

流体加熱を受ける多層厚肉回転対称殻の
熱弾/粘塑性変形*竹園茂男^{*1}, 埜克己^{*1}, 稲村栄次郎^{*2}Thermal Elasto/Visco-Plastic Deformation of Multi-Layered Moderately
Thick Shells of Revolution under Thermal Loading due to Fluid

Shigeo TAKEZONO, Katsumi TAO and Eijiroh INAMURA

This paper is concerned with an analytical formulation and a numerical solution of the thermal elasto/visco-plastic deformation of multi-layered moderately thick shells of revolution subjected to thermal loads due to fluid. The temperature distribution through each layer thickness is assumed to be a quadratic curve and is determined using the equations of heat conduction and heat transfer. The equations of equilibrium and the relations between the strains and displacements are derived from the Reissner-Naghdi theory. For the constitutive relations, the Perzyna equations are employed. As numerical examples, two-layered cylindrical shells composed of mild steel and titanium subjected to locally distributed thermal loads due to fluid are analyzed. The results show that the present method gives correct initial responses and that temperature distributions, stress distributions and deformations are significantly varied depending on the ratio of the thickness of the titanium layer to the shell thickness.

Key Words: Structural Analysis, Thermal Stress, Multi-Layered Thick Shells, Elasto/Visco-Plasticity, Heat Conduction, FDM

1. 緒 言

急激な温度変化を伴う環境下にある構造物の設計において、高い信頼性・安全性ならびに高性能・高経済性を追求する際に、大きな熱応力によって生じる構造物の粘塑性の影響を無視することはできない。熱応力を緩和するために、異種材質を組み合わせた多層複合構造の平板、円筒や殻などを対象とした熱伝導・熱応力問題の研究が、近年数多く報告されている⁽¹⁾。しかしながら、これらの研究のほとんどが弾性理論に基づくものであり、殻の熱伝導および熱伝達を考慮した熱弾/粘塑性応答問題を取り扱った研究は少ないようである。

著者らは、殻の周囲の流体により温度負荷を受ける薄肉多層回転対称殻の熱弾/粘塑性変形問題を解析してきたが⁽²⁾、本研究では、これまであまり解析されていない中程度の厚さの多層回転対称殻の熱弾/粘塑性変形問題の解法を取り扱った。まず、殻の温度分布を求める際に、各層の殻厚方向温度分布を二次曲線で近似し、また各層を仮想的に分割することによって、熱

負荷直後の解の精度の向上を図った。次に得られた温度分布をもとに、殻厚方向のせん断変形を考慮した Reissner-Naghdi の殻理論⁽³⁾⁽⁴⁾に基づく多層殻の基礎関係式から、変位、内力などを求めた。構成関係には、温度の影響を考慮した Perzyna の弾/粘塑性式⁽⁵⁾を用いた。導かれた基礎式の数値解法には、差分法を適用した。

数値解析例として、軟鋼およびチタンから成る二層円筒殻に、流体加熱が作用する問題を二例取り上げた。一つは、円筒殻内表面に一樣加熱を受ける場合について、温度分布の解を他の解法⁽⁶⁾による解と比較し、本解法の妥当性を確認した。もう一つは、局所的な流体加熱が作用する場合の熱弾/粘塑性変形問題を解析した。

2. 基 礎 式

図1に示すように、殻の中央面上に子午線方向に ξ 、円周方向に θ 、中央面から外向きに z の座標軸をとる。対称軸から中央面までの距離を r とし、殻の中央面の形を $r=r(\xi)$ とすると、点 P における無次元曲率 $\omega_\xi (=a/R_s)$ 、 $\omega_\theta (=a/R_\theta)$ および無次元半径 $\rho (=r/a)$ の間には、次の関係が成立する。

* 原稿受付 1995年2月3日。

*¹ 正員、豊橋技術科学大学 (〒441 豊橋市天伯町字雲雀ヶ丘1-1)。*² 正員、豊橋技術科学大学大学院。

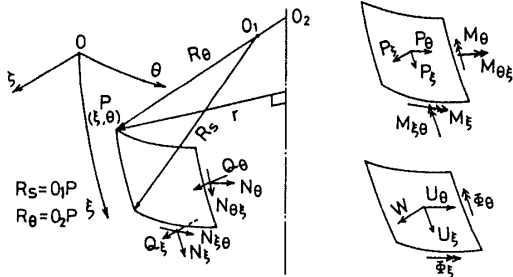


図1 座標と諸記号

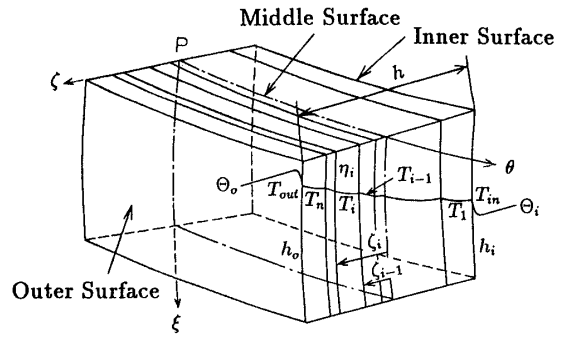


図2 多層殻要素

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= -(\gamma' + \gamma^2)/\omega_\theta, \omega_\theta = \sqrt{1 - (\rho')^2/\rho} \\ \omega'_\theta &= \gamma(\omega_\xi - \omega_\theta), \rho''/\rho = -\omega_\xi\omega_\theta \\ \gamma &= \rho'/\rho, \xi = s/a, (\gamma)' = d(\gamma)/d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

ここに、 s は子午線方向の長さであり、 a は代表長さである。

2・1 熱伝導方程式 図2に示すように、 n 層から成る殻の内側から i 番目の層(任意の層)の諸量に添字 i をつけると、厚肉殻で内部発熱がある場合、殻体内の任意の層の熱伝導方程式は ξ, θ, ζ 座標を用いて次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial t} - \frac{\chi_i}{L_\xi L_o a^2 \rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho \frac{L_\theta}{L_\xi} \frac{\partial T_i}{\partial \xi} \right) + \frac{L_\xi}{\rho L_\theta} \frac{\partial^2 T_i}{\partial \theta^2} \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(a^2 \rho L_\xi L_o \frac{\partial T_i}{\partial \zeta} \right) - \frac{\eta_i}{c_i \rho_{oi}} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

ここに、 $L_\xi = 1 + \zeta/R_s, L_\theta = 1 + \zeta/R_\theta, T_i$: 任意の時刻における殻体内の任意の点 (ξ, θ, ζ) の温度、 η_i : 単位時間、単位体積当たりの発熱量、 χ_i : 温度伝導率 (= $\lambda_{oi}/c_i \rho_{oi}$)、 c_i : 比熱、 ρ_{oi} : 密度、 λ_{oi} : 熱伝導率、 t : 時間である。

次に殻の内、外表面 ($\zeta = \pm h/2$) の温度境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} [\partial T_i / \partial \zeta]_{\zeta = -h/2} = h_i (T_{in} - \Theta_i) \\ [\partial T_n / \partial \zeta]_{\zeta = h/2} = -h_o (T_{out} - \Theta_o) \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

ここに、 h_i, h_o : 殻の内、外表面の相対熱伝達率 (= $k_i/\lambda_i, k_o/\lambda_n, k$: 熱伝達率)、 T_{in}, T_{out} : 殻の内、外表面の温度、 Θ_i, Θ_o : 殻の内、外の周囲温度、 h : 殻厚である。

隣接する各層の境界面(接着面)において、接触熱抵

抗がなく、したがって温度ならびに熱流束の連続性が成立するものとする、次式が満足されなければならない。

$\zeta = \zeta_i$ で

$$\left. \begin{aligned} T_i = T_{i+1}, \lambda_{oi} \frac{\partial T_i}{\partial \zeta} = \lambda_{oi+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial \zeta} \\ (i=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

ここで、 ζ_i は殻の内側から i 番目の層と $i+1$ 番目の層の間の境界面の ζ 座標値である。

本研究では、応答初期の解の精度の向上を図るため、従来直線で近似されていた各層の殻厚方向の温度分布 $T_i^{(2)}$ を係数 $T_{0,i}, T_{1,i}, T_{2,i} (i=1, 2, \dots, n)$ を用いて、次の二次曲線で表す。

$$\left. \begin{aligned} T_i(\xi, \theta, \zeta, t) = T_{0,i}(\xi, \theta, t) + T_{1,i}(\xi, \theta, t) \zeta \\ + T_{2,i}(\xi, \theta, t) \zeta^2 \\ (\zeta_{i-1} \leq \zeta \leq \zeta_i; i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

式(5)と次の近似式

$$\left. \begin{aligned} \frac{L_\theta}{L_\xi} \approx 1 - (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\zeta}{a} + \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\zeta^2}{a^2} \\ \frac{L_\theta}{L_\xi^2} \approx 1 + (\omega_\theta - 2\omega_\xi) \frac{\zeta}{a} + (3\omega_\xi^2 - 2\omega_\xi\omega_\theta) \frac{\zeta^2}{a^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

を式(2)に代入し、各層の厚さにわたって積分した式、ならびに式(5)を式(3)、(4)に代入した式は、各々次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \left(C_{1,i,i} \frac{\partial T_{i-1,i}}{\partial t} + C_{2,i,i} \frac{\partial T_{i-1,i}}{\partial \xi} + C_{3,i,i} \frac{\partial^2 T_{i-1,i}}{\partial \xi^2} + C_{4,i,i} \frac{\partial^2 T_{i-1,i}}{\partial \theta^2} - C_{5,i} Q_{i-1,i} \right) + C_{6,i} T_{1,i} + C_{7,i} T_{2,i} = 0 \\ T_{0,1} + C_{8,1} T_{1,1} + C_{8,2} T_{2,1} - \Theta_i = 0, T_{0,n} + C_{9,1} T_{1,n} + C_{9,2} T_{2,n} - \Theta_o = 0 \\ \sum_{i=0}^2 \zeta^i (T_{i,j} - T_{i,j+1}) = 0, T_{1,j} + 2\zeta_j T_{2,j} + C_{10,1,j} T_{1,j+1} + C_{10,2,j} T_{2,j+1} = 0 \\ (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} C_{1,l,i} &= \sum_{k=1}^3 C_{5,l} \zeta_{k+l-1,i} / \chi_i, C_{2,l,i} = - \left[\zeta_{l,i} \gamma - \omega'_\xi \left\{ \frac{\zeta_{l+1,i}}{a} + \frac{\zeta_{l+2,i}}{a^2} (\omega_\theta - 2\omega_\xi) \right\} \right] \\ C_{3,l,i} &= - \left\{ \zeta_{l,i} + \frac{\zeta_{l+1,i}}{a} (\omega_\theta - \omega_\xi) + \frac{\zeta_{l+2,i}}{a^2} \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta) \right\}, C_{4,l,i} = - \frac{1}{\rho^2} \left\{ \zeta_{l,i} + \frac{\zeta_{l+1,i}}{a} (\omega_\xi - \omega_\theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta_{l+2,i}}{a^2} \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi) \right\}, C_{5,1} = a^2, C_{5,2} = a(\omega_\xi + \omega_\theta), C_{5,3} = \omega_\xi \omega_\theta, C_{6,i} = - \sum_{k=1}^2 k C_{5,k+1} \zeta_{k,i} \\ C_{7,i} &= -2 \sum_{k=1}^3 k C_{5,k} \zeta_{k,i}, C_{8,z} = \zeta_0^z - z \zeta_0^{z-1} / h_i, C_{9,z} = \zeta_n^z + z \zeta_n^{z-1} / h_o, C_{10,z,j} = -z \zeta_j^{z-1} \lambda_{oj+1} / \lambda_{oj} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$(i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n-1; l=1, 2, 3; z=1, 2)$$

また、

$$\zeta_{j,i} = (\zeta_i^j - \zeta_{i-1}^j) / j, Q_{k,i} = \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \eta_i \zeta^k d\zeta / \lambda_{oi} \quad (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, 5; k=0, 1, 2) \dots\dots\dots (9)$$

以上で、 $3n$ 個の未知数 $T_{0,i}, T_{1,i}, T_{2,i} (i=1, 2, \dots, n)$ に対して、式(7)が与えられ、これを解くと殻の温度分布が求められる。

2・2 熱変形方程式 回転対称殻の内力の平衡方程式並びにひずみと中央面の変位・回転との関係には、殻厚方向のせん断変形を考慮した Reissner-Naghdi の殻理論式⁽³⁾⁽⁴⁾を採用する。また構成関係には温度の影響を考慮した Perzyna の弾/粘塑性式⁽⁵⁾を用いる。これらの殻理論式ならびに構成関係式は、各々既発表の論文⁽⁷⁾と同一なので、ここでは紙面の都合もあり簡略化して列挙する。

○時間または時間とともに単調に変化する量について微分した平衡方程式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{N}_\xi}{\partial \xi} + \gamma (\dot{N}_\xi - \dot{N}_\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{N}_{\theta\xi}}{\partial \theta} + \omega_\xi \dot{Q}_\xi + a \dot{P}_\xi &= 0 \\ \frac{\partial \dot{N}_{\xi\theta}}{\partial \xi} + \gamma (\dot{N}_{\xi\theta} + \dot{N}_{\theta\xi}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{N}_\theta}{\partial \theta} + \omega_\theta \dot{Q}_\theta + a \dot{P}_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \dot{Q}_\xi}{\partial \xi} + \gamma \dot{Q}_\xi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{Q}_\theta}{\partial \theta} - (\omega_\xi \dot{N}_\xi + \omega_\theta \dot{N}_\theta) + a \dot{P}_\xi &= 0 \\ \dot{Q}_\xi - \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \dot{M}_\xi}{\partial \xi} + \gamma (\dot{M}_\xi - \dot{M}_\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{M}_{\theta\xi}}{\partial \theta} \right] &= 0 \\ \dot{Q}_\theta - \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \dot{M}_{\theta\xi}}{\partial \xi} + \gamma (\dot{M}_{\theta\xi} + \dot{M}_{\xi\theta}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{M}_\theta}{\partial \theta} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $\{N\} = \{N_\xi, N_\theta, N_{\xi\theta}, N_{\theta\xi}, Q_\xi, Q_\theta\}$, $\{M\} = \{M_\xi, M_\theta, M_{\xi\theta}, M_{\theta\xi}\}$ ：殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメント(図1), P_ξ, P_θ, P_ξ ：殻の中央面の単位面積当たりの分布荷重(図1)である。

○中央面のひずみと変位の関係：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\xi m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \xi} + \omega_\xi \dot{W} \right] \\ \dot{\epsilon}_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \theta} + \gamma \dot{U}_\xi + \omega_\theta \dot{W} \right] \\ \dot{\epsilon}_{\xi\theta m} &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \xi} - \gamma \dot{U}_\theta \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

○曲率の変化量と変位成分の関係：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\chi}_\xi &= \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{\Phi}_\xi}{\partial \xi}, \dot{\chi}_\theta = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{\Phi}_\theta}{\partial \theta} + \gamma \dot{\Phi}_\xi \right) \\ \dot{\chi}_{\xi\theta} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{\partial \dot{\Phi}_\theta}{\partial \xi} - 2\omega_\xi \dot{\Phi}_n \right) \\ \dot{\chi}_{\theta\xi} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{\Phi}_\xi}{\partial \theta} - \gamma \dot{\Phi}_\theta + 2\omega_\theta \dot{\Phi}_n \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

○中央面の回転と変位・ひずみの関係：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}_\xi &= \frac{1}{a} \left(-\frac{\partial \dot{W}}{\partial \xi} + \omega_\xi \dot{U}_\xi \right) + 2 \dot{\epsilon}_{\xi m} \\ \dot{\Phi}_\theta &= \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{W}}{\partial \theta} + \omega_\theta \dot{U}_\theta \right) + 2 \dot{\epsilon}_{\theta m} \\ \dot{\Phi}_n &= \frac{1}{2a} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \xi} + \gamma \dot{U}_\theta \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

○殻厚中央面から ζ の距離にある点のひずみ：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_\xi &= (\dot{\epsilon}_{\xi m} + \zeta \dot{\chi}_\xi) / L_\xi, \dot{\epsilon}_\theta = (\dot{\epsilon}_{\theta m} + \zeta \dot{\chi}_\theta) / L_\theta \\ \dot{\epsilon}_{\xi\theta} &= \left\{ \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{\xi\theta m} + \dot{\Phi}_n) + \zeta (\dot{\chi}_{\xi\theta} + \dot{\Phi}_n / R_s) \right\} / L_\xi \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{\theta\xi m} - \dot{\Phi}_n) + \zeta (\dot{\chi}_{\theta\xi} - \dot{\Phi}_n / R_s) \right\} / L_\theta \\ \dot{\epsilon}_{\xi\xi} &= \dot{\epsilon}_{\xi\xi m} / L_\xi, \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \dot{\epsilon}_{\theta\theta m} / L_\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

○構成関係式：

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma_0(T) < \Psi \left(\frac{\bar{\sigma} - \sigma^*(T)}{\sigma^*(T)} \right) > S_{ij} J_2^{-1/2} \dots (15)$$

ここで、 $(\dot{\quad})$ ：時間に関する微分、 ϵ_{ij}^{vp} ：粘塑性ひずみ、 S_{ij} ：偏差応力、 J_2 ：偏差応力の第二不変量、 γ_0 ：粘性を表す定数(温度 T の関数)、 $\bar{\sigma}$ ：ミーゼスの相当応力(= $\sqrt{3}J_2$)、 σ^* ：静的な降伏応力(温度 T の関数)、 $< >$ ：マコーレのカッコである。

全ひずみ速度が、弾性ひずみ速度と粘塑性ひずみ速度および熱ひずみ速度の和で表せるとすると、仮定される殻の応力状態(殻厚方向の垂直応力 $\sigma_z = 0$)において全ひずみ速度は次式のようなになる。

$$\{\dot{\epsilon}\} = [D]^{-1} \{\dot{\sigma}\} + \{\dot{\epsilon}^{vp}\} + \{\dot{\epsilon}^t\} \dots\dots\dots (16)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 \{\dot{\sigma}\} &= \{\dot{\sigma}_\varepsilon, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_{\varepsilon\theta}, \dot{\sigma}_{\varepsilon\zeta}, \dot{\sigma}_{\theta\zeta}\}^T \\
 \{\dot{\varepsilon}\} &= \{\dot{\varepsilon}_\varepsilon, \dot{\varepsilon}_\theta, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\zeta}, \dot{\varepsilon}_{\theta\zeta}\}^T \\
 \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} &= \{\dot{\varepsilon}_\varepsilon^{vp}, \dot{\varepsilon}_\theta^{vp}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta}^{vp}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\zeta}^{vp}, \dot{\varepsilon}_{\theta\zeta}^{vp}\}^T \\
 \{\dot{\varepsilon}^t\} &= \{\alpha\dot{T}_e, \alpha\dot{T}_e, 0, 0, 0\}^T \\
 [D] &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \\
 \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_0(T) \left\langle \Psi \left(\frac{\bar{\sigma} - \sigma^*(T)}{\sigma^*(T)} \right) \right\rangle \\
 &\times \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \{\sigma\} \\
 &\dots\dots\dots (17)^{**1}
 \end{aligned} \right\}$$

ここで、 E ：縦弾性係数、 ν ：ポアソン比、 α ：線膨張

係数、 T_e ：基準温度 \bar{T}_0 からの温度変化

$$T_e(\xi, \theta, \zeta, t) = T(\xi, \theta, \zeta, t) - \bar{T}_0 \dots\dots\dots (18)$$

さて、式(16)を $\{\dot{\sigma}\}$ について解くと、次式が得られる。

$$\{\dot{\sigma}\} = [D]\{\dot{\varepsilon}\} - \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} - \{\dot{\varepsilon}^t\} \dots\dots\dots (19)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} &= \{\dot{\varepsilon}_\varepsilon^{vp}, \dot{\varepsilon}_\theta^{vp}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta}^{vp}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\zeta}^{vp}, \dot{\varepsilon}_{\theta\zeta}^{vp}\}^T = [D]\{\dot{\varepsilon}^{vp}\} \\
 \{\dot{\varepsilon}^t\} &= \{\dot{\varepsilon}^t, \dot{\varepsilon}^t, 0, 0, 0\}^T = [D]\{\dot{\varepsilon}^t\} \\
 &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \{\dot{T}_e, \dot{T}_e, 0, 0, 0\}^T \\
 &\dots\dots\dots (20)
 \end{aligned} \right\}$$

式(19)を用い、かつ式(6)の第1式に示す近似を用いると、殻の単位長さ当たりの合応力 $\{N\}$ および合モーメント $\{M\}$ は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{N} \\ \dot{M} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_m \\ \dot{\varepsilon} \\ \dot{\Phi}_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{N}^{vp} \\ \dot{M}^{vp} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{N}^t \\ \dot{M}^t \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
 \{\dot{\varepsilon}_m\} &= \{\dot{\varepsilon}_{\varepsilon m}, \dot{\varepsilon}_{\theta m}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta m}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\zeta m}, \dot{\varepsilon}_{\theta\zeta m}\}^T, \{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}_\varepsilon, \dot{\varepsilon}_\theta, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta}, \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\zeta}\}^T \\
 \{\dot{N}^{vp}\} &= \{\dot{N}_\varepsilon^{vp}, \dot{N}_\theta^{vp}, \dot{N}_{\varepsilon\theta}^{vp}, \dot{N}_{\varepsilon\zeta}^{vp}, \dot{Q}_\varepsilon^{vp}, \dot{Q}_\theta^{vp}\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} [L_1]\{\dot{\varepsilon}^{vp}\}d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_1][D_i]\{\dot{\varepsilon}^{vp}\}d\zeta \\
 \{\dot{M}^{vp}\} &= \{\dot{M}_\varepsilon^{vp}, \dot{M}_\theta^{vp}, \dot{M}_{\varepsilon\theta}^{vp}, \dot{M}_{\varepsilon\zeta}^{vp}\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} [L_2]\{\dot{\varepsilon}^{vp}\}*\zeta d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_2][\bar{D}_i]\{\dot{\varepsilon}^{vp}\}*\zeta d\zeta \\
 \{\dot{N}^t\} &= \{\dot{N}_\varepsilon^t, \dot{N}_\theta^t, 0, 0, 0\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} [L_1]\{\dot{\varepsilon}^t\}d\zeta \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_1][D_i]\{\dot{\varepsilon}^t\}d\zeta = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i E_i}{1-\nu_i} \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_1]\{\dot{T}_e, \dot{T}_e, 0, 0, 0\}^T d\zeta \\
 \{\dot{M}^t\} &= \{\dot{M}_\varepsilon^t, \dot{M}_\theta^t, 0, 0\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} [L_2]\{\dot{\varepsilon}^t\}*\zeta d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_2][\bar{D}_i]\{\dot{\varepsilon}^t\}*\zeta d\zeta \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i E_i}{1-\nu_i} \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_2]\{\dot{T}_e, \dot{T}_e, 0\}^T \zeta d\zeta \\
 (\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\})^* &= \{a_1, a_2, a_3\}^T
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ただし、 $[A], [L_1], [L_2], [\bar{D}_i]$ は各々材料定数と殻の形状により定まる $10 \times 10, 6 \times 5, 4 \times 3, 3 \times 3$ の定数行列である⁽⁷⁾。

以上で56個の未知数 $\{N\}, \{M\}, U_\varepsilon, U_\theta, W, \{\varepsilon_m\}, \{\varepsilon\}, \Phi_\varepsilon, \Phi_\theta, \Phi_n, \{\sigma\}, \{\sigma^{vp}\}, \{\varepsilon^{vp}\}, \{N^{vp}\}, \{M^{vp}\}, \{\varepsilon^t\}, \{\sigma^t\}, \{N^t\}, \{M^t\}$ に対して式(10)～(13), (17), (19)～(22)の56個の式が得られたことになる。

3. 無次元方程式

一般に非軸対称問題を解析するには、各変数を θ 方向にフーリエ級数で表し、その係数を定めればよい。そこで、2章に示した $(3n+56)$ 個の変数のうち、粘塑性ひずみ速度 $\{\dot{\varepsilon}^{vp}\}$ ならびに熱ひずみ速度 $\{\dot{\varepsilon}^t\}$ を除く $(3n+50)$ 個の変数と分布荷重、殻の内外の周囲温度および発熱量をフーリエ級数に展開する⁽²⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

これらのフーリエ展開式を前述の基礎式に代入し、フーリエ係数(対応する小文字を使う)に関する対応する式をつくると、熱伝導方程式から $t_i^{(m)}, t_{i,\theta}^{(m)}, t_{i,\zeta}^{(m)} (i=1, 2, \dots, n; m$ ：フーリエ級数の項数)に関する次の $3n$ 元連立二階微分方程式が得られる。

**1 { }^T は転置行列を表す。

$$A_1 Y'' + A_2 Y' + A_3 Y = A_4 + A_5 (\partial Y / \partial \tau) \quad \dots (23)$$

ただし、 $Y = \{t_{0,1}^{(m)}, t_{1,1}^{(m)}, t_{2,1}^{(m)}, t_{0,2}^{(m)}, \dots, t_{2,n}^{(m)}\}^T$, $\tau = \chi_0 t / a^2$ (χ_0 : 温度伝導率 [= $\lambda_{00} / c_0 \rho_{00}$], λ_{00} : 代表熱伝導率, c_0 : 代表比熱, ρ_{00} : 代表密度)である。ここで、 $A_1 \sim A_3$ は殻の形状と殻の内外表面の相対熱伝達率から定まる $3n \times 3n$ の定数行列であり、 A_4 は殻の内外の周囲温度、相対熱伝達率ならびに発熱量から定まる $3n \times 1$ の定数行列である。また A_5 も $3n \times 3n$ の定数行列である。

次に熱変形方程式は順次未知数を消去することにより、変位 $u_\xi^{(m)}, u_\theta^{(m)}, w^{(m)}$ および回転 $\phi_\xi^{(m)}, \phi_\theta^{(m)}$ に関する次の5元連立二階微分方程式になる。

$$B_1 \dot{Z}'' + B_2 \dot{Z}' + B_3 \dot{Z} = B_4 \quad \dots (24)$$

ただし、 $\dot{Z} = \{\dot{u}_\xi^{(m)}, \dot{u}_\theta^{(m)}, \dot{w}^{(m)}, \dot{\phi}_\xi^{(m)}, \dot{\phi}_\theta^{(m)}\}^T$, $(\dot{\quad}) = \partial(\quad) / \partial \tau$ 。ここで、 $B_1 \sim B_3$ は殻の形状と ν の値から定まる 5×5 の定数行列であり、また B_4 は殻の形状のほか、分布荷重、温度負荷および粘塑性による見掛けの内力成分から定まる 5×1 の定数行列である⁽⁹⁾。 B_4 に含まれる粘塑性と温度変化に関する内力成分の変化率の各フーリエ係数は、式(22)を用いて、各々既発表論文⁽⁷⁾の式(28)と次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \sigma_0 h_0 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \dot{n}_\xi^{(m)}, \dot{n}_\theta^{(m)}, \frac{h_0^2}{a} \dot{m}_\xi^{(m)}, \frac{h_0^2}{a} \dot{m}_\theta^{(m)} \right\} \\ & \times \cos m\theta \\ & = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i E_i}{1 - \nu_i} \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \{L_\theta, L_\xi, L_\theta \zeta, L_\xi \zeta\} \dot{T}_e d\zeta \quad \dots (25) \end{aligned}$$

ここで、 σ_0, h_0 はそれぞれ代表応力および代表殻厚である。また積分にはシンプソンの1/3則を適用する。

4. 数値計算法

ある任意の計算段階における温度と、変位ならびに回転の変化率とは、式(23)と式(24)を適当な境界条件のもとで解けば得られ、またこれらを用いて、内力成

分の変化率は、式(11)~(13)を式(21)に代入したものから求められる。しかしながら、式(23)と(24)を厳密に理論解析することは困難であるから、差分法によって数値的に解を求める。この数値解法は、著者らがすでに発表した単層薄肉殻の場合⁽⁸⁾とほぼ同様であるので、紙面の都合上省略する。

5. 数値解析例

数値解析例として、軟鋼とチタンの層から成る両端単純可動支持の二層円筒殻に、流体加熱が時間に対してステップ状に作用する問題を二例取り上げた。まず初めに、円筒殻内表面に一様に熱負荷を与えた場合の殻の温度分布解析を行い、解の精度の評価を行った。続いて、円筒殻中央部の外表面に軸対称熱負荷を加えた場合の熱弾/粘塑性変形問題を解析した。

計算に用いたチタンと軟鋼の材料定数は次のとおりである。

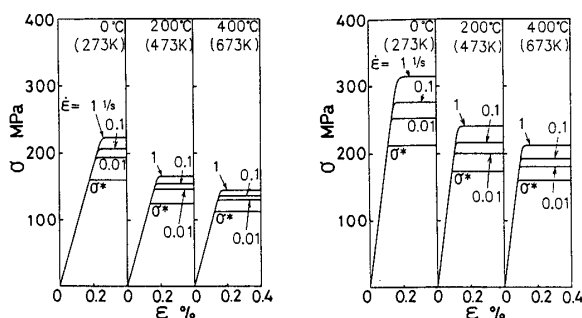
チタン:

$$\begin{aligned} E &= 90 \text{ GPa}, \rho_o = 4.5 \text{ g/cm}^3, c = 0.555 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)} \\ \nu &= 0.33, \lambda_o = 15.0 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}, \alpha = 8.95 \times 10^{-6} \text{ 1/K} \\ \sigma^*(T) &= 160 \exp\{0.6(273/T - 1)\} \text{ MPa} \\ \gamma_o(T) &= 800[1 + 5\{(273 - T)/273\}^2] \text{ 1/s} \\ \Psi(f) &= [(\bar{\sigma} - \sigma^*(T))/\sigma^*(T)]^{7.4} \quad \dots (26) \end{aligned}$$

軟鋼⁽⁵⁾:

$$\begin{aligned} E &= 190 \text{ GPa}, \rho_o = 7.8 \text{ g/cm}^3, c = 0.46 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)} \\ \nu &= 0.3, \lambda_o = 50.1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}, \alpha = 11.7 \times 10^{-6} \text{ 1/K} \\ \sigma^*(T) &= 207 \exp\{0.45(288/T - 1)\} \text{ MPa} \\ \gamma_o(T) &= 30.1[1 + 2.6\{(220 - T)/273\}^2] \text{ 1/s} \\ \Psi(f) &= [(\bar{\sigma} - \sigma^*(T))/\sigma^*(T)]^5 \quad \dots (27) \end{aligned}$$

なお、上式の T は絶対温度 [K] である。これらの材料



(a) チタン (b) 軟鋼

図3 応力-ひずみ線図

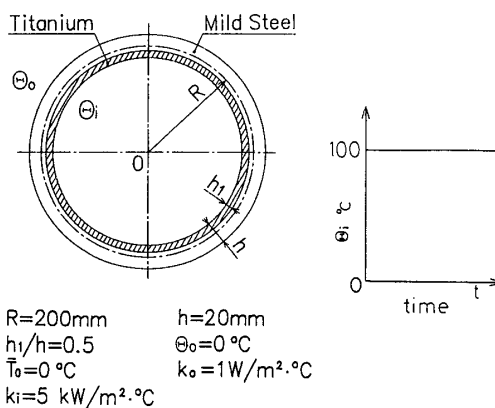


図4 数値解析例1

定数を用いた場合の 0, 200, 400°C の各温度での応力-ひずみ線図を図 3 に示す。応力-ひずみ関係には温度依存性およびひずみ速度依存性が見られる。

5.1 例題 1：温度分布解析および解法の評価

内側にチタン，外側に軟鋼の層を配した無限長の二層円筒殻の内表面に，一様な流体加熱が作用した場合(図 4)の温度分布解析を行い，武井の解析解⁽⁶⁾と比較

した。チタンの層(厚さ h_1)の殻厚に対する比 h_1/h は 0.5 とした。基準温度および円筒殻の初期温度は 0°C とした。円筒殻内外面での熱伝達率 k_i, k_o は, $k_i=5 \text{ kW/m}^2\text{°C}$, $k_o=1 \text{ W/m}^2\text{°C}$, 代表応力 σ_0 は, 本計算では $\sigma_0=1$ とし, 殻厚方向には各層ごとに 11 個の格子点を採用した。また時間間隔 Δt は 0.1 s とした。これらの値は, 解の収束性と利用した計算機の容量および計算時間を考慮して決定した。

図 5 に, 得られた殻厚方向の温度分布を示す。図中, 黒丸印は武井の解析解であり, 破線は熱伝導方程式中の $\zeta/R_0, \zeta/R_0$ の項を 1 に比較し小さいものとして省略し, 各層の殻厚方向温度分布を直線近似した多層薄肉殻理論⁽²⁾による解である。また一点鎖線は各層の殻厚方向温度分布を二次曲線近似した本解法による解であり, 実線は本解法を用いて, 各層を仮想的に二等分割し四層殻として解析した値を示す。図より, 薄肉殻の熱伝導方程式から求めた結果は, 非定常状態において他の解法による結果との差異が大きく, 高い温度分

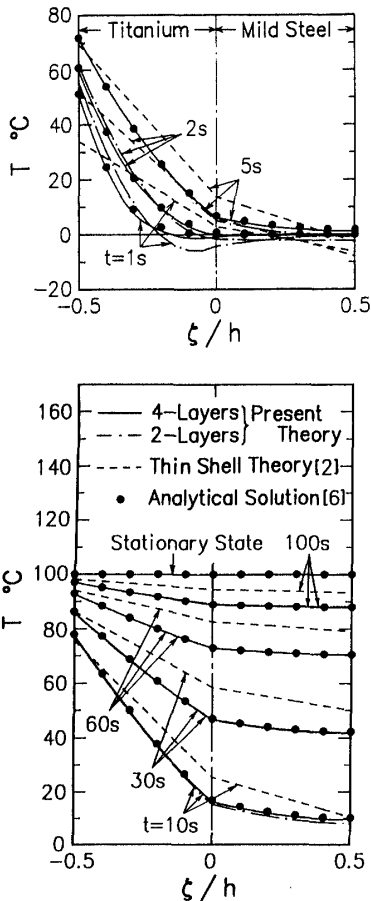


図 5 温度 T の殻厚方向分布

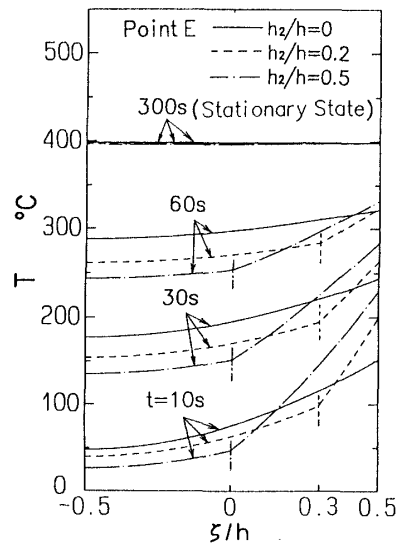


図 7 点 E の温度 T の殻厚方向分布

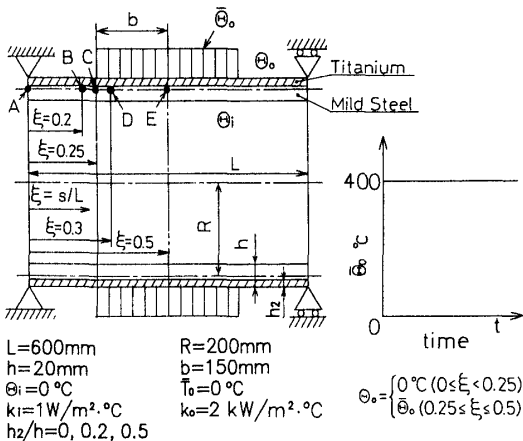


図 6 数値解析例 2

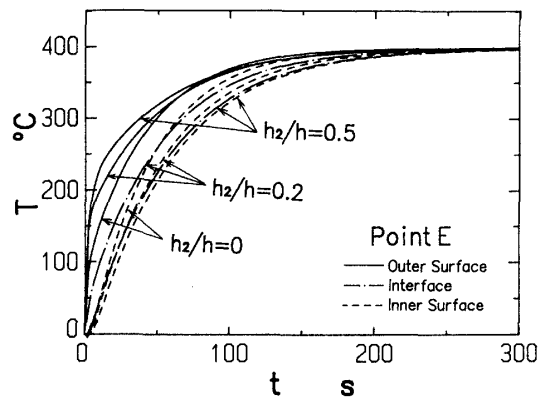


図 8 点 E の温度 T の時間的変化

布を示している。本解法による数値解析結果と武井の解析結果はよく一致しており、さらに仮想的に層の数を増やすことにより、熱負荷直後の解の精度の向上が期待できる。

5・2 例題2：温度および熱応力解析 外側にチタン、内側に軟鋼の層を配した二層円筒殻の中央部外表面に、軸対称な流体加熱が作用する問題(図6)を取り扱った。チタン層(厚さ h_2)の殻厚に対する比 h_2/h は、 $h_2/h=0, 0.2, 0.5$ の三とおりとした。基準温度およ

び円筒殻の初期温度は 0°C とし、殻の両端は断熱とした。また円筒殻内外面での熱伝達率 k_i, k_o は、 $k_i=1 \text{ W/m}^2\text{C}$, $k_o=2 \text{ kW/m}^2\text{C}$ とした。殻厚方向の温度分布は各層を仮想的に二等分し四層殻として解析した。差分点数はAE間に101個とり、代表応力 σ_0 、格子点数および時間間隔 Δt は前述の例題1と同じ値を用いた。

次に計算結果について考察する。

図7は点E ($\xi=0.5$)における殻厚方向の温度分布の時間的変化を示す。図中、実線、破線、一点鎖線は、 h_2/h がそれぞれ $0, 0.2, 0.5$ の場合である。図8は点Eの温度の時間的変化を、また図9は $h_2/h=0.5$ の場合の子午線方向の温度分布を、ともに外表面、境界面、内表面について示したものである。チタンのほうが軟鋼よりも熱伝導率が小さく熱が伝わりにくいため、加

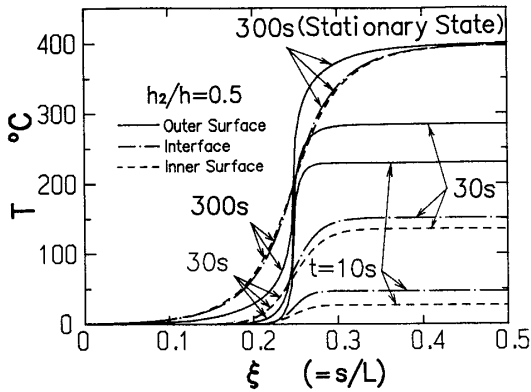


図9 温度 T の子午線方向分布 ($h_2/h=0.5$)

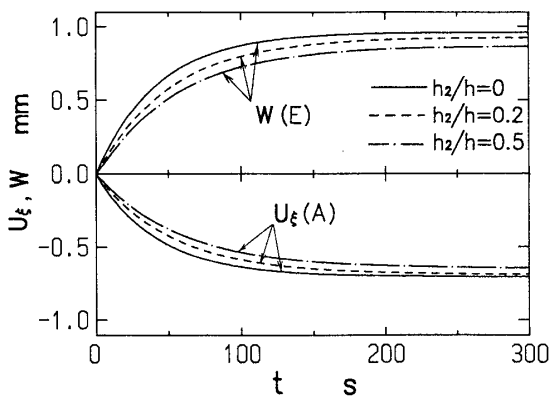


図10 変位 U_ξ, W の時間的変化

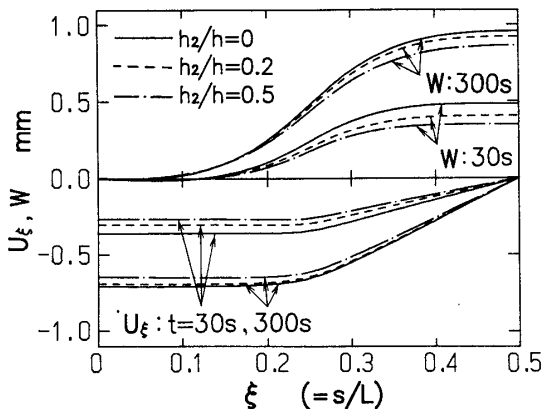


図11 変位 U_ξ, W の子午線方向分布

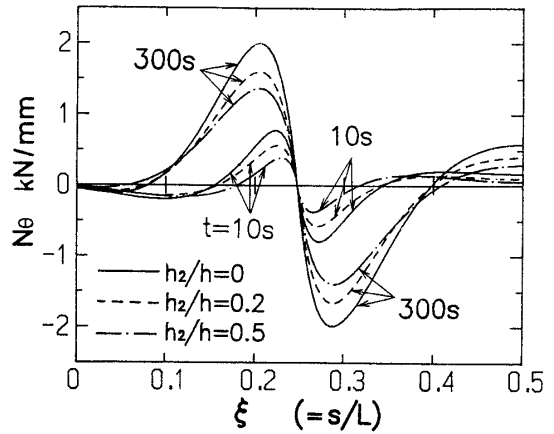


図12 合応力 N_θ の子午線方向分布

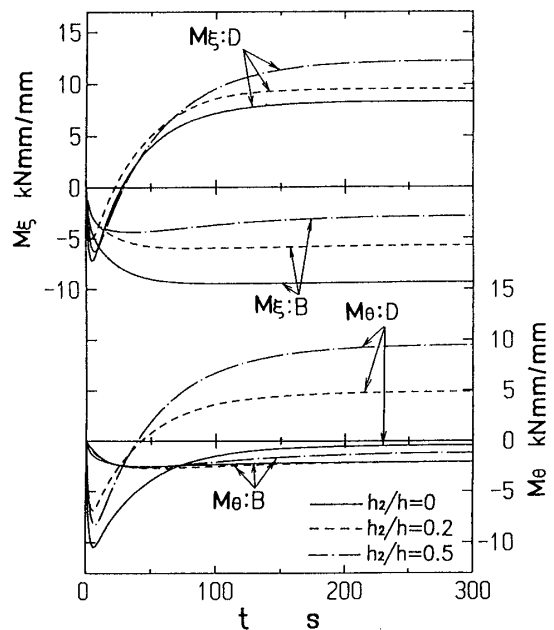


図13 合モーメント M_ξ, M_θ の時間的変化

熱部 ($\xi=0.25\sim 0.5$) では、チタンの層の厚さが増すほど、加熱表面の温度上昇が大きくなり、またチタン層内では殻厚方向の温度差が大きくなり、温度こう配の小さい軟鋼層内では温度上昇が小さくなっている。放熱部 ($\xi=0\sim 0.25$) では、軟鋼層内の温度に比べチタン層の温度は低く、またここには示していないが、チタン層の厚さが増すほど、外表面の温度上昇は小さい。

図 10 は、点 A ($\xi=0$) の子午線方向変位 U_ξ および点 E の半径方向変位 W の時間的变化を、また図 11 は、変位 U_ξ , W の子午線方向分布を示す。チタンに比べて軟鋼の線膨張係数が大きく、また図 7 よりチタン層の厚さが減少するほど軟鋼層内の温度は高くなるため、変形はチタン層の厚さが減少するほど大きくなっている。

次に、図 12 に合応力 N_θ の子午線方向分布を、また図 13 に点 B, D ($\xi=0.2, 0.3$) の合モーメント M_ξ , M_θ の時間的变化を、さらに図 14 に合モーメントの子午線方向分布を表す。合応力 N_θ は、子午線方向の温度こう配の大きい点 C 付近で子午線方向に大きく変動し、その変動量はチタン層の厚さが減少するほど大きい。また N_θ は変位の子午線方向分布と同様に、時間とともに単調に変化するが、合モーメントは円筒殻加熱部 ($\xi=0.25\sim 0.5$) で、熱負荷後およそ 5 秒で反転する。合モーメント成分については、チタン層の厚さによる差異が、円筒殻加熱部で特に顕著である。

図 15 は $h_2/h=0.5$ の場合の塑性域の進展の様子を示す。除荷域とは、一度以上降伏を経験した後、応力が降伏点以下になっている領域のことである。ここには

示さなかったが、他の h_2/h の場合も降伏域の広がり方はほぼ同様である。図より、直接熱負荷を受ける領域 ($\xi=0.25\sim 0.5$) では、負荷直後の殻厚方向の大きな温度差により、外表面近傍で大きな圧縮応力を生じて降伏するとともに、負の大きな曲げモーメントを生じていることがわかる。その後、熱伝導による変形の進行とともに、応力が緩和し除荷域となるが、やがて曲げモーメントが大きくなる点 D 付近の外表面で再降伏が始まり、少し遅れて内表面からも大きな圧縮応力のため降伏が生じている。

6. 結 言

本論文では、周囲の流体により温度負荷を受ける多層厚肉回転対称殻の熱弾/粘塑性変形問題の解法を示した。殻の温度分布を求める際に、各層の殻厚方向温度分布を二次曲線で近似し、また層を仮想的に分割することによって、熱負荷直後の解の精度の向上を図った。次に得られた温度分布をもとに、殻厚方向のせん断変形を考慮した Reissner-Naghdi の殻理論に基づく多層殻の基礎関係式から、変位、内力などを求めた。構成関係には、温度の影響を考慮した Perzyna の弾/粘塑性式を採用した。導かれた基礎式の数値解法には、差分法を適用した。

数値例として、軟鋼およびチタンから成る両端単純可動支持の二層円筒殻に、流体加熱が作用する問題を取り扱った。まず円筒殻内表面に一樣に熱負荷を与えた場合の殻の温度分布解析を行い、解の精度の評価を行った。その結果、各層の殻厚方向の温度分布を二次

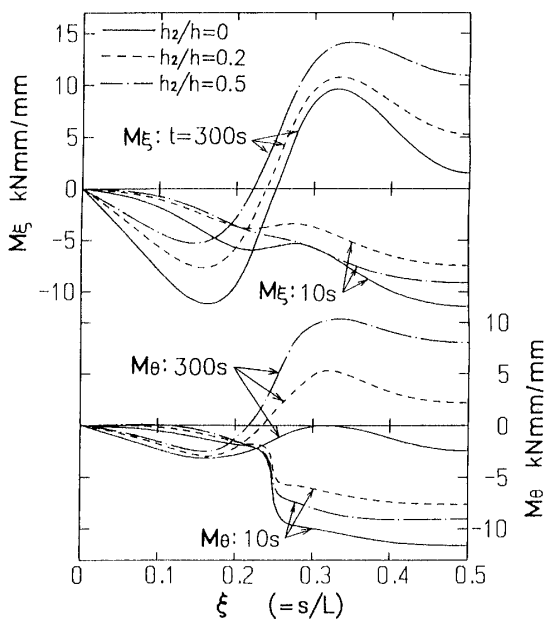


図 14 合モーメント M_ξ , M_θ の子午線方向分布

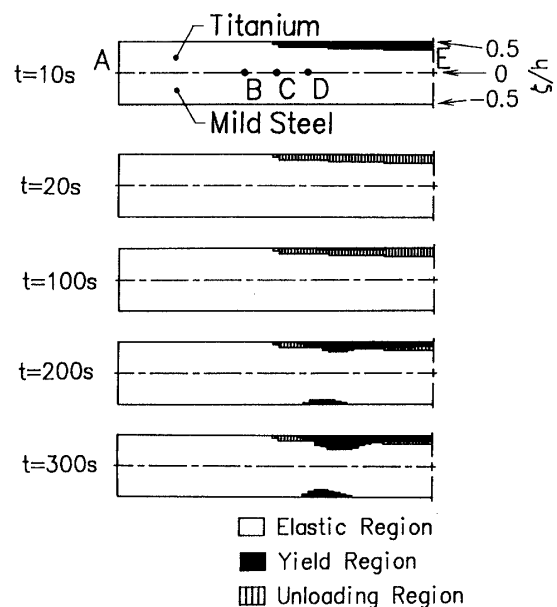


図 15 降伏領域の進展 ($h_2/h=0.5$)

曲線で仮定した本解法は、かなり精度よく殻体内の温度分布を求めることができ、多層厚肉殻の熱変形問題を解析するのに極めて有効であることがわかった。また各層を仮想的に分割して層の数を増やせば、熱負荷直後の解の精度のさらなる向上が期待できる。続いて、二層円筒殻外表面に局所的に軸対称加熱を与えた場合の熱弾/粘塑性変形問題を解析し、チタン層の殻厚に対する比 (h_2/h) を変えてその差異を調べた。その結果、チタン層の厚さが増すと、加熱部表面の温度は高くなり、チタン層内部の殻厚方向の温度差が大きくなること、また変形および内力にも h_2/h の値による顕著な差異が認められた。

文 献

(1) 例えば, Fettahlioglu, O. A. and Wang, P. C., *J. Ther-*

mal Stresses, **11** (1988), 305. Blandford, G. E., ほか 2 名, *Trans. ASME, J. Pressure Vessel Technol.*, **111** (1989), 113. 野田・辻, 機論, **57**-535, A (1991), 625. 須見・伊藤, 機論, **57**-542, A (1991), 2409. 遠藤, 航技研報告, TR-1222 (1994), 1, 522. Noor, A. K. and Tenek, L. H., *J. Eng. Mech.*, **118**-8 (1992), 1661. Bose, A. and Surana, K. S., *Comput. Struct.*, **49**-2 (1993), 283. 大多尾・谷川, 機論, **60**-578, A (1994), 2273.

- (2) 竹園, ほか 2 名, 機論, **60**-569, A (1994), 220.
 (3) Reissner, E., *Am. J. Math.*, **63**-1 (1941), 177.
 (4) Naghdi, P. M., *Q. Appl. Math.*, **14**-4 (1957), 369.
 (5) Perzyna, P., *Adv. Appl. Mech.*, **9** (1966), 243, Academic Press.
 (6) 武井, 機論, **41**-348, 第 1 部, (1975), 2278.
 (7) 竹園, ほか 2 名, 機論, **56**-522, A (1990), 317.
 (8) 竹園, ほか 3 名, 機論, **59**-562, A (1993), 1443.
 (9) 竹園, ほか 3 名, 機論, **59**-566, A (1993), 2412.