Cavaillès, lecteur de Dedekind

Daisuké Nakamura

Notre objectif est d'examiner la façon dont Jean Cavaillès (1903-1944) a lu des œuvres d'un mathématicien allemand, Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), pour cerner finalement l'influence de celui-ci sur celui-là.

Tout d'abord, nous étudierons l'interprétation, donnée par la thèse principale de Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme*, de la leçon d'habilitation de Dedekind intitulée « Sur l'introduction de nouvelles fonctions en mathématiques ». Cette étude nous montrera que Cavaillès extrait de cette leçon deux processus progressifs des mathématiques afin de les incorporer dans l'épistémologie qui lui est propre : idéalisation et formalisation.

Puis, après avoir récapitulé l'essentiel de *Que sont et à quoi servent les nombres ?*, livre de Dedekind paru en 1888 qui tente de fonder la théorie des nombres naturels, nous aborderons des lectures de ce livre proposées par la thèse complémentaire de Cavaillès : *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*. Cet examen nous révélera l'existence d'un autre processus important des mathématiques, c'est-à-dire la thématisation, et il montrera aussi que Dedekind donne en fait un bon exemple de « l'intuition centrale » des mathématiques, conception qui est peu développée dans cet ouvrage du philosophe.

Cette recherche nous conduira enfin à reconnaître que Cavaillès doit essentiellement son idée du devenir mathématique à Dedekind.

カヴァイエスのデデキント読解

中　村　大　介

序論

フランスの哲学者ジャン・カヴァイエス（Jean Cavaillès, 1903-1944）は、自身の数理哲学研究を踏まえ、数学の進展プロセスを随所で分類している[1]。例えば、『公理的方法と形式主義』（1938）における最も典型的な分類では、「網羅的なものではない」と断りが入れられつつも、「理念化」「形式化」「主題化」の三つが挙げられている[2]。この類別の背景には勿論、多くの数学者の着想が横たわっているが、カヴァイエスにとってとりわけ特権的な参照項をなす二人の数学者が存在する。一人が現代集合論の祖、ゲオルグ・カントールであり[3]、もう一人が、カントールと共に集合論の練り上げに貢献した、リヒャルト・デデキント（Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831-1916）である。本稿はデデキントに特に焦点を合わし、カヴァイエスが彼の著作をどのように読んだのかを検討することで、先の分類の内実とあわせて、カヴァイエスの数理思想へのデデキントの本質的影響を明らかにすることを目標とする。

本稿で主に取り上げられるカヴァイエスの論攷は、数学の基礎の問題を扱った『公理的方法と形式主義』、及び集合論の形成を論じた『抽象集合論の形成』（1938）の二つである。第1節で前者におけるデデキントの扱いを見た上で、残る節で後者の問題圏に入る。第2節でカヴァイエスの議論に必要な範囲で、デデキントの古典的著作『数とは何か、何であるべきか』（1888）の概要を述べた上で、第3節でこの著作に対するカヴァイエスの議論を検討することにしたい。

1　たとえば以下の三カ所。Jean Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques* [1938], Paris, Hermann, 1981, p. 177. Jean Cavaillès et Albert Lautman, « La pensée mathématique » [1946] dans Jean Cavaillès, *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, Paris, Hermann, 1994, p. 602. Jean Cavaillès, *Sur la logique et la théorie de la science* [1947], Paris, Vrin, 1997, p. 41-47.

2　Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme, loc. cit.*

3　カヴァイエスによるカントール集合論形成の再構成については、中村大介「集合論の形成にみる「直観」の問題 ― カヴァイエスの立場から」（『科学哲学』、日本科学哲学会、46巻1号、2013年, 53-68頁）で論じた。本稿はこの論文と相補的な関係にある。

1　理念化と形式化：デデキントの教授資格申請講演から

カヴァイエスの著作『公理的方法と形式主義』は彼の博士主論文でもあり、1938 年に出版された。数学基礎論を主題とした本ではあるが、数学史の記述としては、19 世紀初頭のボルツァーノから論を起こして同世紀における解析学の形式化の運動と幾何学の公理化の運動を描く点、そして、これら双方の運動の合流点として 1920 年代のヒルベルト・プログラムを位置づける点に特徴がある。集合論の危機から数学の基礎の問題が始まったという一般的なパースペクティブを幾ばくかは共有しつつも、カヴァイエスは論理主義、直観主義、形式主義という周知の区分に安直に落とし込まず、むしろ一世紀以上に渡る数学史を背景にして、数学の基礎の問題をダイナミックに考察しようとするのである[4]。

デデキントはまず、19 世紀における解析学や算術の形式化の運動を描く過程で、グラスマンとハンケルの後で登場する。グラスマンとハンケルによる「一般計算」は、対象への配慮から解放された抽象的な記号操作を出発点に据えるという野心的なものであったが、抽象的な計算体系から具体的対象を備えた体系を再構成しようとすると、幾何学的直観などを改めて導入せざるをえなくなってしまった。そこで形式化は彼ら以降逆の道を辿り、自然数などの単純な理論から複雑な理論へと進んでいくことになった、というのがカヴァイエスの診断であり、その最初に登場するのがデデキントなのである。

もっとも、カヴァイエスがデデキントに着目するのは、彼が形式化の運動に参与したということ以上に、彼が数学に固有な進展プロセスを明らかにするような仕事をしているからである。特に、デデキントがガウスらの前でおこなった教授資格申請講演「数学における新たな関数の導入について」（1854）は、カヴァイエスの数理思想に決定的な影響を及ぼしたと言ってよい。まず、カヴァイエスも引用しているこの講演の一節をあげよう。

> 「定義のこういった拡張〔制限されていた数学的定義が内的に展開して一般化すること〕は恣意的なものにいかなる余地ももはや残さない。それどころか、こうした拡張はより制限されていた先立つ定義から、有無を言わさぬ必然性にしたがって帰結するのである。それは、最初の定義から帰結し、その定義によって指し示される概念に特徴的な法則を、普遍的に妥当なものとみなす原理を適用するときには、そうなのである。」[5]

---

[4] カヴァイエスのこの著作を評価する数学史家 I・グラッタン＝ギネスによっても、集合論などの危機から 20 世紀前半の数学基礎論が誕生した、というのは避けられねばならない見方とされている（cf. Ivor Grattan-Guinness, *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940 : Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*, Princeton, Princeton University Press, 2000, p. 558）。

[5] Richard Dedekind, « Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik » in Richard Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke*, heraus. von Robert Fricke, Emmy Noether und Öystein Ore, Brauschweig, Vieweg, 3 vol., 1930-1932, Dritter Band (1932), p. 430. この講演論文を仏訳した H・シナサールによると、この最後に出てくる原理はジョージ・ピーコックによって言明されており、ハンケルによっても発見的原理とみなされているという（cf.

デデキント自身「内的必然性」と呼ぶこうした拡張は、カヴァイエスによれば、二重の運動を伴っている。第一の運動が、操作の対象となる個体領域の拡大であり、第二のものが、この新たな領野において旧来の定義を新たな定義に置き換えることである。決定的なのは、こうした拡張が新たな操作の添加によって引き起こされる、とデデキントによって明確に主張されていることである。「この科学〔数学〕の前進的展開の過程において、〔…〕新たな操作が先立つ操作の鎖に付け加えられる。」[6] 新たな操作の添加こそが、先述した個体領域拡大の運動を生み出すのである。

デデキントは後年、自らこうした数学の前進的展開の例を与えているので、それを簡単に見ておこう。言うまでもなく、『連続性と無理数』(1872)における「デデキントの切断」のことである。切断(Schnitt)というこの操作は、既に導入済みの個体、つまり有理数を土台にして新たな個体を導入し、最終的に「無理数」概念を創り出すものである。有理数論が既に受け入れられている平面から見ると、無理数は「理念的なもの」とみなしうるが、この理念的なものが切断という操作から創り出されるのである。「今や、有理数によっては引き起こされない切断(A_1, A_2)を前にする度ごとに、われわれは新たな数、つまり一つの無理数 α を創造するのであって、この数をわれわれは切断(A_1, A_2)によって完全に定義されたものとみなすのである。」[7]

そして、このような操作の拡張による理念的なもの導入こそ、カヴァイエスが「理念化(idéalisation)」と呼ぶところの数学の進展プロセスの一つに他ならない。カヴァイエス自身の規定によれば、理念化の手続きとは「ある操作が、その遂行そのものに外的な状況に偶発的な仕方で制限されていたことが分かったために、この外的な状況から解放されることを端的に要求することにあるのであって、しかもこのことは直観の対象ともはや一致しない対象体系の措定によるのである。」[8]「理念化」という言葉から推測されるように、この着想はヒルベルトによる「理念的なものの添加」のアイディアを第一次的には継承するものである。ヒルベルトは、数学の基礎づけをおこなうにあたり、有限命題に理念的な命題を添加し、後者の無矛盾性を有限のステップで証明することを目標としたが、この手法を、ユークリッド幾何学に「無限遠点」という理念的なものを添加することで、幾何学の命題を一般化しえた射影幾何学の方法になぞらえていた[9]。こうしたヒルベルトの考えの先行者を、カヴァイエスはデデキントに見ていたと言ってよい。「デデ

Richard Dedekind, « Sur l'introduction de nouvelles fonctions en mathématiques » dans *La création des nombres*, trad. fr. par Hourya Sinaceur, Paris, Vrin, 2008, p. 224, note 3)。

6 Richard Dedekind, « Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik », *op. cit.*, p. 428.

7 Richard Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen* [1872] in *Gesammelte mathematische Werke, op. cit.*, p. 325. 邦訳リヒャルト・デデキント「連続性と無理数」、『数とは何かそして何であるべきか』渕野昌訳、筑摩書房、2013 年、29 頁。以下、挙げた邦訳文献はすべて参照したが、訳は適宜変更してある。

8 Cavaillès et Lautman, « La pensée mathématique », *loc. cit.* なお、『公理的方法と形式主義』では「理念化」の代わりに「一般化」と呼ぶなど、文脈に合わせてカヴァイエス自身言葉を使い分けている面もあるが、ここではヒルベルトとの結びつきを浮き上がらせるためにも「理念化」の語を採用する。

9 この「なぞらえ」の典型的な説明として、David Hilbert, « Über das Unendliche », *Mathematische Annalen*, Bd. 95, 1926, p. 165-166, p. 174(邦訳ヒルベルト「無限について」、ヒルベルト/クライン『幾何学の基礎/エルランゲン・プログラム』寺阪英孝、大西正男訳・解説、共立出版、1970 年、225-226 頁、234-235 頁)を参照。

キントが語る創造の力、ヒルベルトはそれをこそ無矛盾性証明でもって正当化できると信じたのであった。」[10] しかも、「理念化」に代表される数学の進展において、添加・拡張されるのがまずは理念的なものという「対象」ではなく、「操作」であるということ、そしてまたその進展が「内的必然性」を伴ったものであること ― 数学の進展が「必然的」かつ「予見不可能」であるがゆえにカヴァイエスはこの進展を「生成」と呼ぶ ― 、この二点をカヴァイエスが主張する限りにおいて、ヒルベルトを介してデデキントこそ「理念化」というカヴァイエスのアイディアの真の源泉であったと言うことができるだろう[11]。

とはいえ、カヴァイエスとデデキントの間には無視することのできない差異もまた存在する。それはデデキントにとって、数とは人間精神の創造物だ、という点である。たとえば、切断という操作はそれだけではいかなる無理数も産み出さない。それが残すのは空虚だけなのである。人間精神こそがこの空虚を埋め、埋めたものに名前を付けることで無理数を創り出す。実際、デデキントは書簡で次のように書いている。「そこで、私は数（基数）という言葉で、クラスそのものではなく〔…〕、精神が創り出す新たなもののことを理解していただきたいと思います。私たちは神の種であり、物質的な物だけでなく、とりわけて精神の物をも創り出す力を、疑いなくもっているのです。」[12] これに対して、カヴァイエスが創造の力、原動力を人間精神や意識に送り返すことは決してない。本稿では詳述しないが、彼は新たな解法や概念を要求してくる数学の具体的な問題と、概念の自律的な展開のうちにこそ、数学の創造性を見出そうとするのである[13]。いずれにせよ、デデキントと彼自身の考えの根本的な対比は問題とされない。カヴァイエスは、操作の拡張、ひいては数学における概念の創造の重要性を解く[14] この数学者の見解を、可能な限り擁護しようとしているように見える。

---

10 Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme, op. cit.*, p. 173.

11 カヴァイエスはヒルベルトとベルナイスの共著『数学の基礎』第 I 巻（1934）の書評で次のように述べている。「これ〔『数学の基礎』におけるヒルベルトの考え〕は〔デデキントの〕『数とは何か、何であるべきか』の根本的な単純さ（写像ただそれだけがすべてをなす）ではもはやまったくないが、その精神なのであって、ヒルベルトの有限主義的な哲学によってパラドックスからの補償を与えられた精神なのである。」（Jean Cavaillès, « Compte rendu de David Hilbert et Paul Bernays, *Grundlagen der Mathematik*. Bd. I », *Recherches Philosophiques,* IV, 1934-1935, p. 430.）カヴァイエスもまたこの精神を受け継いでいると言えるだろう。

12 Richard Dedekind, « Aus Briefen an H. Weber » in *Gesammelte mathematische Werke, op. cit.*, p. 489. なお、この段落におけるデデキント解釈は Jacqueline Boniface, *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques*, Paris, Vrin, 2004, p. 21-27 に従う。

13 たとえば以下の箇所。「エピステモロジーの研究者は、歴史的な偶発事の下に、ある必然的な連鎖を見出すことができるように思えます。導入される概念（notion）は問題を解くことによって要求されます、そして旧来の概念の中でその導入された概念がただ存在するということだけから、その概念はそれ自身新たな問題を立てるのです。」（Cavaillès et Lautman, « La pensée mathématique », *op. cit.*, p. 594.）ちなみに、概念の自律性は遺作『論理学と学知の理論について』（1947）においてもっとも明白に主張される。

14 「数学においても他の科学においても、最も偉大で最も実り豊かな進歩は、新しい概念の創造と導入によってとりわけなされている。」（Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen ?* [1888] in *Gesammelte mathematische Werke, op. cit.*, p. 338. 邦訳リヒャルト・デデキント『数とは何かそして何であるべきか』、前掲書、50 頁。）カヴァイエスもこの一節を引用している（Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme, op. cit.*, p. 54-55）。

『公理的方法と形式主義』に関わる議論を締めくくるにあたり、カヴァイエスがデデキントの教授資格申請講演の中に、「理念化」と並ぶもう一つの数学の生成プロセスを見出していることを指摘しておこう。それが「形式化（formalisation）」の契機である。デデキントはこの講演の後半で、指数表現の拡張について論じている。最初、指数は自然数に対してのみ定義されるが、演算規則を「普遍的に妥当なもの」とみなしていくことで、負の数や有理数等へと指数を満たす対象領域は次々と拡大していくのである。こうした指数の拡張に対して、カヴァイエスは次のように述べている（なお、形式化は理念化を引き継ぐものであり、実のところ広い意味では理念化に含まれるものであることに注意してほしい）。

「理念的なものの添加は、原初的対象に、今度はもっぱらその形式的な特性（例えば冪への上昇に対しては $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$）によってのみ定義される操作の出発点かつ結果となるような記号体系を置き換える。これは、デデキントが教授資格申請講演で研究した継起的な一般化である。」[15]

指数の一般化を考えるには形式化が不可欠なのである。デデキントの記述に沿ってそれをおこなうならば、まず指数加法の定理

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad (x, y \in N)$$

から出発する。今 $x = z - y > 0$ とすると､指数加法の定理を「普遍的に妥当なもの」とみなして、$a^{z-y+y} = a^{z-y} \cdot a^y$。ゆえに指数減法の定理

$$a^{z-y} = \frac{a^z}{a^y} \quad (z, y \in N,\ z > y)$$

を得る。今度はこの定理を「普遍的に妥当なもの」とみなし、$y = z$ とすると $a^0 = 1$。これが指数ゼロの定義である。そこで、指数減法の定理に $z = 0$ を代入すれば、$a^{-y} = 1/a^y$ となり、負の指数の定義を得る[16]。「形式化」とは、記号の感性的な明証性を用いることで、具体的な対象への配慮から解放されて操作を再定義する過程であるが、まさに指数のこの「継起的な一般化」のうちにそれが見られるわけである。

このように、カヴァイエスにとって、デデキントの教授資格申請講演は、理念化と形式化という数学固有の運動を明らかにしてくれるものであったのである。

2　鎖の概念：『数とは何か、何であるべきか』

これ以降、カヴァイエスの博士副論文でもある『抽象集合論の形成』の問題圏に入る。まず本節にてデデキントの『数とは何か、何であるべきか』を、その前半部を中心に概説した後、次節においてカヴァイエスの立場からこの著作を検討する。

15　*Ibid.*, p. 97.

16　以上の再構成の元となった記述は Dedekind, « Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik », *op. cit.*, p. 433 にある。

1888 年に刊行された『数とは何か、何であるべきか』は、算術を論理的に基礎付けようとした著作として知られる。しかし、この著作の立場はフレーゲやラッセルの展開したいわゆる「論理主義」とは厳密には異なるものである。というのも、第一に、フレーゲらが数学（特に数論）を論理的概念に還元することを目指したのに対し、以下で見る通り、デデキントは自然数を、現代で言うところの無限構造の「モデル」として特徴付けるからである。第二に、この著作は公理的な記述スタイルを取るが、論理は厳密な推論のための道具であって、フレーゲのように、公理化の下にある論理規則を形式化するわけではないからである。

しかも、デデキントが出発点とする思考の根本的な操作とは、結びつける（beziehen）こと、そして対応づける（entsprechen）ないし表す（abbilden）ことなのである。「われわれが集まりや物の数を数えるときにしていることを注意深く観察してみると、物を物に結びつける、ある物を他の物に対応づける、あるいはある物を他の物で表すという、それなしではそもそも思考が成立しないところの精神の能力を考察するように導かれる。」[17] すなわち、一方で、複数の事物を一つに結びつけることが「システム」 ― 現在で言うところの「集合」 ― を構成し、他方で、ある事物を他の事物で表すことが写像（Abbildung）という数学的概念になる。したがって根本的な操作は集合論の操作ということになる。以上のことから、この本のプログラムを〈集合論の操作を論理的な推論によって公理的に提示、展開すること〉とまとめることができるだろう [18]。

全部で 14 の節からなるこの本の数学部分に入ろう。最初の節で、要素、システム（集合）の概念や基本的な操作が導入された後、第 2 節で写像概念が定義される。あるシステム S の写像 φ とは、S の各要素 s に特定の事物 φ (s) が属すことを決める法則のことであり、この特定の事物を s の像と呼ぶ。そして、第 3 節にて相似な写像（現代の集合論の用語では単射）が定められてから、いよいよ第 4 節にて本書の中心的な概念である「鎖（Kette）」が導入される。定義 37 をまずは見よう。K をシステム E の部分（つまり $K \subset E$）とせよ、もし $\varphi(K) \subset K$ ならば K は φに関する鎖であると言う。その後やってくる定義 44 は重要である。もし $A \subset E$ であり、かつ K が A を含む鎖であるならば、A を含むすべての鎖 K の共通部分である鎖 A_0 を定義することができる（$A_0 \equiv \cap K$）。デデキントによって「システム A の鎖」と呼ばれた A_0 を、カヴァイエスは A の「固有鎖（chaîne propre）」と名付けている。固有鎖の考えは重要である。というのも、すぐ見るように、そこに様々な操作が統合されているからである。

第 5 節では有限集合と無限集合に関する有名な区別が登場する。すなわち、あるシステム S が自身の真部分と相似であるとき、そのシステム S は無限であると言われ、そうでないとき、そのシステム S は有限であると言われる ― いわゆる「デデキント無限」と呼ばれる無限の特徴付けである。そして、単純無限集合を用いて自然数が定義される第 6 節はこの本の核となる部分を構成する。まず、あるシステム E が単純無限システムであるとは、E が以下の四つの条件を

---

17 Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen ?, op. cit.*, p. 336. 邦訳 45-46 頁。

18 本節ここまでのまとめは、Hourya Sinaceur, « Note introductive de *Que sont et à quoi servent les nombres ?* » dans Richard Dedekind, *La création des nombres, op. cit.*, p. 93-129 に拠った。

満たすときである（定義71）。

α．以下の三つを満たす相似写像が存在する。

β．$\varphi(E) \subset E$

γ．$1 \notin \varphi(E)$

δ．$E = 1_0$（ただし 1_0 は1の固有鎖。つまり K を1を含む鎖とすると、$1_0 = \cap K$）

この定義を簡単に説明しておこう。φ を後続者を与える写像とせよ。すると条件 α、β、γ より E はデデキント無限である。しかしもし他の条件がない場合、E として、 ― カントール集合論の概念で考えれば ― その基数が可算を超えないどんな鎖もとれることになるだろう。それゆえ、条件 δ が介入して最小システムを構成する必要があるのである。これが単純無限システムである。そして最終的に定義73において、自然数 N がこの単純無限システムのモデル、つまりこのシステムを満たす順序数として定義されるに至る。

こうした自然数の定義の特徴として、後にペアノが自然数の公理的な定義で用いた完全帰納法が表立っては使われていない、ということが挙げられる。実のところ、デデキントにおいて、完全帰納法は鎖の概念から定理として導出されるのである（定理59）。この完全帰納法は、第9節において加法、乗法、冪乗といった算術的演算を再帰的に定義するのに役立つことになる（定理125、126）。

デデキントの著作の提示を終えるにあたり、最後の第14節にて、ようやく基数が論じられるということに注意しておこう。第7節で導入される、要素の数が n を超えない自然数のシステム Z_n を用いて、有限システムの基数は Z_n に相似であるときに n である、と定義される。基数 ― ここでは有限の基数 ― は順序数から定義されるのである。

3　中心的直観、そして主題化

ここからは前節の概要を踏まえて、『抽象集合論の形成』におけるカヴァイエスのデデキント読解を扱う。まず以下の二点に注意しておこう。第一に、この本は集合論前史（ボルツァーノからデュ・ボア・レイモンまで）、カントールの創造、デデキント以降の集合論の公理化という三つの章からなっており、したがってデデキントの著作の検討に先立ってカントール集合論の形成が扱われていること、そして第二に、カヴァイエスがカントールとデデキントの間の往復書簡をエミー・ネーターと共に編集していることである。このような経緯もあり、カヴァイエスは『数とは何か、何であるべきか』における操作、方法、手続きをカントール集合論におけるそれらと付き合わせて考えている。

カントールは「無限線状点集合について」の第五部（1883）、及びそれに先立つ1882年11月5日のデデキント宛書簡で、自身の集合論を大きく飛躍させるようなアイディアを提出している。そのアイディアは、自然数を超えて数を生成していくために必要な二つの「生成原理」を核とするものである。第一の生成原理は先行する数に単位を付け加えることであり（1から2を産み出す、ω から ω+1 を産み出すなど）、第二の生成原理は、「最大元をもたないような、数の間断ない集

合から、それら全てより大きな後続する数への移行」[19]である（自然数列$\{1,2,3,\cdots\}$からωを産み出す、$\{\omega,\omega+1,\omega+2,\cdots\}$から$2\omega$を産み出すなど）。後者は先立つ諸数の上限を与えるという点で、解析学の極限移行の操作を適用したものと言える。そしてこれら二つの原理を礎として[20]、超限順序数論が後年展開されることになる。

さて、カヴァイエスはこれら二つの手続きに対応する操作をデデキントの仕事のうちに見出している。一方で相似な写像は、それが後続者関数に対応する限りで、第一の生成原理に一致する。他方で固有鎖は、それが集合を単純無限システムとして閉ざすがゆえに一種の極限以降とみなせ、したがって第二の生成原理に対応する。「このようにして固有鎖の使用はカントールの極限移行の手続きに一致する。つまり、あらゆる鎖の共通部分をとることは、同一の写像の全ての反復から帰結するものを考えることに帰着するのである。」[21]また、デデキントが有限の基数を順序数から得ていたこと、そしてその順序数は単純無限システムを用いることでのみ確立されていたことに注目しよう。カントールも後に基数論を確立するために超限順序数論の練り上げを先行させるが、デデキントにおいてはより明確に、数の根本概念は基数ではなく順序数である[22]。そして、順序数論を基数に認識論的に先行させたことの結果、有限は無限、特に単純無限システムに依存することになる。「順序数論は有限を無限の上に基礎付けるのである。」[23]

デデキントの著作における鎖という操作の役割を改めてまとめておこう。一方でそれは、今見たように、単純無限システムの定義を可能にするという点で自然数の基礎付けの要をなすものであった。他方でそれは、完全帰納法を定理として導き、さらにその完全帰納法から加法、乗法などの順序数の算術が定義されていた。このように見てみると、鎖をつくるという操作がデデキントの著作の中でどれほど重要な役割を演じていたか ― より正確に言えば、帰納法や算術的な演算といったどれほど多くの他の操作や手続きを組織立て統合していたか ― が分かるだろう。ところで、カヴァイエスは著作の序論で、「中心的直観（intuition centrale）」から数学の連鎖が出てくると、そして、その直観の中で「内的統一」を覚知することができると述べていた[24]。中心的直観とは、ごく簡潔にまとめるならば、〈様々な操作を組織化し、ひいては理論の中心となる

19　Emmy Noether, Jean Cavaillès (heraus.), *Briefwechsel Cantor-Dedekind*, Paris, Hermann, 1937, p. 56.

20　この時期のカントールはさらに、後年廃棄することになる「制限原理」という原理も設けていた。これは、〈二つの生成原理を用いて新たな数を創り出すことができるのは、それまで創られた数の全体が可算である場合である〉という制限をかけることで、自然数全体の濃度とは異なる濃度 ― 後の$\aleph_1$に対応する濃度 ― を明確に画定してくれる数の系列を取り出す原理である。なお、この段落の立ち入った内容は、先述した本稿の関連論文、中村「集合論の形成にみる「直観」の問題」、前掲書を参照していただきたい。

21　Jean Cavaillès, *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles* [1938] dans *Philosophie mathématique*, Paris, Hermann, 1962, p. 130-131.

22　このことはウェーバー宛書簡ではっきりと言明されている。Cf. Dedekind, « Aus Briefen an H. Weber », *op. cit.*, p. 489. また、Sinaceur, « Note introductive de *Que sont et à quoi servent les nombres ?* », *op. cit.*, p. 120-121 の記述も参考にした。

23　Cavaillès, *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles, op. cit.*, p. 133.

24　*Ibid.*, p. 29.

ような簡明な手続きや操作を捉えること〉と規定することができる[25]。デデキントの著作においては、まさに鎖という操作こそ、こうした簡明な手続きに他ならない。そこで本稿では、鎖の操作を捉えることは中心的直観による、と主張しておきたい。カヴァイエスがカントールの超限集合論の箇所で使っていた表現を使うならば、中心的直観は、この鎖という手続きの周りで「方法の内的統一」[26]を作り出すのである。

本節ではここまで、カントールの議論との呼応から、鎖の手続きに焦点を合わせて論じてきた[27]。しかし『数とは何か、何であるべきか』の中で、カヴァイエスがもう一つ特筆すべき操作として取り上げるものが存在する。それは、「デデキント無限のシステムが存在する」ことを示す有名な証明（第4節定理66）において用いられる操作である。証明全体を引用しよう。

> 「私の思考の世界、つまり私の思考対象となりうるあらゆる事物の全体 S は無限である。実際、s が S の要素を指し示すならば、そのとき、s は私の思考対象となりうるという思考 s' もまた S の要素である。s' を要素 s の像 $\phi(s)$ とみなせば、このように規定された S の写像は、像 S' は S の部分であるという特性をもつ。しかも、S' は S の真部分である。なぜなら S の中には、そのようなどんな思考 s' とも異なり、それゆえ S' の中には含まれないような要素（たとえば私の自我）が存在するからである。最後に、a と b が S の異なった要素であるならば、それらの像 a'、b' も同様に異なり、それゆえ写像は判明（相似）である、ということは明らかである。それゆえ S は無限であり、これが証明すべきことであった。」[28]

確かに、ここには「心理学的宇宙への依拠」があり、「私の自我」といったような「推論の唯一の数学外的な契機」が介入している[29]。しかし、こういった自身の考えと対立するような考えを、カヴァイエスがことさら批判的に強調することはない。教授資格申請講演のうちに理念化と形式化を探り当てたときと同様、彼はここでもデデキントの思索の中に数学の進展を促す契機を確認し、それを積極的に取り出そうとする。それが「主題化（thématisation）」である。

---

[25] この規定に至る論証は、中村「集合論の形成にみる「直観」の問題」、前掲書、特にその第3節にある。

[26] Cavaillès, *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles, op. cit.*, p. 115.

[27] 実のところ、カントールとの照応は以上に留まらない。デデキントは第9節において算術の操作を再帰的に定義する際、$\psi(n)=\psi_n(n)$となる写像を求める対角化の手法を用いているのだが（定理126）、カヴァイエスによればこの手法はカントールの対角線論法と「対称的」である（*ibid.*, p. 132-133）。対称性の要点だけ書くと、カントールの議論のポイントが対角線上に並ぶ値からなる要素と異なった要素を作るところにあるのに対し、デデキントの写像はまさに対角線上に並ぶ値からなるものに他ならない点にある。

[28] Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen ?, op. cit.*, p. 357. 邦訳82-83頁。この議論からはいわゆるカントールのパラドックスが出てきてしまい、本書の致命的な欠陥となっている。第3版への前書き（1911）で、デデキント自ら著作の基礎の確実性に疑念が生じた、と述べている理由の一つはここにある。

[29] Cavaillès, *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles, op. cit.*, p. 124, p. 126.

「それは、二人の著者〔デデキントとボルツァーノ〕によって類比的な仕方で描かれる、主題化（ある命題 ― あるいは思考 ― を他の命題や思考の主題とすること）の無際限な力であり、この力は数学的無限の真の源泉である。〔…〕あるシステムを形成すること、たとえば、ある要素からこの要素のシステムを形成することは、まさしく主題化をおこなうことなのであって、思考を別の思考の（論理的）主題にすることである。」[30]

主題化とは、カヴァイエスの規定によれば、ある操作を上位の操作の対象とすることであり[31]、たとえば抽象代数学はこうした進展プロセスによって創り出された。カヴァイエスはデデキントの先の証明のうちに、ボルツァーノが『無限の逆説』（1851）で示したのと同種の主題化の操作を看取したのである[32]。

結論

カヴァイエスは博士主論文『公理的方法と形式主義』においてデデキントの教授資格申請講演を、博士副論文『抽象集合論の形成』において彼の自然数論の基礎付けの仕事を、それぞれ詳細な読解に付した。本稿は、カヴァイエスが前者の講演から「理念化」と「形式化」という二つの数学生成のプロセスを、後者の仕事から残るプロセスである「主題化」を取り出していることを明示すると共に、鎖の概念が「中心的直観」に関するカヴァイエス自身の議論の例証となっているという解釈を提示した。

カヴァイエスはゲーデルの不完全性定理を肯定的に捉え直し、特定の基礎に還元され得ない数学は、未解決問題を解くことで新たな概念を創出し、その創出を通じて旧来の概念の意味を刷新していくような終わりなき生成の学問であると考えた[33]。三つの数学生成プロセスは、こうした着想を具体的に示してくれるものである。また、デデキントによればこれらのプロセスはまずもって操作の拡張によって起こるものであり、そしてその拡張すべき操作を捉えること、それが中心的直観の役割であったことも考え合わせれば、カヴァイエスがデデキントの仕事から自身の数理思想の根幹を育んだことは疑いを入れない。数学の創造性を捉えるにあたり、デデキントはカヴァイエスにとって範例的な数学者であったのである[34]。

---

30 *Ibid.*, p. 125.

31 Cf. Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme, op. cit.*, p. 177.

32 ボルツァーノは『無限の逆説』第 13 節で、真なる命題（彼はそれを「真理自体」と呼ぶ）からなる客観的連鎖に対して、デデキントと相同的な議論で無限の存在を証明しようとしている。

33 この点については、中村大介「概念とは何か、何であるべきか：カヴァイエスの哲学における「概念」とその「刷新」」、『フランス哲学・思想研究』、日仏哲学会、第 18 号、2013 年、168-176 頁を参照。

34 カヴァイエスの友人、ガストン・バシュラールの印象では、カヴァイエスはカントールよりもデデキントに密かな親近感を抱いていたという（Gaston Bachelard, « L'œuvre de Jean Cavaillès » dans Gabrielle Ferrières, *Jean Cavaillès. Un philosophe dans la guerre 1903-1944* [1950], Paris, Félin, 2003, p. 240）。『抽象集合論の形成』第 2 章における充実したカントール研究を読むと、これは驚くべき指摘ではあるが、カヴァイエスと親しかった哲学者の言葉として、ひとまずここに書き留めておく。