

## 構造物の保守経済性に対する定式化\*

陳 建 橋<sup>\*1</sup>, 竹園 茂 男<sup>\*2</sup>

## Formulation of Maintenance Economy of Structures

Jianqiao CHEN and Shigeo TAKEZONO

For structures with slow-growing cracks, a suitable maintenance programme can be performed to avoid the occurrence of safety and/or functional problems. An economical maintenance programme is desired and the maintenance economy can be characterized by the so-called economic life. The occurrence of widespread damage in a structure which is uneconomical to repair and, if not repaired, could cause functional problems, was used to define qualitatively the economic life of the structure. In this paper, by using a quantitative economic life criterion, and taking into account the stochastic crack growth, a general formula for determining the economic life is derived, and a numerical example is given. The effects of economic repair limit, the detectability and the initial fatigue quality on the economic life are discussed.

**Key Words:** Structural Reliability, Fatigue, Probabilistic Method, Inspection and Repair Cost, Stochastic Crack Growth, Maintenance Economy, Economic Life

## 1. 緒 言

安定き裂成長に対して構造物の安全性・信頼性を保証するために、保守計画が用いられる。構造物の信頼性は稼動時間とともに低下するので、疲労損傷を受けた部品を定期的検査により発見し、それを補修しなければならない。

図1には疲労損傷値の時間に対する変化が示されている。 $D_c$ を疲労破壊あるいは機能上の問題を引き起こす臨界損傷値とし、 $D_c$ に達する時間を  $T_c$ とすれば、保守(検査と修理)は  $T_c$ 以前に行われなければならない。 $t_1$ において保守を行うと、疲労損傷値はA点の  $D(t_1)$ からB点に下がる。その後、 $t_1+t_2$ の時点で損傷値は再び  $D(t_1)$ に達する。すなわち、 $t_1$ で保守を行うことによって寿命は  $t_2$ だけ伸びる。

構造物の部品や要素に広汎な疲労損傷が発生した場合には、それらを修復するのに多大な費用を要するので、不経済である。一方、修理しなければ、正常に機能することは保証されない。経済寿命は、このような時点までの寿命として定義され、保守の経済性を定量的

に表すパラメータである。

これまでに材料あるいは構造物の信頼性に関する研究が多くなされているが、保守を伴う場合の信頼性や保守の経済性に関する研究はまだ少ないようである<sup>(1)~(4)</sup>。一方、航空機などの構造物は、微小き裂の発生と進展によって疲労損傷を受け、材料あるいは負荷のランダム性によりき裂は確率的進展を示すことが多い。そこで本研究では、経済寿命のクライテリオンを利用して、き裂の確率的進展を考慮した構造物の保守経済性に対する定式化を行った。例として航空機部品

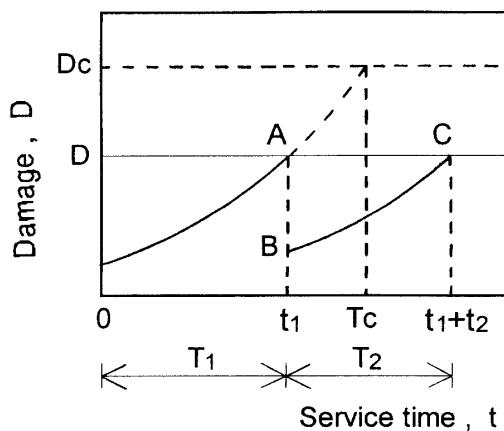


図1 疲労損傷の時間に対する変化

\* 原稿受付 1994年10月31日。

<sup>\*1</sup> 正員、鳥取大学工学部(〒680 鳥取市湖山町南4-101)。<sup>\*2</sup> 正員、豊橋技術科学大学(〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

を対象に数値解析を行い、き裂の修理限度(経済的に修理できる最大のき裂寸法)、き裂検出能力および初期欠陥の経済寿命に及ぼす影響について調べ、考察を行った。

## 2. 疲労損傷と保守費用

構造物の疲労損傷値  $D$  は以下のように定義する。

$$D = P(a_e, t) \dots \quad (1)$$

$P(a_e, t)$  はその構成要素におけるき裂の寸法  $a(t)$  が修理限度  $a_e$  より大きい確率であり、次式のように表される。

$$P(a_e, t) = 1 - F_{a(t)}(a_e) = \int_{a_e}^{\infty} f_{a(t)}(x) dx \dots \quad (2)$$

ただし、 $F_{a(t)}$  と  $f_{a(t)}$  はそれぞれき裂寸法の分布関数と密度関数を表す。修理限度  $a_e$  とはき裂が  $a_e$  より大きければ修理費用が極端に増大するようなき裂寸法パラメータである。

一方、時期  $t_1$  において検査および修理に要する費用  $C(t_1)$  は以下のように表される。

$$C(t_1) = C_1 N + \int_0^{\infty} C_2(x) f_{a(t_1)}(x) F_D(x) N dx \dots \quad (3)$$

ここで、 $N$  は対象とする部品の数、 $C_1$  は部品当たりの平均検査費用、 $C_2(x)$  は寸法  $x$  のき裂を修復するのに要する費用、 $F_D(x)$  は寸法  $x$  の单一のき裂を検出する確率、 $f_{a(t_1)}(x) F_D(x) dx$  は寸法が  $x$  と  $x+dx$  の間にあるき裂を検出する確率を表す。

## 3. 経済寿命のクライテリオン

構造物の保守経済性を論ずるにあたっては、き裂の修理限度、機能損傷をもたらすき裂寸法、検査・修理費用と交換費用の比率などの要因を考えなければならない。保守の経済性を定式化するために、以下では次式のようなクライテリオンを用いる<sup>(2)</sup>。

$$\frac{T_2}{T_1} \geq \frac{C(t_1)}{C_r} \dots \quad (4)$$

ただし、 $T_1$  は最初の稼動期間、 $T_2$  は 1 回めの検査と修理をした後、損傷が再び修理直前の状態に達するまでの稼動期間を表し( $T_1=t_1$ ,  $T_2=t_2$ )、 $C_r=C_0N$  は損傷を受けた部品を交換するのに要する費用、 $C_0$  は単一の部品を交換するのに要する平均費用を表す。経済寿命は上式を満たす最大の  $T_1 (=t_1)$  で与えられる。すなわち、経済寿命を超えない時点で検査と修理を行えば、それによって得られた寿命の増加率  $T_2/T_1$  は、相対費用(検査・修理費用/交換費用)  $C(t_1)/C_r$  よりも大きい。

## 4. 疲労き裂進展の確率モデル

疲労き裂の確率的進展を考慮した進展則は次式のように表す<sup>(5)</sup>。

$$\frac{da(t)}{dt} = L[a(t)] X(t) \dots \quad (5)$$

ここで、 $X(t)$  は負でない定常な確率過程である。

疲労破面の微視的観察によると、ランダムな幅をもつストライエーションが生じること、また、ストライエーション幅は互いに相関をもち、その相関性が距離とともに減少することがわかる<sup>(6)</sup>。ストライエーションがき裂進展速度に対応するから、上の式において、定常過程  $X(t)$  の自己共分散関数には次のような関数形を用いることができる。

$$R_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\xi|\tau|} \dots \quad (6)$$

ここで、 $\xi^{-1}$  は  $X(t)$  の相関距離を表すパラメータである。 $\xi \rightarrow \infty$  のとき、 $R_{xx}(\tau)$  はデルタ関数を用いて

$$R_{xx}(\tau) = \delta_x^2 \delta(\tau)$$

となり、 $X(t)$  は任意の異なる時刻において相関しないことを意味する。このような性質をもつ確率過程は白色雑音といいう<sup>(7)</sup>。一方、 $\xi \rightarrow 0$  のときは

$$R_{xx}(\tau) = \sigma_x^2$$

となり、 $X(t)$  の任意の異なる時刻において相関をもち、確率変数  $X$  となる。実際のき裂進展はこれらの両極端の中間にあると考えられる。式(5)の対数をとると

$$\left. \begin{aligned} \log \frac{da}{dt} &= \log L(a) + Z(t) \\ Z(t) &= \log X(t) \end{aligned} \right\} \dots \quad (7)$$

$Z(t)$  が正規分布に従うとすれば、き裂寸法の分布はたとえば Monte Carlo シミュレーションにより数値的に求められるが、本報では二次モーメント法を利用して、き裂の分布関数を導く。

まず、式(5)を次のように書き換える。

$$\left. \begin{aligned} W(t) &\equiv \int_u^{a(t)} \frac{da}{L(a)} = \int_{t_0}^t X(\tau) d\tau \\ a(t_0) &= u, \quad W(t_0) = 0 \end{aligned} \right\} \dots \quad (8)$$

$W(t)$  と  $X(t)$  の分布パラメータの間には、次の関係が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \mu_W &= \int_{t_0}^t \mu_X(\tau) d\tau = \mu_X(t - t_0) \\ \sigma_W^2 &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t R_{xx}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \right\} \dots \quad (9)$$

$$= \frac{2\sigma_x^2}{\xi^2} [e^{-\xi(t-t_0)} + \xi(t-t_0) - 1] \dots \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} V_w &= \sigma_w / \mu_w \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\xi(t-t_0)} [e^{-\xi(t-t_0)} + \xi(t-t_0) - 1]^{1/2} \\ V_x &= \sigma_x / \mu_x \end{aligned} \right\} \cdots (11)$$

確率過程  $W(t)$  を対数正規分布と仮定すれば<sup>(5)</sup>、その転移密度は次のように書ける。

$$f(w, t|0, t_0) = \frac{1}{w\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log w\xi - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \cdots (12)$$

パラメータ  $\sigma^2, \mu$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \log(1 + V_w^2) \\ &= \log\left\{1 + \frac{2V_x^2}{\xi^2(t-t_0)^2} [e^{-\xi(t-t_0)} + \xi(t-t_0) - 1]\right\} \cdots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu &= \log(\xi\mu_w) - \frac{1}{2}\sigma^2 \\ &= \log[\mu_x\xi(t-t_0)] - \frac{1}{2}\sigma^2 \cdots (14) \end{aligned}$$

ただし、転移密度は次のように定義されるものである。

$t \geq t_0 \geq 0$ :

$$\begin{aligned} f(w, t|0, t_0) dw \\ = P\{w < W(t) \leq w + dw | W(t_0) = 0\} \end{aligned}$$

$t = t_0$ :

$$f(w, t|0, t_0) dw = \begin{cases} 1, & w = 0 \\ 0, & w \neq 0 \end{cases}$$

これらの関係式を利用すれば、き裂寸法の転移密度  $q(a, t|u, t_0)$  および転移確率分布  $F(a, t|u, t_0)$  は次のように導かれる。

$$\begin{aligned} q(a, t|u, t_0) &= f(w, t|0, t_0) \frac{dw}{da} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma w L(a)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log w\xi - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma w L(a)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma} \log \frac{w}{\mu_x(t-t_0)}\right]^2\right\} \end{aligned}$$

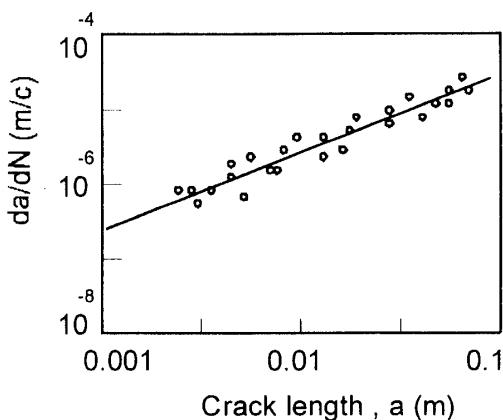


図 2 き裂進展速度とき裂寸法の関係

$$+ \frac{\sigma}{2}\right]^2\} \cdots (15)$$

$$F(a, t|u, t_0) = \Phi\left[\frac{1}{\sigma} \log \frac{w}{\mu_x(t-t_0)} + \frac{\sigma}{2}\right] \cdots (16)$$

$$w = \int_u^a \frac{da}{L(a)} \cdots (17)$$

$\Phi[\quad]$  は標準正規分布関数を表す。

$q(a, t|u, t_0)$  と  $F(a, t|u, t_0)$  を決めるには、き裂進展則  $L(a)$  とパラメータ  $\mu_x, V_x$  を必要とするが、き裂進展データを図 2 のように両対数グラフにプロットし、線形回帰を行えば、関数形  $L(a)$  ならびに  $Z(t)$  の分布パラメータ  $\sigma_z$  が求められ、さらに

$$Z(t) = \log X(t), \mu_z = 0$$

の関係から

$$\left. \begin{aligned} \mu_x &= \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_z^2\right) \\ V_x &= [\exp(\sigma_z^2) - 1]^{1/2} \end{aligned} \right\} \cdots (18)$$

が成り立つ。

## 5. き裂寸法の分布関数

**5.1 初期欠陥寸法の分布** 構成要素の初期の耐疲労品質(IFQ: Initial Fatigue Quality)は、数学的には相当初期欠陥寸法(EIFS: Equivalent Initial Flaw Size)の分布関数  $F_{a(0)}(y)$  で与えられる。測定可能な代表き裂寸法  $a_0$  を選び、初期欠陥から  $a_0$  に成長するのに要する時間をき裂発生時間(TTCI: Time To Crack Initiation)と定義し、また、 $a_0$  以下のき裂は確定的に進展するものとすれば、TTCI の分布  $F_T(t)$  から、EIFS の分布  $F_{a(0)}(y)$  が求められる(図 3 参照)。

$$F_{a(0)}(y) = 1 - F_T(t) \cdots (19)$$

き裂発生時間がワイブル分布をする場合、その分布関数  $F_T(t)$  と密度関数  $f_T(t)$  はそれぞれ

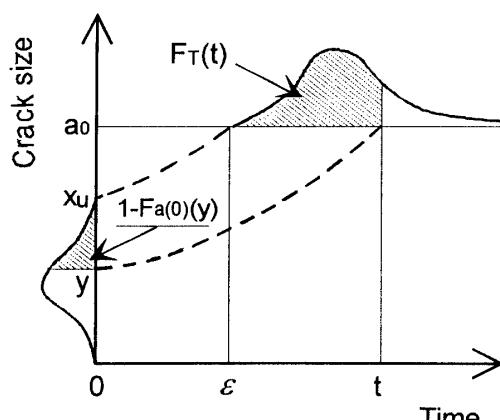


図 3 相当初期欠陥寸法とき裂発生時間の分布モデル

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - \exp \left[ -\left( \frac{t-\varepsilon}{\beta} \right)^{\alpha} \right] & (t > \varepsilon) \\ 0 & (t \leq \varepsilon) \end{cases} \quad \dots (20)$$

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{t-\varepsilon}{\beta} \right)^{\alpha-1} \exp \left[ -\left( \frac{t-\varepsilon}{\beta} \right)^{\alpha} \right] & (t > \varepsilon) \\ 0 & (t \leq \varepsilon) \end{cases} \quad \dots (21)$$

よって

$$F_{a(0)}(y) = \begin{cases} \exp \left[ -\left( \frac{\tau(y)-\varepsilon}{\beta} \right)^{\alpha} \right] & (y < x_u) \\ 1 & (y \geq x_u) \end{cases} \quad \dots (22)$$

$$f_{a(0)}(y) = \frac{f_T[\tau(y)]}{L(y)} \quad \dots (23)$$

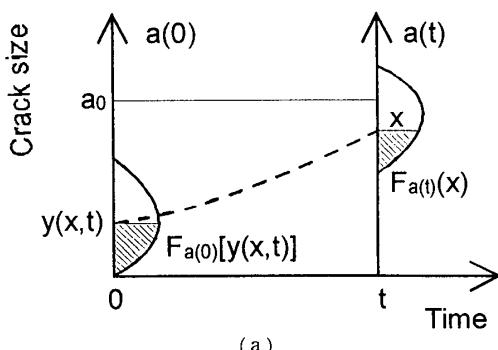
$$\tau(y) = \int_y^{a_0} \frac{da}{L(a)} \quad \dots (24)$$

ただし、 $x_u (\leq a_0)$  は初期欠陥の最大値を表し、パラメータ  $\varepsilon$  との間に次の関係が成り立つ。

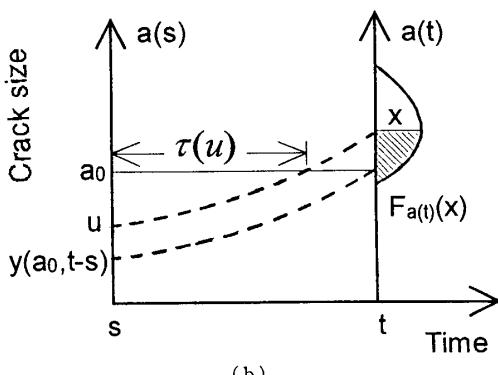
$$\varepsilon = \int_{x_u}^{a_0} \frac{da}{L(a)}$$

$\varepsilon$  が大きければ、 $x_u$  が小さくなり、初期の耐疲労品質がよりよいことになる。

**5・2 き裂寸法の分布関数** 時刻  $t$  におけるき裂寸法の分布関数は、き裂長さ  $x$  が  $a_0$  より小さい場合、図 4 (a) のように初期のき裂分布関数より求められ



(a)



(b)

図 4 き裂寸法分布の時間に対する変化

る。

$x \leq a_0$ :

$$F_{a(t)}(x) = F_{a(0)}[y(x, t)] \quad \dots (25)$$

$y(x, t)$  が次式に示す  $t(y, x)$  の逆関数として求められる。

$$t(y, x) = \int_y^x \frac{da}{L(a)}$$

$x$  が  $a_0$  より大きい場合、き裂の分布関数は以下に示す転移確率分布を用いて求められる [図 4 (b) 参照]。

$x > a_0$ :

$$\begin{aligned} P\{a(t) \leq x | a(s) = u\} &= 1, \quad u \leq y(a_0, t-s) \\ &= F(x, t | a_0, s + \tau(u)), \quad y(a_0, t-s) < u \leq a_0 \\ &= F(x, t | u, s), \quad u > a_0 \end{aligned} \quad \dots (26)$$

$$\begin{aligned} F_{a(t)}(x) &= \int_0^\infty P\{a(t) \leq x | a(0) = u\} f_{a(0)}(u) du \\ &= \int_0^{y(a_0, t)} f_{a(0)}(u) du \\ &\quad + \int_{y(a_0, t)}^{a_0} F(x, t | a_0, \tau(u)) f_{a(0)}(u) du \\ &\quad + \int_{a_0}^\infty F(x, t | u, 0) f_{a(0)}(u) du \\ &= F_{a(0)}[y(a_0, t)] + \int_0^t F(x, t | a_0, s) f_T(s) ds \end{aligned} \quad \dots (27)$$

上の結果を導くにあたっては、

$$x > a_0 : f_{a(0)}(x) = 0$$

の関係を使い、また、次の変数変換を行った。

$$s = \tau(u) = \int_u^{a_0} \frac{da}{L(a)}, \quad ds = -\frac{du}{L(u)}$$

$$f_{a(0)}(u) du = \frac{f_T[\tau(u)] du}{L(u)} = -f_T(s) ds$$

**5・3 検査と補修後のき裂寸法の分布** 時刻  $t_1$ において検査と補修を行った直後のき裂寸法の密度関数  $f_{a(t_1^+)}(x)$  と分布関数  $F_{a(t_1^+)}(x)$  はそれぞれ次のように書ける。

$$f_{a(t_1^+)}(x) = [1 - F_D(x)] f_{a(t_1)}(x) + G(t_1) f_{a(0)}(x) \quad \dots (28)$$

$$\begin{aligned} F_{a(t_1^+)}(x) &= \int_0^x f_{a(t_1^+)}(u) du \\ &= F_{a(t_1)}(x) - D(x, t_1) + G(t_1) F_{a(0)}(x) \end{aligned} \quad \dots (29)$$

$$G(t_1) = \int_0^\infty F_D(u) f_{a(t_1)}(u) du \quad \dots (30)$$

$$D(x, t_1) = \int_0^x F_D(u) f_{a(t_1)}(u) du \quad \dots (31)$$

$G(t_1)$  はき裂を検出する確率を表す。式(28)の第1項は検出されなかった母集団のき裂寸法の分布、第2項はき裂が検出され、しかも初期の品質まで修復された母集団のき裂寸法の分布を表す。検査と補修を行って、さらに  $t_2$  時間稼動が続けられれば、時刻  $t_1 + t_2$  における

るき裂寸法の分布は以下のように導かれる。

$x \leq a_0$ :

$$F_{a(t_1+t_2)}(x) = F_{a(t_1^+)}[y(x, t_2)] \dots \dots \dots (32)$$

$x > a_0$ :

$$\begin{aligned} F_{a(t_1+t_2)}(x) &= \\ &= \int_0^{\infty} P\{a(t_1+t_2) \leq x | a(t_1)=u\} f_{a(t_1^+)}(u) du \\ &= \int_0^{y(a_0, t_2)} f_{a(t_1^+)}(u) du \\ &\quad + \int_{y(a_0, t_2)}^{a_0} F(x, t_1+t_2 | a_0, t_1+\tau(u)) f_{a(t_1^+)}(u) du \\ &\quad + \int_{a_0}^{\infty} F(x, t_1+t_2 | u, t_1) f_{a(t_1^+)}(u) du \\ &= F_{a(t_1^+)}[y(a_0, t_2)] + I_2 + I_3 \dots \dots \dots (33) \end{aligned}$$

$$s = \tau(u), ds = -\frac{du}{L(u)}, u = y(a_0, s)$$

なる変数変換および

$$\frac{dy}{L(y)} = \frac{du}{L(u)}$$

$$\tau[y(u, t_1)] = t_1 + \tau(u)$$

$$f_{a(t_1)}(u) du = -f_T(s) ds$$

$$f_{a(t_1)}(u) du = f_{a(0)}[y(u, t_1)] dy = \frac{f_T[\tau(y)]}{L(y)} dy$$

$$= -f_T(t_1+s) ds$$

$$F(x, t | u, s) = F(x, t-s | u, 0)$$

表 1 き裂進展のパラメータ

$a_0(mm)$	$\alpha$	$\beta(hr)$	$\epsilon(hr)$	$Q(hr^{-1})$	$V_x$	$\xi^{-1}(hr)$
0.76	4.86	14960	1312	0.0005	0.3	8000

表 2 保守費用のパラメータ

$C_1/C_0$	$C_3/C_0$	$C_4/C_0$	$\nu$	$m$	$a_e(mm)$
0.1	0.1	1.2	1.9	2.3	0.76

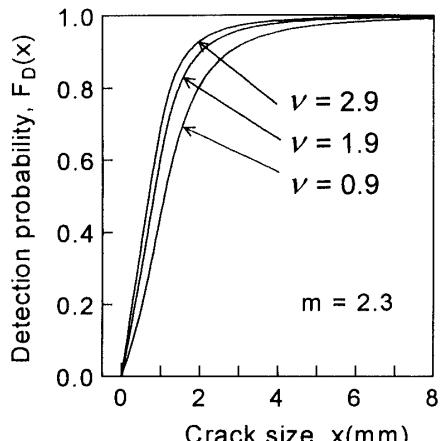


図 5 関数  $F_D(x)$  のパラメータ  $\nu$  による変化

$$u \geq a_0 : f_{a(0)}(u) = 0$$

などの関係式を利用すれば、積分  $I_2, I_3$  が次のように変換される。

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{y(a_0, t_2)}^{a_0} F(x, t_1+t_2 | a_0, t_1+\tau(u)) f_{a(t_1^+)}(u) du \\ &= \int_{y(a_0, t_2)}^{a_0} F(x, t_2 | a_0, \tau(u)) \{ [1 \\ &\quad - F_D(u)] f_{a(t_1)}(u) + G(t_1) f_{a(0)}(u) \} du \\ &= \int_0^{t_2} F(x, t_2 | a_0, s) \\ &\quad \times \{ [1 - F_D(y(a_0, s))] f_T(t_1+s) + G(t_1) f_T(s) \} ds \\ &\dots \dots \dots (34) \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_{a_0}^{\infty} F(x, t_2 | u, 0) [1 - F_D(u)] f_{a(t_1)}(u) du \dots \dots \dots (35)$$

$P(a_e, t_1+t_2) = P(a_e, t_1)$ 、すなわち  $F_{a(t_1+t_2)}(a_e) = F_{a(t_1)}(a_e)$  より、 $t_2 = t_2(t_1)$  を求め、経済寿命のクライテリオンに代入すれば、経済寿命が求められる。

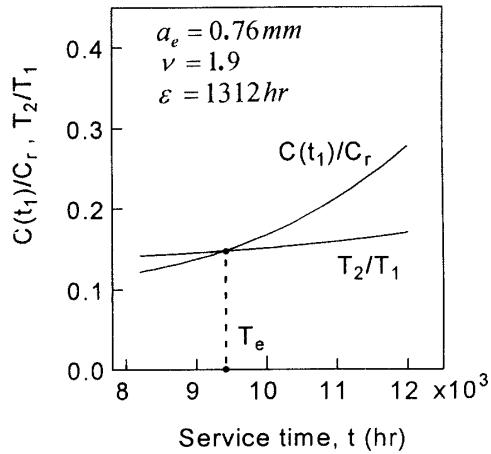


図 6 相対費用と寿命増加率の変化

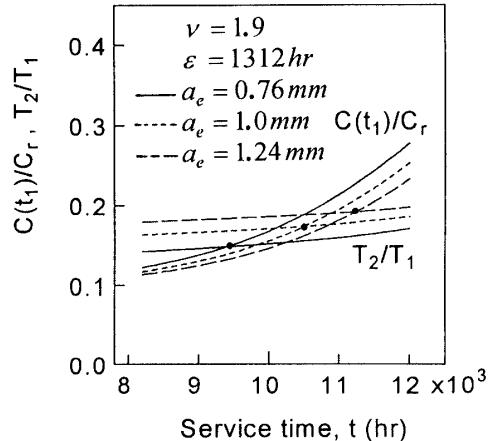


図 7 経済寿命に及ぼすき裂修理限度  $a_e$  の影響

