日本機械学会論文集(A編)
60巻574号(1994-6)

論文 No. 93-1346

領域最適化問題の一解法*

畔上秀幸*1

Solution to Domain Optimization Problems

Hideyuki AZEGAMI

For optimization problems of domains in which elliptic boundary value problems are defined a solution is proposed. The treated problems are those to determine the domain that minimizes an objective functional of the state functions under the conditions that the coefficient functions of the partial differential equations and the boundary value functions in the elliptic boundary value problems have smoothness and a one-to-one correspondence with domain variation and that the volumes of the domains are limited. Domain variation is formulated with a speed field. The derivative of the objective functional is obtained as a linear form of a shape gradient function. The solution is formulated by using the gradient method in the functional space of the speed field with the linear form of the shape gradient function. The solution is implemented to analyze the speed field with regard to the deformation field of the linear elastic continuum formed in the objective domain applying the force in proprtion to the shape gradient function.

Key Words: Optimum Design, Computer-Aided Design, Numerical Analysis, Computational Mechanics, Finite-Element Method, Domain Optimization, Elliptic Boundary Value Problem, Gradient Method, Traction Method

1 はじめに

連続体や流れ場、電磁場などの領域最適化問題は、偏微分方程式と境界条件が支配する領域の境界形状を最適化する問題として一般化することができる。その中で最も基本的な問題は、楕円型線形偏微分方程式の境界値問題における領域の境界形状を設計変数にして、目的とするある汎関数が最小となるように境界形状を決定する問題である。このとき領域の位相は予め与えられた位相に固定されるものと仮定する。汎関数は境界値問題の解関数のみによって与えられる場合が普通である。

この領域最適化の問題に対して、基礎になる理論は、Hadamard(1)が1908年にまとめたのが最初であると言われている(2)。Hadamardは滑らかな境界を仮定して、境界が法線方向に移動したときの移動量によって境界の変動を表現した。この移動量は、境界上で定義された分布関数になる。したがって、この場合の設計変数は領域を定義域とする分布関数、設計空間は関数空間ということになる。Hadamardは薄膜の基本振動数を最大にする問題に対して、最適であるための必要条件を変分問題として解いている。法線方向への移動量を用いた理論に関する研究は、その後Polya(3)、Horák(4)、Pironneau(5)-(7)、Murat and Simon(8)、Banichuk(9)-(11)、Cea(12)(13)、Rousselet(14)、Dems and Mróz(15)(16)らによって行われてきた。これらの研究の背景には、Lions(17)らによる分布系の最適制御理論の研究があったと言われている。

境界形状の滑らかさを区分的な滑らかさまで拡張する試みはZolésio(18)(19)によって始められた。Zolésioは変動が許されているすべての領域を含む固定された許容領域を設けて、その許容領域全体を定義域とした写像によって領域の変動を表現した。位相を固定することを仮定すると、この写像には1対1の性質が要求される。このような表現方法を用いると、変動する境界は写像が定義されている許容領域の内部にあるために、境界の滑らかさを用いなくても境界は常に初期境界と1対1の対応を保ちながら変動できることになる。領域の微小変動は写像の導関数で定義される速度場によって表現される。この速度場に対する目的汎関数の変動を解析する感度解析の方法は速度法(speed method)と呼ばれる。境界が滑らかな場合、この速度法はHadamardの理論に帰着する(2)。この速度法を用いた形状最適化の研究はChoi and Haug(20)、Choi(21)、Haug,

* 平成5年3月31日 第70期通常総会講演会において講演，原稿受付 平成5年9月1日.

*1 正員，豊橋技術科学大学(〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1).

Choi and Komkov[22]、Braibant and Fleury[23][24]、Arora and Cardoso[25]、Arora[26]らによって行われてきた。

これまで行われてきた領域最適化のための理論研究を振り返ると、領域変動を表現する方法はより厳密になり、さらに任意の速度場が与えられたときの感度を解析する方法は明らかにされてきたことになる。しかしながら、それらの理論に基づいた最適な境界形状を解析する方法は、依然として離散変数に対する最適化プログラムを利用する方法が取られていた。Choi and Seong[27]、Haug, Choi and Komkov[22]は、はりで補強された板構造やコンロッドの問題に対して速度場を有限個の離散変数で表現して、離散変数に対する最適化プログラムを利用することによって構造の最適化問題を解いている。速度法は離散変数に対する感度を解析するときに用いられている。Pironneau[7]は分布系の理論を展開した後で、有限要素モデルを基にした離散系の理論を再度展開している。最適化解析には離散変数に対する最適化プログラムが用いられることになる。有限要素モデルで離散系の最適化問題を定義して、数理計画法に基づく最適化プログラムを適用する試みは、Schmit[28]の研究が最初であると言われている。連続体モデルへの適用は Zienkiewicz and Cambell[29]によっても試みられている。

一方、解析方法についてこれらの方法とはやや異なる有限要素モデルを基礎にした方法も研究されている。尾田[30]、尾田, 山崎[31]-[33]は境界の応力分布を均一化することを目標にして、境界に面した要素の形状を応力比を用いて変換する方法を提案している。梅谷[35]、梅谷, 平井[36][37]は同じ目的で境界節点を応力比に応じて移動する方法を提案している。瀬口, 多田[38]は領域の最適化理論から導出される最適性規準に基づいて、表面のひずみエネルギー密度比を用いた表面形状の修正方法を提案している。著者ら[39][40]は応力分布の均一化を目標にして、応力比に応じた体積ひずみの発生によって形状を修正していく方法を提案している。これらの方法では形状修正の方法と最適性規準の関係が必ずしも明確にされないまま、多くの場合に良好な結果が得られるという理由で用いられてきた。曖昧さを含んだこれらの方法は Prager[41]によって始められた初期の最適性規準法に分類することもできる。領域の最適化理論に基づいて最適性規準法を厳密に適用する試みは Na, Kikuchi and Taylor[42][43]らによって行われている。解析法の歴史については Olhoff and Taylor[44]、Haftka and Grandhi[45]、Haftka and Adelman[46]らが詳しくまとめている。

本論文では、これら多くの領域最適化に関する研究成果を踏まえて、厳密性を保ちながら、かつ実行が容易な新しい数値解析方法を提案することを目標にする。領域変動の表現方法とそれに基づく感度方程式の導出には、理論的に最も拡張された速度法を用いることにする。本論文では、この速度場を分布系のままで勾配法 (gradient method) を適用することによって決定する方法を提案する。この方法を定式化する際に離散系のモデルを用いていない点においてこれまでの速度法を用いた研究とは異なっている。分布系に対する勾配法に関しては、Cea[13]による記述を基にしている。領域変動を表す速度場の数値解析は、提案された定式化に基づいて有限要素法や境界要素法などを利用して行うことができる。この場合、数値解析法に関する特別な制約がないことから、現存の汎用数値解析コードが利用できる点において提案する方法は実用的である。

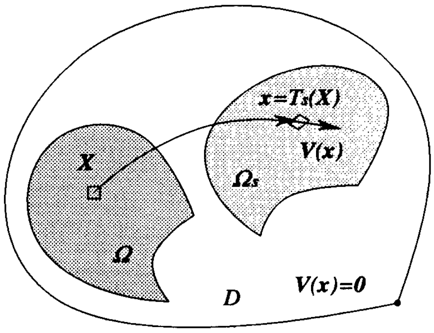

図 1 写像 $T_s(\boldsymbol{X})$ を用いた領域変動の表現方法

2 領域変動

領域最適化問題を定式化するための準備として、速度法を用いた領域変動の表現方法とその変動に対する導関数の公式をまとめておくことにする[2]。

2.1 写像とその導関数 変動が許されているすべての領域を含む固定された開領域を許容領域 D と定義する。許容領域の境界 ∂D は区分的に滑らかであると仮定する。領域の変動は、初期領域 $\bar{\Omega}$ を含む $\bar{D}$ を定義域とし、変動後の領域 $\bar{\Omega}_s$ を含む $\bar{D}$ を値域とする次のような 1 対 1 写像 $T_s(\boldsymbol{X})$ を用いて表現することができる (図 1)。

$$T_s(\boldsymbol{X}): \quad \bar{D} \ni \boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{x}(s) \in \bar{D} \tag{1}$$

ただし、D を変動させないために、境界 ∂D 上の特異点は変動しないことにする。その特異点を含めて、変動を拘束する領域 Θ では次の関係を仮定する。

$$T_s(\boldsymbol{X}) = \mathcal{I}(\boldsymbol{X}) \quad \forall \boldsymbol{X} \in \Theta \subset \bar{D} \tag{2}$$

なお、本論文では、開領域 Ω にその境界 $\partial\Omega$ あるいは Γ を含めた閉領域を $\bar{\Omega}$ と表すことにする。写像 $\mathcal{I}$ は恒等写像である。媒介変数 s は変動の履歴を表している。また、$\boldsymbol{X}\in\bar{\Omega}$ は Lagrange 座標系あるいは物質座標系、$\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}_s$ は Euler 座標系あるいは実座標系と呼ばれる。

一方、Euler 座標系 $\boldsymbol{x}$ を用いると、領域の変動を次のような初期条件と微分方程式を用いて表現することができる。

$$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{X} \tag{3}$$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}(\boldsymbol{x}(s))=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(s)) \tag{4}$$

ここで、ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ は速度場と呼ばれる。ただし、許容領域 D が変動しないために次の関係を仮定する。

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad \text{on } \partial D \tag{5}$$

$$\boldsymbol{V}=0 \quad \text{in } \Theta\subset\bar{D} \tag{6}$$

ただし、$\boldsymbol{n}$ は外向単位法線ベクトルである。

領域変動に対するこのような2つの表現方法の等価性は、次のような定理としてまとめられている。

▷ 速度場定理： n 次元空間の $k(\geq 0)$ 級連続な速度場

$$\boldsymbol{V}\in C_\Theta=\{\boldsymbol{V}\in C^k(\bar{D};\mathbb{R}^n)| \\ \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}=0 \text{ on } \partial D,\ \boldsymbol{V}=0 \text{ in } \Theta\subset\bar{D}\} \tag{7}$$

が局所ごとに正則であることと、式(1)の1対1写像 $T_s(\boldsymbol{X})$ が s のある区間で存在することと等価である。このとき次の関係が成立する。

$$\frac{\partial T_s}{\partial s}\circ T_s^{-1}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) \quad \triangleleft \tag{8}$$

なお、$C^k(\bar{D};\mathbb{R}^n)$ は、$\bar{D}$ を定義域、$\mathbb{R}^n$ を値域とした k 級の連続関数空間、$\mathbb{R}$ は実数を表す。また $z\circ y(x)$ は、$x\mapsto y(x)\mapsto z(y(x))$ の関係を表す。

したがって、領域 Ω_s からの領域の微小変動は、形式的に次式のような2つの表現が可能である。

$$T_{s+\Delta s}(\boldsymbol{X})=T_s(\boldsymbol{X})+\Delta s\boldsymbol{V}+O(|\Delta s|) \tag{9}$$

$$T_{\Delta s}(\boldsymbol{x})=\mathcal{I}(\boldsymbol{x})+\Delta s\boldsymbol{V}+O(|\Delta s|) \tag{10}$$

ただし、$\Delta s\, O(|\Delta s|)\to 0\ (\Delta s\to 0)$ の関係を仮定する。これらの関係から、速度場 $\boldsymbol{V}$ は写像 $T_s(\boldsymbol{X})$ の Euler 導関数と呼ぶことができる。

2.2 分布関数の導関数 分布関数を表現する方法は、定義域の違いによって、次のような2つの方法を考えることができる。初期領域 Ω を定義域とした Lagrange 表示による分布関数 $\phi^s(\boldsymbol{X})$ と領域 Ω_s を定義域とした Euler 表示による分布関数 $\phi_s(\boldsymbol{x})$ である。両者は写像 $T_s(\boldsymbol{X})$ を用いて次式で関連づけられる。

$$\phi^s(\boldsymbol{X})=\phi_s\circ T_s(\boldsymbol{X}) \quad \forall\boldsymbol{X}\in\Omega \tag{11}$$

領域 Ω_s を基準にして、領域の微小変動に対する分布関数の導関数を考えた場合には、次式で関連付けられた2種類の導関数 $\dot{\phi}_s$ と ϕ'_s が存在する。

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_s&=\frac{d\phi^s}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}(\phi^{s+\Delta s}-\phi^s)\\&=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}(\phi_{s+\Delta s}\circ T_{\Delta s}-\phi_s\circ\mathcal{I})\\&=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\{(\phi_{s+\Delta s}-\phi_s)+\Delta s\nabla\phi_s\cdot\boldsymbol{V})\}\\&=\phi'_s+\nabla\phi_s\cdot\boldsymbol{V}\end{aligned} \tag{12}$$

ここで、$\dot{\phi}_s$ は Euler 導関数、あるいは物質導関数、ϕ'_s は形状導関数と呼ばれる。

2.3 汎関数の導関数 汎関数 J が分布関数 ϕ_s の領域積分によって次式で与えられている場合を考えよう。

$$J=\int_{\Omega_s}\phi_s\,dx \tag{13}$$

汎関数 J の Euler 導関数 $\dot{J}$ は、式(10)の関係を考慮すると、次式で関係付けられる。

$$\begin{aligned}\dot{J}&=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\int_{\Omega}(\phi^{s+\Delta s}-\phi^s)\,dx\\&=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\int_{\Omega_s}(\phi_{s+\Delta s}\circ T_{\Delta s}\gamma_{\Delta s}-\phi_s\circ\mathcal{I})\,dx\\&=\int_{\Omega_s}\{\phi'_s+(\nabla\phi_s\cdot\boldsymbol{V}+\phi_s\nabla\cdot\boldsymbol{V})\}\,dx\\&=\int_{\Omega_s}\phi'_s dx+\int_{\Gamma_s}\phi_s v_n\,d\Gamma\\&=\int_{\Omega_s}(\dot{\phi}_s+\phi_s\nabla\cdot\boldsymbol{V})\,dx\end{aligned} \tag{14}$$

ただし、$v_n=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}$ を表している。また、式(7)において $k\geq 1$ を仮定して、写像 $T_s(\boldsymbol{X})$ の変換行列を $DT_s(\boldsymbol{x})$、Jacob 行列式を $\gamma_s(\boldsymbol{x})$ と表すことにするとき、次の関係が成立している。

$$\gamma_s=\det(DT_s)=\det\left(\frac{\partial x_i(s)}{\partial X_j}\right) \tag{15}$$

$$\gamma_{\Delta s}=\det(DT_{\Delta s})=\det\left(\frac{\partial x_i(s+\Delta s)}{\partial x_j(s)}\right) \\ \to\nabla\cdot\boldsymbol{V} \quad (\Delta s\to 0) \tag{16}$$

次に、汎関数 J が分布関数 ϕ_s の境界積分によって次式で与えられている場合を考えてみよう。

$$J=\int_{\Gamma_s}\phi_s\,d\Gamma \tag{17}$$

Euler 導関数 $\dot{J}$ については、次の関係が成立する。

$$\begin{aligned}\dot{J}&=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\int_{\Gamma}(\phi^{s+\Delta s}-\phi^s)\,d\Gamma\\&=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\int_{\Gamma_s}\phi_{s+\Delta s}\circ T_{\Delta s}\omega_{\Delta s}-\phi_s\circ\mathcal{I})\,d\Gamma\\&=\int_{\Gamma_s}\{\phi'_s+(\nabla_n\phi_s+\phi_s\kappa)v_n\}\,d\Gamma\\&=\int_{\Gamma_s}(\dot{\phi}_s+\phi_s\kappa v_n)\,d\Gamma\end{aligned} \tag{18}$$

ただし、$\nabla_n \phi_s = \nabla\phi_s \cdot \boldsymbol{n}$ である。$\kappa = \nabla_\Gamma \cdot \boldsymbol{n}$ は領域が2次元の場合曲率、3次元の場合平均曲率を表している。また、ここでも式(7)において $k \geq 1$ を仮定して、$\omega_s(\boldsymbol{x})$ について次の関係が成立している[2]。

$$\omega_s = \gamma_s \|(DT_s^{-1})^T \boldsymbol{n}\| \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\omega_{\Delta s} &= \gamma_{\Delta s}\|(DT_s^{-1})^T\boldsymbol{n}\| + \gamma_s\|(DT_{\Delta s}^{-1})^T\boldsymbol{n}\| \\ &\to \nabla\cdot\boldsymbol{V} - (D\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n} \quad (\Delta s \to 0) \\ &= \nabla_\Gamma \cdot \boldsymbol{V} = v_n \nabla_\Gamma\cdot\boldsymbol{n} = \kappa v_n\end{aligned} \tag{20}$$

ただし、$(\cdot)^T$ は転置、$\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$ はノルムを表す。

3 線形楕円型境界値問題

目的汎関数で使われる分布関数は、線形楕円型境界値問題の解として与えられる。この章では、2階の線形楕円型境界値問題に関する定理を簡単にまとめておくことにする[2][7][47]。なお、4階の場合は省略する。

正定値性を有する行列関数 $\boldsymbol{A}$ とスカラー関数 a:

$$\exists\alpha > 0:\ \boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{A\xi}) \geq \alpha\|\boldsymbol{\xi}\|^2\ \forall\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n,\ a \geq \alpha \text{ in } \bar{\Omega} \tag{21}$$

が与えられているとき、Dirichlet – Neumann 混合境界条件の場合の線形楕円型境界値問題の強形式は次のように与えられる。

▷ 強形式: 式(21)を満たす $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n^2}$ in Ω, $a\in\mathbb{R}$ in Ω とスカラー関数 $f\in\mathbb{R}$ in Ω, $h\in\mathbb{R}$ on Γ_1, $P\in\mathbb{R}$ on Γ_2 が与えられているとき、偏微分方程式と境界条件

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\nabla y) + ay = f \quad \text{in } \Omega \tag{22}$$

$$y = h \quad \text{on } \Gamma_1 \tag{23}$$

$$\boldsymbol{A}\nabla y\cdot\boldsymbol{n} = P \quad \text{on } \Gamma_2 = \Gamma\setminus\Gamma_1 \tag{24}$$

を満たすスカラー関数 $y\in\mathbb{R}$ in $\bar{\Omega}$ を求めよ。◁

この境界値問題に対する解の存在定理は、その弱形式あるいは変分形式に対して与えられている。この境界値問題の弱形式は、次式で定義された双一次形式 $a(y,w)$ と一次形式 $l(w)$, $l_h(w)$ を用いることによって簡潔に表現することができる。

$$a(y,w) = \int_\Omega (\boldsymbol{A}\nabla y\cdot\nabla w + ayw)\,dx \tag{25}$$

$$l(w) = \int_\Omega fw\,dx + \int_{\Gamma_2} Pw\,d\Gamma \tag{26}$$

$$l_h(w) = \int_\Omega (\boldsymbol{A}\nabla h\cdot\nabla w + ahw)\,dx \tag{27}$$

このとき、解の存在定理は次のようにまとめられる。

▷ 解の存在定理: 式(21)を満たす $\boldsymbol{A}\in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{n^2})$, $a\in L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ とスカラー関数 $f\in H^{-1}(\Omega;\mathbb{R})$, $P\in H^{-1/2}(\Gamma_2;\mathbb{R})$, $h\in H^1(\bar{\Omega};\mathbb{R})$ が与えられているとき、弱形式

$$a(z,w) = l(w) - l_h(w)$$
$$z = y + h \in H_{\Gamma_1}\ \forall w\in H_{\Gamma_1} \tag{28}$$

を満たすスカラー関数 $y = z - h$ は、ただ一つ存在する。ただし、

$$H_{\Gamma_1} = \{z\in H^1(\bar{\Omega};\mathbb{R})\,|\, z = 0 \text{ on } \Gamma_1\} \quad \triangleleft \tag{29}$$

なお、$L^p(\Omega;\mathbb{R})$ は p 乗可積分な Lebesgue 関数空間、$L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ は有界可積分な Lebesgue 関数空間を表す。また、$-\infty < m < \infty$, $1 < p < \infty$ に対する $W^{m,p}(\Omega;\mathbb{R})$ を m 階までの導関数が p 乗可積分な Sobolev 関数空間とするとき、$W^{m,2}(\Omega;\mathbb{R}) = H^m(\Omega;\mathbb{R})$ と表される。特に、$m\geq 0$ が整数のとき、$H^m(\Omega;\mathbb{R})$ は Hilbert 空間とも呼ばれる。

スカラー関数 $y\in H^1(\bar{\Omega};\mathbb{R})$ を n 次元ベクトル関数 $\boldsymbol{y}\in H^1(\bar{\Omega};\mathbb{R}^n)$ に拡張して、$\boldsymbol{A}\in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{n^4})$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}\in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{f}\in H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{P}\in H^{-1/2}(\Gamma_2;\mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{h}\in H^1(\bar{\Omega};\mathbb{R}^n)$ と仮定すればこの定理は連続体の線形弾性問題にも適用される。

4 領域最適化問題

前章までに得られた関係を用いて、領域最適化問題を定式化しよう。また、Lagrange 乗数法を用いて、その問題に対する最適性規準を導出する。

領域の大きさ

$$m = \int_{\Omega_s} dx \tag{30}$$

に制約を設けるとき、目的汎関数 J の領域変動に対する基本的な最小化問題の一つは、J が分布関数 $\phi_s = \phi(y(s),\nabla y(s))$ の領域積分によって与えられた次のような問題である。

▷ 領域最適化問題1: 式(21)を満たす $\boldsymbol{A}\in C^1(D;\mathbb{R}^{n^2})$, $a\in C^1(D;\mathbb{R})$ と f, P, $h\in C^1(\bar{D};\mathbb{R})$ が、許容領域に固定された滑らかな連続関数で与えられ、領域変動に対して一意に決定されるものと仮定する。また、領域の大きさに対する上限値 $M\in\mathbb{R}_+$ は与えられている。このとき、目的汎関数

$$J = \int_{\Omega_s} \phi(y,\nabla y)\,dx \tag{31}$$

が最小となる領域 Ω_s を求めよ。ただし、状態方程式

$$a(z,w) = l(w) - l_h(w) \quad z = y + h\in H_{\Gamma_1}\ \forall w\in H_{\Gamma_1} \tag{32}$$

と質量制約

$$m - M \leq 0 \tag{33}$$

は満たされていなければならない。◁

なお、$\mathbb{R}_+$ は正の実数を表す。

Lagrange 乗数法を適用すると、この問題は Lagrange 関数

$$L = J(y) - a(z, w) + l(w) - l_h(w) + \Lambda(m - M)$$
$$z = y - h,\ w \in H_{\Gamma_1}\ \Lambda \in \mathbb{R}_+ \quad (34)$$

の停留化問題に書き換えることができる。

Lagrange 関数 L の領域変動に対する Euler 導関数 $\dot{L}$ は、2.3節の結果と表記法

$$[\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx \quad (35)$$

を用いて、次式で表すことができる。

$$\dot{L} = [\phi_{,y}, z'] + [\phi_{,\nabla y}, \nabla z'] - a(z', w)$$
$$-a(z, w') + l(w') - l_h(w') + l_G(\boldsymbol{V}) \quad (36)$$

$$l_G(\boldsymbol{V}) = [\boldsymbol{G}, \boldsymbol{V}] \quad (37)$$

ただし、例えば $\boldsymbol{A}, a, f, P, h$ について空間固定 $(\cdot)' = 0$ の場合には

$$\boldsymbol{G} = \gamma^T_{\Gamma_s}(\boldsymbol{G}_{\Gamma_s}) + \gamma^T_{\Gamma_{s2}}(\boldsymbol{G}_{\Gamma_{s2}}) \quad (38)$$

$$\boldsymbol{G}_{\Gamma_s} = (\phi - \boldsymbol{A}\nabla z \cdot \nabla w - azw + fw$$
$$-\boldsymbol{A}\nabla h \cdot \nabla w - ahw + \Lambda)\boldsymbol{n} \quad (39)$$

$$\boldsymbol{G}_{\Gamma_{s2}} = \{\nabla_n(Pw) + Pw\kappa\}\boldsymbol{n} \quad (40)$$

物質固定 $(\dot{\cdot}) = 0$ の場合には、式 (39) と

$$\boldsymbol{G} = \gamma^T_{\Gamma_s}(\boldsymbol{G}_{\Gamma_s}) + \gamma^T_{\Gamma_{s2}}(\boldsymbol{G}_{\Gamma_{s2}}) + \boldsymbol{G}_{\Omega_s} \quad (41)$$

$$\boldsymbol{G}_{\Gamma_{s2}} = (P\nabla_n w + Pw\kappa)\boldsymbol{n} \quad (42)$$

$$G_{\Omega_s k} = A_{ij,k} z_{,j} w_{,i} - f_{,k} w$$
$$+A_{ij,k} h_{,j} w_{,i} + A_{ij} h_{,kj} w_{,i} \quad (43)$$

ここでは次の関係が使われている。

$$\int_{\Gamma_{s2}} [P'w + \{\nabla_n(Pw) + Pw\kappa\}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{V}]\, d\Gamma$$
$$= \int_{\Gamma_{s2}} [P'w + \{\nabla(Pw) + Pw\kappa\boldsymbol{n}\} \cdot \boldsymbol{V}]\, d\Gamma$$
$$= \int_{\Gamma_{s2}} \{\dot{P}w + (P\nabla_n w + Pw\kappa)\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{V}\}\, d\Gamma \quad (44)$$

$\gamma_{\Gamma_s} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\bar{D}; \mathbb{R}^n); \mathcal{D}(\Gamma_s; \mathbb{R}^n))$ はトレース作用素である。なお、$\mathcal{L}$ は線形作用素、$\mathcal{D}$ は微分可能関数空間、$(\cdot)^T$ は転置を表している。また、式 (43) のテンソル表示では Einstein 総和規約と偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用している。

したがって、Lagrange 関数 L が停留するためには、次の条件が成立している必要がある。

$$a(z, w') = l(w') - l_h(w') \quad \forall w' \in H_{\Gamma_1} \quad (45)$$

$$a(z', w) = [\phi_{,y}, z'] + [\phi_{,\nabla y}, \nabla z']\ \forall z' \in H_{\Gamma_1} \quad (46)$$

$$l_G(\boldsymbol{V}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{V} \in C_{\boldsymbol{\Theta}} \quad (47)$$

$$\Lambda(m - M) = 0 \quad (48)$$

$$m - M \le 0 \quad (49)$$

ここで、式 (45) は z についての状態方程式 (28) の関係を表している。式 (46) は w についての状態方程式になっている。通常、w は随伴関数、式 (46) は随伴方程式と呼ばれる。状態方程式の解の存在は、3 章の解の存在定理によって保証される。また、随伴方程式の解の存在を保証するためには、ϕ について $\phi'(z') = [\phi_{,y}, z'] + [\phi_{,\nabla y}, \nabla z'] \in H^{-1}(\bar{\Omega}_s; \mathbb{R})$ が成立している必要がある。式 (48) と (49) は、式 (33) の不等式制約に対する Kurn–Tucker 条件である。

状態関数 $z = y - h$ と随伴関数 w が決定され、Kuhn–Tucker 条件式 (48) と (49) が満たされるように Λ が決定されていれば、この問題の最適性規準は式 (47) で与えられることになる。この場合、式 (38) あるいは (41) で与えられる $\boldsymbol{G}$ は、形状勾配関数 (shape gradient function) と呼ぶことにする。

目的汎関数 J が分布関数 $\phi_s = \phi(y(s), \nabla y(s))$ の境界積分によって与えられた次のような問題の場合も、同様の論理が展開される。

▷ 領域最適化問題 2： $\boldsymbol{A}, a, f, P, h, M$ が問題 1 と同様に与えられているとき、目的汎関数

$$J = \int_{\Gamma_s} \phi(y, \nabla y)\, d\Gamma \quad (50)$$

が最小となる領域 Ω_s を求めよ。ただし、式 (32) と式 (33) は満たされていなければならない。◁

この場合の Lagrange 関数 L は式 (34) と一致する。その Euler 導関数 $\dot{L}$ は、表記法

$$\langle \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, d\Gamma \quad (51)$$

を用いて、次のように表すことができる。

$$\dot{L} = \langle \phi_{,y}, z' \rangle + \langle \phi_{,\nabla y}, \nabla z' \rangle - a(z', w)$$
$$-a(z, w') + l(w') - l_h(w') + l_G(\boldsymbol{V}) \quad (52)$$

ここで、$l_G(\boldsymbol{V})$ は式 (37) から (43) で与えられる。ただし、式 (39) だけは次式に置き換える。

$$\boldsymbol{G}_{\Gamma_s} = (\nabla_n \phi + \phi\kappa - \boldsymbol{A}\nabla z \cdot \nabla w - azw$$
$$+fw - \boldsymbol{A}\nabla h \cdot \nabla w - ahw + \Lambda)\boldsymbol{n} \quad (53)$$

したがって、Lagrange 関数 L が停留するためには、次式と式 (45), (47) から (49) が成立する必要がある。

$$a(z', w) = \langle \phi_y, z' \rangle + \langle \phi_{\nabla_y}, \nabla z' \rangle\ \forall z' \in H_{\Gamma_1} \quad (54)$$

ただし、$\phi'(z') = \langle \phi_y, z' \rangle + \langle \phi_{\nabla_y}, \nabla z' \rangle \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_s; \mathbb{R})$ となる必要がある。これらの結果は問題 1 の結果と形式的に一致している。

5 領域最適化問題の解法

準備が整ったので、前章で定式化された領域最適化問題の解法を考えることにしよう。ここでは、分布系の勾配法[13]が使われる。

5.1 勾配法 準備として、設計変数 $\boldsymbol{y}$ を N 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^N$ の要素と仮定して、制約条件の無い非線形目的関数 $J(\boldsymbol{y})$ の最小化問題に勾配法を適用したときの論理を簡潔にまとめておく。

この問題は次のように定式化される。

▷最小化問題(ベクトル空間)：非線形目的関数 $J(\boldsymbol{y}) \in C^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ が与えられているとき、J が最小となるベクトル $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^N$ を求めよ。◁

今、k 回目の試行ベクトル $\boldsymbol{y}^{(k)}$ の周りで J の Taylor 展開が次のように得られているものとする。

$$\Delta J^{(k)} = \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}^{(k)}) \cdot \Delta \boldsymbol{y}^{(k)} + O(\|\Delta \boldsymbol{y}\|) \tag{55}$$

勾配ベクトル $\partial J/\partial \boldsymbol{y}(\boldsymbol{y}^{(k)}) = \boldsymbol{o}$ の場合は省略して、ある正定値行列 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{N^2}$：

$$\exists \alpha > 0: \ \boldsymbol{\xi} \cdot (\boldsymbol{a}\boldsymbol{\xi}) \geq \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \ \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N \tag{56}$$

を用いて、$\Delta \boldsymbol{y}^{(k)}$ を、次の条件を満たすように十分小さく選んだ場合を考えよう。

$$\boldsymbol{a}\Delta \boldsymbol{y}^{(k)} = -\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}^{(k)}) \tag{57}$$

式(57)を式(55)に代入して、式(56)を考慮すると、次の関係が成立する。

$$\Delta J^{(k)} = -\Delta \boldsymbol{y}^{(k)} \cdot (\boldsymbol{a}\Delta \boldsymbol{y}^{(k)}) < 0 \tag{58}$$

この関係は、$\Delta \boldsymbol{y}^{(k)}$ の変化が必ず目的関数を減少させることを表している。

この論理を分布系に拡張してみよう。この場合の関数 y は Hilbert 空間 $H^m(\Omega;\mathbb{R})$ の要素であると仮定する。問題は次のように表現できる。

▷最小化問題(Hilbert 空間)：非線形目的汎関数 $J(y) \in C^1(H^m(\Omega;\mathbb{R});\mathbb{R})$ が与えられているとき、J が最小となる関数 $y \in H^m(\Omega;\mathbb{R})$ を求めよ。◁

今、k 回目の試行関数 $y^{(k)}$ の周りで J の摂動展開が次のように得られているものとする。

$$\Delta J^{(k)} = (J_G(y^{(k)}), \Delta y^{(k)}) + O(\|\Delta y\|) \tag{59}$$

ただし、ここでの $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$ は、Hilbert 空間における内積とノルムを表す。勾配関数 $J_G(y^{(k)}) = 0$ in Ω の場合は省略して、ある有界な双1次形式 $\hat{a}(y, w)$：

$$\exists \alpha > 0: \ \hat{a}(\xi, \xi) \geq \alpha \|\xi\|^2 \quad \forall \xi \in H^m(\Omega;\mathbb{R}) \tag{60}$$

とある境界条件を用いて、次の条件を満たすように十分小さな $\Delta y^{(k)}$ を選ぶことができた場合を考えよう。

$$\hat{a}(\Delta y^{(k)}, w) = -(J_G|_{y^{(k)}}, w) \quad \forall w \in H^m(\Omega;\mathbb{R}) \tag{61}$$

式(61)を式(59)に代入して、式(60)を考慮すると、次の関係が得られる。

$$\Delta J^{(k)} = -\hat{a}(\Delta y^{(k)}, \Delta y^{(k)}) < 0 \tag{62}$$

式(61)とある境界条件から $\Delta y^{(k)}$ が一意に解けるための条件は、Shapio-Lopatinskiǐ の条件として知られている[48]。そのときの境界値問題は強圧的(coercive)であると呼ばれる。この場合に得られた $\Delta \boldsymbol{y}^{(k)}$ の変化は、必ず目的関数を減少させる結果になる。

5.2 力法 4章の領域最適化問題に、前節の勾配法を具体化して適用することを考えよう。

4章の結果より、目的汎関数が分布関数の領域積分で与えられている場合も、境界積分で与えられている場合も、Lagrange 関数 L の摂動展開は形式的に一致する。いずれも、状態方程式と随伴方程式、Kuhn–Tucker 条件式(48), (49)が満たされている状態では次式のように表すことができる。

$$\Delta L^{(k)} = l_G^{(k)}(\boldsymbol{V}^{(k)}) + O(\|\boldsymbol{V}^{(k)}\|) \tag{63}$$

この展開式と前節の式(59)の対応を考えれば、勾配法を適用することによって、速度場を決定する次のような方法を考案することができる。

ある正定値性を有する有界な双1次形式として、次のような双1次形式 $a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w})$ を用いることにする。

$$a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}) = \int_{\Omega_s} A_{ijkl}\, y_{k,l}\, w_{i,j}\, dx \tag{64}$$

ただし、

$$\exists \alpha > 0: \ a(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \geq \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \ \forall \boldsymbol{\xi} \in H^1(\Omega_s;\mathbb{R}^n) \tag{65}$$

このとき、適当な境界条件と次の支配方程式に基づいて十分小さな $\boldsymbol{V}^{(k)}$ を選ぶことができた場合を考えよう。

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{V}^{(k)}, \boldsymbol{w}) &= -l_G^{(k)}(\boldsymbol{w}) \\ \boldsymbol{V}^{(k)} &\in C_\Theta \ \forall \boldsymbol{w} \in C_\Theta \end{aligned} \tag{66}$$

式(66)の関係を式(63)に代入して、式(65)を考慮すると、次の関係が得られることになる。

$$\Delta L^{(k)} = -a(\boldsymbol{V}^{(k)}, \boldsymbol{V}^{(k)}) < 0 \tag{67}$$

この関係は、得られた速度場 $\boldsymbol{V}^{(k)}$ を用いて領域を変形していけば、凸性が保証されている問題において、Lagrange 関数 L は必ず減少していく関係を与えている。

式(66)の物理的意味を考えてみよう。式(64)の $a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w})$ は、連続体線形弾性問題におけるひずみエネ

ルギーを与える双一次形式になっている。式(65)はひずみエネルギーの正定値性を表している。$l_G(\boldsymbol{w})$ は式(37)で定義されていることを思い起こすと、式(66)は、境界あるいは領域に力 $-\boldsymbol{G}$ を作用させたときの変位分布 $\boldsymbol{V}$ を決定する連続体の線形弾性問題になっている。その意味で、この方法は力法 (traction method) と呼ぶことができる。特に表面力のみの場合は表面力法 (surface traction method) と呼ぶことにする。この方法では、数値解析法に関する特別な制限は設けられていない。

この力法に関してさらに検討を加えよう。まず、境界条件について考えよう。もしも、式(2)で与えた領域 Θ の拘束がアクティブでない場合、あるいはアクティブであっても剛体運動を拘束するのに十分ではない場合、式(66)は Neumann 問題となり、解には大きさ不定の剛体運動が含まれることになる。この場合には力 $-\boldsymbol{G}$ を作用させたときの剛体運動を求め、この運動に従った移動を繰り返すことが必要になる。式(66)の解析は力 $-\boldsymbol{G}$ による釣合が取れた後で行うことになる。

次に、式(66)における速度場の仮定 $\boldsymbol{V} \in C_\Theta \subset C^1(\bar{D};\mathbb{R}^n)$ について考えてみよう。そのために次の定理[7][47][49]を利用する。

▷ Sobolev の埋蔵定理 (imbedding theorem)：n 次元の領域 Ω に対して次の関係が成立する。

$$H^m(\Omega) \subset C^s(\bar{\Omega}) \quad \forall m > \frac{n}{2} + s \quad \triangleleft \tag{68}$$

この定理に従えば、$\boldsymbol{G} \in H^{-1+\frac{n}{2}+\epsilon}(\bar{\Omega}_s;\mathbb{R}^n)$, $\forall\epsilon > 0$ となる問題に対して $\boldsymbol{V} \in H^{1+\frac{n}{2}+\epsilon}(\bar{\Omega}_s;\mathbb{R}^n) \subset C^1(\bar{\Omega}_s;\mathbb{R}^n)$ を得る。したがって、この問題に対する速度場は、$n=2$, 3 に対して $\boldsymbol{V} \in H^{1+\frac{n}{2}+\epsilon}(\bar{\Omega}_s;\mathbb{R}^n) \subset H^1(\bar{\Omega}_s;\mathbb{R}^n)$ と考えれば十分である。

5.3 制約条件 前節で検討されなかった、Λ の設定方法を考えてみよう。Λ は Kuhn–Tucker 条件式(48), (49)を満たしている必要がある。

Lagrange 乗数 Λ は、力 $-\boldsymbol{G}$ の中では一様な表面力として含まれている。したがって、Λ が $\Delta\Lambda$ だけ変化したときの速度場 $\boldsymbol{V}$ の変化 $\Delta\boldsymbol{V}$ と大きさ m の変化 Δm は、境界に一様な大きさ $\Delta\Lambda$ の表面力を作用させたときの弾性変形解析によって得られることになる。すなわち、

$$a(\Delta\boldsymbol{V}, \boldsymbol{w}) = \Delta\Lambda \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{w}\, d\Gamma \qquad \Delta\boldsymbol{V} \in C_\Theta\ \forall\boldsymbol{w} \in C_\Theta \tag{69}$$

$$\Delta m = \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{V}\, d\Gamma \tag{70}$$

ただし、速度場に制約がない場合は、剛体運動を排除する。そこで、$\Delta\boldsymbol{V}$ と Δm の線形性を用いて、Λ と $\boldsymbol{V}$ を次のように更新すれば、式(48), (49)は満たされることになる。

$$\Lambda_{(\mathrm{new})} = \begin{cases} \max[0,\ \Lambda_{(\mathrm{old})} + \Delta\Lambda \dfrac{m_{(\mathrm{old})} - M}{\Delta m}] \\ \qquad (\Lambda_{(\mathrm{old})} > 0,\ m_{(\mathrm{old})} - M \neq 0) \\ \Delta\Lambda \dfrac{m_{(\mathrm{old})} - M}{\Delta m} \\ \qquad (\Lambda_{(\mathrm{old})} = 0,\ m_{(\mathrm{old})} - M > 0) \\ 0 \qquad (\Lambda_{(\mathrm{old})} = 0,\ m_{(\mathrm{old})} - M \leq 0) \end{cases} \tag{71}$$

$$\boldsymbol{V}_{(\mathrm{new})} = \boldsymbol{V}_{(\mathrm{old})} \frac{\Lambda_{(\mathrm{new})} - \Lambda_{(\mathrm{old})}}{\Delta\Lambda} \tag{72}$$

6 おわりに

楕円型境界値問題の領域最適化問題に対する一つの解法を提案した。扱われた問題は、偏微分方程式の係数関数や境界値関数が滑らかで、領域の変動に対して1対1に対応していることと、領域の大きさには上限値が定められていることを仮定したとき、状態関数で与えられた目的汎関数を最小にする領域を求める問題であった。初めに、領域変動を速度場を用いて定義し、目的汎関数の導関数は形状勾配関数を係数関数とする速度場の一次形式として得られることを示した。解法はこの一次形式に勾配法を適用することによって定式化された。その方法は、領域を線形弾性連続体と仮定して、境界あるいは領域に形状勾配関数に比例した力を作用させたときの変位場を速度場と見做して解析する方法である。

文献

(1) Hadamard, J., Mémoire sur un probléme d'analyse relatif a l'équilibre des plaques élastiques encastrees, Mémoire des savants etragers, Oeuvres de J. Hadamard, CNRS, Paris, 1968.

(2) Sokolowski, J. and Zolésio, J. P., *Introduction to Shape Optimization, Shape Sensitivity Analysis*, (1991), Springer–Verlag.

(3) Polya, G., *Quarterly Appli. Math.*, 6 (1948), 267.

(4) Horák, V., *Inverse Variational Principles of Continuum Mechanics*, (1969), Rozpravy Ceskoslovenske Akad. Ved..

(5) Pironneau, O., *J. Fluid Mech.*, 59, Part 1 (1973), 117.

(6) Pironneau, O., *J. Fluid Mech.*, 64, Part 1, (1974), 97.

(7) Pironneau, O., *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*, (1984), Springer–Verlag.

(8) Murat, F. and Simon, J., *Lecture Notes in Computer Science 41*, edited by Cea, J., (1974), 54.

(9) Banichuk, N. V., *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol. 2 (1981), Sijthoff & Noordhoff, 973.

(10) Banichuk, N. V., *Problems and Methods of Optimal Structural Design*, (1983), Plenum Press.

(11) Banichuk, N. V., *Introduction to Optimization of Structures*, (1990), Springer–Verlag.

(12) Cea, J., *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol.2 (1981), Sijthoff & Noordhoff, 1005.

(13) Cea, J., *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol.2 (1981), Sijthoff & Noordhoff, 1049.

(14) Rousselet, B., *J. Opt. Th. Appl.*, 4 (1983), 595.

(15) Dems, K. and Mróz, Z., *Int. J. Solids Structures*, 19 (1983), 677.

(16) Dems, K. and Mróz, Z., *Int. J. Solids Structures*, 20 (1984), 527.

(17) Lions, J. L., *Proc. 4th IFIP Coll. on Techniques of Optimization*, (1971), 137.

(18) Zolésio, J. P., *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol.2 (1981), Sijthoff & Noordhoff, 1089.

(19) Zolésio, J. P., *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol.2 (1981), Sijthoff & Noordhoff, 1152.

(20) Choi, K. K. and Haug E. J., *J. Struct. Mech.*, 11 (1983), 231.

(21) Choi, K. K., *J. Struct. Mech.*, 13 (1985), 27.

(22) Haug E. J., Choi, K. K. and Komkov, V., *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, (1986), Academic Press.

(23) Braibant, V. and Fleury, C., *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 44 (1984), 247.

(24) Braibant, V. and Fleury, C., *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 53 (1985), 119.

(25) Arora, J. S. and Cardoso, J. B., *AIAA J.*, 30 (1992), 538.

(26) Arora, J. S., *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 105 (1993), 41.

(27) Choi, K. K. and Seong, H. G., *The Optimum Shape, Automated Structural Design*, edited by Bennett, J. A. and Botkin, M. E., (1985), Plenum Press, 329.

(28) Schmit, L. A., *Proc. of Second Conference on Electronic Computation ASCE*, (1960), 105.

(29) Zienkiewicz, O. C. and Campbell, J. S., *Optimum Structural Design - Theory and Applications -*, edited by Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C., (1973), John Wiley & Sons, 109.

(30) 尾田, 機誌, 79 (1976), 494.

(31) Oda, J. and Yamazaki K., *Bull. JSME*, 20 (1977), 1524.

(32) 尾田, 山崎, 機論, 44, 1 部 (1978), 1141.

(33) 尾田, 山崎, 機論, 45, A (1979), 33.

(34) Umetani, Y. and Hirai, S., *Proc. JSME-ASME Applied Mechanics Western Conference*, (1975), 359.

(35) 梅谷, 機誌, 79 (1976), 31.

(36) 梅谷, 平井, 機論, 42, 1 部 (1976), 3754.

(37) Umetani, Y. and Hirai, S., *Bull. JSME*, 21 (1978), 1113.

(38) 瀬口, 多田, 機論, 44, 1 部 (1978), 1469.

(39) 畔上, 機論, 54, A (1988), 2167.

(40) Azegami, H., Okitsu, A., Ogihara, T. and Takami, A., *J. Pressure Vessel Technology*, Trans. ASME, J, 114 (1992), 87.

(41) Prager, Q., *Comput. Struct.*, 2 (1972), 833.

(42) Na, M., Kikuchi, N. and Taylor, J. E., *J. Structural Mech.*, 11 (1983), 111.

(43) Na, M., Kikuchi, N. and Taylor, J. E., *Int. J. Numer. Mech. Engrg.*, 20 (1984), 1823.

(44) Olhoff, N. and Taylor, J. E., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 50 (1983), 1139.

(45) Haftka, R. T. and Grandhi, R. V., *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 57 (1986), 91.

(46) Haftka, R. T. and Adelman, H. M., *Structural Optimization*, 1 (1989), 137.

(47) Ciarlet, P. G., *Handbook of Numerical Analysis*, edited by Ciarlet, P. G. and Lions, J. L., 2 (1991), North-Holland, 17.

(48) 島倉紀夫, 楕円型偏微分作用素, (1978), 紀伊国屋書店.

(49) 溝畑茂, 偏微分方程式論, (1965), 岩波書店.