa} \\ \gamma_0(T) &= \exp\{-(T-302.5)/15.4\}\text{ s}^{-1} \\ \Psi(f) &= [(\bar{\sigma} - \sigma^*(T))/\sigma^*(T)]^{10} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

なお、上式の  $T$  は絶対温度 [K] である。これらの材料定数を用いた場合の 25, 200, 300, 400°C の各温度

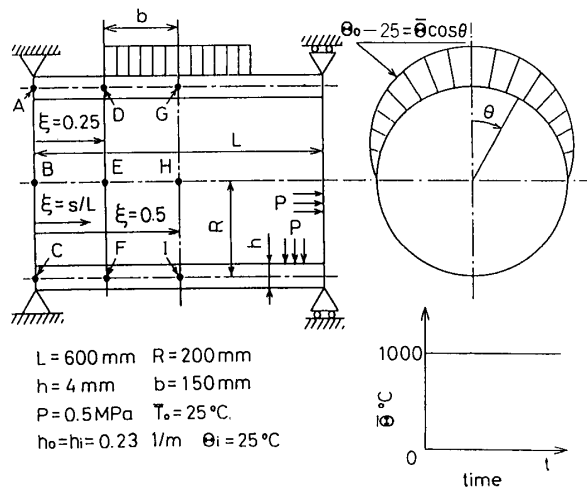


図2 数値例

での応力-ひずみ線図を図3に示す。

差分点数は  $N=101$ , 殻厚方向の格子点数は  $K=19$  とし、フーリエ級数の項数は  $n=20$  とした。また、時間間隔  $\Delta t$  は  $\Delta t=0.1\text{ s}$  とした。これらの値は、解の収束性と利用した計算機の容量および計算時間を考慮して決定した。

次に計算結果について考察する。

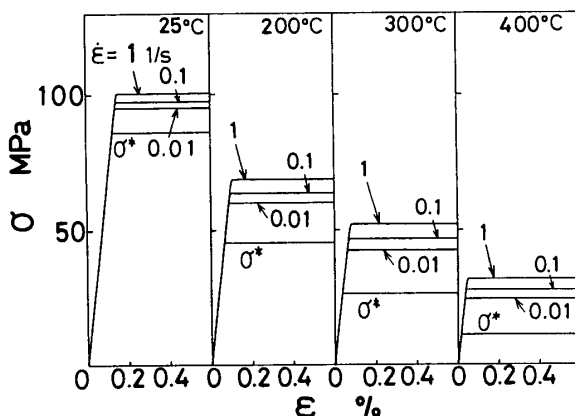


図3 応力-ひずみ線図

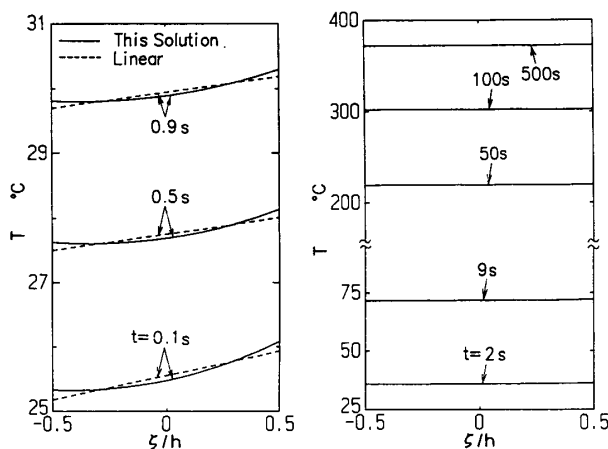


図4 点  $G(\xi=0.5, \theta=0^\circ)$  の殻厚方向の温度分布

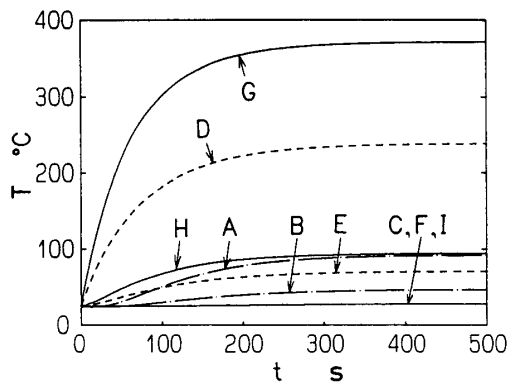


図5 温度  $T$  の時間的变化

図4は点G( $\xi=0.5$ ,  $\theta=0^\circ$ )における殻厚方向の温度分布の時間的変化を示す。図中、実線は本解法によるものであり、破線は殻厚方向に直線分布を仮定した場合である。両者を比較すると、本例題の場合には、熱負荷後およそ2秒を経過すると、両者はほとんど一致し、さらに厚さ方向の分布も一樣になるので、以下の図には殻厚中央面の温度を示す。

図5は点A~I( $\xi=0, 0.25, 0.5$ ;  $\theta=0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ )の温度の時間的変化を、また図6は、 $\theta=0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ の子午線上ならびに $\xi=0, 0.25, 0.5$ の円周上の温度分布を表す。加熱部で温度は他の領域に比べて急速に上昇し、その後緩やかに変化して定常値に至っている。

図7は点A~C( $\xi=0$ ;  $\theta=0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ )の子午線方向変位 $U_\xi$ 、点G~I( $\xi=0.5$ ;  $\theta=0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ )の半径方向変位 $W$ ならびに点Hの円周方向変位 $U_\theta$ の時間的変化を示す。また図8、9には各々 $\theta=0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ の子午線上ならびに $\xi=0, 0.5$ の円周上の変位分布を表す。内圧は初期降伏を生じる弾性限の25%程度の大きさを負荷しているが、内圧による殻の軸対称変形は、

熱変形に比べて極めて小さく、変位 $W$ が図中で確認できる程度である。図8、9より、直接熱負荷を受ける高温部で大きく外側に変形し、その影響で中央部の $\theta=90^\circ$ 付近の $U_\theta$ および $W$ 、ならびに可動支持端付近の $U_\xi$ は、やや大きな負の値を示すことがわかる。

次に点G~Iの合応力 $N_\xi$ 、点A~C、G~Iの合応力 $N_\theta$ ならびに点B、Eの合応力 $\bar{N}_{\theta\theta}$ の時間的変化を図10に示す。また各合応力成分の子午線方向ならびに円周方向の分布を各々図11、12に表す。 $N_\xi$ は最初内圧

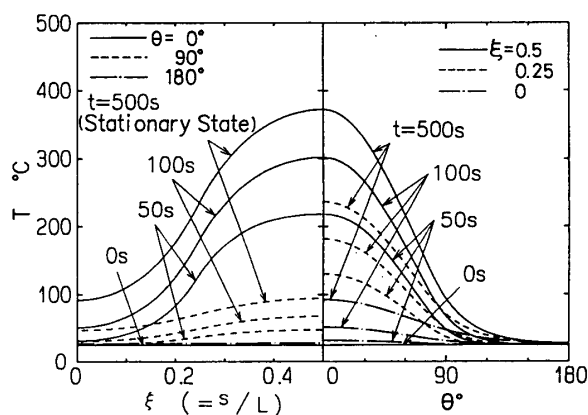


図6 温度 $T$ の子午線方向ならびに円周方向分布

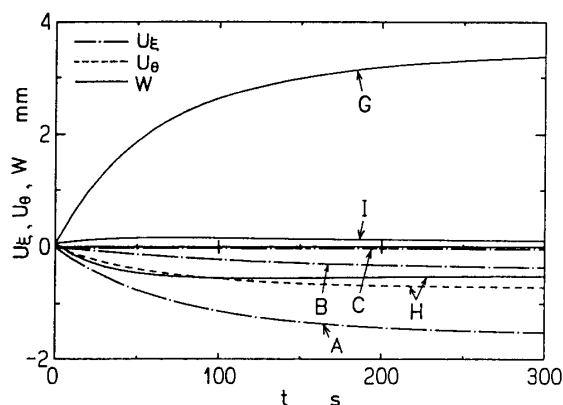


図7 変位の時間的変化

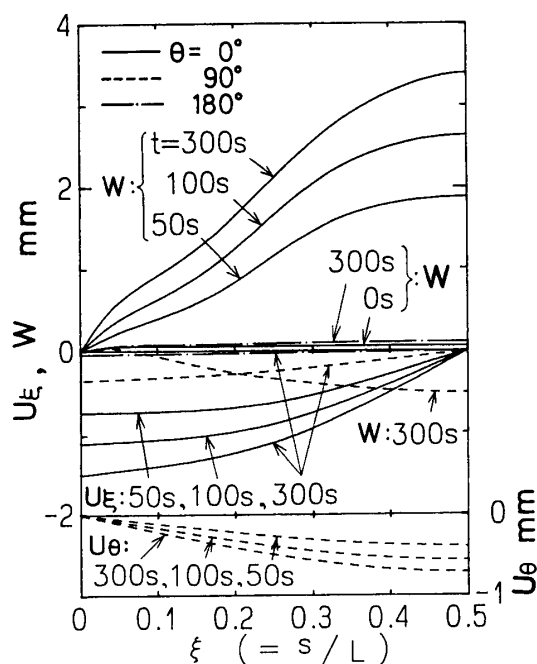


図8 変位の子午線方向分布

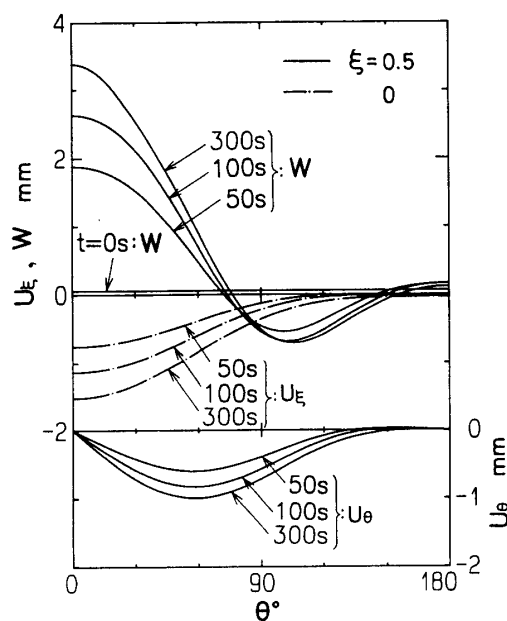


図9 変位の円周方向分布

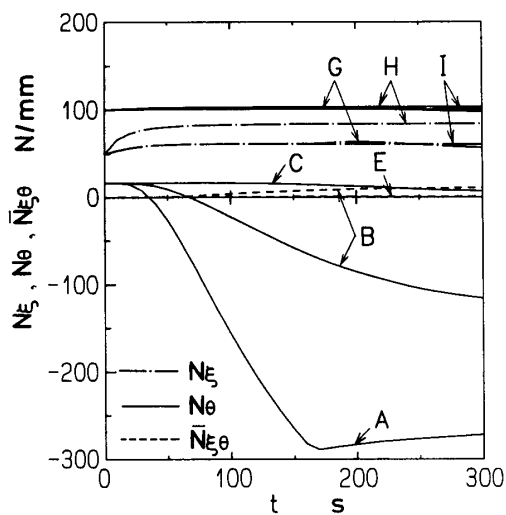


図 10 合応力の時間的変化

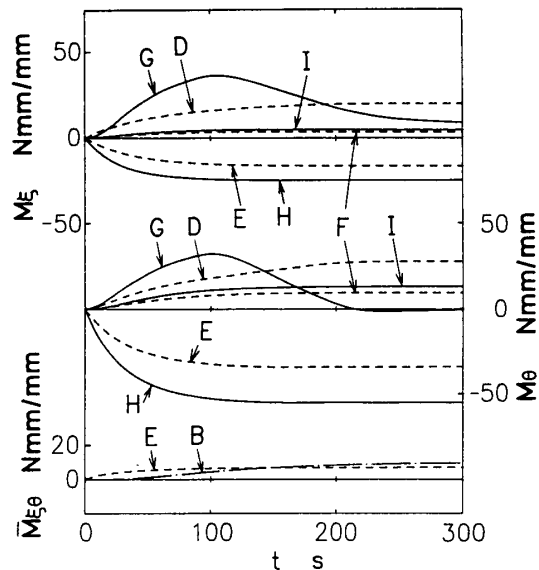


図 13 合モーメントの時間的変化

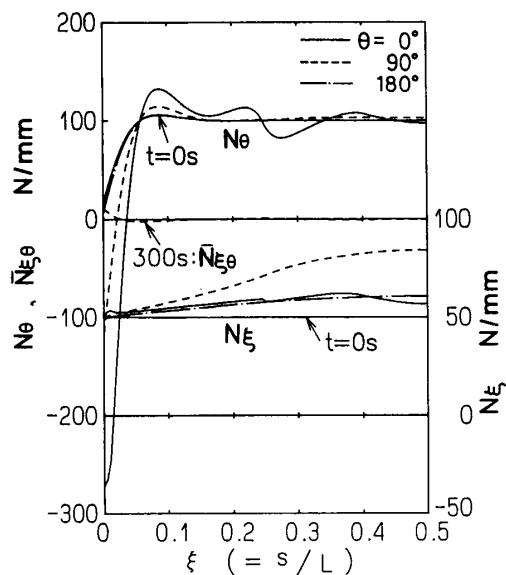
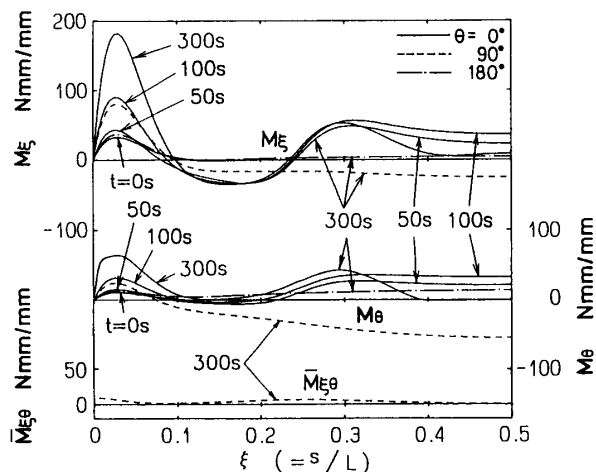
図 11 合応力の子午線方向分布 ( $t=0, 300\text{ s}$ )

図 14 合モーメントの子午線方向分布

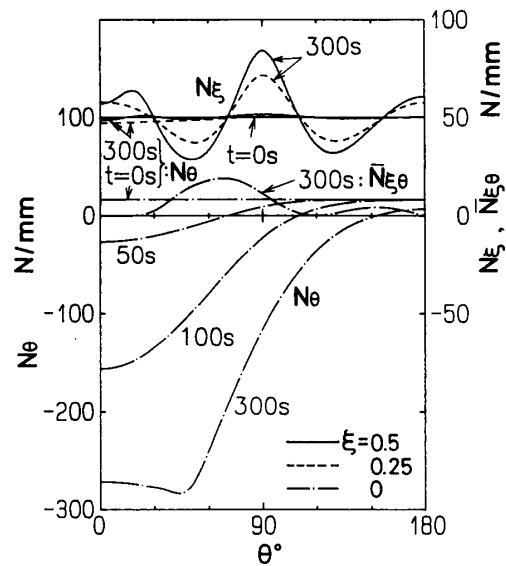


図 12 合応力の円周方向分布

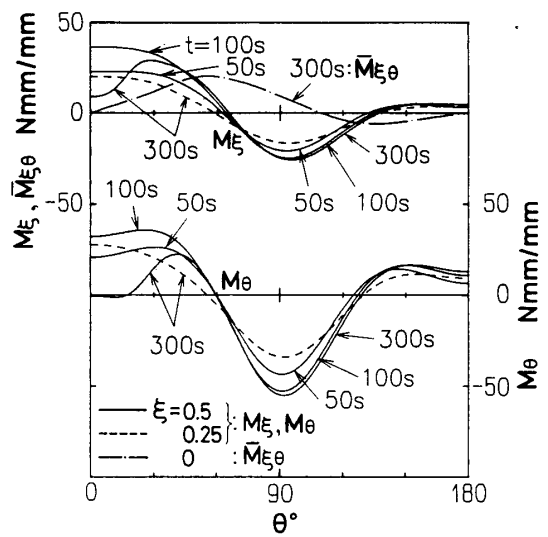


図 15 合モーメントの円周方向分布

により、殻全体に 50 N/mm の引張りを示すが、熱負荷とともに値は変化し、約 100 秒で定常値に至っている。分布を見ると、子午線方向には  $\xi$  とともに単調に増加し、中央部に向かうに従って円周上には波状を呈してくる。一方  $N_\theta$  は、初め内圧により  $\xi=0\sim0.06$  の端部付近を除いて、殻全体に一樣に 100 N/mm の引張りであるが、端部の  $\theta=0^\circ\sim90^\circ$  付近では、熱負荷後 20 秒経過すると、熱伝導により時間とともに子午線方向には局所的に著しく大きな圧縮力を示す。なお降伏を生じる  $t=150$  秒以降は、あまり変化は認められない。また温度こう配の大きい点 D 付近の加熱境界で、子午線方向に多少変化している。図中には  $t=300$  秒の  $\bar{N}_{\theta\theta}$  成分も示したが、 $N_\xi$ 、 $N_\theta$  に比べて値は小さい。

図 13 は点 D~I の合モーメント  $M_\xi$ 、 $M_\theta$ 、ならびに点 B、E の合モーメント  $\bar{M}_{\theta\theta}$  の時間的変化を、また図 14、15 は、 $M_\xi$ 、 $M_\theta$ 、 $\bar{M}_{\theta\theta}$  の子午線方向分布ならびに円周方向分布を示したものである。 $M_\xi$  と  $M_\theta$  は時間的変化も空間的分布も類似した形を示すが、点 A 付近( $\xi=0.03$ )で  $M_\xi$  は大きな値になる。両者とも点 D 付近で、子午線方向にやや大きく変動している。また点 G 近傍で、塑性域の広がりとともに緩和が顕著になる。 $\bar{M}_{\theta\theta}$  成分は、端部の  $\theta=50^\circ$  付近で大きな値を示している。

最後に図 16 は、塑性域の進展の様子を示したものである。点 G の外表面において、 $t=70.6$  秒のとき初めて降伏し、時間の経過とともに、塑性域は厚さ方向、子午線方向および円周方向に広がり、支持端の一部にも塑性域が生じる。殻の外表面での塑性域の広がり、内表面に比べて大きい。

## 6. 結 言

本論文では、周囲の流体により温度負荷を受ける回転対称殻の弾粘塑性変形問題の解法を示した。殻厚方向の温度分布を二次曲線で近似し、与えられた初期条件と熱伝達を考慮した境界条件のもとで、熱伝導方程式を解いた。そして得られた温度分布をもとに、熱弾粘塑性変形に関する回転対称殻の基礎関係式から、変位、内力などを求めた。殻の平衡方程式には Sanders, Jr. の薄肉殻理論式を用い、構成関係には、温度の影響を考慮した Perzyna の弾粘塑性式を採用した。導かれ

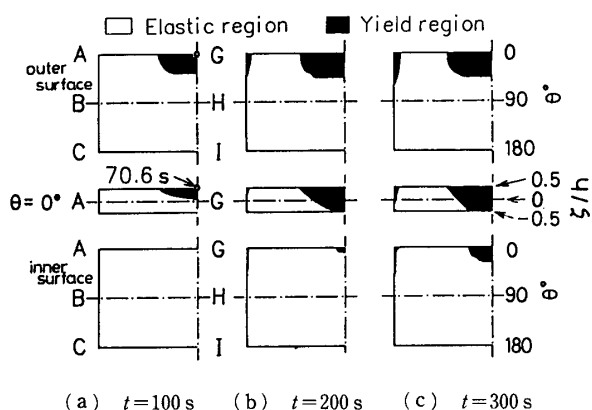


図 16 降伏領域の進展

た基礎式の数値解法には、差分法を適用した。

数値例として、内圧が作用している両端単純支持のアルミ円筒殻に、流体加熱が局所的に作用する問題を取扱った。その結果、殻体内の温度の上昇とともに、変位および内力成分は緩やかに変化して定常値に至り、降伏を生じた領域では、変形の戻りや内力の緩和が見られた。合応力  $N_\theta$  は殻の端部で、合モーメント  $M_\xi$ 、 $M_\theta$  は端部付近で、局所的に大きな値を示し、またこれらは加熱境界で、子午線方向にやや大きく変化することがわかった。

## 文 献

- (1) Nagarajan, S. and Popov, E. P., *Int. J. Solids Struct.*, 11 (1975), 1.
- (2) Kanch, M. B., ほか 2 名, *Int. J. Num. Methods Eng.*, 12 (1978), 169.
- (3) 竹園・埜, 機論, 46-402, A(1980), 227.
- (4) Atkats, R. S., ほか 2 名, *Trans. ASME, Ser. E*, 50-1(1983), 131.
- (5) 埜・竹園, 機論, 55-514, A(1989), 1453.
- (6) 竹園・ほか 2 名, 機論, 56-522, A(1990), 317.
- (7) 竹園・ほか 2 名, 機論, 56-532, A(1990), 2449.
- (8) Wojewódzki, W. and Bukowski, R., *Trans. ASME, Ser. E*, 51-2(1984), 114.
- (9) 埜・ほか 3 名, 機論, 54-503, A(1988), 1457.
- (10) Sanders, J. L., Jr., *NASA Rep.*, R-24(1959), 1.
- (11) Perzyna, P., *Adv. Appl. Mech.*, 9(1966), 243, Academic Press.
- (12) 例えば, Bolotin, V. V., *PMM*, 24-2(1960), 515; Mizoguchi, K., *Bull. Univ. Osaka Pref.*, Ser. A, 15(1966), 1.
- (13) Updike, D. P. and Kalnins, A., *Num. Methods Thermal Problems*, 5-1(1987), 265.