

流体加熱を受ける多層回転対称殻の熱弾/粘塑性変形*

竹園茂男*¹, 埜克己*¹, 稲村栄次郎*²Elasto/Visco-Plastic Deformation of Multi-Layered Shells of Revolution
under Thermal Loading due to Fluid

Shigeo TAKEZONO, Katsumi TAO and Eijiroh INAMURA

This paper is concerned with an analytical formulation and a numerical solution of the elasto/visco-plastic deformation of the multi-layered shells of revolution subjected to thermal loads due to fluid. Firstly, the temperature distribution through the thickness in each layer is assumed to be linear, and the temperature field in the shell is determined using the equations of heat conduction and heat transfer. Secondly, the stresses and deformations are analyzed by the thermal stress equations. The equations of equilibrium and the relations between the strains and displacements are derived from the Sanders shell theory. For the constitutive relations, Perzyna's equations are employed. As a numerical example, a two-layered cylindrical shell composed of mild steel and titanium subjected to locally distributed thermal loads due to fluid is analyzed. Numerical computations have been carried out for three cases of the ratio of the thickness of the titanium layer to the shell thickness. It is found from the computations that the temperature and stress distributions and the deformation are significantly varied depending on the ratio.

Key Words: Structural Analysis, Thermal Stress, Multi-Layered Shells, Elasto/Visco-Plasticity, Heat Conduction, FDM

1. 緒 言

近年、高温・高応力下の殻構造物の設計において、大きな熱応力を緩和するために異種材質を組合せた多層複合構造や傾斜機能材料のような不均質材料を用いる場合が多くなっている。最近、多層円筒殻、多層円筒、多層平板などを対象とした熱応力問題の解法が、多数報告されている⁽¹⁾。しかしながら、これらの研究はほとんどが弾性理論に基づくものであり、熱弾/粘塑性応答問題を取扱った研究は少ないようである。

そこで本研究では、殻の周囲の流体により不均一な温度負荷を受ける多層回転対称殻の熱弾/粘塑性変形問題を取扱った。まず殻の各層の厚さ方向の温度分布を線形近似し、各層の境界面で温度ならびに熱流束が連続であるとして、多層回転対称殻に対する非定常熱伝導方程式を導出する。そして与えられた初期条件と熱伝達を考慮した境界条件のもとで、殻の熱伝導方程式を解く。次に得られた温度分布をもとに多層複合殻の熱弾/粘塑性変形に関する基礎関係式から、変位、内

力などを求める。殻の平衡方程式には、Sanders, Jr.の薄肉殻理論式⁽²⁾を用いた。構成関係には、温度の影響を考慮したPerzynaの弾/粘塑性式⁽³⁾を採用した。導かれた基礎式の数値解法には、差分法を適用した。

数値例として、内側に軟鋼、外側にチタンの層を配した二層構造の円筒殻に、流体加熱が局所的に作用する問題を取り上げた。

2. 基 礎 式

図1に示すように、殻の中央面上に子午線方向に ξ 、円周方向に θ 、中央面から外向きに ζ の座標軸をとる。対称軸から中央面までの距離を r とし、殻の中央面の形を $r=r(\xi)$ とすると、点Pにおける無次元曲率 $\omega_\xi(=a/R_\xi)$ 、 $\omega_\theta(=a/R_\theta)$ および無次元半径 $\rho(=r/a)$ の間には、次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= -(\gamma' + \gamma^2)/\omega_\theta, \quad \omega_\theta = \sqrt{1 - (\rho')^2}/\rho \\ \omega'_\theta &= \gamma(\omega_\xi - \omega_\theta), \quad \rho''/\rho = -\omega_\xi\omega_\theta \\ \gamma &= \rho'/\rho, \quad \xi = s/a, \quad (\quad)' = d(\quad)/d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

ここに、 s は子午線方向の長さであり、 a は代表長さである。

2・1 熱伝導方程式 n 層から成る殻の内側から i 番めの層(任意の層)の諸量に添字 i をつけると、殻

* 原稿受付 平成5年7月5日。

¹ 正員、豊橋技術科学大学 (〒441 豊橋市天伯町字雲雀ヶ丘1-1)。² 学生員、豊橋技術科学大学大学院。

体内の任意の層の熱伝導方程式は ξ, θ, ζ 座標を用いて次式で与えられる。

$$c_i \rho_{oi} \frac{\partial}{\partial t} (T_i) - \frac{\lambda_i}{a^2} \left[\gamma \frac{\partial}{\partial \xi} (T_i) + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (T_i) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (T_i) \right] - \lambda_i \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (T_i) - \eta_i = 0 \quad \dots (2)$$

ここに、 T_i : 任意の時刻における殻体内の任意の点 (ξ, θ, ζ) の温度、 c_i : 比熱、 ρ_{oi} : 密度、 λ_i : 熱伝導率、 η_i : 単位時間、単位体積当たりの発熱量、 t : 時間である。

次に殻の内、外表面 ($\zeta = \pm h/2$) の温度境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial T_1}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=-h/2} &= h_i (T_{in} - \Theta_i), \\ \left[\frac{\partial T_n}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=h/2} &= -h_o (T_{out} - \Theta_o) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

ここに、 h_i, h_o : 殻の内、外表面の相対熱伝達率 (= $k_i/\lambda_i, k_o/\lambda_n, k$: 熱伝達率)、 T_{in}, T_{out} : 殻の内、外表面の温度、 Θ_i, Θ_o : 殻の内、外の周囲温度、 h : 殻厚である。

隣接する各層の境界面 (接着面) において、接触熱抵抗がなく、また温度ならびに熱流束の連続性が成立するものとする、次式が満足されなければならない。

$$\zeta = \zeta_{i-1} \text{ で } T_i = T_{i-1}, \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial \zeta} = \lambda_{i-1} \frac{\partial T_{i-1}}{\partial \zeta} \quad \dots (4)$$

ここで、 ζ_{i-1} は殻の内側から $i-1$ 番目の層と i 番目の層の間の境界面の ζ 座標値である。

各層の殻厚方向の温度分布を線形近似すると、 i 番目の層の時刻 t における温度分布 T_i は、殻中央面の位置で示す温度 T_{m1} と殻厚方向の温度こう配 G_1 を用

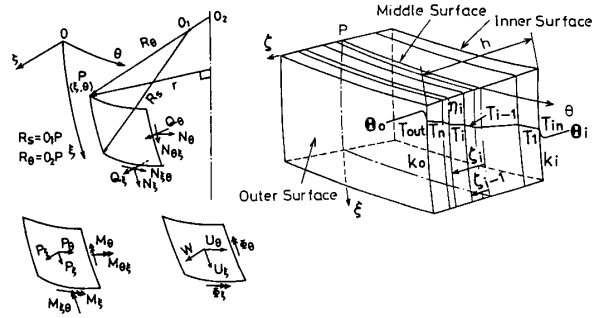


図 1 座標と諸記号

いて次式で与えられる。

$$T_i(\xi, \theta, \zeta, t) = T_{m1}(\xi, \theta, t) + \zeta G_1(\xi, \theta, t) \quad (\zeta_{i-1} \leq \zeta \leq \zeta_i) \quad \dots (5)$$

連続の条件式 (4) を用いると、式 (5) は殻の最も内側の層の T_{m1} および G_1 を用いて次式のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= T_{m1} + \zeta G_1 \\ T_2 &= T_{m1} + \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (\zeta - \zeta_1) + \zeta_1 \right\} G_1 \\ T_i &= T_{m1} + \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_i} (\zeta - \zeta_{i-1}) + \zeta_1 \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1 \sum_{l=2}^{i-1} \frac{\zeta_l - \zeta_{l-1}}{\lambda_l} \right\} G_1 \quad (i=3, 4, \dots, n) \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

式 (2) に式 (6) を代入し、全殻厚にわたって積分した式、ならびに両辺に ζ を掛けて積分した式は、殻の内外面の熱伝達による温度境界条件式 (3) を考慮すると、 T_{m1} と G_1 を用いて、各々次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i \rho_{oi} \zeta_{1,i} \frac{\partial T_{m1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n c_i \rho_{oi} \zeta_{1,i} \left\{ \zeta_1 + \lambda_1 \sum_{l=2}^{i-1} \frac{\zeta_{l,l}}{\lambda_l} + \frac{\zeta_{1,i}}{2} \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right\} \frac{\partial G_1}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a^2} \zeta_{1,i} \left[\gamma \frac{\partial T_{m1}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 T_{m1}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T_{m1}}{\partial \theta^2} \right] \\ - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a^2} \zeta_{1,i} \left[\zeta_1 + \lambda_1 \sum_{l=2}^{i-1} \frac{\zeta_{l,l}}{\lambda_l} + \frac{\zeta_{1,i}}{2} \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right] \left[\gamma \frac{\partial G_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 G_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 G_1}{\partial \theta^2} \right] + (k_o + k_i) T_{m1} \\ + \left\{ k_o \zeta_1 + k_i \zeta_o + k_o \lambda_1 \sum_{l=2}^n \frac{\zeta_{l,l}}{\lambda_l} \right\} G_1 - Q_o - k_o \Theta_o - k_i \Theta_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n c_i \rho_{oi} \zeta_{2,i} \frac{\partial T_{m1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n c_i \rho_{oi} \left[\zeta_{2,i} \left\{ \zeta_1 + \lambda_1 \sum_{l=2}^{i-1} \frac{\zeta_{l,l}}{\lambda_l} - \zeta_{i-1} \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right\} + \zeta_{3,i} \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right] \frac{\partial G_1}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a^2} \zeta_{2,i} \left[\gamma \frac{\partial T_{m1}}{\partial \xi} \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 T_{m1}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T_{m1}}{\partial \theta^2} \right] - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a^2} \left[\zeta_{2,i} \left\{ \zeta_1 + \lambda_1 \sum_{l=2}^{i-1} \frac{\zeta_{l,l}}{\lambda_l} - \zeta_{i-1} \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right\} + \zeta_{3,i} \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right] \left[\gamma \frac{\partial G_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 G_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 G_1}{\partial \theta^2} \right] \\ + \frac{h}{2} (k_o - k_i) T_{m1} + \frac{h}{2} \left(2\lambda_1 + k_o \zeta_1 - k_i \zeta_o + k_o \lambda_1 \sum_{l=2}^n \frac{\zeta_{l,l}}{\lambda_l} \right) G_1 - Q_1 - \frac{k_o h}{2} \Theta_o + \frac{k_i h}{2} \Theta_i = 0 \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{j,i} &= \frac{1}{j} (\zeta_i^j - \zeta_{i-1}^j) \quad (j=1, 2, 3) \\ Q_k &= \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \eta_i \zeta^k d\zeta \quad (k=0, 1) \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

以上で、2 個の未知数 T_{m1}, G_1 に対して、式 (7) が与えられ、これを解くと殻の温度分布が求められる。

2・2 熱変形方程式 回転対称殻の内力の平衡方程式ならびにひずみと中央面の変位・回転との関係には, Sanders の殻理論式⁽²⁾を採用する. また構成関係には温度の影響を考慮した Perzyna の弾/粘塑性式⁽³⁾を用いる. これらの殻理論式ならびに構成関係に関する基礎式は, 各々既発表の論文^{(4)~(7)}と同一なので, ここでは紙面の都合もあり簡略化して列挙する.

○時間または時間とともに単調に変化する量について微分した平衡方程式:

$$\left. \begin{aligned} a \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{N}_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{N}_{\xi\theta}) - \rho' \dot{N}_\theta \right] + \omega_\xi \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_{\xi\theta}) - \rho' \dot{M}_\theta \right] \\ + \frac{1}{2} (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_{\xi\theta}) + \rho a^2 \dot{P}_\xi = 0 \\ a \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{N}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{N}_{\xi\theta}) + \rho' \dot{N}_{\xi\theta} \right] + \omega_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_{\xi\theta}) + \rho' \dot{M}_{\xi\theta} \right] \\ + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\omega_\theta - \omega_\xi) \dot{M}_{\xi\theta} \right] + \rho a^2 \dot{P}_\theta = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_{\xi\theta}) - \rho' \dot{M}_\theta \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_{\xi\theta}) + \rho' \dot{M}_{\xi\theta} \right] \\ - a \rho (\omega_\xi \dot{N}_\xi + \omega_\theta \dot{N}_\theta) + \rho a^2 \dot{P}_\xi = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}_{\xi\theta} &= (\dot{N}_{\theta\xi} + \dot{N}_{\theta\xi})/2 \\ &+ [(1/R_\theta) - (1/R_\xi)] (\dot{M}_{\xi\theta} - \dot{M}_{\theta\xi})/4 \dots\dots\dots (10) \\ \dot{M}_{\xi\theta} &= (\dot{M}_{\theta\xi} + \dot{M}_{\theta\xi})/2 \end{aligned} \right\}$$

また, $N_\xi, N_\theta, N_{\xi\theta}, M_\xi, M_\theta, M_{\xi\theta}$: 殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメント (図 1), P_ξ, P_θ, P_ξ : 殻の単位面積当たりの分布荷重 (図 1) である.

○中央面のひずみと変位の関係:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\xi m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{U}_\xi) + \omega_\xi \dot{W} \right] \\ \dot{\epsilon}_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{U}_\theta) + \gamma \dot{U}_\xi + \omega_\theta \dot{W} \right] \\ \dot{\epsilon}_{\xi\theta m} &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{U}_\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{U}_\theta) - \gamma \dot{U}_\theta \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

○曲率の変化量と変位成分の関係:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\kappa}_\xi &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{\Phi}_\xi), \quad \dot{\kappa}_\theta = \frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\Phi}_\theta) + \gamma \dot{\Phi}_\xi \right\} \\ \dot{\kappa}_{\xi\theta} &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\Phi}_\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{\Phi}_\theta) - \gamma \dot{\Phi}_\theta \right. \\ &\left. + \frac{1}{2a} (\omega_\xi - \omega_\theta) \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{U}_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{U}_\theta) - \gamma \dot{U}_\theta \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

○中央面の回転と変位の関係:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}_\xi &= \frac{1}{a} \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{W}) + \omega_\xi \dot{U}_\xi \right] \\ \dot{\Phi}_\theta &= \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{W}) + \omega_\theta \dot{U}_\theta \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

○殻厚中央面から z の距離にある点のひずみ:

$$\{\dot{\epsilon}\} = \{\dot{\epsilon}_m\} + \zeta \{\dot{\kappa}\} \dots\dots\dots (14)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{\epsilon}\} &= \{\dot{\epsilon}_\xi, \dot{\epsilon}_\theta, \dot{\epsilon}_{\xi\theta}\}^T \\ \{\dot{\epsilon}_m\} &= \{\dot{\epsilon}_{\xi m}, \dot{\epsilon}_{\theta m}, \dot{\epsilon}_{\xi\theta m}\}^T \\ \{\dot{\kappa}\} &= \{\dot{\kappa}_\xi, \dot{\kappa}_\theta, \dot{\kappa}_{\xi\theta}\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15) **1$$

○構成関係式:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma_o(T) \left\langle \Psi \left(\frac{\bar{\sigma} - \sigma^*(T)}{\sigma^*(T)} \right) \right\rangle S_{ij} J_2^{-1/2} \dots (16)$$

ここで, $(\dot{\quad})$: 時間に関する微分, ϵ_{ij}^{vp} : 粘塑性ひずみ, S_{ij} : 偏差応力, J_2 : 偏差応力の第 2 不変量, γ_o : 粘性を表す定数 (温度 T の関数), $\bar{\sigma}$: ミーゼスの相当応力 ($= \sqrt{3} J_2$), σ^* : 静的な降伏応力 (温度 T の関数), $\langle \quad \rangle$: マコーレの括弧である.

○平面応力状態における全ひずみ速度:

$$\{\dot{\epsilon}\} = [D]^{-1} \{\dot{\sigma}\} + \{\dot{\epsilon}^{vp}\} + \{\dot{\epsilon}^t\} \dots\dots\dots (17)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{\sigma}\} &= \{\dot{\sigma}_\xi, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_{\xi\theta}\}^T \\ \{\dot{\epsilon}^{vp}\} &= \{\dot{\epsilon}_{\xi}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\xi\theta}^{vp}\}^T \\ \{\dot{\epsilon}^t\} &= \{\alpha \dot{T}_\xi, \alpha \dot{T}_\theta, 0\}^T \\ \{\dot{\epsilon}^{vp}\} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_o(T) \left\langle \Psi \left(\frac{\bar{\sigma} - \sigma^*(T)}{\sigma^*(T)} \right) \right\rangle \\ &\times \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \{\dot{\sigma}\} \\ [D] &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

**1 { }^T は転置行列を表す.

ここで、 E ：縦弾性係数、 ν ：ポアソン比、 α ：線膨張係数、 T_e ：基準温度 T_0 からの温度変化

$$T_e(\xi, \theta, \zeta, t) = T(\xi, \theta, \zeta, t) - T_0 \dots\dots\dots (19)$$

さて、式(17)に式(14)を代入し、 $\{\dot{\sigma}\}$ について解くと、次式が得られる。

$$\{\dot{\sigma}\} = [D]\{(\dot{\epsilon}_m) + \zeta(\dot{x})\} - \{\dot{\sigma}^{vp}\} - \{\dot{\sigma}^t\} \dots\dots\dots (20)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{\sigma}^{vp}\} &= \{\dot{\sigma}_\xi^{vp}, \dot{\sigma}_\theta^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\theta}^{vp}\}^T = [D]\{\dot{\epsilon}^{vp}\} \\ \{\dot{\sigma}^t\} &= \{\dot{\sigma}^t, \dot{\sigma}^t, 0\}^T = [D]\{\dot{\epsilon}^t\} = \frac{\alpha E}{1-\nu} \{T_e, T_e, 0\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

式(20)を用いると、殻の単位長さ当たりの合応力 $\{N\}$ および合モーメント $\{M\}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{N} \\ \dot{M} \end{Bmatrix} &= \{\dot{N}_\xi, \dot{N}_\theta, \dot{N}_{\theta\theta}, \dot{M}_\xi, \dot{M}_\theta, \dot{M}_{\theta\theta}\}^T \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\sigma}\zeta \end{Bmatrix} d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\sigma}\zeta \end{Bmatrix} d\zeta \\ &= \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_m \\ \dot{x} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{N}^{vp} \\ \dot{M}^{vp} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{N}^t \\ \dot{M}^t \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

ここで、 $()^{vp}$, $()^t$ はそれぞれ粘塑性による見掛けの内力成分および温度変化 T_e による内力成分を示し、次式によって見掛けの応力および熱応力の変化率から計算できる。

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{N}^{vp}\} &= \{\dot{N}_\xi^{vp}, \dot{N}_\theta^{vp}, \dot{N}_{\theta\theta}^{vp}\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}^{vp}\} d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \{\dot{\epsilon}^{vp}\} d\zeta \\ \{\dot{M}^{vp}\} &= \{\dot{M}_\xi^{vp}, \dot{M}_\theta^{vp}, \dot{M}_{\theta\theta}^{vp}\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}^{vp}\} \zeta d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \{\dot{\epsilon}^{vp}\} \zeta d\zeta \\ \{\dot{N}^t\} &= \{\dot{N}^t, \dot{N}^t, 0\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}^t\} d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{1-\nu_i} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \{\dot{\epsilon}^t\} d\zeta \\ \{\dot{M}^t\} &= \{\dot{M}^t, \dot{M}^t, 0\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}^t\} \zeta d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{1-\nu_i} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \{\dot{\epsilon}^t\} \zeta d\zeta \\ [D_i] &= \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu_i \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

また、

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= \int_{-h/2}^{h/2} [D] d\zeta = \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n [D_i] \zeta_{1,i} \\ \bar{B} &= \int_{-h/2}^{h/2} [D] \zeta d\zeta = \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \zeta d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n [D_i] \zeta_{2,i} \\ \bar{C} &= \int_{-h/2}^{h/2} [D] \zeta^2 d\zeta = \sum_{i=1}^n [D_i] \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \zeta^2 d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n [D_i] \zeta_{3,i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

以上で 36 個の未知数 $\{\dot{N}\}$, $\{\dot{M}\}$, \dot{U}_ξ , \dot{U}_θ , \dot{W} , $\{\dot{\epsilon}_m\}$, $\{\dot{x}\}$, $\dot{\Phi}_\xi$, $\dot{\Phi}_\theta$, $\{\dot{\sigma}\}$, $\{\dot{\sigma}^{vp}\}$, $\{\dot{\epsilon}^{vp}\}$, $\{\dot{N}^{vp}\}$, $\{\dot{M}^{vp}\}$, $\{\dot{\epsilon}^t\}$, $\{\dot{\sigma}^t\}$, $\{\dot{N}^t\}$, $\{\dot{M}^t\}$ に対して式(9), (11)~(13), (18), (20)~(23)の 36 個の式が得られたことになる。

3. 無次元方程式

一般に非軸対称問題を解析するには、各変数を θ 方向にフーリエ級数で表し、その係数を定めればよい。そこで 2 章に示した 36 個の変数のうち、粘塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_\xi^{vp}$, $\dot{\epsilon}_\theta^{vp}$, $\dot{\epsilon}_{\theta\theta}^{vp}$ ならびに熱ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^t$ を除く 32 個の変数と分布荷重、殻の内外の周囲温度および発熱量をフーリエ級数に展開する。紙面の都合上、これらのうち既発表の論文⁽⁷⁾に記されていないもののみを次に示す(係数には、対応する小文字を使い、 σ には s を用いる)。

$$\left. \begin{aligned} \{T_{m1}, G_1\} &= \frac{\sigma_0}{E_0 a_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ t_{m1}^{(n)}, \frac{g_1^{(n)}}{h_0} \right\} \cos n\theta \\ \{Q_0, Q_1\} &= \frac{\lambda_0}{a} \frac{\sigma_0}{E_0 a_0} \sum_{n=0}^{\infty} \{q_0^{(n)}, h_0 q_1^{(n)}\} \cos n\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

ここに、 σ_0 , h_0 , E_0 , a_0 , λ_0 は代表応力、代表厚さ、代表縦弾性係数、代表線膨張係数および代表熱伝導率である。なお式(25)は、 $\theta=0^\circ$ の子午線面に対して面对称な荷重が作用する場合であるが、より一般性をもたせるには、各フーリエ展開式に \sin の級数を付加する。

これらのフーリエ展開式を前述の基礎式に代入し、フーリエ係数に関する対応する式をつくると、熱伝導方程式から $t_{m1}^{(n)}$, $g_1^{(n)}$ に関する次の二元連立 2 階微分方程式が得られる。

$$A_1 Y'' + A_2 Y' + A_3 Y = A_4 + A_5 (\partial Y / \partial \tau) \dots (26)$$

ただし、 $Y = \{t_{m1}^{(n)}, g_1^{(n)}\}^T$, $\tau = \chi_0 t / a^2$

(χ_0 : 温度伝導率 [$=\lambda_0 / c_0 \rho_{00}$], c_0 : 代表比熱, ρ_{00} : 代表密度) である。ここで、 $A_1 \sim A_3$ は殻の形状と殻の内外表面の相対熱伝達率から定まる 2×2 の定数行列であり、 A_4 は殻の内外の周囲温度、相対熱伝達率ならびに発熱量から定まる 2×1 の定数行列である。また

A_5 も 2×2 の定数行列である。

次に熱変形方程式は順次未知数を消去することにより、変位 $u_i^{(n)}$, $u_\theta^{(n)}$, $w^{(n)}$ および曲げモーメント $m_\xi^{(n)}$ に関する次の四元連立 2 階微分方程式になる。

$$B_1 Z'' + B_2 Z' + B_3 Z = B_4 \dots \dots \dots (27)$$

ただし、 $Z = \{u_i^{(n)}, u_\theta^{(n)}, w^{(n)}, m_\xi^{(n)}\}^T$ 。

ここで、 $B_1 \sim B_3$ は殻の形状と ν の値から定まる 4×4 の定数行列である。また $B_4 (= \{c_1, \dots, c_4\}^T)$ は殻の形状のほかに、分布荷重、温度負荷および粘塑性による見掛けの内力成分から定まる定数行列で、既発表の論文⁽⁴⁾⁽⁵⁾ に記されている定数行列の各要素に各々次の項を加えたものである。

$$\begin{aligned} c_1 &: \dot{n}^t - \frac{B_1}{C_1} \dot{m}^t + \gamma \left\{ -\frac{B_1}{C_1} + \frac{B_2}{C_1} \right. \\ &\quad \left. - \lambda^2 \omega_\theta \left(1 - \frac{C_2}{C_1} \right) \right\} \dot{m}^t \\ c_2 &: -\frac{n}{\rho} \dot{n}^t - \frac{n}{p} \left\{ -\frac{B_2}{C_1} + \lambda^2 \omega_\theta \left(1 - \frac{C_2}{C_1} \right) \right\} \dot{m}^t \\ c_3 &: -(\omega_\theta + \omega_\theta) \dot{n}^t - \lambda^2 \gamma \left(1 - \frac{C_2}{C_1} \right) \dot{m}^t \\ &\quad + \left\{ \omega_\theta \frac{B_1}{C_1} + \omega_\theta \frac{B_2}{C_1} + \lambda^2 \left(\omega_\theta \omega_\theta - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \left(1 - \frac{C_2}{C_1} \right) \right\} \dot{m}^t \\ c_4 &: \dot{m}^t \end{aligned}$$

ここで、 B_1, B_2 はそれぞれ $\bar{B}/(ah_0 E_0)$ の (1, 1), (1, 2) 成分であり、また C_1, C_2 はそれぞれ $\bar{C}/(h_0^3 E_0)$ の (1, 1), (1, 2) 成分である。

式(27)の解 Z が求められると、各層の応力は次式から計算できる。

$$\{s_i\} = F_i Z_i + H_i Z_i + \{s_i^{vp}\} + \{s_i^t\} \dots \dots \dots (28)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \{s_i\} &= \{s_{\xi i}, s_{\theta i}, s_{\theta \theta i}\}^T \\ \{s_i^{vp}\} &= \{S_i \zeta \dot{m}_\xi^{vp} - s_{\xi i}^{vp}, \nu_i S_i \zeta \dot{m}_\xi^{vp} - s_{\theta i}^{vp}, -s_{\theta \theta i}^{vp}\}^T \\ \{s_i^t\} &= \{S_i \zeta \dot{m}^t - s_i^t, \nu_i S_i \zeta \dot{m}^t - s_i^t, 0\}^T \\ S_i &= \frac{E_i}{E_0} \frac{1}{a} \frac{1}{(1-\nu_i^2)} \frac{1}{C_1} \quad (\zeta_{i-1} \leq \zeta \leq \zeta_i) \end{aligned} \dots \dots \dots (29)$$

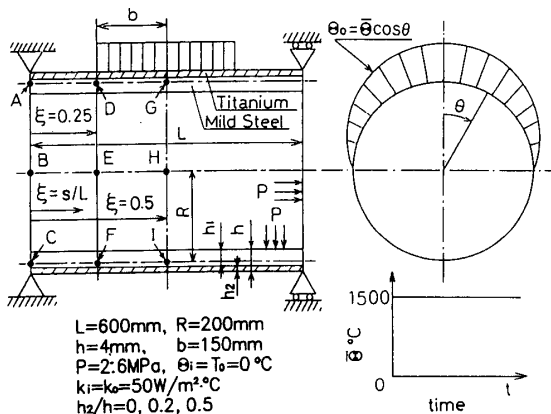


図 2 数値例

F_i と H_i は殻の形状、各層の材質と厚さなどから定まる 3×3 の定数行列である。

これらの式ならびに式(27)に含まれる粘塑性と温度変化に関する内力成分の変化率のフーリエ係数は、式(21), (23)からそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} &\sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{n}_\xi^{vp(n)}, \dot{n}_\theta^{vp(n)}, \dot{n}_{\theta\theta}^{vp(n)} \} [A_n] \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \{ \dot{\epsilon}_\xi^{vp}, \dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^{vp} \} [D_i] d\zeta \\ &\frac{\sigma_0 h_0^3}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{m}_\xi^{vp(n)}, \dot{m}_\theta^{vp(n)}, \dot{m}_{\theta\theta}^{vp(n)} \} [A_n] \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \{ \dot{\epsilon}_\xi^{vp}, \dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^{vp} \} [D_i] \zeta d\zeta \\ \{ \dot{n}^t(n), \dot{m}^t(n) \} &= \frac{1}{E_0 a_0 h_0} \sum_{i=1}^n \frac{E_i a_i}{1-\nu_i} \\ &\quad \times \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \left\{ 1, \frac{a_i \zeta}{h_0} \right\} t_e d\zeta \\ &\sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ s_\xi^{vp(n)}, s_\theta^{vp(n)}, s_{\theta\theta}^{vp(n)} \} [A_n] \\ &= \{ \dot{\epsilon}_\xi^{vp}, \dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^{vp} \} [D_i] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

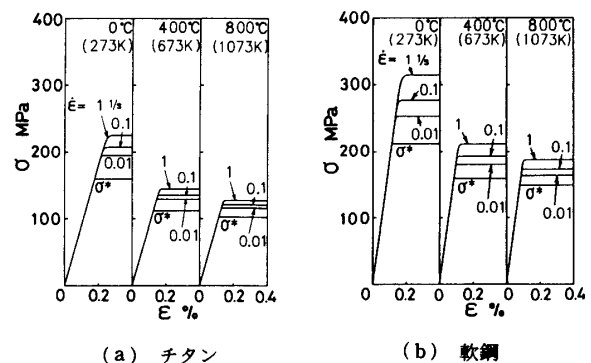
ここで、

$$[A_n] = [\cos n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta] \quad (\text{対角行列}) \dots \dots \dots (31)$$

式(30)の右辺の粘塑性ひずみ速度は、応力値から式(18)によって計算できる。また積分にはシンプソンの1/3則を適用する。

4. 数値計算法

ある任意の計算段階における温度と、変位ならびに曲げモーメント M_ξ の変化率とは、式(26)と(27)を適当な境界条件のもとで解けば得られ、またこれらを用いて、内力成分の変化率は、式(11)~(13)を式(22)に代入したもののから求められる。しかしながら、式(26)



(a) チタン

(b) 軟鋼

図 3 応力-ひずみ線図

と(27)を厳密に理論解析することは困難であるから、差分法によって数値的に解を求める。この数値解法は、著者らがすでに発表した単層殻の場合⁽⁷⁾とほぼ同様であるので紙面の都合上省略する。

5. 数 値 例

数値例として、一定内圧下の両端単純支持二層円筒

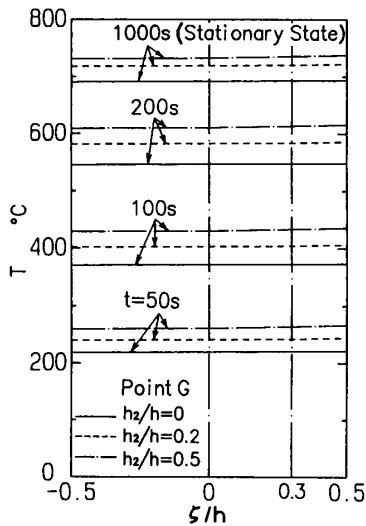


図 4 点 G の殻厚方向の温度分布

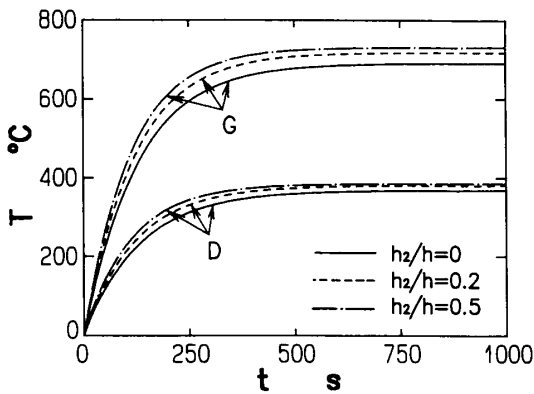


図 5 温度 T の時間的变化

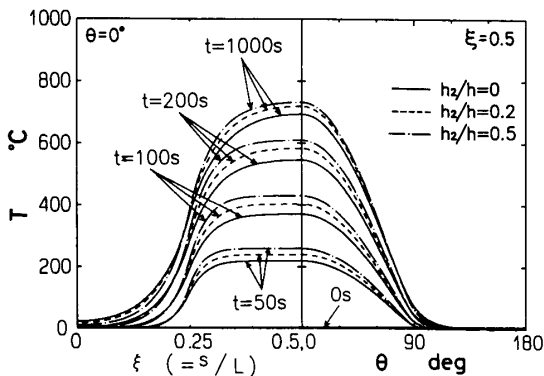


図 6 温度 T の子午線方向ならびに円周方向分布

殻(内層:軟鋼, 外層:チタン)に, 局所的な流体加熱が時間に対しステップ状に作用する問題を取扱った(図2)。チタン層の殻厚に対する比 h_2/h は, $h_2/h=0, 0.2, 0.5$ の3通りとした。基準温度および円筒殻の初期温度は 0°C とし, 殻の両端は断熱とした。また円筒殻内外面での熱伝達率 k_i, k_o および内圧 P_i は, $k_i=k_o=50 \text{ W/m}^2\text{C}$, $P_i=2.6 \text{ MPa}$ とし, 式(25)の σ_0 は, 本計算では $\sigma_0=1$ とした。また代表物理量は軟鋼のものを用いた。

計算に用いたチタンと軟鋼の材料定数は次のとおりである。

チタン:

$$\left. \begin{aligned} E &= 90 \text{ GPa}, \rho_o = 4.5 \text{ g/cm}^3 \\ c &= 0.555 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}, \nu = 0.33 \\ \lambda_o &= 15.0 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}, \alpha = 8.95 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1} \\ \sigma^*(T) &= 160 \exp\{0.6(273/T - 1)\} \text{ MPa} \\ \gamma_o(T) &= 800[1 + 5\{(273 - T)/273\}^2] \text{ s}^{-1} \\ \Psi(f) &= [(\bar{\sigma} - \sigma^*(T))/\sigma^*(T)]^{7.4} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

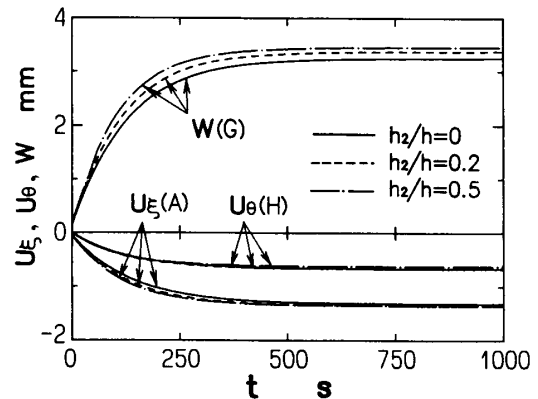


図 7 変位の時間的变化

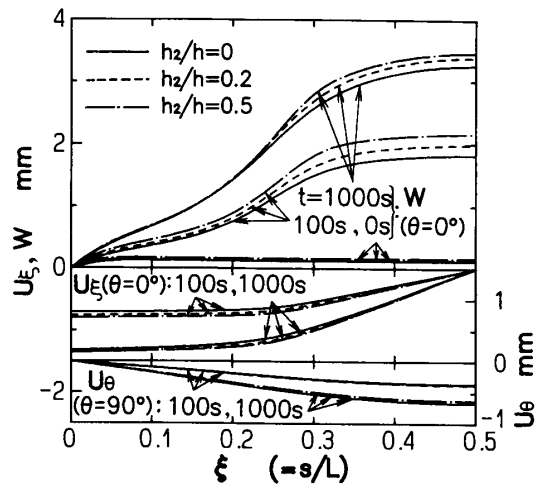


図 8 変位の子午線方向分布

軟鋼⁽⁹⁾ :

$$\left. \begin{aligned} E &= 190 \text{ GPa}, \rho_0 = 7.8 \text{ g/cm}^3 \\ c &= 0.46 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}, \nu = 0.3 \\ \lambda_0 &= 50.1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}, \alpha = 11.7 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1} \\ \sigma^*(T) &= 207 \exp\{0.45(288/T - 1)\} \text{ MPa} \\ \gamma_0(T) &= 30.1[1 + 2.6\{(220 - T)/273\}^2] \text{ s}^{-1} \\ \Psi(f) &= [(\bar{\sigma} - \sigma^*(T))/\sigma^*(T)]^5 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

なお、上式の T は絶対温度 [K] である。これらの材料定数を用いた場合の 0, 400, 800°C の各温度での応力-ひずみ線図を図 3 に示す。

差分点は AG 間に 101 個とり、殻厚方向には各層ごとに 11 個の格子点を採用した。またフーリエ級数の項数 n は 20 とし、時間間隔 Δt は 1 s とした。これらの値は、解の収束性と利用した計算機の容量および計算時間を考慮して決定した。

次に計算結果について考察する。

図 4 は点 G ($\xi=0.5, \theta=0^\circ$) における殻厚方向の温度分布の時間的変化を示す。図中、実線、破線、一点鎖線は、 h_2/h がそれぞれ 0, 0.2, 0.5 の場合である。温度分布は 3 者とも殻厚方向にほぼ一定値を示しているのので、図 5, 6 には殻厚中央面の温度を示す。図 5 は点 D ($\xi=0.25, \theta=0^\circ$), G の温度の時間的変化を、また図 6 は $\theta=0^\circ$ の子午線上ならびに $\xi=0.5$ の円周上の温度分布を表す。チタンのほうが軟鋼よりも熱伝導率が小さく熱が伝わりにくいため、チタンの層の厚さが増す

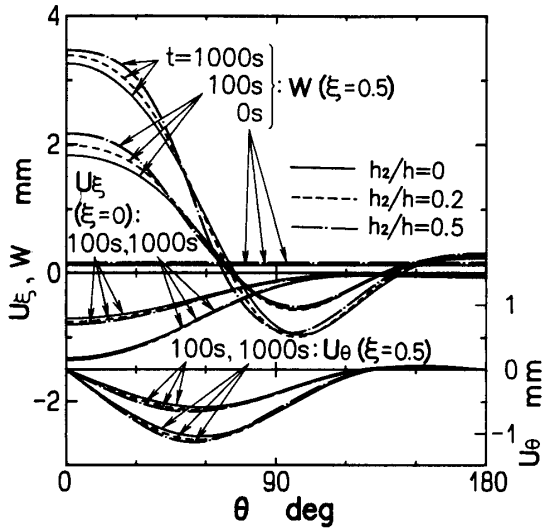


図 9 変位の円周方向分布

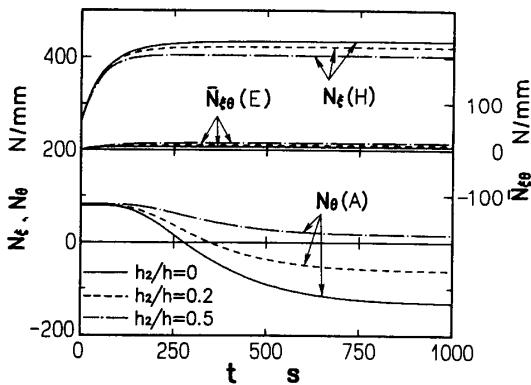


図 10 合応力の時間的変化

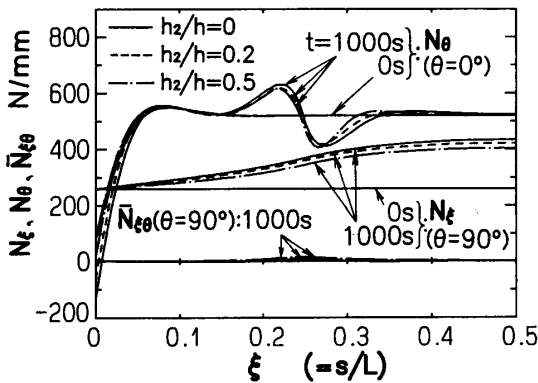


図 11 合応力の子午線方向分布

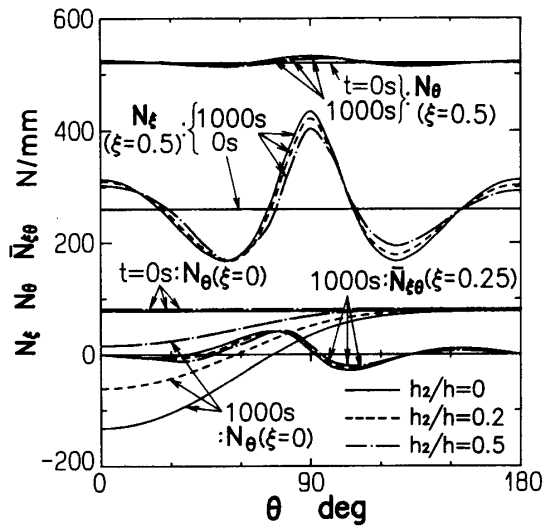


図 12 合応力の円周方向分布

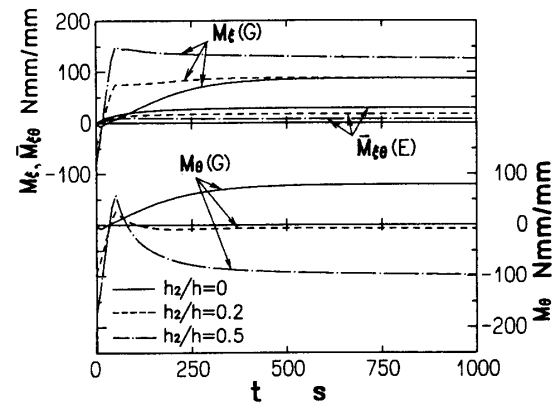


図 13 合モーメントの時間的変化

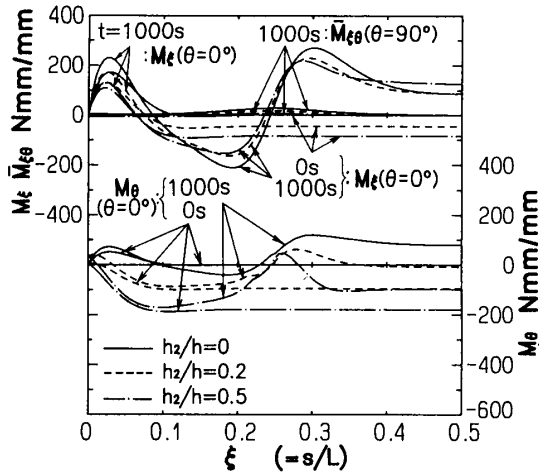


図 14 合モーメントの子午線方向分布

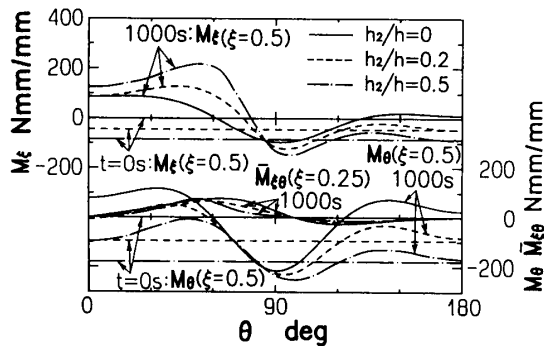
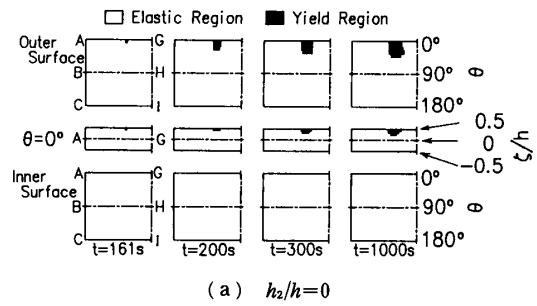
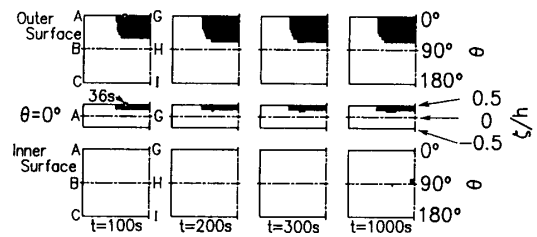


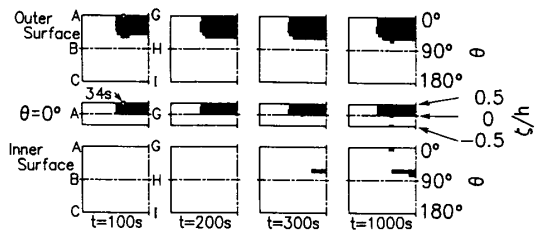
図 15 合モーメントの円周方向分布



(a) $h_2/h=0$



(b) $h_2/h=0.2$



(c) $h_2/h=0.5$

図 16 降伏領域の進展

ほど加熱部で温度は高くなっているが、放熱部では逆にやや低くなっている。

図 7 は、点 A ($\xi=0, \theta=0^\circ$) の子午線方向変位 U_e 、点 G の半径方向変位 W ならびに点 H ($\xi=0.5, \theta=90^\circ$) の円周方向変位 U_θ の時間的変化を示す。また図 8 は $\theta=0^\circ$ の子午線上における U_e, W の分布ならびに $\theta=90^\circ$ の子午線上の U_θ の分布を、また図 9 は $\xi=0$ の円周上における U_e の分布ならびに $\xi=0.5$ の円周上の U_θ, W の分布を示す。内圧は初期降伏を生じる弾性限の 80% 程度の大きさを負荷しているが、内圧による殻の軸対称変形は、熱変形に比べて小さい。図 8, 9 より、 U_e, U_θ に比べて、 W はチタン層の厚さが増すほど大きくなり、チタン層の厚さによる差異が顕著である。

次に点 H の合応力 N_e 、点 A の合応力 N_θ ならびに点 E ($\xi=0.25, \theta=90^\circ$) の合応力 $\bar{N}_{e\theta}$ の時間的変化を図 10 に示す。また各合応力成分の子午線方向ならびに円周方向の分布を各々図 11, 12 に表す。 N_e は最初内圧により、殻全体に 260 N/mm の引張りを示すが、熱負荷を受けると、子午線方向には ξ とともに単調に増加し、中央部では円周上に波状を呈してくる。一方、 N_θ

は初め内圧により $\xi=0 \sim 0.06$ の端部付近を除いて、殻全体に様に 520 N/mm の引張りであるが、熱負荷後、端部の $\theta=0^\circ \sim 90^\circ$ 付近では、時間とともに大きな圧縮となり、また温度こう配の大きい点 D 付近で、子午線方向に大きく変化している。 N_e, N_θ とも線膨張係数の小さいチタン層の厚さが増すほど変動量は小さくなっている。

図 13 は点 G の合モーメント M_e, M_θ ならびに点 E の合モーメント $\bar{M}_{e\theta}$ の時間的変化を、また図 14, 15 は、 $M_e, M_\theta, \bar{M}_{e\theta}$ の子午線方向分布ならびに円周方向分布を示したものである。熱負荷直後、チタン層の厚さが増すと M_e, M_θ は著しい時間的変化を示し、その後 M_θ 成分は降伏領域の広がりとともに大きく緩和している。

最後に図 16 は、降伏領域の進展の様子を示したものである。初期降伏はいずれの h_2/h の場合も点 D 付近で発生する。その後時間の経過とともに降伏領域は広がるが、軟鋼のみの場合の降伏領域は狭く、二層殻の降伏領域はチタン層の加熱部のほぼ全体に広がる。

6. 結 言

本論文では、周囲の流体により温度負荷を受ける多層回転対称殻の熱弾/粘塑性変形問題の解法を示した。各層の厚さ方向の温度分布を線形近似し、各層の境界面で温度と熱流束が連続であるとして、与えられた初期条件と熱伝達を考慮した境界条件のもとで、熱伝導方程式を解いた。そして得られた温度分布をもとに多層軸対称殻の熱弾/粘塑性変形に関する基礎関係式より、変位、内力などを求めた。殻の平衡方程式には、Sanders, Jr.の薄肉殻理論式を用いた。構成関係には、温度の影響を考慮したPerzynaの弾/粘塑性式を採用した。導かれた基礎式の数値解法には、差分法を適用した。

数値例として、内側に軟鋼、外側にチタンの層を配した両端単純支持の二層構造の内圧円筒殻に、局所的な流体加熱が、時間に対してステップ状に作用する問題を扱ひ、 h_2/h の値を変えて解析した。その結果、

チタンの層の厚さが増すと加熱部の温度は高くなり、半径方向変位と合モーメントの時間的変化は大きくなるが、合応力の時間的変化は小さくなる傾向があることがわかった。さらに、降伏領域の進展の様子にも h_2/h の値による顕著な差異が認められた。

文 献

- (1) 例えば, Fettahtlioglu, O. A. and Wang, P. C., *J. Thermal Stresses*, 11(1988), 305. Blandford, G. E., ほか2名, *Trans. ASME, J. Pressure Vessel Technol.*, 111(1989), 113. Surana, K. S. and Orth, N. J., *Comput. Struct.*, 33-5(1989), 1251. 須見・伊藤, 機論, 57-542, A(1991), 2409. 谷川・ほか2名, 機論, 58-549, A(1992), 712. 遠藤, 機論, No. 910-71, A(1991-10), 522.
- (2) Sanders, J. L., Jr., *NASA Rep.*, R-24(1959), 1.
- (3) Perzyna, P., *Adv. Appl. Mech.*, 9(1966), 243, Academic Press.
- (4) 竹園・ほか2名, 機論, 54-498, A(1988), 405.
- (5) 竹園・ほか3名, 機論, 55-518, A(1989), 2065.
- (6) 竹園・ほか3名, 機論, No. 923-1(1992-2), 85.
- (7) 竹園・ほか3名, 機論, 59-562, A(1993), 1443.