

流体加熱を受ける厚肉回転対称殻の熱弾/粘塑性変形*

竹園 茂 男^{*1}, 埤 克 己^{*1}
青木 隆^{*2}, 稲村 栄次郎^{*2}Thermo-Elasto/Visco-Plastic Deformation of Moderately Thick Shells
of Revolution under Thermal Loading due to FluidShigeo TAKEZONO, Katsumi TAO,
Takashi AOKI and Eijirou INAMURA

This paper is concerned with an analytical formulation and a numerical solution of the thermo-elasto/visco-plastic deformation of general, moderately thick shells of revolution subjected to thermal loads due to fluid. Firstly, the temperature distribution through the thickness is assumed to be a curve of the second order, and the temperature field in the shell under the appropriate initial and boundary conditions is determined using the equations of heat conduction and heat transfer. Secondly, the stresses and deformations are derived from the thermal stress equations. The equations of equilibrium and the relations between the strains and displacements are developed by extending the Reissner-Naghdi theory for elastic shells. For the constitutive relations, the Perzyna elasto/visco-plastic equations including the temperature effect are employed. The fundamental equations derived are numerically solved by the finite difference method. As a numerical example, a simply supported cylindrical shell made of mild steel under thermal loading due to fluid is analyzed, and the results are compared with those from classical theory, which neglects the effect of shear deformation.

Key Words: Structural Analysis, Thermal Stress, Thick Shells, Thermo-Elasto/Visco-Plasticity, Heat Conduction, FDM

1. 緒 言

熱伝導を考慮に入れた殻構造物の熱応力問題に関しては、円筒殻や球殻等の単純な形状のものに限らず、複雑な一般の軸対称殻の問題についても、解析がなされてきた。一般に殻の熱伝導問題を解析するには、幾何学的特徴を生かして三次元熱伝導方程式を二次元化近似することが数学的取扱いの上で好ましく、その解析手法が Bolotin⁽¹⁾, Steele と Yang⁽²⁾, ならびに Updike と Kalnins⁽³⁾ らによって提案され、白川ら⁽⁴⁾ や遠藤⁽⁵⁾ はこれらの熱伝導方程式を解いて、薄肉円筒殻の熱弾性変形問題を解析している。なかでも、殻厚方向に線形温度分布を仮定した Bolotin の手法は、簡便で十分薄い殻に対しては有効であるが、応答初期の解の精度に問題があり、また殻の内外面の熱伝達による温度境界条件の導入に困難がある。そこで著者らは殻厚方向に二次曲線の温度分布を仮定して熱伝導方程式を解き、薄肉軸対称殻の弾/粘塑性変形問題を解析した⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

本論文ではこの解析手法を、これまであまり解析されていない中程度の厚さの回転対称殻の熱弾/粘塑性変形問題に適用した。まず殻厚方向の温度分布を二次曲線で仮定し、殻の内外面での熱伝達を考慮した熱伝導方程式を、与えられた初期条件のもとで解く。そして得られた温度分布をもとに、熱弾/粘塑性に関する回転対称殻の基礎関係式から、変位、内力などを求める。厚肉の場合に考慮すべき殻厚方向のせん断変形には、Reissner-Naghdi の理論(ひずみ-変位関係)⁽⁸⁾⁽⁹⁾を用いた。構成関係には、温度の影響を考慮した Perzyna の弾/粘塑性式⁽¹⁰⁾を採用した。導かれた基礎式の数値解法には、差分法を適用した。

数値例として、流体加熱を受ける両端単純支持の軟鋼製円筒殻の問題を取り上げ、本解法による結果と、せん断変形を無視した薄肉理論⁽⁶⁾⁽⁷⁾による結果とを比較検討した。

2. 基 礎 式

図1に示すように、殻の中央面上に子午線方向に ξ , 円周方向に θ , 中央面から外向きに r の座標軸をとる。対称軸から中央面までの距離を r とし、殻の中央面の形を $r=r(\xi)$ とすると、点 P における無次元曲率 $\omega_s(=a/R_s)$, $\omega_\theta(=a/R_\theta)$ および無次元半径 $\rho(=$

* 原稿受付 平成5年3月1日。

^{*1} 正員, 豊橋技術科学大学(〒441 豊橋市天伯町字雲雀ヶ丘1-1)。^{*2} 学生員, 豊橋技術科学大学大学院。

r/a の間には、次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= -(\gamma' + \gamma^2)/\omega_\theta, \quad \omega_\theta = \sqrt{1 - (\rho')^2/\rho} \\ \omega'_\theta &= \gamma(\omega_\xi - \omega_\theta), \quad \rho''/\rho = -\omega_\xi \omega_\theta \\ \gamma &= \rho'/\rho, \quad \xi = s/a, \quad (\gamma' = d(\gamma)/d\xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

ここに、 s ：子午線方向の長さ、 a ：代表長さである。

2・1 熱伝導方程式 殻体内の熱伝導方程式は、図1に示す ξ, θ, ζ 座標を用いると、次式で与えられる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\chi}{L_\xi L_\theta a^2 \rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho \frac{L_\theta}{L_\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{L_\xi}{\rho L_\theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(a^2 \rho L_\xi L_\theta \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \right\} - \frac{\eta_0}{c \rho_0} = 0 \dots\dots (2)$$

ここに、 $L_\xi = 1 + \zeta/R_s$, $L_\theta = 1 + \zeta/R_\theta$, また T ：任意の時刻における殻体内の任意の点 (ξ, θ, ζ) の温度、 χ ：温度伝導率 $(= \lambda_0/c\rho_0)$, c ：比熱、 ρ_0 ：密度、 λ_0 ：熱伝導率、 η_0 ：単位時間、単位体積当たりの発熱量、 t ：時間である。

次に、殻の内、外表面 $(\zeta = \pm h/2)$ の温度境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial T}{\partial \zeta} \right]_{\zeta = -h/2} &= h_i (T_{in} - \Theta_i), \\ \left[\frac{\partial T}{\partial \zeta} \right]_{\zeta = h/2} &= -h_o (T_{out} - \Theta_o) \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

ここに、 h_i, h_o ：殻の内、外表面の相対熱伝達率 $(= k_i/\lambda_0, k_o/\lambda_0, k$ ：熱伝達率)、 T_{in}, T_{out} ：殻の内、外表面の温度、 Θ_i, Θ_o ：殻の内、外の周囲温度、 h ：殻厚である。

従来、殻の殻厚方向の温度分布を直線近似する方法が多く採られていたが¹⁾⁽⁴⁾⁽¹¹⁾、本研究では、応答初期の解の精度の向上を図るため、また次に示す式(6)の導出において、殻厚方向に積分する際に生じる定積分

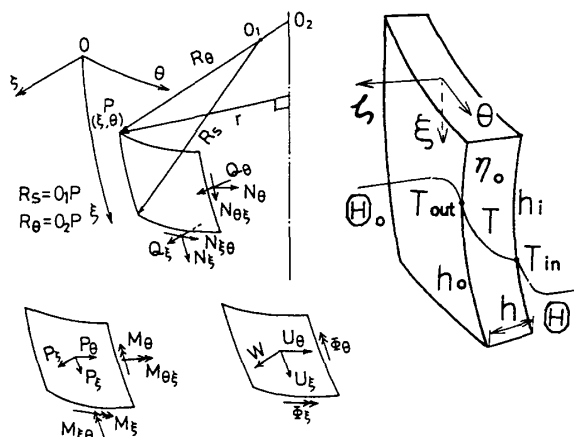


図1 座標と諸記号

項 $(\partial T/\partial \zeta)^{h/2}$ が、殻厚方向に直線分布を仮定した場合には零となる矛盾を除くために、図1に示すように、殻の殻厚方向の温度分布 T を係数 T_0, T_1, T_2 を用いて、次の二次曲線で表す。

$$T(\xi, \theta, \zeta, t) = T_0(\xi, \theta, t) + T_1(\xi, \theta, t)\zeta + T_2(\xi, \theta, t)\zeta^2 \dots\dots (4)$$

式(4)を式(2)に代入し、全殻厚にわたって積分した式、両辺に ζ を掛けて積分した式、さらに両辺に ζ^2 を掛けて積分した式は、殻の内外表面の熱伝達による温度境界条件式(3)を考慮し、さらに近似

$$\frac{L_\theta}{L_\xi} \approx 1 - \left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \zeta + \frac{1}{R_s} \left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \zeta^2 \dots\dots (5)$$

を用いると、各々次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \left(1 + \frac{C_1}{12} \right) \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{h}{12} C_2 \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{h^2}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{C_1}{20} \right) \frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{\chi}{a^2} \left\{ \left(\gamma - \frac{C_3}{12} \right) \frac{\partial T_0}{\partial \xi} - \frac{h}{12} \lambda \omega'_\xi \left(1 + \frac{3}{20} C_4 \right) \frac{\partial T_1}{\partial \xi} \right. \\ & + \frac{h^2}{12} C_5 \frac{\partial T_2}{\partial \xi} + \left(1 + \frac{C_{15}}{12} \right) \frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + \frac{h}{12} C_6 \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} + \frac{h^2}{12} (1 + C_7) \frac{\partial^2 T_2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\rho^2} \left(1 + \frac{\lambda}{12} \omega_\theta C_6 \right) \frac{\partial^2 T_0}{\partial \theta^2} \\ & - \frac{h}{12 \rho^2} C_6 \frac{\partial^2 T_1}{\partial \theta^2} + \frac{h^2 C_8}{12 \rho^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2} \left. \right\} - \frac{C_{12}}{h} T_0 - \frac{C_{11}}{2} T_1 - \frac{h}{4} C_{12} T_2 - C_{13} h_o \Theta_o - C_{14} h_i \Theta_i \\ & - C_{16} \left\{ Q_0 + \frac{C_2}{h} Q_1 + \frac{C_1}{h^2} Q_2 \right\} = 0 \\ & C_2 \frac{\partial T_0}{\partial t} + h \left(1 + \frac{3}{20} C_1 \right) \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{3}{20} h^2 C_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{\chi}{a^2} \left\{ -\lambda \omega'_\xi \left(1 + \frac{3}{20} C_4 \right) \frac{\partial T_0}{\partial \xi} + h C_5 \frac{\partial T_1}{\partial \xi} - \frac{3}{20} h^2 \lambda \omega'_\xi \left(1 + \frac{5}{28} C_4 \right) \frac{\partial T_2}{\partial \xi} \right. \\ & + C_6 \frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + h(1 + C_7) \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} + \frac{3}{20} h^2 C_6 \frac{\partial^2 T_2}{\partial \xi^2} - \frac{C_6}{\rho^2} \frac{\partial^2 T_0}{\partial \theta^2} + \frac{h}{\rho^2} C_8 \frac{\partial^2 T_1}{\partial \theta^2} \\ & - \frac{3h^2}{20 \rho^2} C_6 \frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2} \left. \right\} - \frac{6}{h} C_{11} T_0 - \frac{12}{h} \chi \left(-\frac{C_1}{12} - 1 - \frac{h}{4} C_9 + \frac{h}{8} C_2 C_{10} - \frac{h}{16} C_1 C_9 \right) T_1 - 6h\chi \left(-\frac{C_2}{3h} + \frac{C_{10}}{4} \right. \\ & - \frac{1}{8} C_2 C_9 + \frac{1}{16} C_1 C_{10} \left. \right) T_2 - 6C_{13} h_o \Theta_o + 6C_{14} h_i \Theta_i - \frac{12}{h} C_{16} \left(Q_1 + \frac{C_2}{h} Q_2 + \frac{C_1}{h^2} Q_3 \right) = 0 \\ & \left(1 + \frac{3}{20} C_1 \right) \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{3}{20} h C_2 \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{3}{20} h^2 \left(1 + \frac{5}{28} C_1 \right) \frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{\chi}{a^2} \left\{ C_5 \frac{\partial T_0}{\partial \xi} - \frac{3}{20} h \lambda \omega'_\xi \left(1 + \frac{5}{28} C_4 \right) \frac{\partial T_1}{\partial \xi} \right. \\ & + \frac{3}{20} h^2 \left(\gamma - \frac{5}{28} C_3 \right) \frac{\partial T_2}{\partial \xi} + (1 + C_7) \frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + \frac{3}{20} h C_6 \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} + \frac{3}{20} h^2 \left(1 + \frac{5}{28} C_{15} \right) \frac{\partial^2 T_2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\rho^2} C_8 \frac{\partial^2 T_0}{\partial \theta^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{3h}{20\rho^2} C_6 \frac{\partial^2 T_1}{\partial \theta^2} + \frac{3h^2}{20\rho^2} \left(1 + \frac{5}{28} \lambda \omega_\theta C_6\right) \frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2} - \frac{3\chi}{h} \left(-C_9 + \frac{1}{2} C_2 C_{10} - \frac{1}{4} C_1 C_9\right) T_0 - 6\chi \left(-\frac{C_2}{3h} + \frac{C_{10}}{4}\right. \\ & \left. - \frac{1}{8} C_2 C_9 + \frac{1}{16} C_1 C_{10}\right) T_1 - 12\chi \left(-\frac{1}{3} - \frac{C_1}{20} - \frac{h}{16} C_9 + \frac{h}{32} C_2 C_{10} - \frac{h}{64} C_1 C_9\right) T_2 - 3C_{13} h_o \Theta_o - 3C_{14} h_i \Theta_i \\ & \left. - \frac{12}{h^2} C_{16} \left(Q_2 + \frac{C_2}{h} Q_3 + \frac{C_1}{h^2} Q_4\right) = 0 \right\} \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned} C_1 &= \lambda^2 \omega_\xi \omega_\theta, C_2 = \lambda(\omega_\xi + \omega_\theta) \\ C_3 &= \lambda^2 \omega'_\xi (\omega_\theta - 2\omega_\xi), C_4 = \lambda^2 \omega_\xi (3\omega_\xi - 2\omega_\theta) \\ C_5 &= \gamma - \frac{3}{20} C_3, C_6 = \lambda(\omega_\theta - \omega_\xi) \\ C_7 &= -\frac{3}{20} \lambda \omega_\xi C_6, C_8 = 1 + \frac{3}{20} \lambda C_6 \\ C_9 &= h_o + h_i, C_{10} = h_i - h_o \\ C_{11} &= \chi \left(C_{10} - \frac{1}{2} C_2 C_9 + \frac{1}{4} C_1 C_{10}\right) \\ C_{12} &= \chi \left(-C_9 + \frac{1}{2} C_2 C_{10} - \frac{1}{4} C_1 C_9\right) \\ C_{13} &= \frac{\chi}{h} \left(1 + \frac{C_2}{2} + \frac{C_1}{4}\right), C_{14} = \frac{\chi}{h} \left(1 - \frac{C_2}{2} + \frac{C_1}{4}\right) \\ C_{15} &= -\lambda \omega_\xi C_6, C_{16} = \frac{\chi}{\lambda_o h}, \lambda = \frac{h}{a} \\ Q_n &= \int_{-h/2}^{h/2} \eta_o \xi^n d\xi \quad (n=0, 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \dots\dots\dots (7)$$

以上で3個の未知数 T_0, T_1, T_2 に対して, 式(6)が与えられ, これを解くと殻の温度分布が求められる。

2.2 熱変形方程式 回転対称殻の平衡方程式ならびにひずみと中央面の変位・回転との関係には, 殻厚方向のせん断変形を考慮に入れた Reissner-Naghdi の理論⁽⁸⁾⁽⁹⁾を採用する。また構成関係には温度の影響を考慮に入れた Perzyna の弾/粘塑性式⁽¹⁰⁾を用いる。これらの殻理論ならびに構成関係に関する基礎式は, 各々既発表の論文⁽¹²⁾⁽¹³⁾中の諸式と同一なので, ここでは紙面の都合もあり簡略化して列挙する。

○時間または時間とともに単調に変化する量について微分した平衡方程式:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \dot{N}_\xi}{\partial \xi} + \gamma(\dot{N}_\xi - \dot{N}_\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{N}_{\theta\xi}}{\partial \theta} + \omega_\xi \dot{Q}_\xi + a \dot{P}_\xi = 0 \\ & \frac{\partial \dot{N}_{\xi\theta}}{\partial \xi} + \gamma(\dot{N}_{\xi\theta} + \dot{N}_{\theta\xi}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{N}_\theta}{\partial \theta} + \omega_\theta \dot{Q}_\theta + a \dot{P}_\theta = 0 \\ & \frac{\partial \dot{Q}_\xi}{\partial \xi} + \gamma \dot{Q}_\xi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{Q}_\theta}{\partial \theta} - (\omega_\xi \dot{N}_\xi + \omega_\theta \dot{N}_\theta) + a \dot{P}_\xi = 0 \\ & \dot{Q}_\xi - \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \dot{M}_\xi}{\partial \xi} + \gamma(\dot{M}_\xi - \dot{M}_\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{M}_{\theta\xi}}{\partial \theta} \right] = 0 \\ & \dot{Q}_\theta - \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \dot{M}_{\xi\theta}}{\partial \xi} + \gamma(\dot{M}_{\xi\theta} + \dot{M}_{\theta\xi}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{M}_\theta}{\partial \theta} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで, $\{N\} = \{N_\xi, N_\theta, N_{\xi\theta}, N_{\theta\xi}, Q_\xi, Q_\theta\}$, $\{M\} = \{M_\xi,$

$M_\theta, M_{\xi\theta}, M_{\theta\xi}\}$: 殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメント(図1), P_ξ, P_θ, P_ξ : 殻の中央面の単位面積当たりの分布荷重(図1)である。

○中央面のひずみと変位の関係:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\xi m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \xi} + \omega_\xi \dot{W} \right] \\ \dot{\epsilon}_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \theta} + \gamma \dot{U}_\xi + \omega_\theta \dot{W} \right] \\ \dot{\epsilon}_{\xi\theta m} &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \xi} - \gamma \dot{U}_\theta \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

○曲率の変化量と変位成分の関係:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\chi}_\xi &= \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{\Phi}_\xi}{\partial \xi}, \dot{\chi}_\theta = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{\Phi}_\theta}{\partial \theta} + \gamma \dot{\Phi}_\xi \right) \\ \dot{\chi}_{\xi\theta} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{\partial \dot{\Phi}_\theta}{\partial \xi} - 2\omega_\xi \dot{\Phi}_n \right) \\ \dot{\chi}_{\theta\xi} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{\Phi}_\xi}{\partial \theta} - \gamma \dot{\Phi}_\theta + 2\omega_\theta \dot{\Phi}_n \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

○中央面の回転と変位・ひずみの関係:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}_\xi &= \frac{1}{a} \left(-\frac{\partial \dot{W}}{\partial \xi} + \omega_\xi \dot{U}_\xi \right) + 2 \dot{\epsilon}_{\xi m} \\ \dot{\Phi}_\theta &= \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{W}}{\partial \theta} + \omega_\theta \dot{U}_\theta \right) + 2 \dot{\epsilon}_{\theta m} \\ \dot{\Phi}_n &= \frac{1}{2a} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \xi} + \gamma \dot{U}_\theta \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

○殻厚中央面から ζ の距離にある点のひずみ:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_\xi &= (\dot{\epsilon}_{\xi m} + \zeta \dot{\chi}_\xi) / L_\xi, \dot{\epsilon}_\theta = (\dot{\epsilon}_{\theta m} + \zeta \dot{\chi}_\theta) / L_\theta \\ \dot{\epsilon}_{\xi\theta} &= \{ (\dot{\epsilon}_{\xi\theta m} + \dot{\Phi}_n) / 2 + \zeta (\dot{\chi}_{\xi\theta} + \dot{\Phi}_n / R_s) \} / L_\xi \\ & \quad + \{ (\dot{\epsilon}_{\theta\xi m} - \dot{\Phi}_n) / 2 + \zeta (\dot{\chi}_{\theta\xi} - \dot{\Phi}_n / R_o) \} / L_\theta \\ \dot{\epsilon}_{\xi\zeta} &= \dot{\epsilon}_{\xi\zeta m} / L_\xi, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta} = \dot{\epsilon}_{\theta\zeta m} / L_\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

○構成関係式:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma_o(T) < \Psi \left(\frac{\bar{\sigma} - \sigma^*(T)}{\sigma^*(T)} \right) > S_{ij} J_2^{-1/2} \dots (13)$$

ここで, $(\dot{\cdot})$: 時間に関する微分, ϵ_{ij}^{vp} : 粘塑性ひずみ, S_{ij} : 偏差応力, J_2 : 偏差応力の第2不変量, γ_o : 粘性を表す定数(温度 T の関数), $\bar{\sigma}$: ミーゼスの相当応力($=\sqrt{3J_2}$), σ^* : 静的な降伏応力(温度 T の関数), $<>$: マコーレのカッコである。

全ひずみ速度が, 弾性ひずみ速度と粘塑性ひずみ速度および熱ひずみ速度の和で表せるとすると, 仮定される殻の応力状態(殻厚方向の垂直応力 $\sigma_\xi=0$)において全ひずみ速度は次式のようなになる。

$$\{\dot{\varepsilon}\} = [D]^{-1}\{\dot{\sigma}\} + \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} + \{\dot{\varepsilon}^t\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{\sigma}\} &= \{\dot{\sigma}_\xi, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_{\xi\theta}, \dot{\sigma}_{\xi\zeta}, \dot{\sigma}_{\theta\zeta}\}^T, \{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}_\xi, \dot{\varepsilon}_\theta, \dot{\varepsilon}_{\xi\theta}, \dot{\varepsilon}_{\xi\zeta}, \dot{\varepsilon}_{\theta\zeta}\}^T, \\ \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} &= \{\dot{\varepsilon}_\xi^{vp}, \dot{\varepsilon}_\theta^{vp}, \dot{\varepsilon}_{\xi\theta}^{vp}, \dot{\varepsilon}_{\xi\zeta}^{vp}, \dot{\varepsilon}_{\theta\zeta}^{vp}\}^T, \{\dot{\varepsilon}^t\} = \{\alpha\dot{T}_e, \alpha\dot{T}_e, 0, 0, 0\}^T \\ [D] &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \\ \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_o(T) < \Psi \left(\frac{\bar{\sigma} - \sigma^*(T)}{\sigma^*(T)} \right) > \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \{\sigma\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)^{**1}$$

ここに、 E, ν および α は縦弾性係数、ポアソン比および線膨張係数である。また T_e は基準温度 \bar{T}_0 からの温度変化で、時刻 t における殻の任意点の温度を T とすると、

$$T_e(\xi, \theta, \zeta, t) = T(\xi, \theta, \zeta, t) - \bar{T}_0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。

式(14)を応力について解くと、

$$\{\dot{\sigma}\} = [D]\{\dot{\varepsilon}\} - \{\dot{\sigma}^{vp}\} - \{\dot{\sigma}^t\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{\sigma}^{vp}\} &= \{\dot{\sigma}_\xi^{vp}, \dot{\sigma}_\theta^{vp}, \dot{\sigma}_{\xi\theta}^{vp}, \dot{\sigma}_{\xi\zeta}^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\zeta}^{vp}\}^T = [D]\{\dot{\varepsilon}^{vp}\} \\ \{\dot{\sigma}^t\} &= \{\dot{\sigma}_\xi^t, \dot{\sigma}_\theta^t, 0, 0, 0\}^T = [D]\{\dot{\varepsilon}^t\} = \frac{\alpha E}{1-\nu} \{\dot{T}_e, \dot{T}_e, 0, 0, 0\}^T \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

殻の単位長さ当たりの合応力 $\{N\}$ および合モーメント $\{M\}$ は、式(17)を用い、かつ式(5)に示す近似を用いると、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}_\xi &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\left\{ 1 + \frac{h^2}{12a^2} \omega_\xi(\omega_\xi - \omega_\theta) \right\} \dot{\varepsilon}_{\xi m} + \nu \dot{\varepsilon}_{\theta m} - \frac{h^2}{12a} (\omega_\xi - \omega_\theta) \dot{\chi}_\xi \right] - \dot{N}_\xi^{vp} - \dot{N}_\xi^t \\ \dot{N}_{\xi\theta} &= \frac{Eh}{1+\nu} \left[\dot{\varepsilon}_{\xi\theta m} + \frac{h^2}{12a^2} (\omega_\xi - \omega_\theta) \left\{ \frac{\omega_\xi}{2} (\dot{\varepsilon}_{\xi\theta m} - \dot{\Phi}_n) - a \dot{\chi}_{\xi\theta} \right\} \right] - \dot{N}_{\xi\theta}^{vp} \\ \dot{Q}_\xi &= \frac{5}{6} \frac{Eh}{1+\nu} \dot{\varepsilon}_{\xi\zeta m} \left\{ 1 + \frac{h^2}{12a^2} \omega_\xi(\omega_\xi - \omega_\theta) \right\} - \dot{Q}_\xi^{vp} \\ \dot{M}_\xi &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\left\{ 1 + \frac{3}{20} \frac{h^2}{a^2} \omega_\xi(\omega_\xi - \omega_\theta) \right\} \dot{\chi}_\xi + \nu \dot{\chi}_\theta - \frac{1}{a} (\omega_\xi - \omega_\theta) \dot{\varepsilon}_{\xi m} \right] - \dot{M}_\xi^{vp} - \dot{M}_\xi^t \\ \dot{M}_{\xi\theta} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left[\left\{ 1 + \frac{3}{20} \frac{h^2}{a^2} \omega_\xi(\omega_\xi - \omega_\theta) \right\} \dot{\chi}_{\xi\theta} + \dot{\chi}_{\theta\xi} - \frac{1}{2a} (\omega_\xi - \omega_\theta) \left\{ \dot{\varepsilon}_{\xi\theta m} - \dot{\Phi}_n \left(1 + \frac{3}{10} \frac{h^2}{a^2} \omega_\xi^2 \right) \right\} \right] - \dot{M}_{\xi\theta}^{vp} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

なお、 $N_\theta, N_{\theta\xi}, Q_\theta, M_\theta, M_{\theta\xi}$ は、それぞれ $N_\xi, N_{\xi\theta}, Q_\xi, M_\xi, M_{\xi\theta}$ の式中の添字 ξ を θ に、 θ を ξ に、また $-\Phi_n$ を Φ_n に置き換えたものである。また、 $()^{vp}, ()^t$ はそれぞれ粘塑性による見かけの内力成分および温度変化 T_e による内力成分を示し、次式によって見かけの応力および熱応力の変化率から計算できる。

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{N}_\xi^{vp}, \dot{N}_{\xi\theta}^{vp}, \dot{Q}_\xi^{vp}, \dot{M}_\xi^{vp}, \dot{M}_{\xi\theta}^{vp}, \dot{N}_\xi^t, \dot{M}_\xi^t\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}_\xi^{vp}, \dot{\sigma}_\theta^{vp}, \dot{\sigma}_{\xi\theta}^{vp}, \dot{\sigma}_{\xi\zeta}^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\zeta}^{vp}, \dot{\sigma}_\xi^t, \dot{\sigma}_\theta^t\} L_\theta d\zeta \\ \{\dot{N}_\theta^{vp}, \dot{N}_{\theta\xi}^{vp}, \dot{Q}_\theta^{vp}, \dot{M}_\theta^{vp}, \dot{M}_{\theta\xi}^{vp}, \dot{N}_\theta^t, \dot{M}_\theta^t\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}_\theta^{vp}, \dot{\sigma}_\xi^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\xi}^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\zeta}^{vp}, \dot{\sigma}_{\xi\zeta}^{vp}, \dot{\sigma}_\theta^t, \dot{\sigma}_\xi^t\} L_\xi d\zeta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

以上で56個の独立変数 $\dot{U}_\xi, \dot{U}_\theta, \dot{W}, \dot{\Phi}_\xi, \dot{\Phi}_\theta, \dot{\Phi}_n, \dot{\varepsilon}_{\xi m}, \dot{\varepsilon}_{\theta m}, \dot{\varepsilon}_{\xi\theta m}, \dot{\varepsilon}_{\xi\zeta m}, \dot{\varepsilon}_{\theta\zeta m}, \dot{\chi}_\xi, \dot{\chi}_\theta, \dot{\chi}_{\xi\theta}, \dot{\chi}_{\theta\xi}, \{\dot{\varepsilon}^{vp}\}, \{\dot{\varepsilon}^t\}, \{\dot{\sigma}\}, \{\dot{\sigma}^{vp}\}, \{\dot{\sigma}^t\}, \{\dot{N}\}, \{\dot{M}\}, \{\dot{N}^{vp}\}, \{\dot{M}^{vp}\}, \dot{N}_\xi^t, \dot{N}_\theta^t, \dot{M}_\xi^t, \dot{M}_\theta^t$ に対して、式(8)～(11), (15), (17)～(20)の56個の式が得られたことになる。

**1 $\{ \}^T$ は転置行列を表す。

3. 無次元方程式

一般に非軸対称問題を解析するには、各変数を θ 方向にフーリエ級数で表し、その係数を定めればよい。そこで 2 章に示した 59 個の変数のうち、粘塑性ひずみ速度 $\{\dot{\epsilon}^{vp}\}$ ならびに熱ひずみ速度 $\{\dot{\epsilon}^t\}$ を除く 53 個の変数と分布荷重、殻の内外の周囲温度および発熱量をフーリエ級数に展開する⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽¹²⁾。これらのフーリエ展開式を前述の基礎式に代入し、フーリエ係数(対応する小文字を使う)に関する式をつくると、2 章の殻の熱伝導方程式から、 $t_0^{(n)}$, $t_1^{(n)}$, $t_2^{(n)}$ に関する次の三元連立 2 階微分方程式が得られる。

$$A_1 Y'' + A_2 Y' + A_3 Y = A_4 + A_5 (\partial Y / \partial \tau) \quad \dots\dots\dots (21)$$

ただし、 $Y = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, t_2^{(n)}\}^T$, $\tau = \chi t / a^2$ 。ここで、 $A_1 \sim A_3$ は殻の形状と殻の内外表面の相対熱伝達率から定まる 3×3 の定数行列であり、 A_4 は殻の形状、殻の内外の周囲温度、相対熱伝達率ならびに発熱量から定まる 3×1 の定数行列である。また A_5 も殻の形状から定まる 3×3 の定数行列である。

次に熱変形方程式は順次未知数を消去することにより、変位 $u_\xi^{(n)}$, $u_\theta^{(n)}$, $w^{(n)}$ および回転 $\varphi_\xi^{(n)}$, $\varphi_\theta^{(n)}$ に関する次の五元連立 2 階微分方程式になる。

$$B_1 \dot{Z}'' + B_2 \dot{Z}' + B_3 \dot{Z} = B_4 \quad \dots\dots\dots (22)$$

ただし、 $\dot{Z} = \{\dot{u}_\xi^{(n)}, \dot{u}_\theta^{(n)}, \dot{w}^{(n)}, \dot{\varphi}_\xi^{(n)}, \dot{\varphi}_\theta^{(n)}\}^T$, $(\dot{}) = \partial / \partial t$ 。ここで、 $B_1 \sim B_3$ は殻の形状と ν の値から定まる 5×5 の定数行列であり、また $B_4 (= \{b_1, \dots, b_5\}^T)$ は殻の形状のほかに、分布荷重、温度負荷および粘塑性によるみかけの内力成分から定まる定数行列で、次式によって与えられる。なお、フーリエ級数の添字 (n) は便宜上省略する。

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \dot{n}_\xi^{vp} + \dot{n}_\xi^t + \gamma(\dot{n}_\xi^{vp} + \dot{n}_\xi^t - \dot{n}_\theta^{vp} - \dot{n}_\theta^t) + (n/\rho) \dot{n}_\theta^{vp} + \omega_\xi \dot{q}_\xi^{vp} - \dot{p}_\xi \\ b_2 &= \dot{n}_\theta^{vp} + \gamma(\dot{n}_\theta^{vp} + \dot{n}_\theta^t) - (n/\rho)(\dot{n}_\xi^{vp} + \dot{n}_\xi^t) + \omega_\theta \dot{q}_\theta^{vp} - \dot{p}_\theta \\ b_3 &= \dot{q}_\xi^{vp} + \gamma \dot{q}_\xi^{vp} + (n/\rho) \dot{q}_\theta^{vp} - \omega_\xi(\dot{n}_\xi^{vp} + \dot{n}_\xi^t) - \omega_\theta(\dot{n}_\theta^{vp} + \dot{n}_\theta^t) - \dot{p}_\xi \\ b_4 &= \dot{q}_\xi^{vp} - \lambda^2(\dot{m}_\xi^{vp} + \dot{m}_\xi^t) - \lambda^2 \gamma(\dot{m}_\xi^{vp} + \dot{m}_\xi^t - \dot{m}_\theta^{vp} - \dot{m}_\theta^t) - \lambda^2(n/\rho) \dot{m}_\theta^{vp} \\ b_5 &= \dot{q}_\theta^{vp} - \lambda^2 \dot{m}_\theta^{vp} - \lambda^2 \gamma(\dot{m}_\xi^{vp} + \dot{m}_\xi^t) + \lambda^2(n/\rho)(\dot{m}_\xi^{vp} + \dot{m}_\xi^t) ; \lambda = h/a \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

式(23)に含まれる粘塑性と温度変化に関する内力成分の変化率のフーリエ係数は、式(18), (20)からそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_o h \sum_{n=0}^{\infty} [A_n] \{ \dot{n}_\xi^{vp(n)}, \dot{n}_\theta^{vp(n)}, \dot{n}_\xi^{vp(n)}, \dot{n}_\theta^{vp(n)}, \dot{q}_\xi^{vp(n)}, \dot{q}_\theta^{vp(n)} \}^T &= \int_{-h/2}^{h/2} [L_1] [D] \{ \dot{\epsilon}^{vp} \} d\zeta \\ \frac{\sigma_o h^3}{a} \sum_{n=0}^{\infty} [B_n] \{ \dot{m}_\xi^{vp(n)}, \dot{m}_\theta^{vp(n)}, \dot{m}_\xi^{vp(n)}, \dot{m}_\theta^{vp(n)} \}^T &= \int_{-h/2}^{h/2} [L_2] [\bar{D}] \{ \dot{\epsilon}_\xi^{vp}, \dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_\xi^{vp} \}^T d\zeta \\ \{ \dot{n}_\xi^t, \dot{m}_\xi^t \} &= \frac{1}{h} \frac{1}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ 1, \frac{a\zeta}{h^2} \right\} \dot{t}_e L_\theta d\zeta, \{ \dot{n}_\theta^t, \dot{m}_\theta^t \} = \frac{1}{h} \frac{1}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ 1, \frac{a\zeta}{h^2} \right\} \dot{t}_e L_\xi d\zeta \\ \sigma_o \sum_{n=0}^{\infty} [C_n] \{ \dot{s}_\xi^{vp(n)}, \dot{s}_\theta^{vp(n)}, \dot{s}_\xi^{vp(n)}, \dot{s}_\theta^{vp(n)}, \dot{s}_\xi^{vp(n)} \}^T &= [D] \{ \dot{\epsilon}^{vp} \} \quad \dots\dots\dots (24) \\ [D] &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここに

$$[L_1] = \begin{bmatrix} L_\theta & & & & 0 \\ & L_\xi & & & \\ & & L_\theta & & \\ & & & L_\xi & \\ & & & & L_\theta \\ 0 & & & & & L_\xi \end{bmatrix}$$

$$[L_2] = \begin{bmatrix} L_\theta & & 0 \\ & L_\xi & \\ & & L_\theta \\ 0 & & & L_\xi \end{bmatrix}$$

$$[A_n] = [\cos n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta, \sin n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta]$$

$$[B_n] = [\cos n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta, \sin n\theta]$$

$$[C_n] = [\cos n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta]$$

$[A_n], [B_n], [C_n]$ は対角行列であり、 σ_o は代表応力である。式(24), (25)の右辺の粘塑性ひずみ速度は、応力値から式(15)によって計算できる。また積分には殻厚方向に等間隔に K 個の点を取って、シンプソンの 1/3 則を適用する。

4. 数値計算法

ある任意の計算段階における温度と、変位ならびに回転の変化率とは、式(21)と(22)を適当な境界条件の

もとで解けば得られ、またこれらを用いて、内力成分の変化率は、式(9)～(11)を式(19)に代入したものから求められる。しかしながら、式(21)と(22)を厳密に理論解析することは困難であるから、差分法によって数値的に解を求める。この数値解法は、著者らがすでに発表した薄肉殻の場合⁽⁶⁾⁽⁷⁾とほぼ同様であるので、ここでは紙面の都合もあり省略する。

5. 数 値 例

数値例として、両端単純可動支持の軟鋼製円筒殻の中央部に、軸対称な流体加熱が時間に対してステップ状に作用する問題を取扱った(図2)。基準温度および円筒殻の初期温度は 0°C とし、殻の両端は断熱とした。また円筒殻内外面での相対熱伝達率 h_i, h_o は、各々0.02, 100 1/mとした。式(24), (25)の σ_o は、本計算では $\sigma_o=1$ とした。

計算に用いた軟鋼の材料定数は次のとおりである⁽¹⁰⁾。

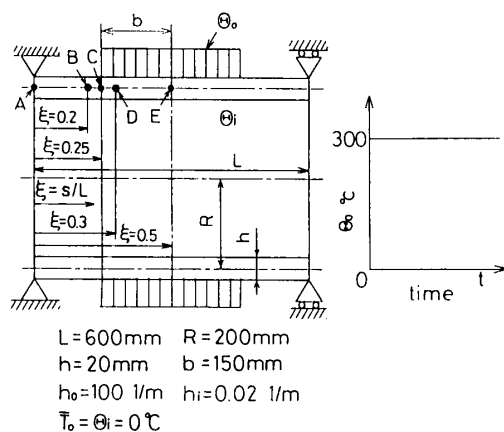


図2 数値例

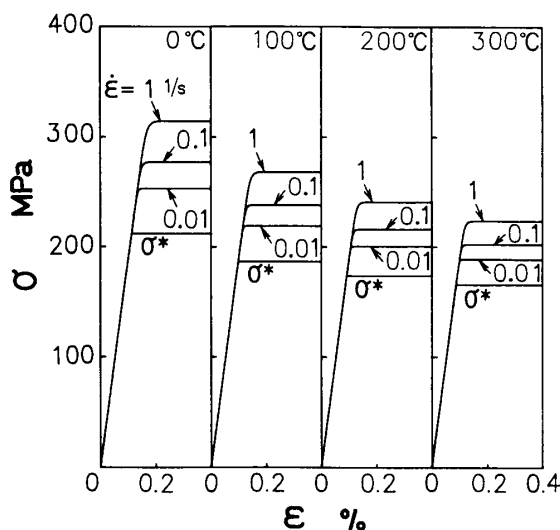


図3 応力-ひずみ線図

$$\left. \begin{aligned} E &= 189.5 \text{ GPa}, \rho_o = 7.78 \text{ g/cm}^3, \nu = 0.3, \\ \lambda_o &= 50.1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}, \alpha = 11.7 \times 10^{-6} \text{ 1/K} \\ c &= 0.460 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)} \\ \sigma^*(T) &= 207 \exp \{0.45(288/T - 1)\} \text{ MPa} \\ \gamma_o(T) &= 30.12[1 + 2.6\{(220 - T)/273\}^2] \text{ 1/s} \end{aligned} \right\}$$

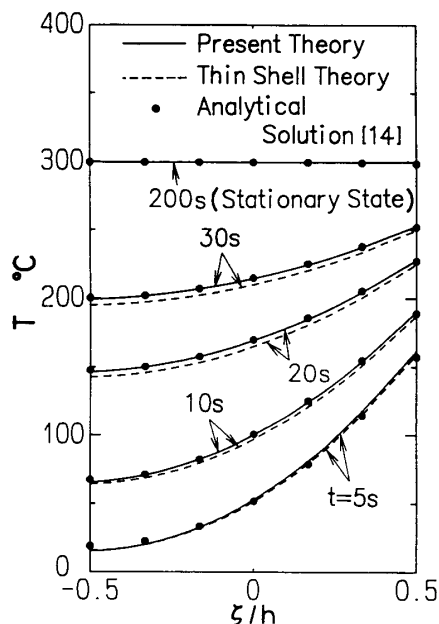


図4 点E ($\xi=0.5$)の殻厚方向の温度分布

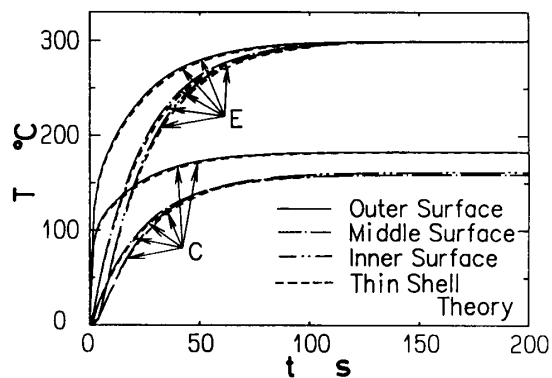


図5 点C, Eの温度の時間的变化

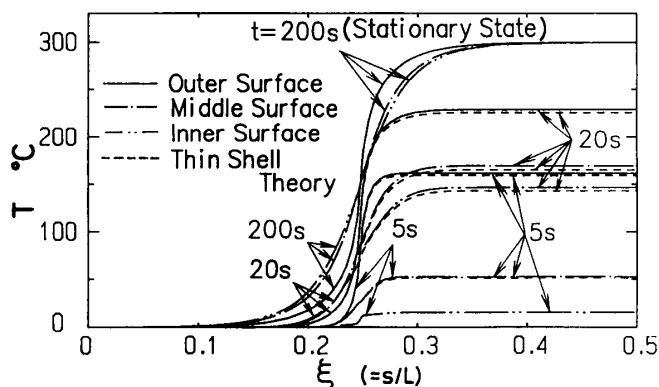


図6 温度の子午線方向分布

$$\Psi(f) = [(\sigma - \sigma^*(T))/\sigma^*(T)]^5 \quad \dots\dots\dots (26)$$

なお、上式の T は絶対温度 [K] である。これらの材料定数を用いた場合の 0, 100, 200, 300°C の各温度での応力-ひずみ線図を図 3 に示す。

差分点数は $N=101$, 殻厚方向の格子点数は $K=19$ とし、時間間隔 Δt は $\Delta t=0.1$ s とした。これらの値は、解の収束性と利用した計算機の容量および計算時間を考慮して決定した。

次に計算結果について考察する。図 4～11 において、

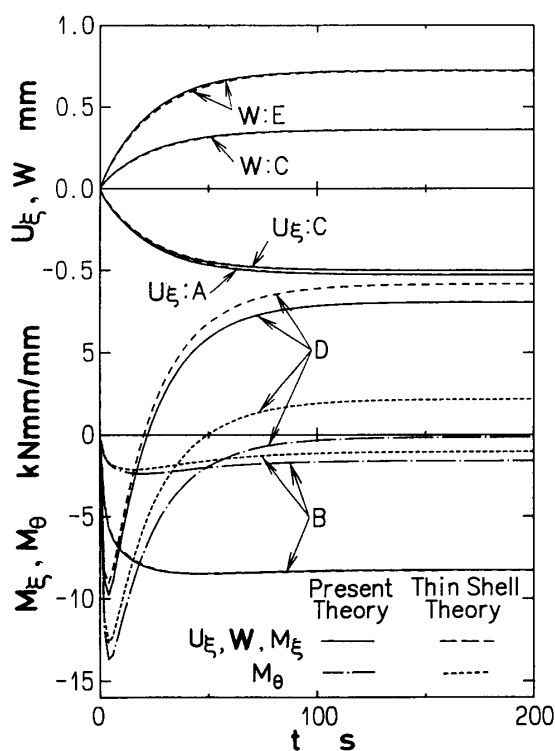


図 7 変位, 合モーメントの時間的変化

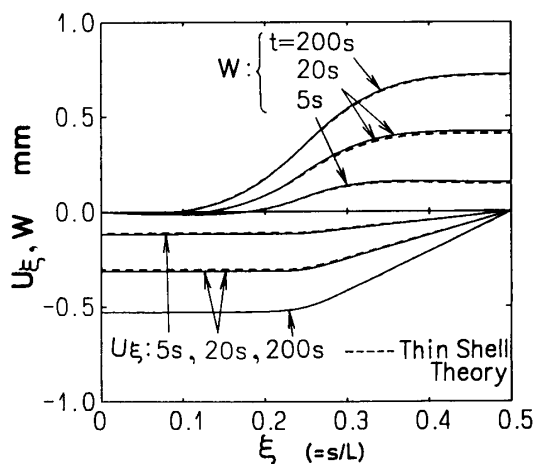


図 8 変位の子午線方向分布

実線, 一点鎖線および二点鎖線は本理論による結果であり, 破線および点線は, $\xi/R_s, \xi/R_o$ の項を 1 に比較し小さいものとして省略し, かつ殻厚方向のせん断変形を無視した薄肉理論⁽⁶⁾⁽⁷⁾ による計算値である。

図 4 は点 E ($\xi=0.5$) における殻厚方向の温度分布の時間的変化を示す。図中黒丸印は, 石田・竹内の解析解⁽¹⁴⁾ であり, 本解法による数値結果と, 応答初期を除いてよく一致している。図 5 は点 C ($\xi=0.25$) ならびに点 E の温度の時間的変化を, また図 6 は子午線 AE 上の温度分布を, とともに外表面, 中央面, 内表面について示したものである。図 4～6 より, 内面の相対熱伝達率 h_i に比べて外面の相対熱伝達率 h_o が大きいいため, 殻厚方向の温度は, 定常状態の円筒殻中央部 ($\xi=0.4\sim 0.5$) を除いて, 曲線状に変化していることがわかる。また薄肉殻の熱伝導方程式から求めた結果は,

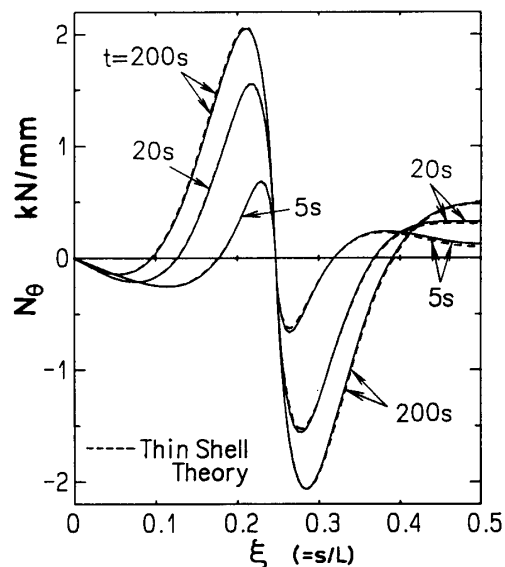


図 9 合応力 N_θ の子午線方向分布

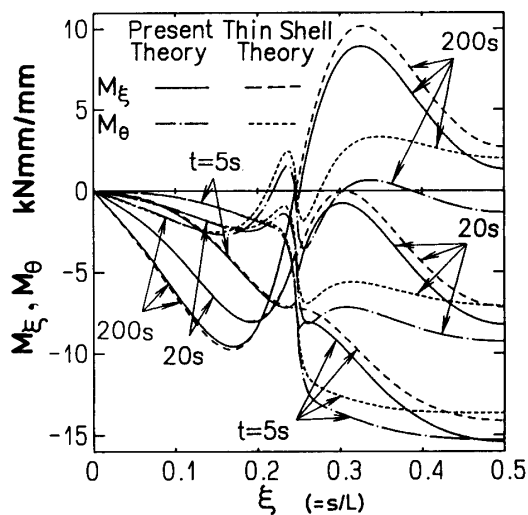
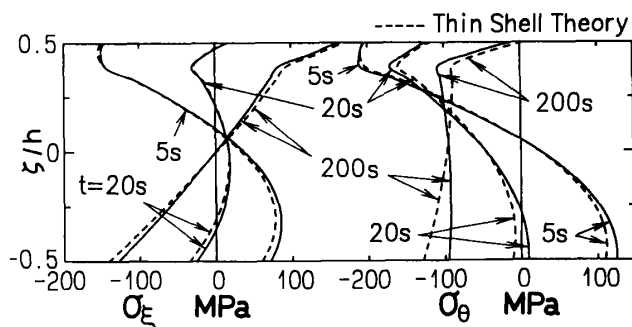


図 10 合モーメントの子午線方向分布

図 11 点D ($\xi=0.3$) の殻厚方向の応力分布

非定常状態において、本理論による解よりも若干低くなっている。

図 7 は、点 A ($\xi=0$), C の子午線方向変位 U_ξ , 点 C, E の半径方向変位 W ならびに点 B, D ($\xi=0.2, 0.3$) の曲げモーメント M_ξ, M_θ の時間的変化を表す。また図 8~10 には、各々熱負荷後 5, 20, 200 秒での W と U_ξ , 合応力 N_θ ならびに M_ξ, M_θ の子午線方向分布を示す。前述の図 5 と図 7 によると、熱負荷後 150 秒ほどで定常状態に至っている。変位ならびに合応力の子午線方向分布は、時間とともに単調に変化するが、合モーメントは円筒殻中央部 ($\xi=0.3\sim0.5$) で、熱負荷後およそ 5 秒で反転する。本理論による結果と薄肉理論による結果との差は、変位成分と合応力成分 N_θ についてはともに極めて小さいが、合モーメント成分については、円筒殻中央部 ($\xi=0.3\sim0.5$) で顕著である。

次に、図 11 に点 D における応力 σ_ξ と σ_θ の殻厚方向分布を、また図 12 に本理論による塑性域の進展の様子を示す。図 12 で除荷域とは、一度以上降伏を経験した後、応力が降伏点以下になっている領域のことである。ここには示さなかったが、薄肉理論の場合も降伏域の広がり方はほぼ同様である。両図より直接熱負荷を受ける領域 ($\xi=0.25\sim0.5$) では、負荷直後の殻厚方向の大きな温度差により、外表面近傍で大きな圧縮熱応力を生じて降伏するとともに、負の大きな曲げモーメントを生じる。その後、熱伝導による変形の進行とともに、応力が緩和し除荷域となるが、やがて曲げモーメント M_ξ が大きくなる点 D 近傍の外表面付近で、再降伏域が生じている。

6. 結 言

本論文では、殻の周囲の流体により温度負荷を受ける中程度の厚さの回転対称殻の熱弾/粘塑性変形問題の解法を示した。殻厚方向の温度分布を二次曲線で近似し、与えられた初期条件と熱伝達を考慮した境界条件のもとで、熱伝導方程式を解いた。そして得られた

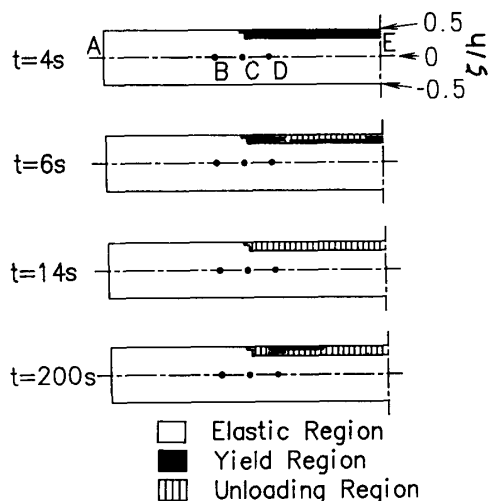


図 12 本理論による降伏領域の進展

温度分布をもとに、熱弾/粘塑性に関する回転対称殻の基礎関係式から、変位、内力などを求めた。構成関係には、温度の影響を考慮した Perzyna の弾/粘塑性式を採用し、厚肉の場合に考慮すべきせん断変形には、Reissner-Naghdi の理論を用いた。数値解法には、差分法を適用した。

数値例として、両端単純可動支持の軟鋼円筒殻に、流体加熱が作用する問題を取扱った。その結果、殻厚方向に二次曲線の温度分布を仮定した本数値計算手法は、かなり精度良く殻体内の温度分布を求めることができ、伝熱による殻の熱変形問題を解析するのに極めて有効であることがわかった。また、本数値例では軸対称な局所的熱負荷の場合を取り上げたが、本理論による結果と、せん断変形の影響を無視した薄肉理論による結果との差は、変位、合応力成分において小さく、合モーメント成分において顕著であることがわかった。

文 献

- (1) Bolotin, V. V., *PMM*, 24-2(1960), 515.
- (2) Steele, C. R. and Yang, J. S., *SUDAAR No. 371*, Stanford University, (1969).
- (3) Updike, D. P. and Kalnins, A., *Numerical Methods for Thermal Problems*, 5-1(1987), 265.
- (4) Shirakawa, K. and Ochiai, Y., *Nucl. Eng. Des.*, 54(1979), 337.
- (5) 遠藤, 航空宇宙技術研究所報告, TR-577(1979), 1.
- (6) 竹園・ほか 3 名, 機論, No. 923-1(1992-2), 85.
- (7) 竹園・ほか 3 名, 機論, 59-562, A(1993), 1443.
- (8) Reissner, E., *Am. J. Math.*, 63-1(1941), 177.
- (9) Naghdi, P. M., *Q. Appl. Math.*, 14-4(1957), 369.
- (10) Perzyna, P., *Adv. Appl. Mech.*, 9(1966), 243, Academic Press.
- (11) Mizoguchi K., *Bull. Univ. Osaka Pref.*, Ser. A, 15(1966), 1.
- (12) 竹園・ほか 2 名, 機論, 51-472, A(1985), 2829.
- (13) 埜・ほか 3 名, 機論, 54-503, A(1988), 1457.
- (14) 石田・竹内, 機論, 50-456, A(1984), 1494.