

学士論文

Gabor wavelet による
近似タイトウェーブレットフレームと
その音声解析への応用に関する研究

Study on the approximate tight wavelet frame
by Gabor wavelet and its application to sound analysis

2017年01月

豊橋技術科学大学 機械工学専攻
白砂 絹和

指導教授 章 忠 教授

和文要旨

Gabor wavelet による近似タイトウェーブレットフレームと その音声解析への応用に関する研究

時間・周波数解析におけるウェーブレット変換の有用性は周知である。本論文では、連続ウェーブレット変換 (continuous wavelet transformation : CWT), 特に Gabor wavelet (GW) のマザーウェーブレット (mother wavelet : MW) の理論を中心に述べる。

GW はその形状および特性ゆえ、音声・画像の波形とマッチングしやすく、人間の視聴覚との相性が良い。また、時間と周波数を同時に局所解析する精度が、他に提案される MW の中でも最も高く、とりわけ解析能力に秀でている。しかしながら、GW の理論的な研究はほとんど報告されていない。

GW における近似タイトウェーブレットフレーム (approximate tight wavelet frame : ATWF) の設計は、CWT の離散化において重要であり、ATWF 設計のための間引きには過不足のない適切さが要求される。GW の ATWF 設計について、今日まで具体的な提案はなく、その間引きは経験法則にもとづいて行われてきた。本論文では、一般的に CWT に使われている本来の GW を、そのまま変換と逆変換に用いて、十分な低歪率を実現しながら、実用的な ATWF の構築が可能であることを示し、さらに具体的な提案をする。

次に本論文では、GW を用いた CWT の高速化を提案する。この提案は、適切に設計された周波数領域にコンパクトサポートなウェーブレットを用いることで、CWT の演算量が理論的に削減できることに着目したものである。すなわち、適切に設計された、周波数領域にコンパクトサポートなウェーブレット関数による、時間領域の連続的なウェーブレット係数は、適切な等間隔において離散的にウェーブレット係数を間引いて計算し、さらに適切に設計された補間関数を用いて間引いた間を補間することにより、求めることができる。そして、この原理を応用し、GW を用いた CWT における、演算量削減法を提案する。本提案では、高速化のため時間領域に間引きを行うが、周波数領域で適切な保管を施すため、少量の連続ウェーブレット係数で細部の解析が可能となる。

さらに本論文では、GW を応用した音声解析を行う。GW を改良した睡眠時無呼吸症専用 (Sleep Apnea Syndrome : SAS) の MW を設計し、基礎統計解析による SAS の睡眠中の呼吸音の解析と組み合わせ、音声のみを用いた SAS 予備群・キャリアの判別の提案法を示す。この提案法は、SAS 特有の呼吸音に焦点を当て、解析対象部分をピンポイントで切り出すため、解析に必要な睡眠中の呼吸音は 1~2 時間程度でよい。そして、呼吸状態をグラフにより視覚化、基礎統計解析を用いて睡眠中の呼吸パターンをクラスタリングし、傾向を分析する。また設計された MW による解析は、基礎統計解析では困難な、健康上問題ない者と SAS 予備群・キャリアの判別が可能となる。本提案により、IC レコーダやスマートフォンなどによる、簡易的な SAS の判別とその予備群の発見に貢献が期待される。

Abstract

Study on the approximate tight wavelet frame by Gabor wavelet and its application to sound analysis

It is well known that wavelet transform is a useful tool to analyze signal in time and frequency domain. In this thesis, subject about continuous wavelet transformation (CWT) is explained. The contain is mainly about the theory of Gabor wavelet (GW), which is a type of mother wavelets (MW). The GW is matching for various waveforms because of its shape and characteristics, has excellent simultaneous localization in time and frequency, and is able to analyze a signal with the highest accuracy than the other mother wavelets. Unfortunately, the theory of GW has not been well researched.

The designing tight wavelet frame (TWF) of GW is important to for its discretization. Making it is needed to thin in an excess and deficiency, but until today there don't have been proposed its concretely. In this thesis, it is shown that original GW is generally used for CWT. It is possible to make a practical approximate tight wavelet frame while using for a transform and an inverse transform, and achieves the enough low distortion by appropriate thinning.

In the next, we propose the fast calculation method for a continuous wavelet coefficient using a wavelet having compact support in the frequency domain, and apply it to the continuous wavelet transform using the GW having approximate compact support in the frequency domain. And using this method, to do fast calculation it is thinned in the time domain. But due to been interpolated in the frequency domain, we can analyze in detail by small quantity wavelet coefficients.

Furthermore, in this thesis, we application GW to sound analysis. A novel mother wavelet which is used exclusively for Sleep Apnea Syndrome (SAS) is designed by using the reorganized GW. The wavelet coefficient from this mother wavelet is capable to distinguish pre SAS and its carrier with statistical analysis result which is obtained from SAS typical breath sounds. The diagnostic method proposed in this thesis can distinguish between healthy subject, and subject with pre SAS as well as its carrier, with one to two hours sound data. As the proposed method only selects typical breath sounds of SAS, relatively small analysis target data is needed.

目次

第 1 章	緒言	7
1.1	研究背景および従来研究	7
1.1.1	計測工学における信号処理とウェーブレット変換	7
1.1.2	連続ウェーブレット変換とタイトウェーブレットフレーム	8
1.1.3	マザーウェーブレットと Gabor wavelet	9
1.1.4	音声解析におけるウェーブレット変換	10
1.2	本研究の目的	11
1.3	本論文の構成	12
第 2 章	連続ウェーブレット変換の基礎理論	15
2.1	数学的準備	15
2.2	連続ウェーブレット変換とマザーウェーブレット	16
2.3	タイトウェーブレットフレーム	18
第 3 章	Gabor wavelet を用いた近似タイトウェーブレットフレームの設計	21
3.1	はじめに	21
3.2	Gabor wavelet を用いた変換式における歪率の計算法	22
3.3	1 つの帯域に限定した Gabor wavelet による変換式	23
3.3.1	理論計算による歪成分	23
3.3.2	数値計算による歪成分	24
3.3.3	歪成分のエネルギーの収束性	26
3.4	Gabor wavelet を 2 オクターブに配置した実験モデル	29
3.4.1	歪率の検証	30
3.4.2	周波数に対する出力信号の変動率	31
3.5	Gabor wavelet による実用的な近似タイトウェーブレットフレームの提案	32
3.5.1	負の周波数を持つマザーウェーブレットの必要性	32
3.5.2	近似タイトウェーブレットフレームの設計	33
3.5.3	Gabor wavelet を用いた連続ウェーブレット変換における間引き方の考察	35
3.6	まとめ	36
第 4 章	Gabor wavelet を用いた連続ウェーブレット変換の高速化	39
4.1	はじめに	39
4.2	補間計算に関する必要な定理	40
4.3	演算量削減法の基本原理	46
4.4	演算量削減法の Gabor wavelet を用いた連続ウェーブレット変換への適用	49
4.4.1	Gabor wavelet を用いた連続ウェーブレット変換に適用する演算量削減法の設計	51

4.4.2	数列の有効項	56
4.4.3	演算量の削減率	58
4.4.4	サンプルの解析と誤差の評価	60
4.5	まとめ	62
第5章	Gabor wavelet を改良した SAS 専用マザーウェーブレットの設計と音声解析への応用	65
5.1	はじめに	65
5.2	SAS 呼吸音の特徴と SAS 判別法および予備群の早期発見プロセスの提案	66
5.2.1	被験者データとその構成	66
5.2.2	SAS の睡眠中の呼吸音の特徴	67
5.2.3	SAS 判別法および予備群の早期発見プロセスの概要	68
5.3	階段グラフによる無呼吸状態と呼吸リズムの視覚化	70
5.3.1	階段グラフの作成手順	70
5.4	クラスタ分析による呼吸パターン傾向の把握	72
5.5	呼吸パターンのクラスタリングとその傾向	73
5.6	SAS 専用マザーウェーブレットの設計と定量評価	75
5.6.1	SAS 専用マザーウェーブレットの設計	76
5.6.2	SAS 専用マザーウェーブレットによる呼吸音の解析と定量評価	79
5.7	まとめ	83
第6章	結言および将来展望	85
6.1	結言	85
6.2	今後の課題および展望	86

第1章 緒言

1.1 研究背景および従来研究

本章では、本論文の趣旨について述べる。まず、本論文の中心であるウェーブレット変換 (wavelet transform : WT) への導入として、計測工学における信号処理の位置付けとその重要性について解説する。次に WT について、その歴史から応用への流れについて説明する。そして、WT の核となるマザーウェーブレット (mother wavelet : MW) の意味付けと理論および重要性、また MW のひとつであり、本論文で焦点とする Gabor wavelet (GW) について解説する。さらには、GW の音声解析への応用について述べる。その後、本研究の目的について明示し、最後に本論文の構成について説明する。

1.1.1 計測工学における信号処理とウェーブレット変換

計測工学は、測定や観測から得られるデータの抽出とその解析を工学的視点から行う。その中でも、信号処理の位置付けは大きく、音声、画像、電気など、その適用範囲は多岐にわたる [1]-[3]。信号とは、対象とするデータが波形や数値列であり、処理とは、それらから目的とする内容を取得するために、データを加工および処理することである [4]-[6]。

信号処理の解析ツールとして最も知名度が高いのは、フーリエ変換 (Fourier transform : FT) である。19 世紀初頭、フランスの数学者 J.B.J. Fourier は、全ての信号はサイン波とコサイン波の任意の定数倍の和で表されるとし、FT を提唱した。彼の偉業により、信号処理は飛躍的にその適用・応用範囲を広げた。そして、デジタル化が進歩する今日、信号処理は我々の日常生活には欠かせない科学技術のひとつになった [7]-[9]。次章で解説する WT は、この FT の発展である。ここでは FT について述べる。

周知のとおり、FT は信号処理における最大有用価値のあるツールのひとつである。しかし、FT には対象とする信号の特性によって、次の 3 つの問題が発生する [10]-[20]。

- [1] 対象信号は時間軸方向に無限： $(-\infty, \infty)$ であると仮定している。
- [2] サイン波とコサイン波の任意の定数倍の和が収束しなければならない。
- [3] 局所的な解析は不可能である。

まず、[1] について、FT は信号が無限に続くものと仮定した上で変換をし、サイン波とコサイン波の定数倍の和で表す。つまり、有限の信号を対象とする場合、その信号と同等の状態のものが無限に繰り返されるものとして FT を施す。

また、[2] について、発案者 Fourier は、全ての信号はサイン波とコサイン波の任意の定数倍の和で表されるとした。しかし、サイン波とコサイン波の任意の定数倍で表される和は、必ず収束するとは限らない。そして、この和が発散する場合、FT は不可能となってしまう。つまり、対象信号 $f(t)$ が FT 可能な必要条件は、 $f(t)$ は二乗可積分関数 ($f(t)$ を二乗したものが有限の値に収束する関数) でなければならない。

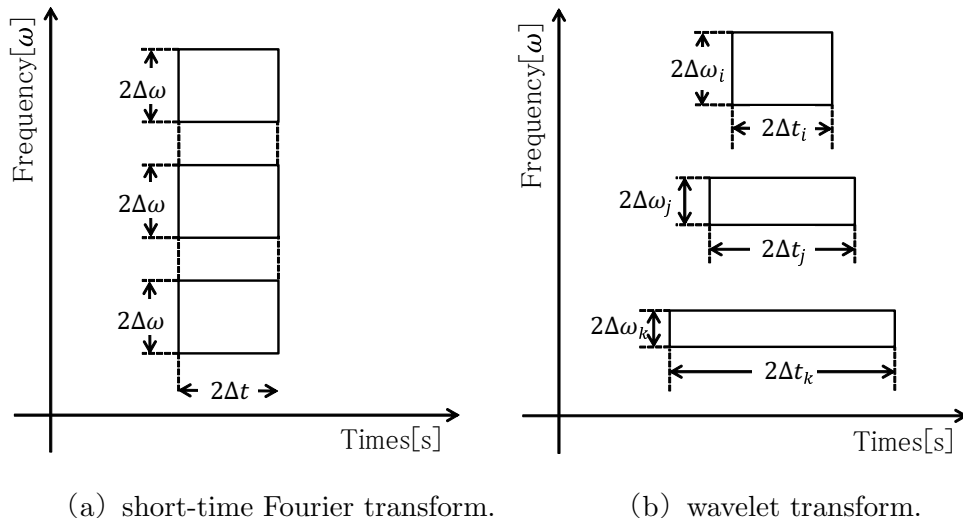


図 1.1 Uncertainty principle.

そして、[3] について、先述の【1】と【2】も加味すれば、FT は、時間軸方向に無限と仮定された二乗可積分な関数を、周期的に繰り返される信号と捉えて変換する。同時に、非周期的な局所イレギュラー信号は相殺して変換する。

FT により局所的な信号解析を行う場合、一般的に窓関数によるフィルター処理の概念を用いる。短時間フーリエ解析と呼ばれるこの解析方法は、解析信号に窓関数により重みを施し、時間軸に帯域制限フィルターを設ける。これにより、有限区間かつ閉区間に解析対象の焦点を当てることが可能となる [7]-[9]。

しかし、このように FT に改良を施してもなお、図 1.1 の例に示すような、不確定性原理 (uncertainty principle) の課題が発生する。つまり、FT の窓関数において、時間軸と周波数は反比例の関係になるため、時間・周波数の解析精度を同時に上げるには限界が生じてしまう [7]-[9]。

1.1.2 連続ウェーブレット変換とタイトウェーブレットフレーム

FT に窓関数の重みを乗じても残る不確定性原理の原因は、窓関数のサイズを周波数と無関係に作ることにある。そして、この問題に解決案を述べたのは、フランス人の J.Morlet だった。1975 年、地質学者の彼は、石油探索時にウェーブレットの概念を発案したとされる [23]。彼は、“wavelets of constant shape” を使った新しい時間・周波数の解析を提唱した [25]。その後、1981 年、Morlet は同じくフランス人の A.Grossmann との共同研究で連続ウェーブレット変換 (continuous wavelet transform : CWT) を考案した。それを式 (1.1) に示す。

$$(W_{\psi}f)(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \psi\left(\frac{t-\beta}{\alpha}\right) f(t) dt \quad (1.1)$$

ただし、 $t, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ である。式 (1.1) において、マザーウェーブレットと呼ばれる $\psi(t)$ が窓関数の役目を担い、 α はスケール ($1/\alpha$ が周波数に対応)、 β は平行移動 (時間軸方向) のパラメータである。つまり、周波数・時間の両軸において窓関数のサイズの伸縮が可能となる。

CWT は名前のとおり連続値で計算を行うが、コンピュータで実装する場合には、離散値で行わなければならない。そのための離散化には、過不足のない間引きの適切性（狭すぎず、大きすぎない適度な間引き）が問われる。この離散化を表す概念として、ウェーブレットフレームがある。ウェーブレットフレームとは、式 (1.1) において、解析対象の関数 $f(t)$ と $\psi(t)$ の内積の二乗和が、ある有限な実数定数倍のノルムで抑えられる状態のことである。そして、有限の範囲がただひとつの値になるとき、 $f(t)$ と $\psi(t)$ の内積は正規直行基底となる。この状態のウェーブレットフレームをタイトウェーブレットフレーム (tight wavelet frame: TWF) という。すなわち TWF は、過不足なく最適に離散化された状態を表す。さらに、CWT の逆変換を用いてウェーブレットフレームが構成されるとき、変換前の関数 $f(t)$ の再構成が可能となる。

CWT は冗長性が高い計算であり、TWF の設計は計算量の削減と計算精度の維持・向上に欠かせない。しかしウェーブレットフレームの研究報告は多くはなく、応用面と理論面で別途に行われている傾向がある。

応用面では、既存の理論を離散ウェーブレット変換へ適用したものが多い [11]-[12]。例えば、山本らは、ウェーブレットフレームによる分解を用いて、テクスチャ画像に対する教師なし領域分割方法を提案している [11]。石川らは、多重記述符号化の冗長度制御方式としてウェーブレットフレーム展開を用いる手法を提案している [12]。

また、理論面ではモデル構築に関するものが多い [13]-[15]。例えば、新井は、脳内の視覚情報処理の数理モデル構築のためにウェーブレットフレームを構築し、錯覚の要因特定へ応用している [13]。芦野は、正規直交ウェーブレット基底をフーリエ空間でうまく滑らかにすることにより、超局所解析が可能な TWF の構成が可能であることを報告している [14]。また、章、戸田らの設計した TWF は、複素離散ウェーブレットにおいて完全シフト不変性（各レベルの解析結果の関数の形状が、解析始点位置すなわち信号の位相に依存しないこと）を実現している [15]。

TWF の研究が多く行われていない理由のひとつに、その構成が容易ではない点あげられる。基本的な構成方法は提案されているが、式 (1.1) の $\psi(t)$ に依存するため、オーダーメイド的な要素が含まれる。本論文では、戸田らの証明した定理 [17] の変換式を用いて、実用的な近似タイトウェーブレットフレーム (approximate tight wavelet frame: ATWF) つまり、完全な TWF に可能な限り近似したものの構築について、構成と再構成を同時に論じ、いくつかの具体的な提案をする。

1.1.3 マザーウェーブレットと Gabor wavelet

式 (1.1) において、窓関数の役割を持つ関数 $\psi(t)$ をマザーウェーブレット (mother wavelet: MW) という。MW には数多くの種類が提案されており、本論文で扱う CWT においては、実数 MW と複素数 MW に大分類される。前者には、Gauss 関数を 2 階微分し、その形状がメキシコの民族帽に似ている、メキシカン・ハット (Mexican hat)、方形関数を FFT した関数でもある、シャノン (Shannon)、階段関数のような形状ゆえ微分不可である、ハール (Harr) などがある。また後者には本論文の主題である、ガボール (Gabor, または Morlet) があげられる [23], [38]。複素数 MW は実部と虚数部から構成されるゆえ、解析対象の信号の位相を捉えることが出来る。そのため、実数 MW のように解析結果に干渉縞が生じない。そして GW には他の特性もある。

GW は次の式 (1.2) で定義される [18]-[20].

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{\delta_0}} e^{-\frac{t^2}{2\delta_0^2}} e^{i2\pi t} \quad (1.2)$$

ただし, $t \in \mathbb{R}$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$ かつ $\delta_0 > 0$ である. 式 (1.2) のとおり, GW は複素指数関数 (complex exponential function : CEF) : $e^{-\omega t}$ と Gauss 関数の積で形成される. この特性より, GW は多くの解析対象波形にマッチングしやすく, それゆえ GW を用いた解析結果は人間の視覚・聴覚との相性が良い. 一般的に他に提案される MW は, 解析対象の波形に則して選択をするケースが多いが, このような理由から, GW にはその必要がない. また, 時間軸と周波数軸を局所的に同時に解析する能力は, 数多く提案されている MW の中でも最も高い.

このように利点の多い GW であるが, 同時に欠点にも近い特徴がある. まず, GW は MW に要求されるアドミッシブル条件 (無限区間の積分値が 0 に収束する) を満たさないこと, そして複素数 MW ゆえ, 実部と虚数部により構成されることから, 計算には非常に冗長性がある. さらに, GW は式 (1.2) で表されるように, 数学的な要素を含むため, CWT の式 (1.1) にそのまま代入して, 理論的に考察をするのは非常に複雑である. このような理由から, GW の基礎理論の研究報告はほとんどなく, GW の TWF の構築についても例外ではない.

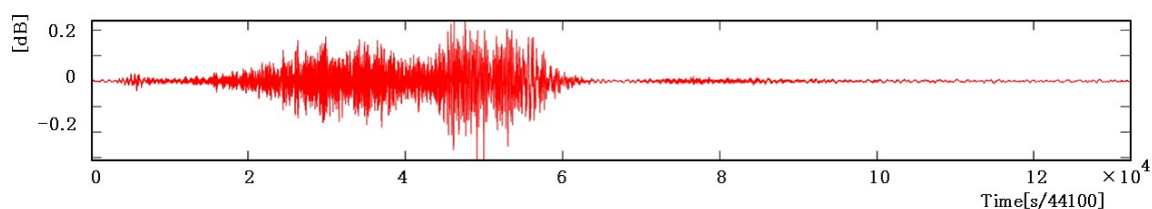
先に述べたように, GW は正規直行基底とならないため, TWF を構築しない. しかし, GW に適切な間引きを施すことは, ATWF を構築することと同値である. そして, GW の ATWF の構築はコンピュータ上の最適な計算精度を保持する離散化を意味する. 本論文の第 3 章では実用的な GW の ATWF を理論的に構築する.

1.1.4 音声解析におけるウェーブレット変換

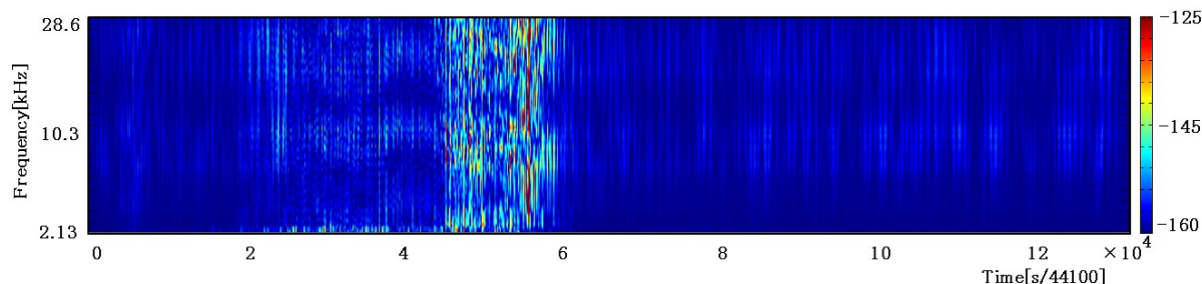
ここでは, 音声解析における WT について説明する.

WT は, 音声解析の分野でも応用価値が高い. ノイズ除去, 異常音探知 (ヘルスマニタリング), 医療分野の異常音探知などがあげられる. ノイズ除去においては, ホワイトノイズ除去, マッチング追跡によるノイズ除去などに用いられており, WT によるノイズの除去は, 音声に与える歪が他のツールより小さいという利点がある [26]-[28]. 異常音探知は, ヘルスマニタリングとも呼ばれ, 構造物内部の亀裂などを振動音により探知する手法である [29], [30]. 医療分野でも応用は広く, 血流音, 心音や心拍, 肺音などの解析に活用されている [31]-[33].

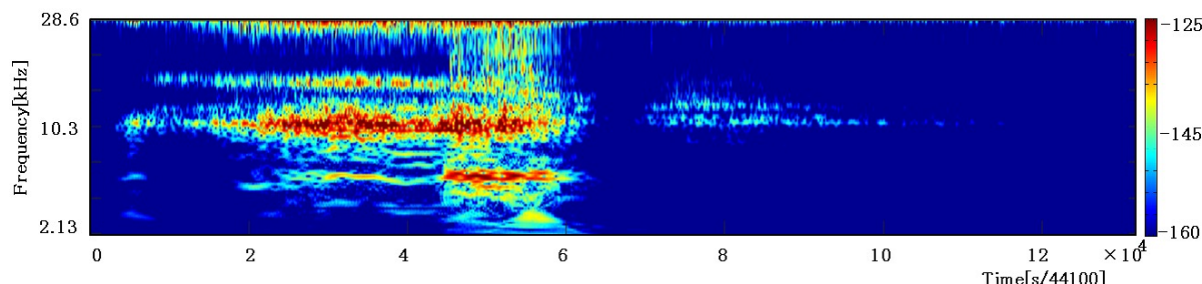
本論文では, 第 5 章で GW を睡眠時無呼吸症 (Sleep Aponea Syndrome : SAS) の睡眠中の呼吸音への解析に応用している. 図 1.2 に SAS キャリアの睡眠中の呼吸音の CWT の解析結果の例を示す. ただし, 図の (a) は SAS キャリアの睡眠中の呼吸音信号, (b) は Haar wavelet を用いた解析結果, (c) は GW を用いた解析結果である. なお信号のサンプリング周波数は 44.1kHz である. 図 1.2 の (b) と (c) を比較すると, GW は Haar wavelet よりも多くの時間・周波数特徴を引き出していることが確認できる. また, GW は複素数ウェーブレットのため位相を捉えられるので, Haar wavelet の解析結果のように干渉縞を生じない. よって, GW は視覚的にも特徴を抽出の結果を把握しやすいことがわかる. (なお, この例の図 (c) において, GW のパラメータ δ_0 は, 高周波ほど感度が上がるよう可変性を持たせている. δ_0 を固定した解析結果では, この例よりも特徴抽出が弱くなる. 本論文第 5 章ではこの点を考慮して論議を進めている.)



(a) The example of SAS sound.



(b) The example of SAS sound analysis with Haar wavelet.



(c) The example of SAS sound analysis with Gabor wavelet .

図 1.2 The example of SAS sound analysis result with Harr and Gabor wavelet.

1.2 本研究の目的

本研究の目的は、これまでほとんど行われてこなかった GW の基礎理論の研究を進展させることにある。

第 1.3 章で述べたように、解析精度に優れた GW の理論面の研究は、WT において重要な位置を占め、また WT の今後の応用と発展においても欠くことができない。

第 3 章では、GW を用いた ATWF の設計について述べる。CWT に頻用されている GW は、コンピュータで計算をする際に適切な間引きを考慮しなければ、事実上無視が出来ない歪が生じてしまう。そこで、全高調波歪率の概念を GW へ適用し、適切な間引き方の提案とその歪成分が収束することを示す。さらには、実用的なモデルをもとに、ATWF の構築について具体的な提案をする。

そして第 4 章では、GW を用いた CWT の高速化について述べる。ここでは、適切に設計された周波数領域にコンパクトサポートなウェーブレットによる、時間領域の連続的なウェーブレット係数が、適切な等間隔において、離散的にウェーブレット係数を間引いて計算し、さらに適切に設計された補間関数を用いて、間引いた間に補間を施す。これにより、オリジナルの連続的なウェーブレット係数を、完全に正しく再現できることを証明する。さらにこの方法を GW へ適用する提案をする。本提案では、高速化のために時間領域で間引きを行うが、周波数領域で適切な保管をするため、少ないウェーブレット係数で細部の解析が

可能となる。

現在のコンピュータは性能が高く、計算ロジックの改良による高速化の意味合いは薄れてきている。しかし、本論文で提案する GW を用いた CWT の高速化は、従来の GW の CWT による解析結果と誤差が非常に少ない。また、計算速度も 3 分の 1 程度に抑えられるため、データの圧縮にも繋がる。よって、例えば、非常に厳密な精度を要しない長大データについて、個人用 PC で解析を行う場面などに有用性が期待される。

また、第 5 章では、GW を睡眠時無呼吸症 (Sleep Apnea Syndrome : SAS) の音声解析へ応用する。基礎統計解析と、GW を改良した SAS 専用の MW による解析および定量評価により、SAS 予備群・キャリアの判別方法を提案する。本論文では、第 4 章で GW の CWT における高速化を提案するが、高速に解析を行う場合においても、長大データの解析対象部分となる箇所を的確に絞ることが出来れば、解析はより簡易かつ明瞭になる。これを踏まえ、この提案法では、基礎統計解析により SAS 特有の呼吸音を把握し、解析対象部分をピンポイントで切り出す方法を用いている。よって、SAS 専用設計された MW による解析対象部分は比較的少量で良い。さらに、この MW を用いることで、基礎統計学では困難である健康上問題ない者と SAS 予備群・キャリアの判別が可能となる。

なお第 5 章では、機械学習・人工知能を取って用いていない。十分な数のサンプルデータと開発・解析環境が揃えば、これらを用いて適宜な結果を得られる予測ができる [34]。しかしながら、機械学習・人工知能による解析には、ブラック・ボックスな面が拭えない。本論文では、健康上に問題のない者 (現時点では将来 SAS になる可能性が低い健康な者)、SAS 予備群 (将来 SAS になる可能性が高い者) とそのキャリア (既に医療機関で SAS と診断を受けている者)、それぞれの睡眠中の呼吸音について、工学的に差異を明確化し、今後の発展に繋げることを目的とした。

1.3 本論文の構成

本章も含めた本論文の構成は以下のとおりである。

第 1 章：緒言

第 2 章：連続ウェーブレット変換の基礎理論

第 3 章：GW を用いた近似タイトウェーブレットフレームの設計

第 4 章：GW を用いた CWT の高速化

第 5 章：GW を改良した SAS 専用 MW を用いた音声解析への応用

第 6 章：結言および将来展望

本論文の構成を図 1.3 に示す。

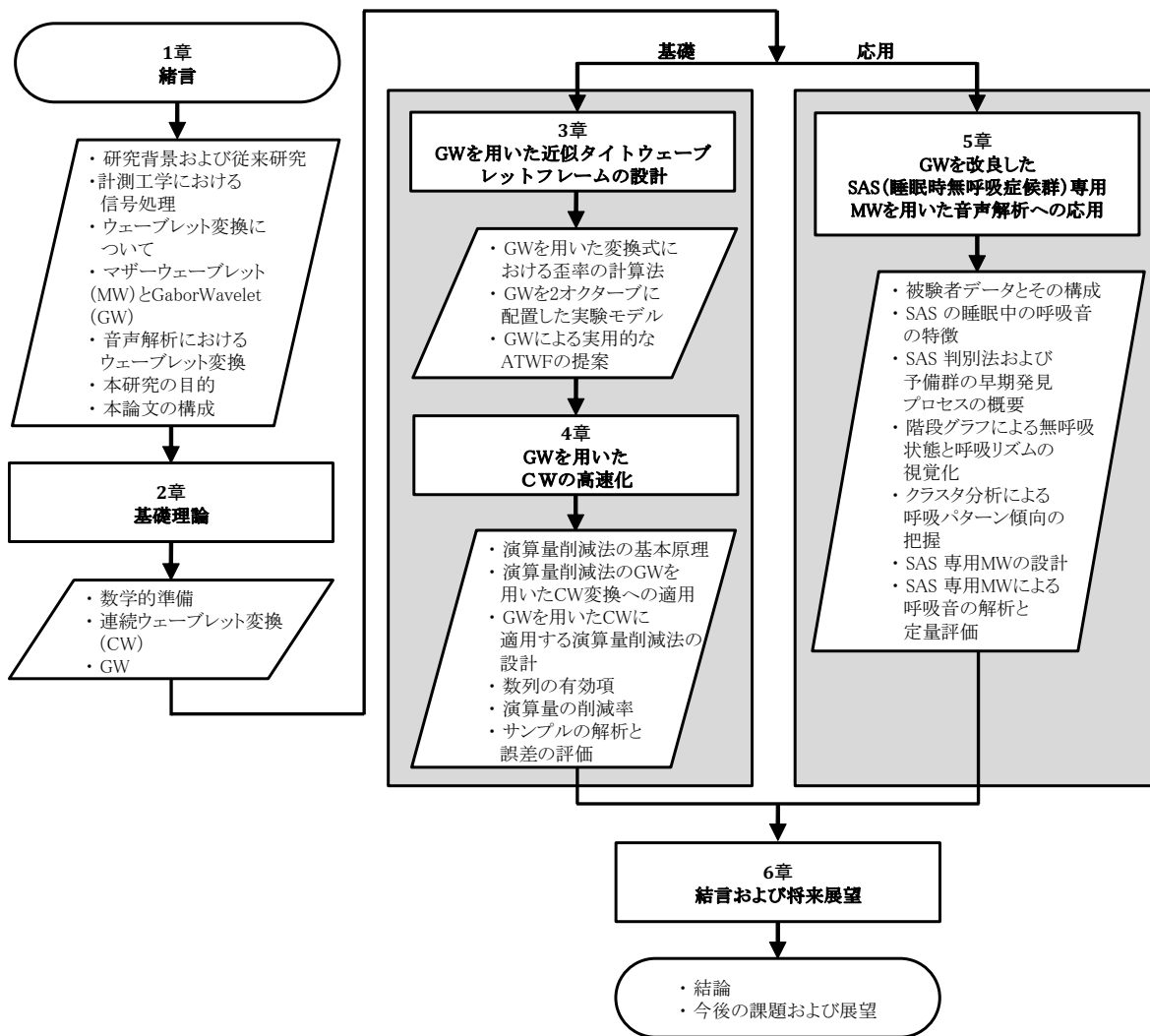


図 1.3 The framework of this paper.

第2章 連続ウェーブレット変換の基礎理論

この章では、本論文の基礎理論について述べる。まず第2.1節では、数学的な準備をする。そして第2.2節では、連続ウェーブレット変換 (continuous wavelet transform : CWT) について解説をする。第2.3節では、本論文の主題である Gabor wavelet (GW) について述べる。

2.1 数学的準備

本論文で扱う、数学的な定義と定理を以下のとおりとする。

いくつかの空間について、次のように定義する。

- \mathbb{Z} : 整数全体の集合
- \mathbb{N} : 0 を含まない自然数全体の集合
- \mathbb{R} : 実数全体の集合
- \mathbb{C} : 複素数全体の集合
- $L^1(\mathbb{R})$: 積分可能な関数全体の集合
- $L^2(\mathbb{R})$: 二乗積分可能な関数全体の集合
- $\ell^1(\mathbb{Z})$: 級数が絶対収束する数列全体の集合
- $\ell^2(\mathbb{Z})$: 二乗総和可能な数列全体の集合

次に、 $f(t), g(t) \in L^2(\mathbb{R})$ の内積 $\langle f, g \rangle$ を次のように定義する。

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt \quad (2.1)$$

$\overline{g(t)}$ は $g(t)$ の複素共役を表す。

また、関数 $f(t)$ のノルム $\|f\|$ を次のように定義する。

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (2.2)$$

関数 $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ のフーリエ変換 (Fourier transform : FT) : $\hat{f}(\omega)$ を次のように定義する。
(※第1章の再記)

$$\hat{f}(\omega) = (\mathcal{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.3)$$

そして、 $\hat{f}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$ の逆フーリエ変換 (inverse Fourier transform : IFT) : $f(t)$ を次のように定義する。

$$f(t) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.4)$$

関数 $f(t)$ と $\hat{f}(\omega)$ の間には、不確定性関係がある [21]。時間軸に関して広がりを中心位置を、

$$t_c = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |\psi(t)|^2 dt \quad (2.5)$$

の式で定義し、広がり幅の半径を、

$$\Delta t = \frac{1}{\|\psi\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_c)^2 |\psi(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

の式で定義する。同様に、周波数軸の中心位置を、

$$\omega_c = \frac{1}{\|\hat{\psi}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \quad (2.7)$$

の式で定義し、周波数軸の半径を以下の式で定義する。

$$\Delta \omega = \frac{1}{\|\hat{\psi}\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_c)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

式 (2.6) と式 (2.8) には、以下の不確定性原理が成り立つ。

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2} \quad (2.9)$$

2.2 連続ウェーブレット変換とマザーウェーブレット

CWT, および連続ウェーブレット変換の逆変換 (inverse continuous wavelet transform : ICWT) を次の式 (2.10) と式 (2.12) で定義する。

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ のとき, CWT を以下のように定義する。(※第 1 章の再記)

$$(W_\psi f)(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \overline{\psi\left(\frac{t - \beta}{\alpha}\right)} f(t) dt \quad (2.10)$$

式 (2.10) より求められる値をウェーブレット係数 (continuous wavelet coefficient : CWC) と呼ぶ。そして、 $\hat{\psi}(\omega)$ を $\psi(t)$ の FT とし、

$$C_\psi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \quad (2.11)$$

とおく。このとき, ICWT を以下の式で定義する。

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(\alpha, \beta) \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \psi\left(\frac{t - b}{\alpha}\right) \frac{d\alpha d\beta}{\alpha^2} \quad (2.12)$$

式 (2.10) 内で $\psi(t)$ として用いられる式を MW, または, アナライジングウェーブレットと呼ぶ。ICWT の式 (2.12) が成立するためには、以下のアドミッシブル条件が必要となる。

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2.13)$$

このアドミッシブル条件の代用として、以下の式 (2.14) が用いられることがある。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.14)$$

アドミッシブル条件、および式 (2.14) より、MW が急減少関数である条件を求めることが多い ($f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ が急減少関数であるとは、 $\forall l, m \in \mathbb{Z}$ に対し、 $\sup_x \left| x^l \frac{d^l}{dx^m} f(x) \right| < \infty$ を満たすものをいう [9], [10])。

MW のひとつである GW は次の式 (2.15) で定義される。

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{\delta_0}} e^{-\frac{t^2}{2\delta_0}} e^{i2\pi t} \quad (2.15)$$

ただし、 $t \in \mathbb{R}$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$ かつ $\delta_0 > 0$ である。

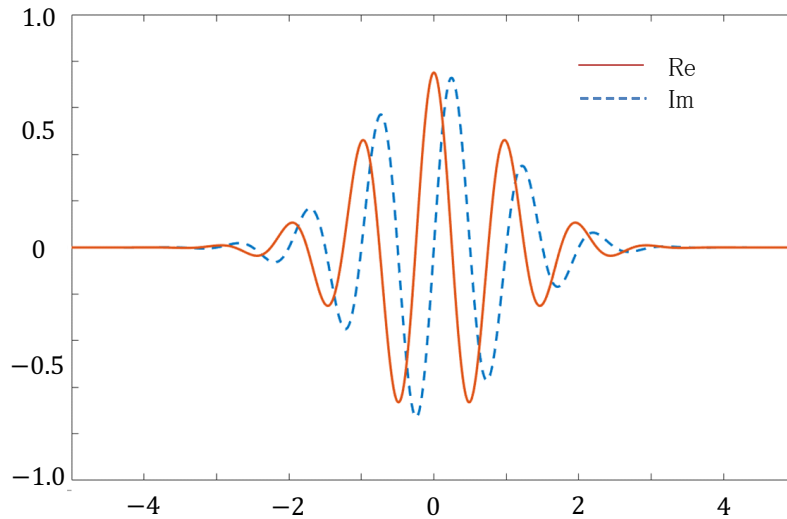


図 2.1 The example of GW shape.

GW はパラメータ δ_0 を可変することにより、さまざまな形状を持つ複素数 MW である [18]-[20]。図 2.1 に $\delta_0 = 2$ における形状を掲げる。ただし青色の実線は実数部、赤色の破線は虚数部である。

次に、周波数 ω_0 の複素指数関数 (complex exponential function : CEF) : $f(t) = e^{i\omega_0 t}$ の FT を、

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad (2.16)$$

のように定義する。ここで、 $\delta(t)$ はディラックのデルタ関数である。すると、式 (2.3) より、式 (2.15) で表される GW の MW : $\psi(t)$ の FT : $\hat{\psi}(\omega)$ は次のようになる。

$$\hat{\psi}(\omega) = \sqrt{2}\pi^{1/4} \sqrt{\delta_0} e^{-\frac{\delta_0^2(\omega-2\pi)^2}{2}} \quad (2.17)$$

GW には次のような特徴がある。

1. GW は、CEF の積と Gauss 関数の積で定義される数式的な意味合いと複素数ウェーブレットであることから、他に提案される MW よりも音声・画像にマッチングし、解析結果を視覚的に把握しやすい。そのため、多様な音声解析、画像解析に使われている [18]-[20].
2. パラメータ δ_0 の可変により、時間領域および周波数帯域の半径 [16], [37] が調整でき、柔軟性に富む.
3. 時間領域の半径 : 式 (2.6) と周波数帯域の半径 : 式 (2.8) を掛け合わせた面積が、あらゆるウェーブレットの中で最も小さい $1/(4\pi)$ であり、時間・周波数の解像度が高い [16], [37].

2.3 タイトウェーブレットフレーム

次に、ウェーブレットの離散化、つまり間引きについて重要なウェーブレットフレームの概念について述べる.

ウェーブレットの集合 $\{\psi_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ がウェーブレットフレームであるとは、ある定数 $A > 0$, $B < \infty$, $A, B \in \mathbb{R}$ が存在し、任意の関数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ に対して、

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (2.18)$$

が成り立つことである。つまり、ウェーブレットフレームとは $f(t)$ と $\psi_n(t)$ の内積の二乗和がある有限な実数定数倍のノルムで抑えられる状態であり、式 (2.18) の A と B をウェーブレットフレーム限界という。さらに $A = B$ のとき、このウェーブレットフレームをタイトウェーブレットフレーム (tight wavelet frame : TWF) という。ATWF では、任意の関数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ に対して、

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_n \rangle|^2 = A\|f\|^2 \quad (2.19)$$

であり、このことは少なくとも弱い意味で (必要条件ではあるが、十分条件ではない関係で)、以下の式 (2.20) を意味する [16], [35].

$$f(t) = \frac{1}{A} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_n \rangle \psi_n(t) \quad (2.20)$$

ここで、あるウェーブレットの集合 $\{\psi_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ と信号 $f(t)$ との内積を次のように求め、

$$d_n = \langle f, \psi_n \rangle \quad (2.21)$$

そして、信号の再構成は次式により行う。

$$f'(t) = \frac{1}{A} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n \psi_n(t) = \frac{1}{A} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_n \rangle \psi_n(t) \quad (2.22)$$

このように求めた $f'(t)$ が十分な精度で $f(t)$ に近似するとき、ウェーブレットの集合 $\{\psi_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は、近似タイトウェーブレットフレーム (approximate tight wavelet frame : ATWF) を構築すると定義する [16].

TWF は正規直行基底であり，ATWF は正規直行基底とはならない．本論文の主題である GW は，前述のとおり，GW は CEF と Gauss 関数の積で表されるため，厳密にはアドミッシブル条件：式 (2.13) を満たさない．ゆえに，コンピュータ上で計算を行う場合，一般的には，減衰を適度な有限範囲で両端をカットし，近似的にアドミッシブル条件を満たすようにする [18]-[20]．しかしながら，このような操作を行い，さらに適切な間引きを施しても，GW は正規直行基底とならない．つまり，GW に適切な間引きを行うことは，GW の ATWF を構築することと同値となる．

また以後，本論文では式 (2.21) を ATWF の変換式，式 (2.22) を ATWF の逆変換式と呼び，以下では簡単に変換式と呼ぶことにする．さらに ATWF の変換と逆変換を表す式のみならず，式 (2.22) と同じような形で表される式は，すべて変換式と呼ぶことにする．例えば MW: $\psi(t)$ をもとに，整数 j, n ，および実数パラメータ $a > 1, p > 0$ を用いて，

$$\psi_{j,n}(t) = \sqrt{a^j} \psi(a^j t - pn) \quad (2.23)$$

と定義される，ウェーブレットの集合 $\{\psi_{j,n}(t)\}_{j,n \in \mathbb{Z}}$ を用いて表される，

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{0,n} \rangle \psi_{0,n}(t) \quad (2.24)$$

$$h(t) = \sum_{j=m, m \in \mathbb{Z}}^0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}(t) \quad (2.25)$$

なども，すべて変換式と呼ぶことにする．

先述のとおり，GW の基礎研究はほとんど行われていないが，WT および CWT における GW の利便性・必要性は極めて高い．本論文では，この GW に焦点を絞り，第 3 章で適切な間引きにより生じる歪率を求め，適切な間引き間隔を理論的に考察する．そして実用的な ATWF を設計し，具体的な提案をする．さらに第 4 章では，GW を用いた CWT の高速化について述べる．また第 5 章では，GW を改良した MW を設計し，音声解析への応用を行う．

第3章 Gabor wavelet を用いた近似タイト ウェーブレットフレームの設計

前章までに述べたように、Gabor wavelet (GW) は連続ウェーブレット変換 (continuous wavelet transform : CWT) に多く用いられるマザーウェーブレット (mother wavelet : MW) であり、GW を用いた解析は非常に有用である。しかしながら、GW の理論的な研究はほとんど行われておらず、タイトウェーブレットフレーム (tight wavelet frame : TWF) の研究報告もない。GW の TWF の設計は、CWT の離散化において重要であり、計算の精度を保持できる、時間・周波数領域における適切な間引きが要求される。本章では、一般的に CWT に使われている本来の GW を、そのまま変換と逆変換に用いて、実用上、十分な低歪率を実現しながら、近似タイトウェーブレットフレーム (approximate tight wavelet frame : ATWF) の構築が可能であることを示す。

3.1 はじめに

CWT は時間軸方向、周波数軸方向のどちらにも連続的に並んだウェーブレットを用いて計算される変換である [18]-[22]。しかしコンピュータで実装する際には、適切にウェーブレットを間引いて離散化しなければならない。この間引きによる離散化は、一般的に経験法則にもとづいて行われることが多い。実際、信号解析や画像解析などに CWT を用いる場合には、経験法則による離散化を行っても、大きな問題は起こらなかった。ただし本質的には、この間引きが適切でなければ、CWT において解析精度が落ち、重要な情報を見逃してしまう可能性もある。さらに ATWF を設計する場合においては、間引きが適切でなければ、変換と逆変換を通して無視できない歪が生じてしまうのは明らかである。ところがこれまで、GW に関する歪の割合、つまり歪率の理論的な計算は困難であった。CWT の式 (2.10) に GW の式 (2.15) を直接代入する方法により歪率を求めるのは、非常に複雑なためである。よって、GW を用いた近似的なウェーブレットフレームやタイトウェーブレットフレームなど [16], [38] の設計は、ほとんど行われてこなかった。

しかし、戸田らが証明した定理 [17] を用いることにより、論理的に歪率の計算が可能であることがわかった。本論文ではこの定理を利用し、GW による実用において十分な精度を持つ ATWF を設計する。そして、その結果を用いて、GW を用いた CWT における最適なウェーブレットの間引きに関していくつかの提案を行う。

なお本章は、次のような内容により構成される。第 3.2 章では、本論文で必要な定義について述べる。第 3.3 章では、GW を用いた変換式 (詳細は第 2.3 章で述べた、変換式とは離散的な変換と逆変換を一体化した式) における歪率の計算法について、オーディオアナログアンプのスペック表の一例を用いて説明する。第 3.4 章では、1 つの帯域に限定した GW を用いた変換式を設定し、それに対して複素指数関数 (complex exponential function : CEF) を入力することを想定し、理論的に計算した歪成分と、実際の変換を想定して計算した歪

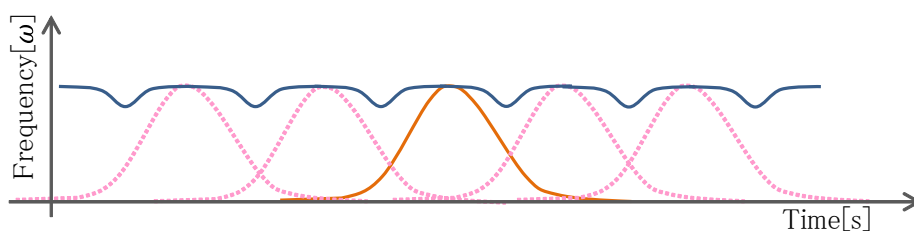


図 3.1 The example of the GW which each thin is too wide on the time domain.

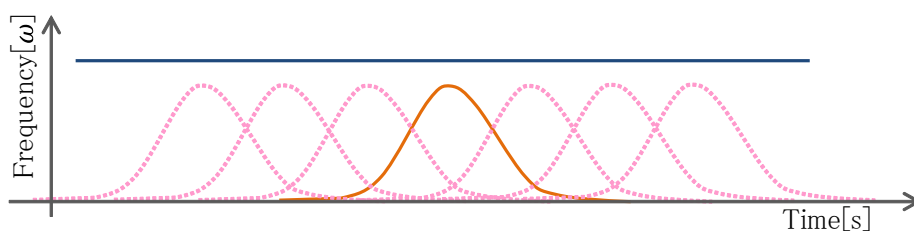


図 3.2 The example of the GW which each thin is apposite on the time domain.

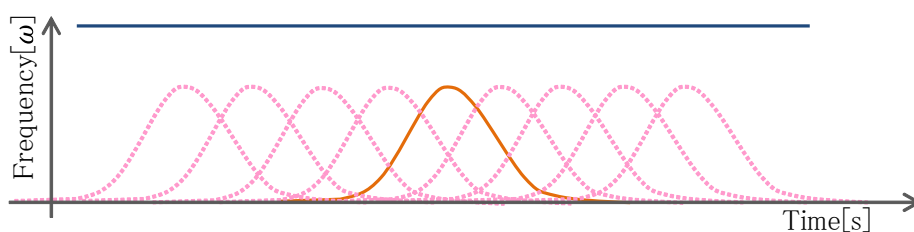


図 3.3 The example of the GW which each thin is too close on the time domain.

成分が、ほぼ一致することを示す。そして理論的な歪成分のエネルギーが楕円関数を用いて表され、その値が収束することを証明する。第3.5章では、GWを2オクターブに配置した実験モデルを想定し、その歪率や、周波数に対する出力信号の変動率などを考察する。第3.6章では、第3.4章、第3.5章で得られた結果をもとに、幾つかの実用的なGWによるATWFを提案し、さらにGWを用いたCWTにおける、ウェーブレットの間引き方も考察する。そして第3.7章ではこの章のまとめをする。

3.2 Gabor wavelet を用いた変換式における歪率の計算法

本章では、GWを用いた変換式における歪率を計算する。その方法は、オーディオアナログアンプの歪測定法にヒントを得たものである。そこでオーディオアナログアンプのスペクトル表の一例を掲げながら説明する。

- 全高調波歪率 : 0.5%
- 周波数特性 : 10–100kHz, ± 1 dB

上記は実在する真空管式オーディオアンプのスペックである。これらと関連付けて、GW を用いた変換式における、歪成分および出力変動成分の計算法について説明する。ここで、周波数 f のサイン曲線を入力した場合における周波数 f の出力成分の振幅を V_1 とし、周波数 f の 2 倍, 3 倍, \dots , n 倍の周波数の出力成分の振幅を V_2, V_3, \dots, V_n とする。オーディオアンプにおける全高調波歪率 (total harmonic distortion : THD) は,

$$\text{THD} = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + \dots + V_n^2}}{\|V_1\|} \quad (3.1)$$

により求められる [39], [40].

この THD は、オリジナル信号と同じ周波数の出力成分に対して、その 2 倍以上の周波数の出力成分全体の振幅比を歪率として測定する。本章で理論的に計算する歪率もこれに酷似している。つまり、本章で扱う出力信号は、オリジナルの入力信号と同じ周波数の出力成分と、それ以外の周波数領域に発生する出力成分に分離できる。そして後者については、オリジナルの周波数ではない歪成分として捉えることができ、式 (3.1) と同じような計算により、歪率を算出することができる。オーディオアンプにおける周波数特性は、出力変動率の測定とみなすことができる。すなわち、上記の「10–100kHz, $\pm 1\text{dB}$ 」は、その出力変動が $\pm 1\text{dB}$ に納まる領域が、10–100kHz の周波数領域であることを示す。本論文もこれと同じように、出力変動率が実用上、些少値であるという評価を踏まえ、正当性を検証する。なお全高調波歪率は、1kHz のサイン曲線の電気信号を入力して測定するのが一般的であるが、本節では、ウェーブレットがカバーする周波数帯域の全体において理論的に歪率を計算する。その具体的な経緯と論法、そして解析結果、考察を第 3.4 章以後で示す。

3.3 1 つの帯域に限定した Gabor wavelet による変換式

この節では、1 つの帯域に限定した GW による変換式を設定し、それに対して CEF を入力することを想定する。そして理論的に計算した歪成分と、実際の変換を想定して計算した歪成分が、おおよそ一致することを示し、さらに理論的な歪成分のエネルギーが、楕円テータ関数を用いて表され、その値が収束することを証明する。

3.3.1 理論計算による歪成分

本節では、式 (2.15) の GW の MW : $\psi(t)$ を時間軸方向に間隔 $p = 1$ で離散的に並べたウェーブレットの集合による、周波数 $\omega_0 = 2\pi$ の CEF に対する変換式を考える。最初に理論面からの解析を行うが、理論面においては、戸田ら [17] が証明した次の定理を用いる。

【定理 3.1】作用素 \mathcal{W}_p^ψ を用いて、ウェーブレットの集合 $\{\psi_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ による、関数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ の変換式を次のように表す。

$$\left(\mathcal{W}_p^\psi f\right)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_n \rangle \psi_n(t) \quad (3.2)$$

ここで $\{\psi_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は、1 つのウェーブレット $\psi(t)$ を用いて以下のように定義する。

$$\psi_n(t) = \psi(t - np) \quad (3.3)$$

ただし, p は正の実数のパラメータとする. すると, 次式が成立する.

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{W}_p^\psi f\right)(\omega) = \frac{1}{p} \hat{\psi}(\omega) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \hat{f}(\omega - 2\pi k/p) \overline{\hat{\psi}(\omega - 2\pi k/p)} \right\} \quad (3.4)$$

この節では, 式 (3.4) における $\psi(t)$ を式 (2.15) で表される GW の MW として, さらに \hat{f} に式 (2.20) を代入し, IFT した次の式から理論面を考察する.

$$\left(\mathcal{W}_p^\psi f\right)(t) = \frac{1}{p} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \hat{\psi}(\omega_0 + 2\pi k/p) \overline{\hat{\psi}(\omega_0)} e^{i(\omega_0 + 2\pi k/p)t} \right\} \quad (3.5)$$

さらに本節では $p = 1$, $\omega_0 = 2\pi$ とするので, これらを式 (3.5) に代入すると, 次の式が得られる.

$$\left(\mathcal{W}_1^\psi f\right)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \hat{\psi}(2\pi(1+k)) \overline{\hat{\psi}(2\pi)} e^{i2\pi(1+k)t} \right\} \quad (3.6)$$

次に, $Amp_k = \hat{\psi}(2\pi(1+k)) \overline{\hat{\psi}(2\pi)}$ とすると, 式 (3.6) より, $\left(\mathcal{W}_1^\psi f\right)(t)$ は以下のように表せる.

$$\left(\mathcal{W}_1^\psi f\right)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Amp_k e^{i2\pi(1+k)t} \quad (3.7)$$

すなわち, $\left(\mathcal{W}_1^\psi f\right)(t)$ は, 振幅 Amp_k の CEF : $e^{i2\pi(1+k)t}$ ($k \in \mathbb{Z}$) の和で表される. そして, $k = 0$ における CEF : $e^{i2\pi t}$ は, 周波数 $\omega_0 = 2\pi$ のオリジナル成分の CEF とみなすことができ, その振幅は以下のように表せる.

$$Amp_0 = \left| \hat{\psi}(2\pi) \right|^2 \quad (3.8)$$

また, それ以外の $k \neq 0$ ($k \in \mathbb{Z}$) における CEF : $e^{i2\pi(1+k)t}$ は, すべて歪成分とみなすことができ, 各々の歪成分の振幅は, 以下のように表せる.

$$Amp_k = \hat{\psi}(2\pi(1+k)) \overline{\hat{\psi}(2\pi)}, \quad k \neq 0, k \in \mathbb{Z} \quad (3.9)$$

なお, 式 (2.17) より, k ($k \in \mathbb{Z}$) の値にかかわらず, Amp_k は正の実数値を取る.

3.3.2 数値計算による歪成分

次に, 数値計算で生じる, 実質的な歪成分を求める方法について考える. 本節では, 式 (3.3) において, $p = 1$ のときの検討を行うが, このとき, 周波数 $\omega_0 = 2\pi$ の CEF は周期 1 となり, この CEF と 1 間隔に並んだ MW : $\psi(t)$ との内積は, みな同じ値になる. ここでは, その値を仮に複素数定数 K とする. すると, 式 (3.2) の変換式より得られる $\left(\mathcal{W}_1^\psi f\right)(t)$ は, MW : $\psi(t)$ を K 倍し, 間隔 1 で並べたものに等しくなる. すなわち, 以下の式が成立する.

$$\left(\mathcal{W}_1^\psi f\right)(t) = K \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(t-n) \quad (3.10)$$

今回は, 歪成分の相対的な比較について検討を行うため, K については具体的に触れず, 以下のような関数 $g(t)$ を考える.

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(t-n) \quad (3.11)$$

この $g(t)$ より, 数値計算における各成分を, 以下のように FT を用いて求める.

表 3.1 The distortion rate by theoretical calculation.

k	$\delta_0 = 0.5$		$\delta_0 = 1$	
	Amp_k	Distortion rate	Amp_k	Distortion rate
0	1.772454	-	3.544907	-
1	1.274728×10^{-2}	7.191883×10^{-3}	9.483649×10^{-9}	2.675288×10^{-9}
2	4.741825×10^{-9}	7.191883×10^{-3}	1.815880×10^{-34}	2.675288×10^{-9}
3	9.123441×10^{-20}	7.191883×10^{-3}	2.488512×10^{-77}	2.675288×10^{-9}
4	9.079399×10^{-35}	7.191883×10^{-3}	$2.440808 \times 10^{-137}$	2.675288×10^{-9}

表 3.2 The distortion rate by practical calculation.

k	$\delta_0 = 0.5$		$\delta_0 = 1$	
	$ G_k $	Distortion rate	$ G_k $	Distortion rate
8	1.363287×10^3	-	1.928000×10^3	-
16	9.804604	7.19000×10^{-3}	5.157901×10^{-6}	2.675288×10^{-9}
24	3.647186×10^{-6}	7.19000×10^{-3}	1.511463×10^{-13}	2.675288×10^{-9}
32	9.568745×10^{-15}	7.19000×10^{-3}	5.033106×10^{-14}	2.675288×10^{-9}
40	5.908741×10^{-14}	7.19000×10^{-3}	9.980627×10^{-14}	2.675288×10^{-9}

1. $\psi(t)$ を式 (2.15) で表される GW の MW として, $n = -100$ から $n = 108 (n \in \mathbb{Z})$ までの $\psi(t-n)$ より生成される式 (3.11) の近似関数 $g'(t)$ を以下のように求める.

$$g'(t) = \sum_{n=-100}^{108} \psi(t-n) \quad (3.12)$$

2. $0 \leq t < 8$ の間隔を 1024 等分し, それぞれの座標の $g'(t)$ の関数値を値に持つ数列を $\{g_n\}$ と置く.

$$g_n = g'\left(\frac{8n}{1024}\right), \quad n = 0, 1, \dots, 1023 \quad (3.13)$$

3. 式 (3.13) は, 1024 個の数列となる. これに FT を施したものを $\{G_k\}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < 1024$) とする. すると FT の性質より, G_k は時間間隔 8 を k 周期で分割する CEF 成分の振幅に比例する値となり, その周波数は $2\pi k$ を 8 で割ったもの, すなわち $\pi k/4$ で表せる. このことと, Amp_k が CEF: $e^{i2\pi(1+k)t}$ ($k \in \mathbb{Z}$) の振幅であることを考え合わせると, G_8 には式 (3.8) で表される Amp_0 の成分が, また G_{8+8k} ($k \neq 0$) には式 (3.9) で表される Amp_k ($k \neq 0$) の成分が現れる. そこで Amp_k と G_{8+8k} の絶対値の大きさを比較し, 相対的に等しいこと, つまり以下の式の成立を確認する.

$$\begin{aligned} & Amp_{-1} : Amp_0 : Amp_1 : Amp_2 : \dots \\ & = |G_0| : |G_8| : |G_{16}| : |G_{24}| : \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

ただし, GW の MW: $\psi(t)$ を表す式 (2.15) におけるパラメータ δ_0 に関しては, $\delta_0 = 0.5$ および, $\delta_0 = 1$ の 2 つの値を扱う.

なお, 上記 1 において, GW が原点を対照とした形状にするために, n を -100 から 108 としてバランスを取った. また, この条件を -1000 から 1008 として同様の解析を行ったところ, 解析結果に大きな違いは見られなかった. よって n は妥当であると考えられる.

上記の手順を行い、その理論計算による結果、 $\{Amp_k: k = 0, 1, \dots\}$ を表 3.1 に、また、数値計算による結果、 $\{|G_k|: k = 8, 16, \dots\}$ を表 3.2 に示す。表 3.1, 表 3.2 の「歪率」は、THD を求める式 (3.1) に倣い計算を行った。つまり理論計算では Amp_0 を、数値計算では G_8 を基準となる式 (3.1) の V_1 とし、それら以上の各 k について理論計算では V_{k+1} 、数値計算では $V_{k/2}$ として扱い、それぞれの k までの各値の二乗和の平方根を V_1 のノルムで割った値を「歪率」とした。

結果より、理論計算と数値計算の歪率は各 k について小数点以下 6 桁まで等しい値となっている。この結果より、理論計算と数値計算の歪率は等しいものと考え、以後は【定理 3.1】を用いた理論計算により歪率を扱う。

3.3.3 歪成分のエネルギーの収束性

ここからは、時間軸方向に加え、周波数軸方向にもウェーブレットを離散的に展開するために必要となる、ダイレーションファクター a ($a > 1, a \in \mathbb{R}$) を導入する。すなわち、レベル j ($j \in \mathbb{Z}$) の n 番目 ($n \in \mathbb{Z}$) のウェーブレット $\psi_{j,n}(t)$ を、次のように定義する。

$$\psi_{j,n}(t) = \sqrt{a^j} \psi(a^j t - pn) \quad (3.15)$$

ただし p は正の実数のパラメータとする。なお、ダイレーションファクター a は、周波数軸方向のウェーブレットの密度を決定するパラメータである。例えば、 $a = 2^{1/4}$ に設定すると、オクターブを対数スケール上で 4 分割するように、各レベル j のウェーブレットの集合 $\{\psi_{j,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が配置され、これらは、 j の値が大きいほど高い周波数帯域を、また、 j の値が小さいほど低い周波数帯域を受け持つウェーブレットの集合となる。また各レベルの集合が集まって、1つの大きなウェーブレットの集合 $\{\psi_{j,n}(t)\}_{j,n \in \mathbb{Z}}$ を構成する。さらに式 (2.15), (3.15) より以下の式が成立し、 $\{\psi_{j,n}(t)\}_{j,n \in \mathbb{Z}}$ の、すべてのウェーブレットのノルムは 1 となる。

$$\|\psi_{j,n}\| = 1, \quad j, n \in \mathbb{Z} \quad (3.16)$$

次に【定理 3.1】に倣い、レベル j の $\{\psi_{j,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ による関数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ の変換式を以下のように定義する。

$$(\mathcal{W}_{a^j, p}^\psi f)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}(t) \quad (3.17)$$

そして、式 (3.17) に【定理 3.1】を適用すると、

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}_{a^j, p}^\psi f)(\omega) = \frac{1}{p} \hat{\psi}\left(\frac{1}{a^j} \omega\right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \hat{f}\left(\omega - 2\pi \frac{a^j}{p} k\right) \overline{\hat{\psi}\left(\frac{1}{a^j} \omega - 2\pi \frac{1}{p} k\right)} \right\} \quad (3.18)$$

が得られ、この式の \hat{f} に式 (2.20) を代入し、IFT を施すと次の式が得られる。

$$(\mathcal{W}_{a^j, p}^\psi f)(t) = \frac{1}{p} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \hat{\psi}\left(\frac{1}{a^j} \omega_0 + 2\pi \frac{1}{p} k\right) \overline{\hat{\psi}\left(\frac{1}{a^j} \omega_0\right)} e^{i(\omega_0 + 2\pi \frac{a^j}{p} k)t} \right\} \quad (3.19)$$

また、 $A_k^{a^j}$ を以下のように定義する。

$$A_k^{a^j} = \frac{1}{p} \hat{\psi}\left(\frac{1}{a^j} \omega_0 + 2\pi \frac{1}{p} k\right) \overline{\hat{\psi}\left(\frac{1}{a^j} \omega_0\right)} \quad (3.20)$$

すると、式 (3.19) より、 $(\mathcal{W}_{a^j, p}^\psi f)(t)$ は、以下のように表せる。

$$(\mathcal{W}_{a^j, p}^\psi f)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k^{a^j} e^{i(\omega_0 + 2\pi \frac{a^j}{p} k)t} \quad (3.21)$$

すなわち、 $(\mathcal{W}_{a^j, p}^\psi f)(t)$ は、振幅 $A_k^{a^j}$ の CEF: $e^{i(\omega_0 + 2\pi \frac{a^j}{p} k)t}$ ($k \in \mathbb{Z}$) の和で表される。そして、 $k=0$ における CEF: $e^{i\omega_0 t}$ は、周波数 ω_0 のオリジナル成分の CEF とみなすことができ、その振幅は、以下のように表せる。

$$A_0^{a^j} = \frac{1}{p} \left| \hat{\psi}\left(\frac{1}{a^j} \omega_0\right) \right|^2 \quad (3.22)$$

同時に、それ以外の $k \neq 0$ ($k \in \mathbb{Z}$) における CEF: $e^{i(\omega_0 + 2\pi \frac{a^j}{p} k)t}$ は、すべて歪成分とみなすことができ、各々の歪成分の振幅は、以下のように表せる。

$$A_k^{a^j} = \frac{1}{p} \hat{\psi}\left(\frac{1}{a^j} \omega_0 + 2\pi \frac{1}{p} k\right) \overline{\hat{\psi}\left(\frac{1}{a^j} \omega_0\right)}, \quad k \neq 0, k \in \mathbb{Z} \quad (3.23)$$

以上をもとに、オリジナル成分のエネルギー $EA_{k=0}^{a^j}$ を、

$$EA_{k=0}^{a^j} = \left| A_0^{a^j} \right|^2 = \frac{1}{p^2} \left| \hat{\psi}\left(\frac{1}{a^j} \omega_0\right) \right|^4 \quad (3.24)$$

歪成分のエネルギー $EA_{k \neq 0}^{a^j}$ を、

$$\begin{aligned} EA_{k \neq 0}^{a^j} &= \sum_{k \neq 0, k \in \mathbb{Z}} \left| A_k^{a^j} \right|^2 \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{k \neq 0, k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}\left(\frac{1}{a^j} \omega_0 + 2\pi \frac{1}{p} k\right) \right|^2 \left| \hat{\psi}\left(\frac{1}{a^j} \omega_0\right) \right|^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

と定義する。

以上で、オリジナル成分と、それ以外の歪成分を算出するための準備が整った。以後は、これらを用いてさらに話を進めるが、ここで歪成分の収束性を確認するために必要な補題、および定義を掲げる。

【補題 3.2】 正の実数 α および実数 β において、以下の式が成立する。

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha(k+\beta)^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\pi(-\frac{k^2}{\alpha} + 2\beta ki)} \quad \alpha > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (3.26)$$

【証明】 $f(t) = e^{-\pi\alpha(t+\beta)^2}$ の FT は、

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\alpha(t+\beta)^2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\alpha\left\{\left(t+\frac{1}{2}\left(2\beta+\frac{i\omega}{\pi\alpha}\right)\right)^2 + \beta^2 - \frac{1}{4}\left(2\beta+\frac{i\omega}{\pi\alpha}\right)^2\right\}} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\alpha\left\{\left(t+\frac{1}{2}\left(2\beta+\frac{i\omega}{\pi\alpha}\right)\right)^2 - \frac{i\omega\beta}{\pi\alpha} + \frac{1}{4}\frac{\omega^2}{\pi^2\alpha^2}\right\}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{(-\pi\alpha)\left(\frac{1}{4}\frac{\omega^2}{\pi^2\alpha^2} - \frac{i\omega\beta}{\pi\alpha}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi\alpha} + i\beta\omega} \end{aligned} \quad (3.27)$$

となり [41], これに $\omega = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ を代入すると次式が得られる.

$$\hat{f}(2k\pi) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{\pi(-\frac{k^2}{\alpha} + 2\beta ki)}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.28)$$

$f(k) = e^{-\pi\alpha(k+\beta)^2}$ ($t = k$ を $f(t)$ に代入したもの), および式 (3.28) をポワソンの和公式 [7]: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2k\pi)$ に代入すると, 式 (3.26) が得られる. Q.E.D.

【定義 3.3】 $\text{Im } \tau > 0$, すなわち複素数定数 τ の虚数部が正の実数であるとき, 楕円テータ関数 $\vartheta_0(z, \tau)$ を次のように定義する [42], [43].

$$\vartheta_0(z, \tau) := \vartheta_{01}(z, \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\pi(i\tau k^2 + 2ik(z + \frac{1}{2}))} \quad (3.29)$$

以上のような楕円テータ関数は, 収束することが知られている [42], [43].

ここからは, 式 (3.25) で表される歪成分のエネルギー $EA_{k \neq 0}^{aj}$ について着目し, この値が楕円テータ関数に集約されることを示す. まず, この式を以下のように書き直す.

$$\begin{aligned} EA_{k \neq 0}^{aj} &= \frac{1}{p^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} |\hat{\psi}(\frac{1}{a^j}\omega_0 + 2\pi\frac{1}{p}k)|^2 |\hat{\psi}(\frac{1}{a^j}\omega_0)|^2 \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\frac{1}{a^j}\omega_0 + 2\pi\frac{1}{p}k)|^2 |\hat{\psi}(\frac{1}{a^j}\omega_0)|^2 - \frac{1}{p^2} |\hat{\psi}(\frac{1}{a^j}\omega_0 + 2\pi\frac{1}{p}k)|^2 |\hat{\psi}(\frac{1}{a^j}\omega_0)|^2 \Big|_{k=0} \end{aligned} \quad (3.30)$$

つまり, $k \in \mathbb{Z}$ の和を求め, その和から $k = 0$ を除く方法を用いる. すると, 式 (3.30) は,

$$\begin{aligned} EA_{k \neq 0}^{aj} &= \frac{2}{p^2} \sqrt{\pi} \delta_0 e^{-\delta_0^2(\frac{1}{a^j}\omega_0 - 2\pi)^2} \\ &\quad \times \left\{ 2\sqrt{\pi} \delta_0 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |e^{-\frac{1}{2}\delta_0^2(\frac{1}{a^j}\omega_0 + 2\pi k\frac{1}{p} - 2\pi)^2}|^2 - 2\sqrt{\pi} \delta_0 e^{-\delta_0^2(\frac{1}{a^j}\omega_0 - 2\pi)^2} \right\} \\ &= \frac{4}{p^2} \pi \delta_0^2 e^{-\delta_0^2(\frac{1}{a^j}\omega_0 - 2\pi)^2} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\delta_0^2(\frac{1}{a^j}\omega_0 + 2\pi k\frac{1}{p} - 2\pi)^2} - e^{-\delta_0^2(\frac{1}{a^j}\omega_0 - 2\pi)^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.31)$$

のようになる. この式 (3.31) の最下段の前半項は,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{4\delta_0^2\pi^2}{p^2}(k + \frac{p}{2\pi}(\frac{1}{a^j}\omega_0 - 2\pi))^2} \quad (3.32)$$

と整理できる. そして, これに【補題 3.2】の式 (3.26) を適用する. すなわち $\alpha = \frac{4\delta_0^2\pi}{p^2}$, $\beta = \frac{p}{2\pi}(\frac{1}{a^j}\omega_0 - 2\pi)$ と置くと, 式 (3.32) は,

$$\frac{p}{2\delta_0\sqrt{\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\pi(-\frac{p^2k^2}{4\delta_0^2\pi} + \frac{p}{\pi}(\frac{1}{a^j}\omega_0 - 2\pi)ki)} \quad (3.33)$$

と表せる. さらに, 【定義 3.3】の楕円テータ関数の定義式 (3.29) を適用する. すなわち $z = \frac{p}{2\pi}(\frac{1}{a^j}\omega_0 - 2\pi) - \frac{1}{2}$, $\tau = \frac{p^2i}{4\delta_0^2\pi}$ と置けば, 式 (3.33) は,

$$\frac{p}{2\delta_0\sqrt{\pi}} \cdot \vartheta_0\left(\frac{p}{2\pi}\left(\frac{1}{a^j}\omega_0 - 2\pi\right) - \frac{1}{2}, \frac{p^2i}{4\delta_0^2\pi}\right) \quad (3.34)$$

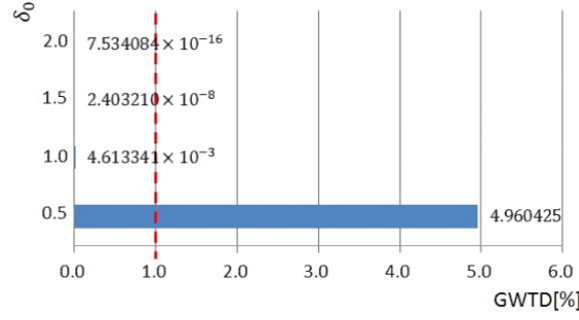


図 3.4 The distortion rate[%] obtained by Equation(3.39).

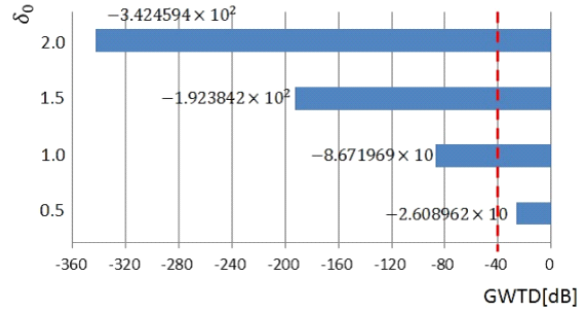


図 3.5 The distortion rate[dB] obtained by Equation(3.39).

と表せる．以上の経緯より，歪成分のエネルギーは楕円テータ関数を用いて，

$$EA_{k \neq 0}^{a^j} = \frac{4}{p^2} \pi \delta_0^2 e^{-\delta_0^2 (\frac{1}{a^j} \omega_0 - 2\pi)^2} \times \left\{ \frac{p}{2\delta_0 \sqrt{\pi}} \cdot \vartheta_0 \left(\frac{p}{2\pi} \left(\frac{1}{a^j} \omega_0 - 2\pi \right) - \frac{1}{2}, \frac{p^2 i}{4\delta_0^2 \pi} \right) - e^{-\delta_0^2 (\frac{1}{a^j} \omega_0 - 2\pi)^2} \right\} \quad (3.35)$$

と表せることが証明された．また楕円テータ関数は収束することが知られているので [42], [43], 式 (3.35) で表される歪成分のエネルギー $EA_{k \neq 0}^{a^j}$ も収束し，有限の値を取る．なお $\delta_0 = 1$ として，式 (3.25) において k を近似的に $-10 \leq k \leq 10$ ($k \in \mathbb{Z}$) の範囲に限定して計算したところ，

- $EA_{k \neq 0}^{a^j} = 1.798792 \times 10^{-16}$

の値が得られた．さらに k を $-1000 \leq k \leq 1000$ の範囲に広げて計算をしたところ，小数点以下 6 桁まで上記とまったく変わらない値が得られた．また本論文では， $\delta_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$ を扱うが，これらすべての δ_0 においても，まったく同じような結果が得られた．以上より，歪成分のエネルギー $EA_{k \neq 0}^{a^j}$ の収束は十分に速く， k を近似的に $-10 \leq k \leq 10$ の範囲に限定して計算しても，十分な精度が得られると判断した．

3.4 Gabor wavelet を 2 オクターブに配置した実験モデル

この節では，GW を 2 オクターブに配置した一般的な実験モデルの変換式を構成し，歪率や周波数に対する出力信号の変動率などについて考察する．

3.4.1 歪率の検証

前節で導いた、オリジナル成分の振幅を求める式 (3.22) や、歪成分の振幅を求める式 (3.23) を用いて、式 (2.15) の GW の MW : $\psi(t)$ を、時間軸と周波数軸方向に展開したウェーブレットの集合による変換式についての歪率を求める。ここでは、 $\pi/2$ から 2π までの周波数領域に、1 オクターブ 4 分割の間隔でウェーブレットの集合を配置したモデルを考える。すなわち、式 (3.15) における $\psi(t)$ を式 (2.15) の GW の MW として、さらに $a = 2^{1/4}$ とし、レベル $j = -8, -7, \dots, 0$ における、9 つのウェーブレットの集合 $\{\psi_{j,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ による変換を考える。また、 p に関しては $p = 1$ とし、 δ_0 に関しては $\delta_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$ の 4 つの値で考察する。すると、関数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ に対する変換式は、次の $h(t)$ のように表される。

$$h(t) = \sum_{j=-8}^0 (\mathcal{W}_{2^{j/4}, 1}^\psi f)(t) = \sum_{j=-8}^0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}(t) \quad (3.36)$$

ただし $\psi_{j,n}(t)$ は以下のように表される。

$$\psi_{j,n}(t) = \sqrt{2^{j/4}} \psi(2^{j/4}t - n) \quad (3.37)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{\delta_0}} e^{-\frac{t^2}{2\delta_0^2}} e^{i2\pi t}, \quad \delta_0 = 0.5, 1, 1.5, 2 \quad (3.38)$$

なお、 $f(t)$ は周波数 $\omega_0 = \pi$ の CEF : $f(t) = e^{i\pi t}$ とする。すなわち $\pi/2$ から 2π までの周波数領域における、対数尺上の中央値である、周波数 $\omega_0 = \pi$ とする。

ここで、オリジナルの成分に対する歪成分の比率として、「GW 歪率」という概念を用いる。すなわち式 (3.1) の高調波歪を表す THD の算出法に倣い、オリジナルの CEF 成分に対する総和的な歪成分の割合を GW 歪率 : GWTD (Gabor wavelet total distortion) として算出する。この GWTD を、次のように定義する。

$$\text{GWTD} = \frac{\sqrt{\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \neq 0, k \in \mathbb{Z}} |A_k^{a^j}|^2}}{\sum_{j \in \mathbb{Z}} |A_0^{a^j}|} \quad (3.39)$$

この式 (3.39) に上記の条件で設定した実験モデルを適用し、さらに式 (3.25) における k を近似的に $-10 \leq k \leq 10$ ($k \in \mathbb{Z}$) の範囲に限定して GWTD を算出し、その結果を図 3.4, 図 3.5 に示す。図 3.4 は、オリジナル成分に対する 100% 比率、図 3.5 は $20 \log_{10}(\text{GWTD})$ 、すなわち、デシベル (decibel, dB) 比率である。横軸は GWTD [%] および [dB]、縦軸は δ_0 である。なお、オリジナルの成分に対する誤差 1% のラインを赤色の破線で示した。この結果より、 $\delta_0 = 0.5$ では GWTD 値が大きく、精度に欠けてしまうが、 $\delta_0 = 1, 1.5, 2$ では精度が良好であることがわかる。また、ここで図は示していないが、 $\delta_0 = 0.5$ において $p = 0.5$ とし、他のパラメータを同条件で計算を行ったところ、GWTD の値は、

- 100% 比率 : $1.634179 \times 10^{-3}\%$
- dB 比率 : $-9.573401 \times 10 \text{dB}$

となり十分な精度が得られることがわかった。以上より、 $\delta_0 = 0.5$ に対しても、適切な p の設定により、精度の良い計算結果が得られることがわかった。なお、 k を $-100 \leq k \leq 100$ について同様の計算を行った結果、上記の結果と大きな誤差が生じないことを確認した。

GWTD に関する補足

式 (3.39) では、それぞれの歪成分はすべて異なる周波数を持つものとして計算しているが、実際には、同じ周波数の歪成分が一部、含まれており、その位相は一致する。そのため理論的には式 (3.39) の計算値よりも、歪率は大きくなるはずである。つまり、式 (3.39) の分子は、同じ周波数の歪成分について各々の和を二乗しているが、正確には各々の二乗の和より歪成分を算出しなければならず、前者は後者よりも値が大きくなる。しかし、そのことを考慮して厳密に計算した結果、式 (3.39) とほとんど変わらないことがわかった。すなわち図 3.4 に示した、すべての歪率の計算において、両者の計算結果は、有効数字 6 桁まで一致することがわかった。そこで本論文では、式 (3.39) により歪の計算を行うことにした。

3.4.2 周波数に対する出力信号の変動率

オリジナル成分の総合出力の振幅は、それぞれのレベル j のオリジナル成分 $A_0^{a_j}$ を式 (3.22) で計算し、それらを以下のように足し合わせれば求まる。

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |A_0^{a_j}| \quad (3.40)$$

ただし p に関しては $p = 1$ とし、また j に関しては、式 (3.37) と式 (3.38) で表される、 $\pi/2$ から 2π までの周波数領域をカバーする、レベル $j = -8, -7, \dots, 0$ のウェーブレットの間で足し算をした。そして入力信号の CEF の周波数 ω_0 を π を中心に $\pm 1/4$ オクターブの範囲で可変させて、(正確に言えば $1/32$ オクターブのステップで可変させて)、オリジナル成分の総合出力の振幅の変動を測定した。また δ_0 に関しては $\delta_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$ の 4 つの値で測定したところ、図 3.6 のようになった。これらの、それぞれの δ_0 に関して振幅の平均値を計算し、さらに、その平均値より最も離れた振幅の値との差の絶対値を計算し、その値の平均値に対する比率を変動率として計算した。結果は以下ようになった。

- $\delta_0 = 0.5$: 変動率 = 2.246882%
- $\delta_0 = 1$: 変動率 = $1.772376 \times 10^{-1}\%$
- $\delta_0 = 1.5$: 変動率 = 5.469143%
- $\delta_0 = 2$: 変動率 = $2.620195 \times 10\%$

傾向として、 δ_0 が小さくなるにつれ変動率も小さくなっているが、 $\delta_0 = 0.5$ の変動率は例外的に $\delta_0 = 1$ よりも大きくなっている。この原因を調べるため、 $\delta_0 = 0.5$ において p の値を 1.0, 0.5, 0.25 と可変させて計算したところ、上記の変動率はほとんど変わらなかった。そこで $\delta_0 = 0.5$ においては、4 オクターブをカバーするモデル、すなわち $\pi/4$ から 4π までの周波数領域をカバーするモデルにて、同じ条件で計算してみた。その結果、変動率 = 1.030840% と、良好な値が得られた。よって、 $\delta_0 = 0.5$ の GW を安定した状態で使用するためには、ウェーブレットを 4 オクターブ以上に広く配置する必要があることがわかった。ただし $\delta_0 = 0.5$ の GW においては、広い周波数領域にウェーブレットを配置した場合でも、その領域の両端では変動率が大きくなり、不安定になる可能性が考えられる。

次に $\delta_0 = 1.5, 2$ の GW であるが、これらの変動率は 5.469143%, $2.620195 \times 10\%$ と、1% を大きく上回り、実用にはならない。そこで $a = 2^{1/8}$ として、1 オクターブ 8 分割のモデルにより、同じ条件で変動率を調べてみた。結果は、以下ようになった。

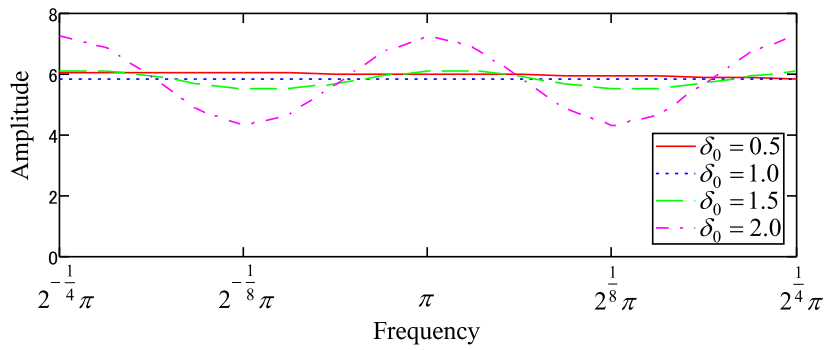


図 3.6 The total amplitude of the original components within $\pi \pm 1/4$ octave.

- $\delta_0 = 1.5$: 変動率 = $5.786879 \times 10^{-4}\%$
- $\delta_0 = 2$: 変動率 = $7.743224 \times 10^{-4}\%$

これより, $\delta_0 = 1.5, 2$ においても, 1 オクターブ 8 分割のモデルにすれば, 十分, 実用になる変動率が得られることがわかった.

3.5 Gabor wavelet による実用的な近似タイトウェーブレットフレームの提案

上記の第 3.4 章, 第 3.5 章で得られた結果をもとに, GW を用いた幾つかの実用的な ATWF のモデルを提案する.

3.5.1 負の周波数を持つマザーウェーブレットの必要性

これまででは変換の対象として, 正の周波数 ω_0 を持つ CEF を扱ってきたが, 実用的な ATWF では, 負の周波数や, 実数関数も扱わなくてはならない. このとき, 次のような留意が必要である. 実数関数値の関数について, 正の領域のみで変換および逆変換すると, 複素数関数値の関数になってしまう. つまり, もとの実数関数値の関数に戻らないという問題が発生する. そこで, 正と負の領域に設計したウェーブレットで, 変換および逆変換をする方法をとる. すると虚数部が打ち消しあい, もとの実数関数値の関数が得られることがわかる. よって, 実用的な ATWF を設計するためには, 正の周波数を持つ MW と共に, 負の周波数を持つ MW も用いて, ペアの MW で構成しなければいけない. そこで正と負の周波数を持つ 2 つの MW : $\psi^P(t)$, $\psi^M(t)$ を次のように定義する.

$$\psi^P(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{\delta_0}} e^{-\frac{t^2}{2\delta_0^2}} e^{i2\pi t} \quad (3.41)$$

$$\psi^M(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{\delta_0}} e^{-\frac{t^2}{2\delta_0^2}} e^{-i2\pi t} \quad (3.42)$$

ただし $\delta_0 > 0$ であり, 上記の $\psi^P(t)$ は, 式 (2.15) の $\psi(t)$ とまったく同じものである. またこれらの FT は次のように表される.

$$\hat{\psi}^P(\omega) = \sqrt{2\pi}^{1/4} \sqrt{\delta_0} e^{-\frac{\delta_0^2(\omega-2\pi)^2}{2}} \quad (3.43)$$

$$\hat{\psi}^M(\omega) = \sqrt{2\pi}^{1/4} \sqrt{\delta_0} e^{-\frac{\delta_0^2(\omega+2\pi)^2}{2}} \quad (3.44)$$

次にレベル j ($j \in \mathbb{Z}$) の2つのウェーブレットの集合 $\{\psi_{j,n}^P(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\{\psi_{j,n}^M(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を, ダイレーションファクター a ($a > 1$, $a \in \mathbb{R}$) と正の実数のパラメータ p ($p > 0$, $p \in \mathbb{R}$) を用いて, 次のように定義する.

$$\psi_{j,n}^P(t) = \sqrt{a^j} \psi^P(a^j t - pn) \quad (3.45)$$

$$\psi_{j,n}^M(t) = \sqrt{a^j} \psi^M(a^j t - pn) \quad (3.46)$$

すると関数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ は, 次の $f'(t)$ のように変換される.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{A} \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\mathcal{W}_{a^j, p}^{\psi^P} f)(t) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\mathcal{W}_{a^j, p}^{\psi^M} f)(t) \right\} \\ &= \frac{1}{A} \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,n}^P \rangle \psi_{j,n}^P(t) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,n}^M \rangle \psi_{j,n}^M(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

ただし A は正の実数のパラメータで, $f'(t)$ ができるだけ $f(t)$ に近似するように設定される. なお, 式 (3.47) の $f'(t)$ を $f(t)$ に置き換えられるとき, 完全なタイトウェーブレットフレームの変換式になる [16]. また A の値は, 実際に ATWF を設計し, その歪率や変動率を求め, それに応じて設定していく.

3.5.2 近似タイトウェーブレットフレームの設計

ATWF の設計の重要なポイントは, 与えられた δ_0 に対応して, 式 (3.45), (3.46) の a および p を適切に設定することである. この課題は, 正の周波数を持つ $\{\psi_{j,n}^P(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ において, すでに解決済みである. つまり第 3.5 章で, $\delta_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$ における $\{\psi_{j,n}^P(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ の適切な a および p を導き出しているのだから, その通りに設定すればよい. そして負の周波数を持つ $\{\psi_{j,n}^M(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ に関しては, まったく同じ a および p を用いることで, シンメトリックに自動的に正しく設定できる. すなわち第 3.5 章の考察結果より, 式 (3.45) と式 (3.46) における a, p は, 表 3.3 のように設定すればよい (A に関しては後述する). すると, すべての関数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ は式 (3.47) により変換される. ただし, この変換式ではすべての整数 j において計算しなければいけないが, それは不可能なので, 有限個の j による, 適切な有限の周波数領域を設定しなければいけない. この領域は用途に応じて自由に設定してかまわないが, ここでは周波数 $\pm 2\pi$ (つまりレベル $j = 0$) を開始点として, それより 8 オクターブ低い領域までを, 有限の周波数領域と設定する. すると, 例えば $\delta_0 = 1$ の場合, ダイレーションファクター $a = 2^{1/4}$ を考慮すると, 式 (3.47) の変換式は次のように表せる.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{A} \left\{ \sum_{j=-32}^0 (\mathcal{W}_{a^j, p}^{\psi^P} f)(t) + \sum_{j=-32}^0 (\mathcal{W}_{a^j, p}^{\psi^M} f)(t) \right\} \\ &= \frac{1}{A} \left\{ \sum_{j=-32}^0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,n}^P \rangle \psi_{j,n}^P(t) + \sum_{j=-32}^0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,n}^M \rangle \psi_{j,n}^M(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.48)$$

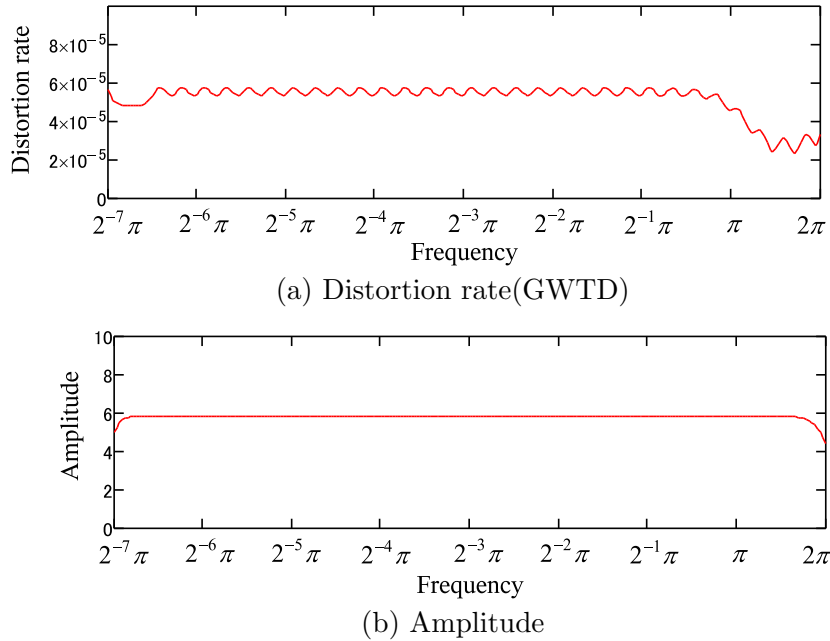


図 3.7 The distortion rate and amplitude within the frequency area $2^{-7}\pi \leq \omega_0 \leq 2\pi$.

次に第 3.4 章と同様の計算により，式 (3.48) の変換式における歪率 (GWTD)，振幅の変動を求めると，図 3.7 (a) と (b) のようになった。ただし第 3.5 章では，歪率や振幅の変動は限定的な範囲で求めたが，この図では $2^{-7}\pi \leq \omega_0 \leq 2\pi$ の 8 オクターブの周波数領域を，一般的なモデルとして，1 オクターブ 32 分割のステップ， $A = 1$ ， $\delta_0 = 1$ ， $a = 2^{1/4}$ ， $p = 1$ として計算した。次に図 3.7 (b) の中央， $2^{-4}\pi \leq \omega_0 \leq 2^{-2}\pi$ の周波数領域は，振幅が安定している領域と考えられる。この領域の振幅の平均値を計算すると 5.846764 となったが，この値を $\delta_0 = 1$ における A とした。すなわち振幅 1 の CEF を入力したときの出力の振幅値を，式 (3.47) や式 (3.48) の A の値とすれば， $f'(t)$ は $f(t)$ によく近似するのは明らかである。以上のようにして求めた， $\delta_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$ における A を表 3.3 の右側に掲げておく。なお $\delta_0 = 0.5$ における変換式は式 (3.48) とまったく同じものになる。また $\delta_0 = 1.5, 2$ における変換式は，式 (3.48) のシグマの計算において， $j = -32$ を $j = -64$ に変更すればよい。

次に，この振幅の平均値に対する，振幅の変動率が $\pm 1\%$ に納まる周波数範囲を，周波数特性とした。またその周波数特性の範囲内の最大の歪率を，その変換の歪率とした。以上のようにして求めた， $\delta_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$ における周波数特性と歪率を，表 3.4 に掲げる。表 3.4 より，すべての δ_0 において歪率は十分，低く抑えられていることがわかる。しかし周波数特性に関しては，多少，バラつきがある。すなわち $2^{-7}\pi \leq \omega_0 \leq 2\pi$ ($0.00781\pi \leq \omega_0 \leq 2\pi$) の 8 オクターブの領域にウェーブレットを配置したにもかかわらず， $\delta_0 = 0.5$ の周波数特性は，それよりもかなり狭くなっていることがわかる。そこで，この原因を調べてみたところ， $\delta_0 = 0.5$ の場合，ウェーブレットを配置した周波数領域の端，すなわち領域が途切れる手前の低周波域と高周波域で，他の δ_0 よりも大きな振幅の減衰が発生し，不安定になっていることがわかった。しかしこれは第 3.5 章の検証からも予測ができ， $\delta_0 = 0.5$ における GW の特性として捉えるべき問題と思われる。

なお，表 3.4 は正の周波数領域のみの特性を表示しているが，負の周波数領域も，これとまったく同じように，シンメトリックな特性を示すのは明らかである。そのため，実数関数

表 3.3 The appropriate a , p and A .

δ_0	a	p	A
0.5	$2^{1/4}$	1/2	1.225186×10
1	$2^{1/4}$	1	5.846764
1.5	$2^{1/8}$	1	1.160766×10
2	$2^{1/8}$	1	1.157849×10

表 3.4 The frequency responses and distortion rates.

δ_0	Frequency response	Distortion rate
0.5	$0.0103\pi - 0.8593\pi$	6.866937×10^{-5}
1	$0.0085\pi - 1.6105\pi$	5.751080×10^{-5}
1.5	$0.0085\pi - 1.7563\pi$	2.131171×10^{-10}
2	$0.0082\pi - 1.8340\pi$	7.974954×10^{-18}

のサイン関数 $f(t) = \sin(\omega_0 t)$ を入力した場合も、表 3.4 とまったく同じ特性になる。

3.5.3 Gabor wavelet を用いた連続ウェーブレット変換における間引き方の考察

次に、第 3.5.2 章で得られた表 3.3 を用いて、GW を用いた CWT における、ウェーブレットの間引き方を考察する。CWT は信号解析、画像解析などにしばしば用いられるが、文字通りに連続的な計算は不可能であり、実際にはウェーブレットを適切に間引いて計算する。以上を踏まえると、例えば表 3.3 の a の値をもとに、周波数領域における間引き方に関して、次のような提案ができる。

1. $\delta_0 = 0.5, 1$ においては、1 オクターブ 4 分割を限度とし、それ以上は間引かないほうがよい。
2. $\delta_0 = 1.5, 2$ においては、1 オクターブ 8 分割を限度とし、それ以上は間引かないほうがよい。

すなわち、これ以上間引くと、ATWF の変換が正常に行われぬ可能性があり、それは間引きにより情報が大きく欠損する可能性を示唆している。つまり CWT において上記以上に間引くと、情報欠損が大きく、信号を時間・周波数領域で正しく解析できない可能性がある。同じように表 3.3 の p の値からは、式 (3.41)–(3.46) も考慮して、次のような提案ができる。

1. $\delta_0 = 0.5$ においては、ナイキスト周波数である周波数 π のウェーブレットにおいて、時間軸方向に間隔 1 以上に間引かないほうがよい。
2. $\delta_0 = 1, 1.5, 2$ においては、ナイキスト周波数である周波数 π のウェーブレットにおいて、時間軸方向に間隔 2 以上に間引かないほうがよい。
3. ナイキスト周波数以下のウェーブレットに関しては、1 オクターブ下がる毎に間隔を 2 倍に換算して考えればよい。例えば $\delta_0 = 1$ における、ナイキスト周波数より 3 オクターブ下の周波数 $\pi/8$ のウェーブレットに関しては、間隔 $2 \times 2^3 = 16$ 以上に間引かないほうがよい。

3.6 まとめ

本章では, CEF に対する GW を用いた変換式について考察し, その結果をもとに, いくつかの実用的な GW を用いた ATWF を構築した. 得られた結果は次の通りである.

1. 1つの帯域に限定した GW による変換式に対し, CEF を入力することを想定し, 理論面からの解析, および実際の計算を想定した解析により歪率を算出し, 双方の数値の一致を確認した.
2. 楕円関数を用いて, 歪成分のエネルギーが収束することを証明した.
3. GW を 2 オクターブに配置した実験モデルにより, 実用的なモデルに必要な条件を検討し, 時間・周波数軸の両方向に離散的に展開した実用的な ATWF を構築した.
4. 上記で構築した ATWF について, 理論的に歪率や周波数特性の解析を行った. その結果, 高い精度を保ちながら GW による実用的な ATWF の実現が可能であることが確認された.
5. 上記より得られた結果をもとに, GW を用いた CWT における間引き方について, いくつかの提案を行った.

【付録】

本章で提案した，GW の歪率および変動率について，各 δ_0 に対する，設定モデルの条件と共に以下の表にまとめる．

表 3.5 The distortion rate and the fluctuation rate for each δ_0 .

—		Distortion rate				Fluctuation rate		
ω_0		π				π		
Frequency		$\pi/2 \sim 2\pi$				$\pi/2 \sim 2\pi$	$\pi/4 \sim 4\pi$	$\pi/2 \sim 2\pi$
a		$2^{1/4}$				$2^{1/4}$	$2^{1/4}$	$2^{1/8}$
% or dB		%		dB		%	%	%
p		0.5	1	0.5	1	1	1	1
δ_0	0.5	1.63×10^{-3}	—	-9.57×10	—	—	1.03	—
	1	—	7.53×10^{-16}	—	-3.42×10^2	1.77×10^{-1}	—	—
	1.5	—	2.40×10^{-8}	—	-1.92×10^2	—	—	5.79×10^{-4}
	2	—	4.61×10^{-3}	—	-8.67×10	—	—	7.74×10^{-4}

本章で提案した，GW を用いた ATWF および CWT において，各 δ_0 に対する，ナイキスト周波数 π における周波数軸および時間軸の間引きの提案を表にまとめる．周波数軸方向には表の a ，時間軸方向には表の p 以上は間引かない方がよい．なお，この表のモデルは， $\omega_0: 2^{-7}\pi \sim 2\pi$ ，周波数 $-2\pi \sim 2\pi$ とする．

表 3.6 The maximum frequency domain parameter a and time domain parameter p for each δ_0 .

—		Frequency	Time
		a	p
δ_0	0.5	$2^{1/4}$	1
	1	$2^{1/4}$	2
	1.5	$2^{1/8}$	2
	2	$2^{1/8}$	2

表 3.6 において，ナイキスト周波数以下のウェーブレットに関しては，1 オクターブ下がる毎に間隔を 2 倍に換算して考えればよい．

第4章 Gaobr wavelet を用いた連続ウェーブレット変換の高速化

第3章では、Gabor wavelet (GW) の適切な間引きについて理論的に歪率を求め、実用的な近似タイトウェーブレットフレームを設計と提案をした。本章では、GW による連続ウェーブレット変換 (continuous wavelet transform : CWT) の演算の高速化を提案する。

この提案は、適切に設計された、周波数領域にコンパクトサポートなウェーブレットを用いると、CWT の演算量が理論的に削減できることに着目したものである。そして、これを GW へ適用する。ここでは、高速化のため時間領域で間引きを行うが、周波数領域で補間を施すため、少量の連続ウェーブレット係数 (continuous wavelet coefficient : CWC) による詳細な解析が可能となる。従来の CWT と本提案の誤差は非常に低く、GW による CWT の汎用性が期待される。

4.1 はじめに

第3章でも述べたように、CWT は、時間・周波数領域において連続的に計算すべきものだが、現実的な問題として不可能である。そこで時間・周波数領域の両方において離散的に計算を行う。つまり、周波数領域で対数尺上に等間隔の目盛りを入れ（一般的にはオクターブを自然数の数に分割し）、それぞれの目盛りの周波数に対して、時間領域における CWT を求める。この CWT は、時間軸上の連続関数になるが、実際には、デジタル信号のサンプリングポイントの各点：整数座標上のみを求めるのが一般的である。さらに、この CWC も厳密には積分計算で求めなければいけないが、実際には、積分対象となる関数における整数座標上の関数値の和を求める。

以上のように様々な離散計算を用いても、CWT の計算には長大な時間がかかる場合が多い。そこで、CWT の計算速度を高速化する様々な手法が提案されている [44]。例えば、時間領域での高速化の提案には *à-trous* アルゴリズムがあげられる [45], [46]。その中でも、高速フーリエ変換を用いた手法は効果的である。これは時間領域の畳み込み計算が、周波数領域で積演算に置き換えられる高速フーリエ変換の性質を利用して、上記の離散積分計算をさらに高速に処理するものである [47]。

これに対し、本論文で提案する手法は、適切に設計された、周波数領域にコンパクトサポートなウェーブレットを用いると、CWT の演算量が理論的に削減できることに着目したものである。章、戸田らは、これまで周波数領域にコンパクトサポートなウェーブレットの性質を研究し、様々なウェーブレット変換 [49]-[58] を提案してきた。そして、それらの理論を基礎に、CWT へ応用できる次のような性質を提案する。

適切に設計された、周波数領域にコンパクトサポートなウェーブレットによる、時間領域の連続的なウェーブレット係数 (CWC) は次のように求められる。すなわち、適切な等間隔において、離散的にウェーブレット係数を間引いて計算し、さらに適切に設計された補間

関数を用いて、間引いた間に補間を施す方法により、従来法の CWC を完全に正しく再現できる。

上記の性質を利用し、ウェーブレット係数の計算を間引くため、CWT の演算量削減が可能となる。そして、この性質を基礎に、様々な新しい試みが可能になる。例えば時間領域において、より緻密なウェーブレット係数の情報を、より少ない演算量で求められる。例えば補間の間隔を $1/2$ 間隔, $1/4$ 間隔, \dots と、より細かく設定していけば、従来よりも少ない演算量で、限りなく緻密なウェーブレット係数の情報が得られる。また長大な信号を解析する場合には、間引きにより縮小したウェーブレット係数のデータを保存しておき、CWT の詳細な解析結果を観察したいときに、必要な部分を高速に補間をして表示ができる。

さらに本論文では、上記の手法を GW を用いた CWT に適用する。GW は周波数領域にコンパクトサポートを持たないため、帯域制限フィルタを施す必要がある。しかし、このフィルタを適切に設計すれば、高い精度で GW に近似するウェーブレットが得られ、上記の演算量削減法を -95dB 以下の誤差で実行が可能となる。また標準的な GW (ウェーブレットの形状を定める定数 δ を 1 に設定し 1 オクターブを 8 分割) による、ナイキスト周波数以下 8 オクターブの解析において、演算量を従来の 8.1% に抑えられる。

なお本章は、次のような内容により構成される。まず第 4.2 章では、必要な定義と公式を考察する。第 4.3 章では必要な定理を証明する。第 4.4 章では、その定理を用いて上記の演算量削減法の基本原理を提案する。第 4.5 章では、それを GW を用いた CWT に適用し、その解析例を示す。そして第 4.6 章で全体のみとめを行う。

4.2 補間計算に関する必要な定理

この章では、本章に必要な定理、および定理に必要な補題や系を証明していく。定理や補題、および系には、 $L^1(\mathbb{R})$ および $L^2(\mathbb{R})$ に属する 2 つの関数 $g(t)$, $h(t)$ が頻繁に登場する。これらの関数は、どちらも以下の【条件 A】を満たすものとする。

【条件 A】 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $\hat{f}(\omega)$ に関して、次の式を満たす定数 $C_f > 0$, $\epsilon_f > 0$ が存在する。

$$|\hat{f}(\omega)| \leq C_f (1 + |\omega|)^{-\frac{1}{2} - \epsilon_f} \quad (4.1)$$

なお式 (4.1) より、 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ となるのは明らかである。続いて定理や補題を順次、証明していく。

【補題 4.1】 任意の関数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 【条件 A】 を満足する関数 $g(t)$, および正の定数 p を用いて ($p > 0$), $2\pi/p$ 周期関数 $\alpha(\omega)$ を次のように定義する。

$$\alpha(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\omega + \frac{2\pi}{p}k\right) \overline{\hat{g}\left(\omega + \frac{2\pi}{p}k\right)} \quad (4.2)$$

すると、次式を満たす定数 $C_1 > 0$ が存在する。

$$\int_0^{\frac{2\pi}{p}} |\alpha(\xi)|^2 d\xi \leq C_1 \|f\|^2 \quad (4.3)$$

【証明】文献 [16] の Sec. 3.3.2 に従い, $\int_0^{\frac{2\pi}{p}} |\alpha(\xi)|^2 d\xi$ は次のように上から抑えられる.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} |\alpha(\xi)|^2 d\xi &= \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f} \left(\xi + \frac{2\pi}{p} k \right) \overline{\hat{g} \left(\xi + \frac{2\pi}{p} k \right)} \right|^2 d\xi \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f} \left(\xi + \frac{2\pi}{p} k \right) \overline{\hat{g} \left(\xi + \frac{2\pi}{p} k \right)} \\ &\quad \times \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{\hat{f} \left(\xi + \frac{2\pi}{p} l \right)} \hat{g} \left(\xi + \frac{2\pi}{p} l \right) d\xi \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} \overline{\hat{f} \left(\xi + \frac{2\pi}{p} l \right)} \hat{g} \left(\xi + \frac{2\pi}{p} l \right) d\xi \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi + \text{Rest}(f) \\ &\leq 2\pi C_g^2 \|f\|^2 + \text{Rest}(f) \end{aligned} \quad (4.6)$$

ただし $C_g > 0$ は定数であり,

$$\text{Rest}(f) = \sum_{l \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} \overline{\hat{f} \left(\xi + \frac{2\pi}{p} l \right)} \hat{g} \left(\xi + \frac{2\pi}{p} l \right) d\xi \quad (4.7)$$

式 (4.4) において, $\sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{\hat{f} \left(\xi + \frac{2\pi}{p} l \right)} \hat{g} \left(\xi + \frac{2\pi}{p} l \right)$ は周期 $2\pi/p$ を考慮して, 式 (4.5) が導き出される. また, 【条件 A】 の式 (4.1) より $|\hat{g}(\omega)| \leq C_g$ を満たす定数 $C_g > 0$ が存在し, 式 (4.6) が導き出される.

続いて $|\text{Rest}(f)|$ は次のように上から抑えられる.

$$|\text{Rest}(f)| = \left| \sum_{l \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} \hat{f}\left(\xi + \frac{2\pi l}{p}\right) \hat{g}\left(\xi + \frac{2\pi l}{p}\right) d\xi \right|$$

$$\leq \sum_{l \neq 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \left| \overline{\hat{g}(\xi)} \hat{g}\left(\xi + \frac{2\pi l}{p}\right) \right| d\xi \right\}^{1/2} \quad (4.8)$$

$$\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \overline{\hat{f}\left(\xi + \frac{2\pi l}{p}\right)} \right|^2 \left| \hat{g}(\xi) \hat{g}\left(\xi + \frac{2\pi l}{p}\right) \right| d\xi \right\}^{1/2}$$

$$= \sum_{l \neq 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \left| \hat{g}(\xi) \hat{g}\left(\xi + \frac{2\pi l}{p}\right) \right| d\xi \right\}^{1/2} \quad (4.9)$$

$$\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\eta)|^2 \left| \hat{g}\left(\eta - \frac{2\pi l}{p}\right) \hat{g}(\eta) \right| d\eta \right\}^{1/2}$$

$$\leq \sum_{l \neq 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \beta\left(\frac{2\pi l}{p}\right) d\xi \right\}^{1/2}$$

$$\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\eta)|^2 \beta\left(-\frac{2\pi l}{p}\right) d\eta \right\}^{1/2}$$

$$= 2\pi \|f\|^2 \sum_{l \neq 0} \left\{ \beta\left(\frac{2\pi l}{p}\right) \beta\left(-\frac{2\pi l}{p}\right) \right\}^{1/2}$$

$$= 4\pi \|f\|^2 \sum_{l=1}^{\infty} \beta\left(\frac{2\pi l}{p}\right) \quad (4.10)$$

ただし,

$$\beta(s) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{g}(\xi) \hat{g}(\xi + s)| \quad (4.11)$$

なお, 式(4.8)は, Cauchy-Schwarz 不等式を二乗可積分関数 $\hat{f}(\xi) \left\{ \overline{\hat{g}(\xi)} \hat{g}\left(\xi + \frac{2\pi l}{p}\right) \right\}^{1/2}$ および $\overline{\hat{f}\left(\xi + \frac{2\pi l}{p}\right)} \left\{ \hat{g}(\xi) \hat{g}\left(\xi + \frac{2\pi l}{p}\right) \right\}^{1/2}$ の積に用いて導き出される. また, 式(4.8)に $\eta = \xi + \frac{2\pi l}{p}$ を代入し, 式(4.9)が導き出される. さらに式(4.10)は, $\beta(s) = \beta(-s)$ より導き出される.

次に式(4.1)と式(4.11)より次式を得る.

$$\beta(s) \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} C_g^2 (1 + |\xi|^2)^{-\frac{1}{2} - \epsilon_g} (1 + |\xi + s|^2)^{-\frac{1}{2} - \epsilon_g}$$

$$\leq C_2 (1 + |s|^2)^{-\frac{1}{2} - \epsilon_g} \quad (4.12)$$

ただし $C_2 > 0$ は定数である. すると次式が得られる.

$$\sum_{l=1}^{\infty} \beta\left(\frac{2\pi l}{p}\right) \leq C_2 \sum_{l=1}^{\infty} \left(1 + \left|\frac{2\pi l}{p}\right|^2\right)^{-\frac{1}{2} - \epsilon_g} = C_3 < \infty \quad (4.13)$$

したがって,

$$|\text{Rest}(f)| \leq 4\pi C_3 \|f\|^2 \quad (4.14)$$

式 (4.6), 式 (4.14) より $C_1 = 2\pi C_g^2 + 4\pi C_3$ とおくことにより, 補題が成立する.

Q.E.D.

【補題 4.2】 $g(t)$ は【条件 A】を満足する関数とする. また p を正の定数とする ($p > 0$). すると任意の関数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ に対し, 次の式を満たす定数 $C_4 > 0$ が存在する.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g(\cdot - np) \rangle|^2 \leq C_4 \|f\|^2 \quad (4.15)$$

【証明】 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g(\cdot - np) \rangle|^2$ は次のように展開できる.

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g(\cdot - np) \rangle|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} e^{ipn\xi} d\xi \right|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\xi + \frac{2\pi}{p}k\right) \overline{\hat{g}\left(\xi + \frac{2\pi}{p}k\right)} e^{ipn\xi} d\xi \right|^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$= \frac{1}{2\pi p} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \alpha(\xi) \sqrt{\frac{p}{2\pi}} e^{ipn\xi} d\xi \right|^2 \quad (4.17)$$

式 (4.16) では $e^{ipn\xi}$ の周期 $2\pi/p$ を考慮し, 積分区間を長さ $2\pi/p$ に分割している. また式 (4.17) の $\alpha(\xi)$ は, 【補題 4.1】の式 (4.2) で定義される $2\pi/p$ 周期関数であり, $\alpha(\xi) \in L^2(0, 2\pi/p)$ が成立する. そして $\alpha(\xi)$ を $L^2(0, 2\pi/p)$ の正規直交基底 $\left\{ \sqrt{\frac{p}{2\pi}} e^{-ipn\xi} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ で展開したときの展開係数の二乗和の $\frac{1}{2\pi p}$ 倍が, 式 (4.17) の意味するところであるから, Plancherel 定理 [48] より,

$$\frac{1}{2\pi p} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \alpha(\xi) \sqrt{\frac{p}{2\pi}} e^{ipn\xi} d\xi \right|^2 = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} |\alpha(\xi)|^2 d\xi \quad (4.18)$$

式 (4.17) と式 (4.18) より,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g(\cdot - np) \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} |\alpha(\xi)|^2 d\xi \quad (4.19)$$

【補題 4.1】より $\int_0^{\frac{2\pi}{p}} |\alpha(\xi)|^2 d\xi \leq C_1 \|f\|^2$ を満たす定数 $C_1 > 0$ が存在するので, $C_4 = \frac{C_1}{2\pi p}$ とおき, 補題が成立する.

Q.E.D.

【補題 4.3】任意の数列 $\{a_n : n \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, 【条件 A】を満足する関数 $h(t)$, および定数 $p > 0$ を用いて, 関数 $H(t)$ を次のように定義する.

$$H(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n h(t - pn) \quad (4.20)$$

すると $H(t) \in L^2(\mathbb{R})$ である.

【証明】関数 $H^N(t)$, $N \in \mathbb{N}$ を次のように定義する.

$$H^N(t) = \sum_{|n| \leq N} a_n h(t - pn) \quad (4.21)$$

文献 [16] の式 (0.0.7) より, 関数 $H^N(t)$ のノルムは次のように表せる.

$$\begin{aligned}
\|H^N\| &= \sup_{\|s\|=1} |\langle H^N, s \rangle| & (4.22) \\
&= \sup_{\|s\|=1} \left| \left\langle \sum_{|n|\leq N} a_n h(\cdot - pn), s \right\rangle \right| \\
&= \sup_{\|s\|=1} \left| \sum_{|n|\leq N} a_n \langle h(\cdot - pn), s \rangle \right| \\
&\leq \left(\sum_{|n|\leq N} |a_n|^2 \right)^{1/2} \sup_{\|s\|=1} \left(\sum_{|n|\leq N} |\langle s, h(\cdot - pn) \rangle|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{C_5} \left(\sum_{|n|\leq N} |a_n|^2 \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

ただし $C_5 > 0$ は定数である. 式 (4.22) の 4 行目は, 有限列 $\{a_n : |n| \leq N\}$ と有限列 $\{\langle h(\cdot - pn), s \rangle : |n| \leq N\}$ の間で Cauchy-Schwarz 不等式を利用して求められる. また【補題】より, 定数 $C_5 > 0$ が存在して $\sum_{|n|\in\mathbb{Z}} |\langle s, h(\cdot - pn) \rangle|^2 \leq C_5 \|s\|^2$ となることを用いて, 式 (4.22) の 5 行目を導いた. 式 (4.22) より $\{H^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ は $L^2(\mathbb{R})$ における Cauchy 数列になるので, 次式が得られる.

$$H(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} H^N(t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (4.23)$$

Q.E.D.

【定理 4.4】関数 $g(t)$ および関数 $h(t)$ は【条件 A】を満足するものとし, p は正の定数とする ($p > 0$). そして任意の関数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, フレームオペレータ $\mathcal{W}_p^{g,h}$ を次式で定義する.

$$(\mathcal{W}_p^{g,h} f)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, g(\cdot - pn) \rangle h(t - pn) \quad (4.24)$$

すると次式が得られる.

$$\mathcal{W}_p^{g,h} f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (4.25)$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}_p^{g,h} f)(\omega) = \frac{1}{p} \hat{h}(\omega) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \overline{\hat{g}\left(\omega - \frac{2\pi}{p}k\right)} \hat{f}\left(\omega - \frac{2\pi}{p}k\right) \right\} \quad (4.26)$$

【証明】【補題 4.2】より $\{\langle f, g(\cdot - pn) \rangle : n \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ であるから, 【補題 4.3】より式

(4.25) が成立する. したがって $\mathcal{W}_p^{g,h} f$ のフーリエ変換は次のように表せる.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{W}_p^{g,h} f)(\omega) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, g(\cdot - pn) \rangle \hat{h}(\omega) e^{-ipn\omega} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} e^{ipn\xi} d\xi \hat{h}(\omega) e^{-ipn\omega} \\ &= \frac{1}{p} \hat{h}(\omega) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\xi + \frac{2\pi}{p}k\right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} &\times \overline{\hat{g}\left(\xi + \frac{2\pi}{p}k\right)} \sqrt{\frac{p}{2\pi}} e^{ipn\xi} d\xi \sqrt{\frac{p}{2\pi}} e^{-ipn\omega} \\ &= \frac{1}{p} \hat{h}(\omega) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \hat{f}\left(\omega + \frac{2\pi}{p}k\right) \overline{\hat{g}\left(\omega + \frac{2\pi}{p}k\right)} \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$= \frac{1}{p} \hat{h}(\omega) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \overline{\hat{g}\left(\omega - \frac{2\pi}{p}k\right)} \hat{f}\left(\omega - \frac{2\pi}{p}k\right) \right\} \quad (4.29)$$

式 (4.27) では $e^{ipn\xi}$ の周期 $2\pi/p$ を考慮し, 積分区間を長さ $2\pi/p$ に分割している. また, 式 (4.27) の中にある $2\pi/p$ 周期関数 $\alpha(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\xi + \frac{2\pi}{p}k\right) \overline{\hat{g}\left(\xi + \frac{2\pi}{p}k\right)}$ は, 【補題 4.1】より, $L^2(0, 2\pi/p)$ に属する. したがって, 式 (4.27) の \sum 以降は, $L^2(0, 2\pi/p)$ の正規直交基底 $\left\{ \sqrt{\frac{p}{2\pi}} e^{-ipn\omega} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ による, $\alpha(\omega)$ のフーリエ級数展開になっている. したがって式 (4.28) が導き出される. そして式 (4.29) では, $-k$ を k に置き換えている.

【定理 4.5】 関数 $u(t)$ および関数 $v(t)$ のフーリエ変換のサポートは, 長さ Ω の同一の閉区間に含まれ, かつ有界であるとする. すなわち次式を満たす.

$$0 < \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{u}(\omega)| < \infty \quad (4.30)$$

$$0 < \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{v}(\omega)| < \infty \quad (4.31)$$

$$\text{supp } \hat{u}(\omega) \subseteq [\omega_1, \omega_2] \quad (4.32)$$

$$\text{supp } \hat{v}(\omega) \subseteq [\omega_1, \omega_2], \quad \omega_1 < \omega_2 \quad (4.33)$$

$$0 < \Omega = \omega_2 - \omega_1 < \infty \quad (4.34)$$

次に正の定数 p は次式を満足するものとする.

$$0 < p\Omega \leq 2\pi \quad (4.35)$$

すると次式が得られる.

$$\mathcal{W}_p^{u,v} f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (4.36)$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}_p^{u,v} f)(\omega) = \frac{1}{p} \hat{v}(\omega) \overline{\hat{u}(\omega)} \hat{f}(\omega) \quad (4.37)$$

【証明】 式 (4.30)–式 (4.34) より, 関数 $u(t)$, $v(t)$ が【条件 A】を満足するのは明らかである. したがって【定理 4.4】より式 (4.36), および次式が得られる.

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}_p^{u,v} f)(\omega) = \frac{1}{p} \hat{v}(\omega) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \overline{\hat{u}\left(\omega - \frac{2\pi}{p}k\right)} \hat{f}\left(\omega - \frac{2\pi}{p}k\right) \right\} \quad (4.38)$$

$\omega \notin [\omega_1, \omega_2]$ のとき, 式 (4.33) より $\hat{v}(\omega) = 0$. したがって $\mathcal{F}(\mathcal{W}_p^{u,v} f)(\omega) = 0$ となり, 次式が成立する.

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}_p^{u,v} f)(\omega) = 0 = \frac{1}{p} \hat{v}(\omega) \overline{\hat{u}(\omega)} \hat{f}(\omega), \quad \omega \notin [\omega_1, \omega_2] \quad (4.39)$$

また $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ のとき, 式 (4.35) より $\Omega \leq 2\pi/p$ であるから, $k = 0$ であれば $\hat{u}(\omega - 2\pi k/p) = \hat{u}(\omega)$ が成立し, また $k \neq 0$ であれば $\hat{u}(\omega - 2\pi k/p) = 0$ が成立することになり, 式 (4.38) は次のように表される.

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}_p^{u,v} f)(\omega) = \frac{1}{p} \hat{v}(\omega) \overline{\hat{u}(\omega)} \hat{f}(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (4.40)$$

式 (4.39), 式 (4.40) より, 式 (4.37) が得られる. Q.E.D.

4.3 演算量削減法の基本原理

この節では, 以下の条件を満たす関数 $\psi(t)$ をウェーブレット関数と呼ぶことにする. すなわちウェーブレット関数のフーリエ変換 $\hat{\psi}(\omega)$ は, 有界な非負実数値をとり, サポートが長さ Ω_ψ の有界閉区間 $[\omega_1^\psi, \omega_2^\psi]$ に含まれる. すなわち次式が成立する.

$$0 < \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{\psi}(\omega)| < \infty \quad (4.41)$$

$$\hat{\psi}(\omega) \begin{cases} \geq 0, & \omega \in [\omega_1^\psi, \omega_2^\psi] \\ = 0, & \omega \notin [\omega_1^\psi, \omega_2^\psi] \end{cases} \quad (4.42)$$

$$0 < \Omega_\psi = \omega_2^\psi - \omega_1^\psi < \infty \quad (4.43)$$

実数値関数の逆フーリエ変換なので, ウェーブレット関数 $\psi(t)$ は複素数値関数であり, その実部は偶関数, 虚部は奇関数であるから, 次式が成立する.

$$\overline{\hat{\psi}(t)} = \hat{\psi}(-t) \quad (4.44)$$

また $\hat{\psi}(\omega)$ は実数値関数であるから, 次式が成立する.

$$\hat{\psi}(\omega) = \overline{\hat{\psi}(\omega)} \quad (4.45)$$

次に, 任意の関数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ と, ウェーブレット関数 $\psi(t)$ による以下の内積,

$$\langle f, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\hat{\psi}(x)} dx \quad (4.46)$$

をウェーブレット係数と呼ぶ. さらに本論文では, ウェーブレット関数の集合 $\{\psi_n(t) : n \in \mathbb{Z}\}$ より求められる個々のウェーブレット係数で構成する数列,

$$\{\langle f, \psi_n \rangle : n \in \mathbb{Z}\} \quad (4.47)$$

を $\{\psi_n(t) : n \in \mathbb{Z}\}$ のウェーブレット係数列, あるいは $\{\psi_n(t) : n \in \mathbb{Z}\}$ より求められるウェーブレット係数列などと呼ぶことにする. また連続的なウェーブレット係数: CWC を, 作用素 CWC^ψ を用いて, 次式で定義する.

$$(CWC^\psi f)(t) = \langle f, \psi(\cdot - t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\hat{\psi}(x - t)} dx \quad (4.48)$$

このように定義された CWC を数値計算するには、非常に多くの計算量が必要となる。しかし、もしもこの演算量が削減できれば、それは CWT に応用できる。以下に、その CWC の演算量削減法を提案する。

まず式 (4.44) より、式 (4.48) の $(CWC^\psi f)(t)$ は次のように表せる。

$$(CWC^\psi f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi(x-t)} dx \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(t-x) dx \\ &= (f * \psi)(t) \end{aligned} \quad (4.50)$$

すなわち $(CWC^\psi f)(t)$ は f と ψ の畳み込みで表されるので、このフーリエ変換は次のように表せる。

$$\mathcal{F}(CWC^\psi f)(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{\psi}(\omega) \quad (4.51)$$

$$= \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(\omega)} \quad (4.52)$$

なお、式 (4.51) の1行目に式 (4.45) を代入して2行目を得られる。式 (4.51) より $(CWC^\psi f) \in L^2(\mathbb{R})$ となることがわかる。次に $\omega_1^s < \omega_1^\psi < \omega_2^\psi < \omega_2^s$ を満たす定数 $\omega_1^s, \omega_1^\psi, \omega_2^\psi, \omega_2^s$ (ただし $\omega_1^\psi, \omega_2^\psi$ は式 (4.42), 式 (4.43) に用いた定数と同じもの) を用いて、補間関数 $s(t)$ を以下のように定義する。

$$\hat{s}(\omega) = \begin{cases} p_s \cos\left(\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{\omega_1^\psi - \omega}{\omega_1^\psi - \omega_1^s}\right)\right) & \omega_1^s < \omega < \omega_1^\psi \\ p_s, & \omega_1^\psi \leq \omega \leq \omega_2^\psi \\ p_s \cos\left(\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{\omega - \omega_2^\psi}{\omega_2^s - \omega_2^\psi}\right)\right) & \omega_2^\psi < \omega < \omega_2^s \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.53)$$

ただし、

$$\nu(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3) \quad (4.54)$$

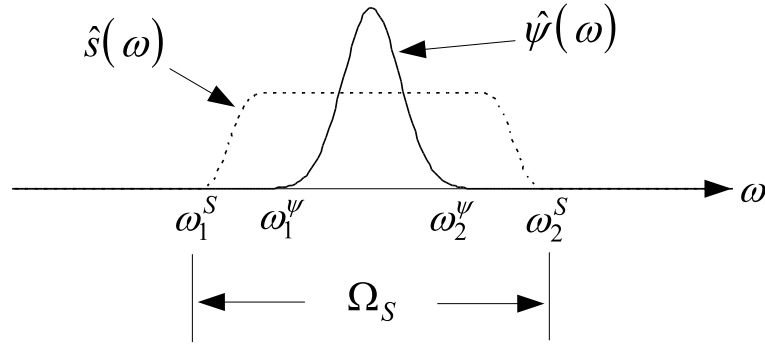
また p_s は次式を満たす定数とする。

$$0 < p_s \leq \frac{2\pi}{\Omega_s} \quad (4.55)$$

ただし Ω_s は $\hat{s}(\omega)$ のサポートの長さを表す定数とする。

$$\Omega_s = \omega_2^s - \omega_1^s \quad (4.56)$$

式 (4.41)–式 (4.43) および式 (4.53)–式 (4.56) より、 $\hat{\psi}(\omega)$, $\hat{s}(\omega)$ および Ω_s の関係は図 4.1 のようになり、 $\hat{\psi}(\omega)$ のサポートは $\hat{s}(\omega)$ のサポートに含まれる。そして $\hat{s}(\omega)$ のサポートの長さは Ω_s となる。すなわち $\psi(t)$, $s(t)$, Ω_s , p_s を【定理 4.5】の $u(t)$, $v(t)$, Ω , p に置き換えても、定理が成立するために必要な条件を満たす。したがって【定理 4.5】より次式が得られる。


 図 4.1 The relation of $\hat{\psi}(\omega)$, $\hat{s}(\omega)$ and Ω_S .

$$(\mathcal{W}_{p_s}^{\psi, S} f)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi(\cdot - p_s n) \rangle s(t - p_s n) \quad (4.57)$$

$$\mathcal{W}_{p_s}^{\psi, S} f \in L^2(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}_{p_s}^{\psi, S} f)(\omega) = \frac{1}{p_s} \hat{s}(\omega) \overline{\hat{\psi}(\omega)} \hat{f}(\omega) \quad (4.58)$$

$$= \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(\omega)} \quad (4.59)$$

なお式 (4.41)–式 (4.43) および式 (4.53) を考慮すると，式 (4.58) の 2 行目が得られる．式 (4.51)，式 (4.58) および式 (4.57) より次式が得られる．

$$(\text{CWC}^\psi f)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi(\cdot - p_s n) \rangle s(t - p_s n). \quad (4.60)$$

この式 (4.60) が，式 (4.48) で表される CWC における演算量削減法の基礎となる式である．すなわち式 (4.48) で表される CWC は， $\psi(t)$ を間隔 p_s で配置した $\{\psi(t - p_s n) : n \in \mathbb{Z}\}$ より求められるウェーブレット係数列 $\{\langle f, \psi(\cdot - p_s n) \rangle : n \in \mathbb{Z}\}$ をもとに，補間関数 $s(t)$ による式 (4.60) の補間計算で求められる．また $\frac{2\pi}{\Omega_S} \geq 1$ であれば，式 (4.55) より p_s を 1 以上の整数に設定することが可能なので，式 (4.60) を用いて，整数座標上の CWC $\{(\text{CWC}^\psi f)(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ は次のように求められる．

Step1 : p_s は予め以下のように設定しておく．

$$p_s = \left\lceil \frac{2\pi}{\Omega_S} \right\rceil \quad (4.61)$$

ただし，

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.62)$$

なお $\frac{2\pi}{\Omega_S} \geq 1$ を仮定しているので， p_s は 1 以上の整数となる．

Step2 : 式 (4.53) の補間関数 $s(t)$ をもとに，次式により数列 $\{s_n : n \in \mathbb{Z}\}$ を予め求めておく．

$$s_n = s(n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.63)$$

Step3 : 次式により, $\{\psi(t-p_s n) : n \in \mathbb{Z}\}$ のウェーブレット係数列 $\{d_n^T : n \in \mathbb{Z}\}$ を求める.

$$d_n^T = \langle f, \psi(\cdot - p_s n) \rangle, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.64)$$

Step4 : $\{(CWC \psi f)(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ を, 次のように求める.

$$(CWC \psi f)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^T s_{n-p_s k}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.65)$$

以上のように整数座標上の CWC は, 実質的に上記の Step3 と Step4 の計算で求められる. したがって式 (4.61) の整数値 p_s をより大きく設定できれば, 式 (4.64) の内積計算をより多く削減することができる. また, 整数座標上の CWC よりも, さらに緻密な CWC を求めたいときは, 簡単な修正で実現できる. 例えば $1/4$ 間隔の CWC は, 上記の式 (4.63) を,

$$s_n = s\left(\frac{n}{4}\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

に修正し, 式 (4.65) を,

$$(CWC \psi f)\left(\frac{n}{4}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^T s_{n-4p_s k}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

に修正して計算すればよい. このように, より緻密な CWC を求める場合でも, 式 (4.64) の内積計算の総数は増加しない. これは, 本論文が提案する演算量削減法の特徴である.

4.4 演算量削減法の Gabor wavelet を用いた連続ウェーブレット変換への適用

GW のマザー・ウェーブレット (mother wavelet, MW) $\psi^G(t)$ は次のように表される.

$$\psi^G(t) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{\delta}} e^{-\frac{t^2}{2\delta^2}} e^{i2\pi t} \quad (4.66)$$

ただし δ は GW : $\psi^G(t)$ の形状を決定する正の定数で, 一般的には 0.5 から 2.0 の範囲に設定されることが多い. 式 (4.66) のフーリエ変換 $\hat{\psi}^G(\omega)$ は次のように表される.

$$\hat{\psi}^G(\omega) = \sqrt{2}\pi^{1/4} \sqrt{\delta} e^{-\frac{\delta^2(\omega-2\pi)^2}{2}} \quad (4.67)$$

また $\psi^G(t)$ のノルムは 1 に正規化されており, 以下の式が成立する.

$$\|\psi^G\| = 1 \quad (4.68)$$

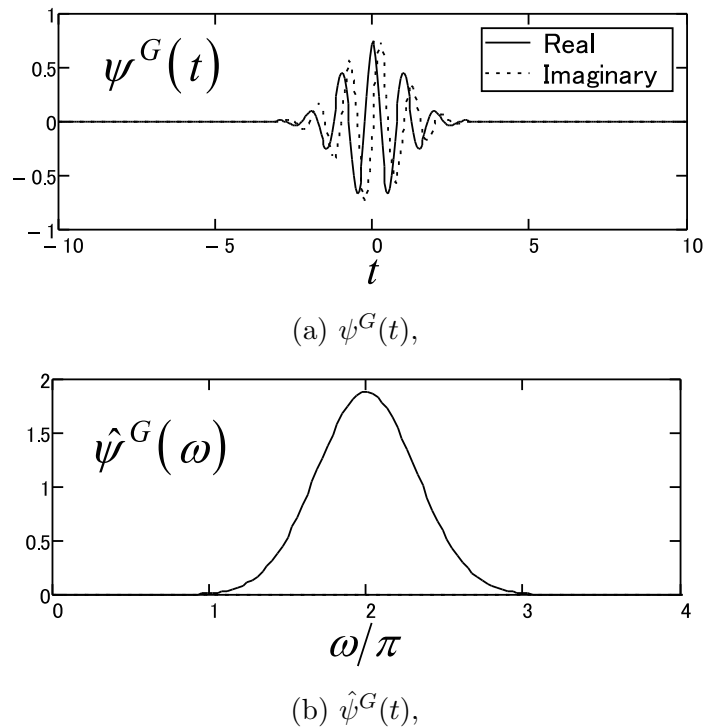
図 4.2 に, $\delta = 1$ の GW : $\psi^G(t)$ と, そのフーリエ変換 $\hat{\psi}^G(\omega)$ の例を示す.

任意の関数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ に対する, GW による CWT は次のように定義される.

$$(W_{\psi^G} f)(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \overline{\psi^G\left(\frac{t-\beta}{\alpha}\right)} f(t) dt \quad \alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R} \quad (4.69)$$

式 (4.69) の右辺の積分は, 一般的にウェーブレット係数と呼ばれているが, 本論文では式 (4.46) のウェーブレット係数と区別するため, 上記の積分は, CWT のウェーブレット係数と呼ぶことにする. 式 (4.46) の α は周波数をつかさどる実数のパラメータであり, このとき,

$$\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \overline{\psi^G\left(\frac{t-\beta}{\alpha}\right)} \quad (4.70)$$

図 4.2 The Gabor mother wavelet ($\delta = 1$).

の中心周波数は $2\pi/\alpha$ となり、 α の逆数が式 (4.70) の中心周波数に比例する。また β は時間をつかさどる実数のパラメータである。本来の CWT は周波数領域、時間領域のどちらにおいても連続的に計算すべきものであるが、現実的な問題として、それは不可能である。そこで、これらの計算は離散化して実装される場合が多い。まずは周波数領域の離散化であるが、周波数領域は対数尺上で等分割されるのが一般的である。すなわち定数 $a > 1$ を用いて、 $\alpha = 1/a^j$ ($j \in \mathbb{Z}$) と置き換える方法で離散化する。このとき 1 オクターブを自然数の数に分割するのが一般的で、例えば 1 オクターブを 4 分割するときには $a = 2^{1/4}$ 、また 8 分割するときには $a = 2^{1/8}$ のように設定する。本論文では、この定数 $a > 1$ をダイレーションファクターと呼ぶことにする。次に時間領域の離散化であるが、時間をつかさどるパラメータ β の領域は、リニアに等分化するのが一般的である。すなわち CWT の解析の対象となる信号はデジタル信号であることがほとんどであるが、このとき、サンプリングポイントを整数座標と考え、 $\beta = n$ ($n \in \mathbb{Z}$) として整数化するのが一般的である。以上のように離散化された CWT は、次のように表せる。

$$(W_{\psi^G} f)(1/a^j, n) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{a^j} \psi^G(a^j(t-n)) f(t) dt, \quad j, n \in \mathbb{Z} \quad (4.71)$$

ここで整数 j に関して補足しておく。式 (4.67) より MW $\hat{\psi}^G(\omega)$ の中心周波数が 2π であることを考慮すると、 $j = 0$ のとき、サンプリング周波数 2π を中心とする解析となる。したがって j は負の整数値に設定するのが一般的である。例えば、ダイレーションファクターを $a = 2^{1/8}$ に設定し、1 オクターブを 8 分割する場合には、 $j = -8$ のとき、ナイキスト周波数 π となる。よって、それ以下の $j \leq -8$ の領域に設定する。例えば、ナイキスト周波数以下の 5 オクターブの領域を解析したいときには、 $j = -8, -9, \dots, -8 - 8 \times 5 + 1$ と設定する。このように実際の CWT の解析における整数 j は、有限の負の領域内に設定する。なお本章

では、特定の整数値 j における変換をレベル j の変換、またそこに使われるウェーブレット関数をレベル j のウェーブレット関数と呼ぶことにする。

上記の離散化に加えて、式 (4.71) の右辺の積分計算は、以下のような離散積分計算で代用されることが多い。

$$(W_{\psi^G f})(1/a^j, n) \approx \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{a^j} \overline{\psi^G(a^j(k-n))} f(k), \quad j, n \in \mathbb{Z} \quad (4.72)$$

厳密に言えば、式 (4.71) では、負の周波数領域の解析が行われない。しかし、実数値関数を解析する場合には、特に問題にならない。なぜなら負の周波数領域の解析結果は、式 (4.71) より得られる正の周波数領域の解析結果と複素共役の関係になるので、情報欠損は起こらない。したがって実数信号解析の場合、式 (4.71) より得られる情報だけで十分である。

4.4.1 Gabor wavelet を用いた連続ウェーブレット変換に適用する演算量削減法の設計

GW による CWT の演算量削減法の計算は、式 (4.71) であり、最終的には通常の計算法である式 (4.72) よりも少ない演算量を実現したい。しかし手順を踏んで演算量削減法を構築していくためには、まずは以下のような任意の $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ に対する CWC を考察しなければいけない。

$$(CWC \psi_j^G f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi_j^G(x-t)} dx, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (4.73)$$

ただし $\psi_j^G(t)$ はレベル j のウェーブレット関数であり、ダイレーションファクター $a > 1$ を用いて次のように定義される。

$$\psi_j^G(t) = \sqrt{a^j} \psi^G(a^j t), \quad j \in \mathbb{Z} \quad (4.74)$$

すると式 (4.71)、式 (4.73) および式 (4.74) より、次式が成立する。

$$(W_{\psi^G f})(1/a^j, n) = (CWC \psi_j^G f)(n), \quad j, n \in \mathbb{Z} \quad (4.75)$$

式 (4.75) より、離散化された CWT : $\{(W_{\psi^G f})(1/a^j, n) : j, n \in \mathbb{Z}\}$ を求めることは、 $\{(CWC \psi_j^G f)(n) : j, n \in \mathbb{Z}\}$ を求めることに等しい。したがって、式 (4.73) の CWC の演算量削減法を検討するが重要になる。

ところで、 $\psi^G(t)$ のフーリエ変換 $\hat{\psi}^G(\omega)$ は式 (4.67) から実数値関数である。したがって、レベル j のウェーブレット関数のフーリエ変換 $\hat{\psi}_j^G(\omega)$ も実数値関数である。このことから、 $\overline{\psi_j^G(t)} = \psi_j^G(-t)$ 、 $\hat{\psi}_j^G(\omega) = \overline{\hat{\psi}_j^G(\omega)}$ が成立し、式 (4.49)、式 (4.51) と同様に、 $(CWC \psi_j^G f)(t)$ のフーリエ変換は次のように表される。

$$\mathcal{F}(CWC \psi_j^G f)(\omega) = \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}_j^G(\omega)}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

一方で、式 (4.67) で表される GW : $\psi^G(t)$ のフーリエ変換 $\hat{\psi}^G(\omega)$ のサポートはコンパクトではない。しかし第 4.3 章で提案した演算量削減法は、周波数領域のサポートがコンパクトなウェーブレット関数のみに適用可能である。そこで以下のような帯域制限フィルタ $\hat{F}^B(\omega)$

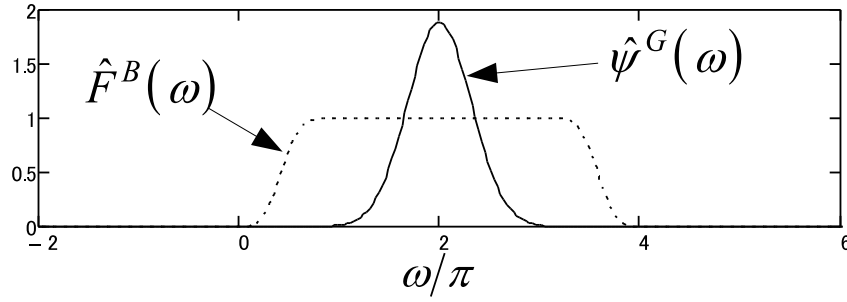


図 4.3 The relation between $\hat{F}^B(\omega)$ and $\hat{\psi}^G(\omega)$ ($\delta = 1$).

を用いて, $\hat{\psi}^G(\omega)$ に帯域制限を施す.

$$\hat{F}^B(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega - 2\pi| \leq \frac{\pi}{\delta} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{\delta|\omega - 2\pi| - \pi}{\pi}\right)\right), & \frac{\pi}{\delta} < |\omega - 2\pi| < \frac{2\pi}{\delta} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.76)$$

ただし $\nu(x)$ は式 (4.54) で表される関数であり, δ は式 (4.67) の $\hat{\psi}^G(\omega)$ に用いられる正の定数と同じものである. また $\hat{F}^B(\omega)$ のサポートの長さ Ω^B は以下のように表せる.

$$\Omega^B = \frac{4\pi}{\delta} \quad (4.77)$$

次式により帯域制限フィルタ $\hat{F}^B(\omega)$ を GW : $\hat{\psi}^G(\omega)$ に施し, MW : $\hat{\psi}^B(\omega)$ を得る.

$$\hat{\psi}^B(\omega) = \hat{F}^B(\omega) \hat{\psi}^G(\omega) \quad (4.78)$$

例えば, $\delta = 1$ における $\hat{F}^B(\omega)$ と $\hat{\psi}^G(\omega)$ の関係は図 4.3 のようになり, 式 (4.78) より得られる $\psi^B(t)$ は $\psi^G(t)$ の近似となる. その誤差を,

$$\text{Error} = 10 \log \left(\frac{\|\psi^G - \psi^B\|^2}{\|\psi^G\|^2} \right) \text{ dB}$$

で計算したところ -105dB , またノルムは $\|\psi^B\| = 0.999999998$ と計算された. その他の $\delta = 0.5$, $\delta = 2$ でもほぼ同等の数値が得られた. これにより $\psi^B(t)$ は十分な精度で $\psi^G(t)$ の近似になっていることがわかる. 次にダイレーションファクター $a > 1$ を用いて, レベル j ($j \in \mathbb{Z}$) のウェーブレット関数 $\psi_j^B(t)$ を以下のように定義する.

$$\psi_j^B(t) = \sqrt{a^j} \psi^B(a^j t), \quad j \in \mathbb{Z} \quad (4.79)$$

この $\psi_j^B(t)$ ($j \in \mathbb{Z}$) を用いて, 第 4.3 章で提案した CWC の演算量削減法を実現する. そのためには補関数を設計する必要がある, その周波数領域のサポートは, 先述のとおり, $\hat{\psi}_j^B(\omega)$ のサポートを包み込むように設計しなければならない. しかし, このサポートを $\hat{\psi}_j^B(\omega)$ のサポートと等しくなるように設計しても, 十分な精度で GW による CWT の近似となることがわかったので, 以下に示す. なお, 補関数の周波数領域のサポートを, より短く設計

できれば、より多くの計算が間引けるので有利である。 $\psi_j^B(t)$ のフーリエ変換 $\hat{\psi}_j^B(\omega)$ は次のように表せる。

$$\hat{\psi}_j^B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \hat{\psi}^B\left(\frac{\omega}{a^j}\right) \quad (4.80)$$

この $\hat{\psi}_j^B(\omega)$ に対応する補間関数 $s_j^B(t)$ は、式 (4.76) の帯域制限フィルタ $\hat{F}^B(\omega)$ を用いて以下のように設計する。ここで、 $\hat{\psi}^B(\omega)$ と $\hat{F}^B(\omega)$ のサポートは等しいので、以下で定義される $\hat{s}_j^B(\omega)$ のサポートは $\hat{\psi}_j^B(\omega)$ のサポートに等しくなる。

$$\hat{s}_j^B(\omega) = p_j^B \hat{F}^B\left(\frac{\omega}{a^j}\right), \quad j \in \mathbb{Z} \quad (4.81)$$

ただし p_j^B は以下の式を満たす定数である。

$$0 < p_j^B \leq \frac{2\pi}{\Omega_j^B} \quad (4.82)$$

また Ω_j^B は $\hat{\psi}_j^B(\omega)$ と $\hat{s}_j^B(\omega)$ のサポートの長さであり、式 (4.77)–式 (4.80) より以下の式を満たす。

$$\Omega_j^B = a^j \Omega^B = \frac{4\pi a^j}{\delta}$$

以上のように設計された $\psi_j^B(t)$, $s_j^B(t)$, Ω_j^B , p_j^B を、【定理】の $u(t)$, $v(t)$, Ω , p に置き換えても、【定理】が成立するために必要な条件を満たす。したがって【定理】より、任意の $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ に対して次式が得られる。

$$\left(\mathcal{W}_{p_j^B}^{\psi_j^B, S_j^B} f\right)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_j^B(\cdot - p_j^B n) \rangle s_j^B(t - p_j^B n) \quad (4.83)$$

$$\mathcal{W}_{p_j^B}^{\psi_j^B, S_j^B} f \in L^2(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{W}_{p_j^B}^{\psi_j^B, S_j^B} f\right)(\omega) = \frac{1}{p_j^B} \hat{s}_j^B(\omega) \overline{\hat{\psi}_j^B(\omega)} \hat{f}(\omega) \quad (4.84)$$

ここで式 (4.83) の $\left(\mathcal{W}_{p_j^B}^{\psi_j^B, S_j^B} f\right)(t)$ が、式 (4.73) の $\left(CWC \psi_j^G f\right)(t)$ の近似になることを、3段階に分けて示す。まず第1段階では、GW: $\psi^G(t)$ の近似 MW: $\psi^C(t)$ を定義する（後述するが、この MW: $\psi^C(t)$ は、MW: $\psi^B(t)$ とは多少異なる GW: $\psi^G(t)$ の近似関数となる）。この MW: $\psi^C(t)$ は実際の計算に使われることはない。しかし結果として $\left(\mathcal{W}_{p_j^B}^{\psi_j^B, S_j^B} f\right)(t)$ は、 $\psi_j^C(t) = \sqrt{a^j} \psi^C(a^j t)$ （ただし a はダイレーションファクターで $a > 1$ ）を用いた CWC、すなわち $\left(CWC \psi_j^C f\right)(t)$ に等しくなることを第2段階で示す。そして第3段階で $\left(CWC \psi_j^C f\right)(t)$ が $\left(CWC \psi_j^G f\right)(t)$ の近似関数となることを、 $\left(CWC \psi_j^G f\right)(t)$ と $\left(CWC \psi_j^C f\right)(t)$ の sup ノルムの評価により示す。

1 : 式 (4.76) で表される帯域制限フィルタ $\hat{F}^B(\omega)$ と GW のフーリエ変換 $\hat{\psi}^G(\omega)$ を用いて、MW: $\psi^C(t)$ を次のように定義する。

$$\hat{\psi}^C(\omega) = \left| \hat{F}^B(\omega) \right|^2 \hat{\psi}^G(\omega) \quad (4.85)$$

$\hat{F}^B(\omega)$ と $\hat{\psi}^G(\omega)$ の関係は図 4.3 のようになることは、すでにわかっているのですが、MW: $\psi^C(t)$ は GW: $\psi^G(t)$ の近似関数になる。その誤差を、

$$Error = 10 \log \left(\frac{\|\psi^G - \psi^C\|^2}{\|\psi^G\|^2} \right) \text{dB} \quad (4.86)$$

で計算したところ、 $\delta = 0.5$, $\delta = 1$, $\delta = 2$ において、それぞれ -100dB 以下と算出された。これにより $\psi^C(t)$ は十分な精度で $\psi^G(t)$ の近似関数になることがわかる。次にダイレーションファクター $a > 1$ を用いて、レベル j ($j \in \mathbb{Z}$) のウェーブレット関数 $\psi_j^C(t)$ を以下のように定義する。

$$\psi_j^C(t) = \sqrt{a^j} \psi^C(a^j t), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (4.87)$$

2 : 式 (4.87) の両辺をフーリエ変換し、右辺に式 (4.85) を代入すると、

$$\hat{\psi}_j^C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \left| \hat{F}^B \left(\frac{\omega}{a^j} \right) \right|^2 \hat{\psi}^G \left(\frac{\omega}{a^j} \right) \quad (4.88)$$

式 (4.80) の右辺に式 (4.78) を代入して、

$$\hat{\psi}_j^B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \hat{F}^B \left(\frac{\omega}{a^j} \right) \hat{\psi}^G \left(\frac{\omega}{a^j} \right) \quad (4.89)$$

式 (4.84) に、式 (4.81) と式 (4.89) を代入して、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{W}_{p_j^B}^{\psi_j^B, S_j^B} f)(\omega) &= \hat{f}(\omega) \overline{\frac{1}{\sqrt{a^j}} \left| \hat{F}^B \left(\frac{\omega}{a^j} \right) \right|^2 \hat{\psi}^G \left(\frac{\omega}{a^j} \right)} \\ &= \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}_j^C(\omega)} \end{aligned} \quad (4.90)$$

式 (4.90) の 2 行目では式 (4.88) を代入している。ところで $\hat{\psi}^G(\omega)$ は実数値関数であるから、式 (4.85)、式 (4.87) より、 $\hat{\psi}_j^C(\omega)$ も実数値関数となり、 $\overline{\psi_j^C(t)} = \psi_j^C(-t)$ 、 $\overline{\hat{\psi}_j^C(\omega)} = \hat{\psi}_j^C(\omega)$ が成立し、式 (4.49)、式 (4.51) 同様に $(CWC \psi_j^C f)(t)$ のフーリエ変換は次のように表される。

$$\mathcal{F}(CWC \psi_j^C f)(\omega) = \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}_j^C(\omega)} \quad (4.91)$$

式 (4.90) と式 (4.91) より、

$$(\mathcal{W}_{p_j^B}^{\psi_j^B, S_j^B} f)(t) = (CWC \psi_j^C f)(t) \quad (4.92)$$

3 : $\left| (CWC \psi_j^G f)(t) - (CWC \psi_j^C f)(t) \right|$ は次のように上から抑えられる。

$$\begin{aligned} \left| (CWC \psi_j^G f)(t) - (CWC \psi_j^C f)(t) \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi_j^G(x-t)} dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi_j^C(x-t)} dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |\psi_j^G(x-t) - \psi_j^C(x-t)| dx \\ &\leq \|f\| \|\psi_j^G - \psi_j^C\| \\ &= \|f\| \|\psi^G - \psi^C\| \end{aligned} \quad (4.93)$$

Cauchy-Schwarz 不等式とダイレーションファクター作用素がユニタリなことを用いた。右辺は t に依存しない評価なので、

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \left(CWC \psi_j^G f \right) (t) - \left(CWC \psi_j^C f \right) (t) \right| \leq \|f\| \|\psi^G - \psi^C\| \quad (4.94)$$

式 (4.86) の計算により、 $\|\psi^G - \psi^C\|$ の $\|\psi^G\| = 1$ に対する比率は十分に小さいことがわかっているので、 $\left(CWC \psi_j^C f \right) (t)$ の $\left(CWC \psi_j^G f \right) (t)$ に対する誤差も十分に小さく抑えられることが期待できる（実際の誤差は、後述する第 4.4.4 章において、実際のサンプル信号を用いて評価する）。

以上の考察、および式 (4.83) より、以下の近似式が得られる。

$$\left(CWC \psi_j^G f \right) (t) \approx \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_j^B(\cdot - p_j^B n) \rangle s_j^B(t - p_j^B n) \quad (4.95)$$

式 (4.95) が、式 (4.73) で表されるレベル j の CWC における演算量削減法の基礎となる式である。すなわち CWC は、 $\psi_j^B(t)$ を間隔 p_j^B で配置した $\{\psi_j^B(t - p_j^B n) : n \in \mathbb{Z}\}$ より求められるウェーブレット係数列 $\left\{ \langle f, \psi_j^B(\cdot - p_j^B n) \rangle : n \in \mathbb{Z} \right\}$ をもとに、補間関数 $s_j^B(t)$ による式 (4.95) の補間計算で近似的に求められる。また式 (4.95) の右辺の内積は、

$$\langle f, \psi_j^B(\cdot - p_j^B n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi_j^B(x - p_j^B n)} dx \quad (4.96)$$

のように、積分で求めるのが本来の計算だが、これは以下のように簡易的な積分計算に変更する。

$$\langle f, \psi_j^B(\cdot - p_j^B n) \rangle \approx \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \overline{\psi_j^B(k - p_j^B n)} \quad (4.97)$$

なお式 (4.97) では、解析対象となる関数は離散信号 $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ で与えられ、 $f_n = f(n)$ 、 $n \in \mathbb{Z}$ が成立することを仮定している。各レベル j ($j \in \mathbb{Z}$) の p_j^B は、それぞれ式 (4.82) を満たす整数に設定しておく。ただし p_j^B の値が一定の整数値より小さい場合、演算量削減の効果がなくなるので、そのときは従来の計算を実行する。この一定の整数値を定数 p_{min}^B で表す。また、後述する第 4.4.2 章で、 p_{min}^B は δ や j の値に関係なく一定の値 $p_{min}^B = 4$ となることを説明する。そして、式 (4.97) の計算に必要な $\psi_j^B(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) も、毎回、式 (4.78) や式 (4.79) から計算するのは時間がかかるので、予め数列 $\{w_{j,n}^B = \psi_j^B(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ 、 $j \in \mathbb{Z}$ を計算しておく。以上が式 (4.95) を基礎にした演算量削減法であるが、さらに演算は整数座標のみ行う。すなわち式 (4.95) において、 $t = n$ 、 $n \in \mathbb{Z}$ のみを計算し、各レベル j ($j \in \mathbb{Z}$) において $\left\{ \left(CWC \psi_j^G f \right) (n) : n \in \mathbb{Z} \right\}$ を求める。まとめると以下ようになる。

Step1 : 各レベル j ($j \in \mathbb{Z}$) の p_j^B は、式 (4.82) を考慮し、予め以下のように設定しておく。

$$p_j^B = \left\lceil \frac{2\pi}{\Omega_j^B} \right\rceil \quad (4.98)$$

また各レベル j ($j \in \mathbb{Z}$) のウェーブレット関数 $\psi_j^B(t)$ より、以下のような数列も予め求めておく。

$$\{w_{j,n}^B = \psi_j^B(n) : n \in \mathbb{Z}\} \quad (4.99)$$

離散信号 $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ に対する、各レベル j ($j \in \mathbb{Z}$) の $\left\{ \left(CWC \psi_j^G f \right) (n) : n \in \mathbb{Z} \right\}$ を求める計算は、以下のように p_j^B の大きさにより、2 つに場合分けして実行する。

Step2 : $p_j^B < p_{min}^B$ (本論文では $p_{min}^B = 4$ と考えてよい) の場合は, 以下の式により $\{(CWC \psi_j^G f)(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ を求める.

$$(CWC \psi_j^G f)(n) \approx \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \overline{w_{j,k-n}^B}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.100)$$

Step3 : $p_j^B \geq p_{min}^B$ の場合は, 以下の計算を実行する. まず式 (4.81) の補間関数 $s_j^B(t)$ をもとに, 以下のような数列を予め求めておく.

$$\{s_{j,n}^B = s_j^B(n) : n \in \mathbb{Z}\} \quad (4.101)$$

$\{\psi_j^B(t - p_j^B n) : n \in \mathbb{Z}\}$ のウェーブレット係数列 $\{d_{j,n}^T : n \in \mathbb{Z}\}$ を, 以下の計算により近似的に求める.

$$d_{j,n}^T \approx \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \overline{w_{j,k-p_j^B n}^B}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.102)$$

$\{(CWC \psi_j^G f)(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ を, 次のようにして求める.

$$(CWC \psi_j^G f)(n) \approx \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k}^T s_{j,n-p_s k}^B, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.103)$$

以上のように近似的に求められた $\{(CWC \psi_j^G f)(n) : j, n \in \mathbb{Z}\}$ は, 式 (4.75) から, 離散化された CWT : $\{(W_{\psi^G} f)(1/a^j, n) : j, n \in \mathbb{Z}\}$ の近似値として用いることができる. ここで提案した演算量削減法により, 高い精度で CWT の近似計算が可能となり, 演算量も効率よく削減できる. 詳細について次節以降に述べる.

4.4.2 数列の有効項

従来法による CWT において離散積分を実行するときには, 数列 $\{w_{j,n}^G = \psi_j^G(n) : n \in \mathbb{Z}\}$, $j \in \mathbb{Z}$ が必要になる. すなわち離散信号 $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ に対する式 (4.72) の CWT の計算は, 実際には次のように行われる.

$$(W_{\psi^G} f)(1/a^j, n) \approx \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \overline{w_{j,k-n}^G}, \quad j, n \in \mathbb{Z} \quad (4.104)$$

ただし,

$$\{w_{j,n}^G = \psi_j^G(n) : n \in \mathbb{Z}\}, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (4.105)$$

ここで $\psi_j^G(t)$ は, 式 (4.74) で定義した GW におけるレベル j のウェーブレット関数である. 一方, 前節で提案した演算量削減法では, 2 種類の数列 $\{w_{j,n}^B = \psi_j^B(n) : n \in \mathbb{Z}\}$, $\{s_{j,n}^B = s_j^B(n) : n \in \mathbb{Z}\}$, $j \in \mathbb{Z}$ を使用する. これらの数列は, 関数 $\psi_j^G(t)$, $\psi_j^B(t)$, $s_j^B(t)$ のサポートがコンパクトでないため, 無限個の項を持つが, 実際の計算では, これらは近似的に有限の項数に切りつめなければいけない. その方法を以下で検討する.

関数 $\psi_j^G(t)$, $\psi_j^B(t)$, $s_j^B(t)$ の特徴は, 滑らかで, 実部が偶関数, 虚部が奇関数であり, その絶対値は $t \rightarrow \pm\infty$ に向かって早く減衰していることである (少なくとも $|t|^{-3.5}$ より早く減衰

している)。そこで関数ごとに適切な正の実数定数 q を定めて、原点を中心に $-q \leq t \leq q$ の領域を関数の有効な領域と考え、この領域のみの関数値を扱い、他の領域は関数値ゼロとして近似的にカットする。この適切な定数 q の設定法であるが、ここで関数 $\psi_j^G(t)$, $\psi_j^B(t)$, $s_j^B(t)$ のノルムが正確にわかっている、もしくは正確に計算できることに着目する ($\|\psi_j^G\| = 1$ は GW の性質として知られており、 $\hat{\psi}_j^B(\omega)$, $\hat{s}_j^B(\omega)$ のサポートはコンパクトであり、その関数の詳細がわかっている、これらのノルムは正確に求めることができる)。そこで例えば関数 $\psi_j^G(t)$ の場合、関数の有効な範囲 $-q_j^{\psi^G} \leq t \leq q_j^{\psi^G}$ を設定する正の実数値 $q_j^{\psi^G}$ は、次の式を満たすように設定する。

$$\frac{\|\psi_j^G\|^2 - \int_{-q_j^{\psi^G}}^{q_j^{\psi^G}} |\psi_j^G(t)|^2 dt}{\|\psi_j^G\|^2} = 10^{-10} \quad (4.106)$$

式 (4.106) は、有効な範囲 $-q_j^{\psi^G} \leq t \leq q_j^{\psi^G}$ の外をカットするために生じる、関数 $\psi_j^G(t)$ の誤差が $10 \log 10^{-10} = -100\text{dB}$ となることを表している。このような $\{q_j^{\psi^G} : j \in \mathbb{Z}\}$ は、すべての $j \in \mathbb{Z}$ において求める必要はなく、 $j = 0$ の $q_0^{\psi^G}$ のみを求めておき、それ以外は式 (4.74) より導かれる、ダイレーションファクター $a > 1$ を用いた以下の式より求められる。

$$q_j^{\psi^G} = \frac{q_0^{\psi^G}}{a^j} \quad (4.107)$$

さらに式 (4.105) の数列 $\{w_{j,n}^G = \psi_j^G(n) : n \in \mathbb{Z}\}$, $j \in \mathbb{Z}$ も、正の実数値 $q_j^{\psi^G}$ を用いて以下のように有限個の有効な項に限定できる。

$$\{w_{j,n}^G = \psi_j^G(n) : -[q_j^{\psi^G} + 1] \leq n \leq [q_j^{\psi^G} + 1], n \in \mathbb{Z}\}, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (4.108)$$

これ以外の数列 $\{w_{j,n}^B = \psi_j^B(n) : n \in \mathbb{Z}\}$, $\{s_{j,n}^B = s_j^B(n) : n \in \mathbb{Z}\}$, $j \in \mathbb{Z}$ も、同じように、有効な有限個の項に限定できる。例えば $\delta = 1$ の場合、式 (4.106) と同じようにして、

$$q_0^{\psi^G} = 4.57282486, \quad q_0^{\psi^B} = 4.57643356, \quad q_0^{S^B} = 13.325029796$$

が求められ、レベル 0 の数列は、それぞれ

$$\{w_{0,n}^G = \psi_0^G(n) : n = -5, -4, \dots, 5\} \quad (4.109)$$

$$\{w_{0,n}^B = \psi_0^B(n) : n = -5, -4, \dots, 5\} \quad (4.110)$$

$$\{s_{0,n}^B = s_0^B(n) : n = -14, -13, \dots, 14\} \quad (4.111)$$

の 11 項, 11 項, 29 項の数列に限定される。そしてレベル j ($j \neq 0, j \in \mathbb{Z}$) に関しては、式 (4.107) と同じように、

$$q_j^{\psi^B} = \frac{q_0^{\psi^B}}{a^j}, \quad q_j^{S^B} = \frac{q_0^{S^B}}{a^j}$$

が成立するので、 $q_j^{\psi^G}$, $q_j^{\psi^B}$, $q_j^{S^B}$ を求めて、それぞれの数列の項を限定することができる。

4.4.3 演算量の削減率

演算量の削減率を考察する前に、演算量の数え方を定義する。本論文では、2つの係数同士の1つの掛け算と1つの足し算を組み合わせて、1つの演算と数えることにする。なお係数は実数であったり複素数であったりするが、実際の計算では、少なくとも1つの係数が必ず複素数となるので、これらの計算は複素数同士の演算として処理されるものとして、区別しないことにした。通常、コンピュータに内蔵される浮動小数点算処理装置 (floating point unit, FPU) に複素数演算機能がある場合、実数と複素数の演算と、複素数同士の演算を区別して処理するよりも、どちらも複素数同士の演算として処理するほうが合理的で、処理も速くなる場合が多い。例えば N_a 項の数列 $\{a_n\}$ と N_b 項の数列 $\{b_n\}$ の畳み込み計算 $c_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k b_{n-k}$ は、演算量 $N_a \times N_b$ と数えられる。また本論文では、解析対象となる離散信号 $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ を N 項の数列とする。すると前節より計算に必要な数列の項数もすべてわかっているので、すべての計算の演算量を求められ、 N の倍数で表せる。例えばレベル j ($j \in \mathbb{Z}$) の数列 $\{w_{j,n}^G = \psi_j^G(n) : n \in \mathbb{Z}\}$, $\{w_{j,n}^B = \psi_j^B(n) : n \in \mathbb{Z}\}$, $\{s_{j,n}^B = s_j^B(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ の有効な項数を、それぞれ $N_j^{w^G}$, $N_j^{w^B}$, $N_j^{s^B}$ とすると、レベル j における従来法による CWT の演算量 N_j^{Org} は、式 (4.104) より次のように表せる。

$$N_j^{Org} = N \times N_j^{w^G}, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (4.112)$$

また演算量削減法による演算量 N_j^{Red} は、式 (4.102), 式 (4.103) より次のように表せる。

$$N_j^{Red} = \frac{N}{p_j^B} \left(N_j^{w^B} + N_j^{s^B} \right), \quad j \in \mathbb{Z} \quad (4.113)$$

ここで $N_j^{Red} < N_j^{Org}$ (すなわち演算量削減法が有効に働く条件) を満たす p_j^B を考える。式 (4.112), 式 (4.113) を $N_j^{Red} < N_j^{Org}$ に代入して、次の不等式が得られる。

$$p_j^B > \frac{N_j^{w^B} + N_j^{s^B}}{N_j^{w^G}} \quad (4.114)$$

ここで式 (4.114) を満たす p_j^B の最小の整数値 p_{min}^B を求める。式 (4.109) より $\delta = 1$, レベル $j = 0$ のとき, $N_0^{w^G} = 11$, $N_0^{w^B} = 11$, $N_0^{s^B} = 29$ となることがわかっているので、これらを式 (4.114) に代入すると次の不等式が得られる。

$$p_0^B > \frac{11 + 29}{11} = 3.64 \quad (4.115)$$

式 (4.115) を満たす最小の整数値 p_0^B は 4 となるが、他の条件でも、この値は変わらないことが確認できた。すなわち第 4.4.2 章に提案した方法では、 j の値に関係なく、 $N_j^{w^G}$, $N_j^{w^B}$, $N_j^{s^B}$ の比率はほとんど一定になり、 δ を可変しても、その比率はほとんど変わらないことが実際の数値計算により確認できた。そして次式が成立することが確認できた。

$$p_{min}^B = 4 > \frac{N_j^{w^B} + N_j^{s^B}}{N_j^{w^G}}, \quad j = 0, -1, \dots, \quad 0.5 \leq \delta \leq 2$$

次に一例として、 $\delta = 1$, ダイレーションファクター $a = 2^{1/8}$ (1 オクターブを 8 分割) に設定し、ナイキスト周波数以下の 8 オクターブを解析する条件 ($j = -8, -9, \dots, -71$) で、演算量を算出してみたところ、

表 4.1 Calculation reduction ratio[%] with $a = 2^{1/8}$.

Analytic octave number	$\delta = 0.5$	$\delta = 1$	$\delta = 2$
1	100.0	100.0	100.0
2	100.0	100.0	84.0
3	100.0	86.4	57.1
4	87.4	60.1	36.4
5	61.6	38.6	22.3
6	39.7	23.6	13.2
7	24.3	14.0	7.7
8	14.4	8.1	4.4

- 従来の CWT による演算量： $51662 \times N$
- 演算量削減法による演算量： $4175 \times N$

となり，演算量削減法により従来の CWT の 8.1% の演算量で計算できることがわかった。また同じ条件で，解析するオクターブ数を可変すると，図 4.4 のようになった。ただし，丸のマーカを実線で結んだものは $p = 1$ の CWT，四角のマーカを一点破線で結んだものは $p = 2$ の CWT，三角のマーカを破線で結んだものは演算量削減法による理論値，バツのマーカを点線で結んだものは演算量削減法の実測値であり，それぞれ 4 オクターブのときの演算量を 100% とし算出した。結果より，解析する領域をナイキスト周波数から低域に向けて広げるほど，演算量削減の効果が大きくなることがわかった。この傾向は， δ やディレイションファクター a の値に影響されず，いずれの条件でも観察された。また，演算量削減法による理論値と実測値では，後者に 4 オクターブ以後に約 8~10% 程度の演算量が多い結果が得られたが，これは，実装上のプログラミングのロジックに起因するためであり，ほぼ等しいことが確認された。さらに，従来法におけるナイキスト周波数以下の解析については，第 3.5 章において， $\delta = 1$ のとき， $p = 2$ は適切な間引き間隔であり，逆変換が可能で

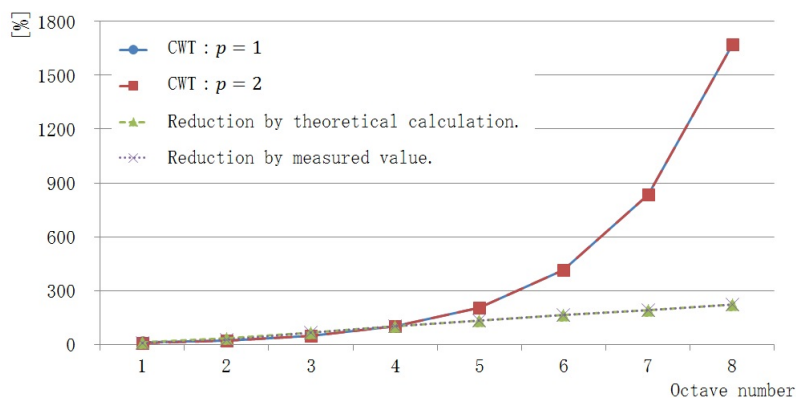


図 4.4 The calculation amounts of the CWT and the calculation reduction method by theoretical calculation and measured value with $\delta = 1$, $a = 2^{1/8}$.

あることを述べた。この条件についても、従来法と比較をしたところ、演算量削減法は効率的に演算量が削減されることが確認された。なお表 4.1 に、解析するオクターブ数と δ を可変し、削減後の演算量を、従来法による CWT の演算量に対する比率 [%] で表示する。そして、これらの比率も、ダイレーションファクター a の値に影響されることなくほとんど一定である。

4.4.4 サンプルの解析と誤差の評価

この節では以下のようなサンプル信号を用いる。

$$f_n = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi\left(n - \frac{N}{4}\right)^2}{N}\right), & \frac{N}{4} \leq n < \frac{N}{2} \\ -\sin\left(\frac{2\pi\left(\frac{3N}{4} - n\right)^2}{N}\right), & \frac{N}{2} \leq n < \frac{3N}{4} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.116)$$

ただし、

$$\begin{aligned} n &= 0, 1, \dots, N-1 \\ N &= 8192 \end{aligned}$$

このような信号は図 4.5 に表せるが、これに対して $\delta = 1$ の GW による、1 オクターブ 8 分割、ナイキスト周波数以下 8 オクターブの領域の、CWT による解析を行う。このときのダイレーションファクター a と j の領域は次のように表せる。

$$\begin{aligned} a &= 2^{1/8} \\ j &= -8, -9, \dots, -71 \end{aligned}$$

上記の条件のもと、式 (4.104) の従来法による CWT 解析は図 4.6 のようになる。また同じ条件による、式 (4.98)–式 (4.103) に示した演算量削減法による解析は図 4.7 のようになる（これらの図では、CWT のウェーブレット係数の絶対値の二乗を、時間–周波数平面に dB で表示している）。このように 2 つの解析結果を時間–周波数の 2 次元グラフで見ると限り差がない。次に従来法による CWT に対する、演算量削減法の誤差を算出する。ここで式 (4.104) により得られた、従来法による CWT のウェーブレット係数を次のように表す。

$$\{d_{j,n}^{CWT} : j = -8, -9, \dots, -71, n = 0, 1, \dots, N-1\} \quad (4.117)$$

また、式 (4.98)–式 (4.103) の演算量削減法により得られた、CWT のウェーブレット係数を次のように表す。

$$\{d_{j,n}^{RED} : j = -8, -9, \dots, -71, n = 0, 1, \dots, N-1\} \quad (4.118)$$

そして各レベル j の誤差 $Error_j$ を、

$$Error_j = 10 \log \left(\frac{\sum_{n=0}^{N-1} |d_{j,n}^{CWT} - d_{j,n}^{RED}|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} |d_{j,n}^{CWT}|^2} \right) \text{ dB}, \quad j = -8, -9, \dots, -71 \quad (4.119)$$

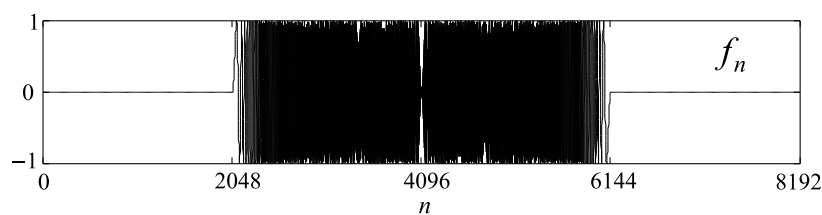
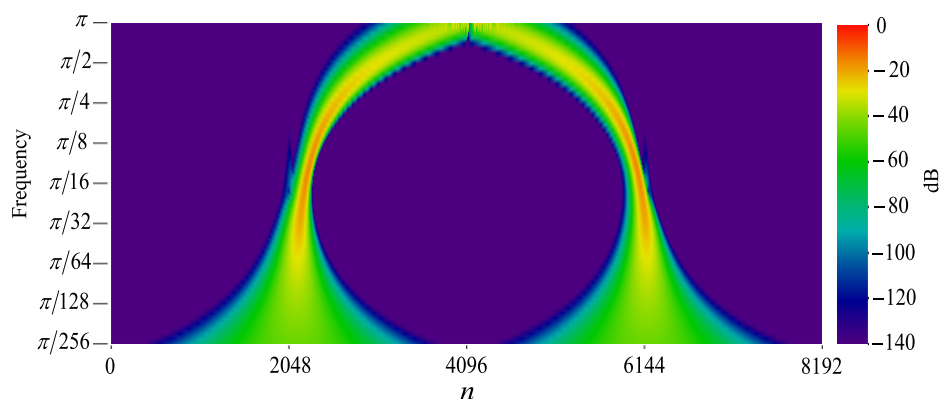
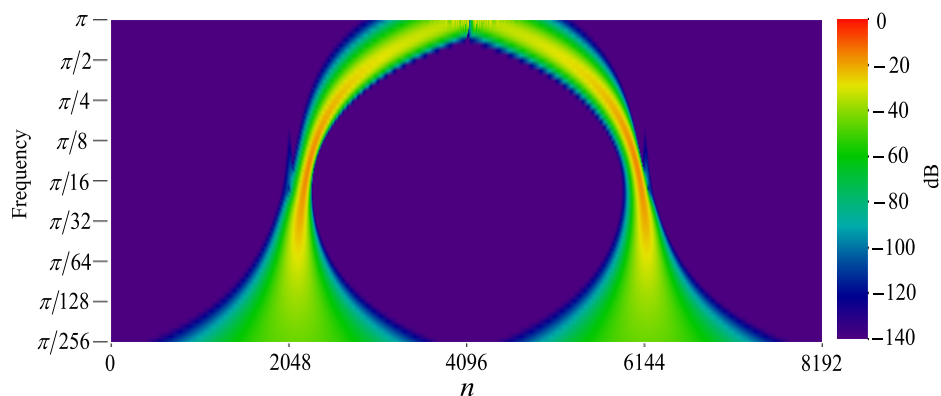


図 4.5 The sample signal.

図 4.6 The CWT of $\{f_n : n = 0, 1, \dots, 8191\}$ with $\delta = 1$, $a = 2^{1/8}$, $j = -8, -9, \dots, -71$.図 4.7 The calculation reduction method of $\{f_n : n = 0, 1, \dots, 8191\}$ with $\delta = 1$, $a = 2^{1/8}$, $j = -8, -9, \dots, -71$.

で計算したところ、すべての j において $Error_j < -95.8\text{dB}$ であった。また CWT のウェーブレット係数全体の誤差 $Total Error$ を、

$$Total Error = 10 \log \left(\frac{\sum_{j=-71}^{-8} \sum_{n=0}^{N-1} |d_{j,n}^{CWT} - d_{j,n}^{RED}|^2}{\sum_{j=-71}^{-8} \sum_{n=0}^{N-1} |d_{j,n}^{CWT}|^2} \right) \text{dB} \quad (4.120)$$

で計算したところ、 $Total Error = -99.4\text{dB}$ となり、誤差は非常に小さいことがわかった。さらに、従来法の GW と演算量削減法を用いた睡眠時無呼吸症候群候群 (SAS : Sleep

Apnea Syndrome) キャリアの音声サンプルで解析を行った。音声サンプルは 44.1kHz, 3 秒間について, 周波数 5~12kHz, $\delta = 1$, 従来法では $p = 1$ とした。この結果の例を次の図 4.7 に示す。(a) は SAS のサンプル音声信号, (b) は従来の GW の CWT による結果, (c) は演算量削減法による結果である。図 4.7 より, CWT と演算量削減法による結果による結果

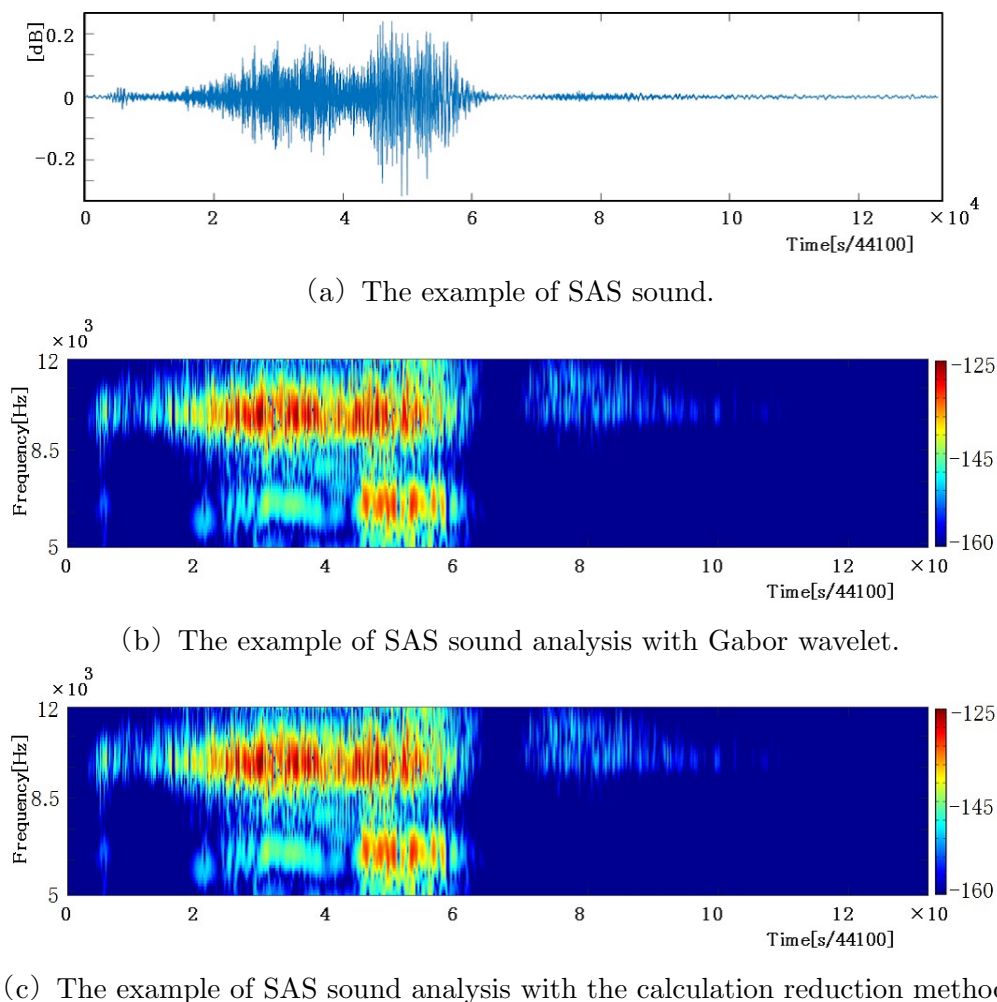


図 4.8 The example of SAS sound analysis with the CWT and the calculation reduction method.

はほぼ等しいことがわかる。これより, 本論文で提案する演算量削減法の実用性が確認された。なお次章では, GW を用いた SAS の音声解析を行っているが, この演算量削減法は用いていない。演算量削減法による音声解析を行う前段階として, 解析の対象部分を絞る必要性に焦点を当てたためである。

4.5 まとめ

本章では, 適切に設計された, 周波数領域にコンパクトサポートなウェーブレット関数が持つ性質に着目し, GW を用いた CWT の演算量削減法を提案した。得られた主な結果は次のとおりである。

1. 基本原理を説明するために必要な定理を証明した。この定理は、周波数領域のサポートがコンパクトな関数の特徴を示したものである。
2. 上記の定理を用いて以下のような基本原理を提案した。すなわち適切に設計された、周波数領域のサポートがコンパクトなウェーブレット関数による、時間領域の CWC は、適切な等間隔において CWC を間引いて計算し、さらに適切に設計された補間関数により間引いた間に補間を施して、求めることができる。
3. 上記の基本原理を応用し、GW を用いた CWT における、演算量削減法を提案した。GW は周波数領域のサポートがコンパクトではないが、適切な帯域制限フィルタを設計し、帯域制限を施すことで解決した。
4. 演算量の削減率を算出し検討したところ、以下の結果が得られた。例えば $\delta = 1$ 、1 オクターブを 8 分割により、ナイキスト周波数以下の 8 オクターブの領域を解析する場合、演算量は従来の 8.1% に抑えることができた。また解析する領域をナイキスト周波数から低域に向けて広げるほど、演算量削減の効果が大きくなることが確認された。
5. サンプル信号を用いて、従来法による CWT 解析、および提案手法による CWT 解析を行った。そして提案手法の従来法による CWT に対する誤差を算出したところ、すべての周波数帯域の CWT のウェーブレット係数において -95.8dB 以下となり、誤差は十分に低く抑えられていることがわかった。

第5章 Gabor wavelet を改良した SAS 専用 マザーウェーブレットの設計と音声解 析への応用

この節では、Gabor wavelet (GW) の音声解析への応用について述べる。GW を改良した睡眠時無呼吸症 (Sleep Apnea Syndrome : SAS) 専用の MW を設計し、睡眠中の呼吸音のみを用いた、SAS 判別法および予備群の早期発見プロセスの提案を行う。

この提案法は、SAS に共通する呼吸の特徴に着目し、基礎統計学と SAS 専用 MW を用いた定量評価により、健康上問題ない者と SAS 予備群・キャリアの判別を工学的に示す。本提案により、IC レコーダやスマートフォンなどによる、簡易的な SAS の判別とその予備群の発見に貢献が期待される。

第4章で GW の連続ウェーブレット変換 (continuous wavelet transform : CWT) における高速化を提案した。高速に解析を行う場合においても、本章のように統計解析などの手法と組み合わせ、長大データの解析対象部分を絞ることで、解析はより簡易かつ明瞭になる。

5.1 はじめに

SAS の医学的な定義は「10 秒以上の気流停止 (気道の空気が止まった状態) を無呼吸とし、無呼吸が一晚 (7 時間の睡眠中) に 30 回以上、若しくは 1 時間あたり 5 回以上」とされる。

SAS が認知、注目をされるようになったのは、2003 年の新幹線居眠り運転に始まる [59]。厚生労働省と国土交通省は SAS への注意喚起を促している [61], [60] が、SAS の自覚症状は乏しく、医療機関で診断済みのキャリアに未診断者を含めると、国民の数パーセントに達するとも言われる。また SAS キャリアは、糖尿病をはじめとする成人病、循環器病などの合併率が同キャリアでない者の約 2~6 倍高く、適正な治療を受けない場合、累積生存率が大幅に低いという報告もある [59]-[63]。

一般的な現行の SAS の検査は、睡眠中の呼吸音 (いわゆる「いびき音」) を用いない。まず、医療機関で問診あるいは眠気尺度症状の確認を受け、病院からレンタルするポータブル装置 (ポータブルモニター) による簡易検査を行う。その後、SAS の疑いがあると診断された場合、一泊入院による本検査を実施する (どちらか一方の検査のみ実施する場合もある)。そして、検査時に計測された、睡眠時の呼吸の状態 (圧力変化を計測したもので、音声ではない) や心拍数、酸素飽和度、睡眠の深さなどのデータをもとに、臨床検査技師が手作業により分析し、医師が診断を行う [64]。しかし、ポータブルモニターおよび本検査は身体に装着するストレスがあり、被験者は検査時に眠れないことも多く、また、手作業による検査の分析には時間を要する。

そこで本論文は、「SAS 予備群の発見は、一般的に完治という概念のない成人病予備群や他の合併症の発見に繋がる」「睡眠中の呼吸音による SAS 予備群およびキャリアの判断は、

枕元に置く簡易音声レコーダで可能かつ手軽に行える」の考えのもと、工学的立場から、簡易的な SAS の判別とその予備群の発見プロセスの提案を行う。

SAS の判別に関する研究報告は、SAS キャリア、つまり既に SAS を患っている状態を判別するものが多く、本論文で提案する、予備群の発見を目的とした解析および手法に関するものは、ほとんどない。また、本論文で提案する判別法の解析ツールは、基礎統計解析と時間・周波数解析と得意とする CWT である。これまで、ウェーブレット変換を用いた SAS の研究報告はあったが、その多くは睡眠中の音声以外の計測データを対象としたものであり [65]-[67]、睡眠中の呼吸音のみを対象としたものは、ほとんどない。

本論文では、SAS の呼吸音に共通する特徴に着目した、SAS 判別法および予備群の早期発見プロセスの提案を行う。呼吸のリズムと状態をグラフにより視覚化、基礎統計解析を用いて呼吸パターンのクラスタリングを行い、SAS の呼吸傾向を分析する。そして、SAS 専用に設計した MW を用いて、SAS の定量評価をする。この SAS 専用 MW による定量評価は、基礎統計解析では困難な、SAS と SAS でない者の判別を工学的に示す。また本提案の解析に必要な睡眠中の呼吸音は、1~2 時間程度でよい。これにより、IC レコーダやスマートフォンなどによる、簡易的な SAS の判別とその予備群の発見に貢献が期待される。

次にこの章の構成について述べる。第 5.2 章では、SAS の呼吸音の特徴、そして SAS 判別法および予備群の早期発見プロセスの概要について述べる。第 5.3 章では、無呼吸状態と呼吸リズムを視覚化するための、グラフの作成手順について説明する。第 5.4 章では、基礎統計学を用いて呼吸パターンの傾向のクラスタリングを行う。そして、第 5.5 章では、GW を改良した SAS 専用 MW の設計とその定量評価について述べ、第 5.6 章ではこの章のまとめをする。

5.2 SAS 呼吸音の特徴と SAS 判別法および予備群の早期発見プロセスの提案

この節では、被験者データとその構成、SAS の呼吸音に共通する特徴、そして本論文で提案する SAS 判別法および予備群の早期発見プロセスについて述べる。

5.2.1 被験者データとその構成

先述のとおり、現行の SAS の診断は、睡眠中の呼吸音そのものを用いない。しかし、SAS キャリアの睡眠中の呼吸音には特徴があり [72]、異常を覚えた家族などから「あなたは、もしかしたら SAS でないのか?」と指摘されるケースも多い [64]。また、SAS キャリアの睡眠中の呼吸音を全てウェーブレットで解析をすると、膨大な時間を要する [68]。そこで、本論文では SAS キャリアの呼吸音の特徴に焦点を絞ったうえで、局所的に基礎統計解析と CWT による解析をする。

本研究の進行にあたり、豊橋メイツ睡眠治療クリニックより、SAS キャリアの睡眠中の呼吸音をサンプルとしてご提供頂いた。これら被験者データの内訳を次の表 5.1 に示す。なお、本論文の被験者は本学の「ヒトを対象とする研究規定」に基づく実験計画審査を経て、十分な説明の後、インフォームドコンセントを得て実施した。

表 5.1 の「AHI」値は無呼吸低呼吸指数 (Apnea Hypopnea Index) で、「SAS の症状の重さを判断するための指数」である [64]。なお、ご提供頂いた被験者には、現時点では健康であり将来 SAS になる疑いの低い者、および現時点では SAS の基準に満たないが、将来 SAS になる疑いの高い者の該当がなかった。そこで前者については、健康診断で異常がなく、蓄

表 5.1 The detail of samples.

—	AHI	Sum (people)
No health problem *	(5 < AHI)	4
Pre-SAS*	(5 < AHI)	1
Mild	5 ≤ AHI < 15	5
Moderate	15 ≤ AHI < 30	11
Severe	30 ≤ AHI	21
—	Sum*	42

Frequency : 44.1kHz, Recording time : 6~7h, *Collected by the authors.

膿症, アテノイド, 扁桃腺手術などの呼吸器病歴がない者に, 睡眠中の呼吸音を録音する協力を仰いだ. さらに, これら協力者の呼吸音を専門家に診断依頼し, 「SAS 予備群およびキャリアに該当しない」と診断を受けた者を採用した. この 4 名および, この基準に該当するものを本論文では以後「健康上問題ない者」と呼ぶ. そして後者の SAS 予備群についても, 上記同様の過程を経て, 専門家から「将来 SAS になる疑いが高い」と診断された者である. この 1 名および, この基準に該当する者を本論文では以後「SAS 予備群」と呼ぶ.

ここで, 本論文が工学的に解析を進めるうえで, いくつかの留意点を述べる.

まず, 医学的には「いびき症」と「SAS」は区別される. 前者には無呼吸や酸素の減少がみられず, 単にいびきだけがみられる症状を指す [59]. しかし, 本研究では「睡眠中の呼吸音」と「いびき症」の区別が目的ではない. よって, 他の先行研究に倣い, 本論文中で扱う全ての音声データを「睡眠中の(異常)呼吸音」あるいは単に「呼吸音」と表記する [72].

次に SAS には, 閉塞性睡眠時無呼吸症候群(上気道の閉塞によるもので呼吸運動はある), そして, 中枢性睡眠時無呼吸症候群(脳の呼吸中枢の障害により呼吸運動が消失するもの)の 2 種類があり, これらが混合したものを混合性睡眠時無呼吸症候群と呼ぶ [64]. 本論文の被験者は全員閉塞性である. 以後, 特筆のない限り, 本論文の被験者を単に SAS あるは SAS キャリアと表記する.

本論文中で, SAS の(症状の)重さと表記した場合は, 特筆のない限り, 健康上問題ない者, SAS 予備群, SAS キャリアの軽度, 中等度, そして重度の各段階を示すことにする. この表現は本来, AHI の定義では SAS キャリアを対象に用いるが, 研究では健康上問題ない者と SAS 予備群も対象とするため, これらの者も含める.

また, 被験者の呼吸音データは平均 5~6 時間前後であり, 全ての時間を解析するのはデータ量が膨大になる. そのため, 被験者の呼吸音データを確認し, 睡眠に陥っている傾向が高い録音開始後の 2 時間~終了前の 2 時間を一律に採用している.

さらに, 一般的に医療機関が行う SAS 診断では, 通常, REM 睡眠(脳が活発に動いている浅い眠り)と NON-REM 睡眠(脳も身体も休んでいる深い眠り)のタームを考慮する [64]. しかし, 本論文では睡眠中の呼吸音のみによる簡易的な診断を目的とするため, これらを考慮に入れず解析を行う.

5.2.2 SAS の睡眠中の呼吸音の特徴

被験者の睡眠中の呼吸音を聴くと, SAS キャリアには共通する次のような 3 つの大きな特徴がみられる.

特徴 1 : 呼吸リズムが乱れているときに無呼吸状態が起こりやすい。

この例を図 5.1 に示す。ただし (a) は呼吸リズムが一定の例。(b) は呼吸リズムに乱れがあり無呼吸状態が生じている例である。

特徴 2 : 無呼吸状態からの呼吸再開時に大きな呼吸音が発せられ、これにいくつかのパターンがみられる。

この例を図 5.2 に示す。(a) は無呼吸後、小さな呼吸が再開している。(b) は無呼吸後、短いリズムで呼吸を再開している。(c) は無呼吸の間に息継ぎのような呼吸がある。

特徴 3 : 呼吸音は比較的大きく、声道（上気道）からの振動音を含む傾向がある。

この例を図 5.3 に示す。呼吸音の波形に高周波と低周波が混在している。

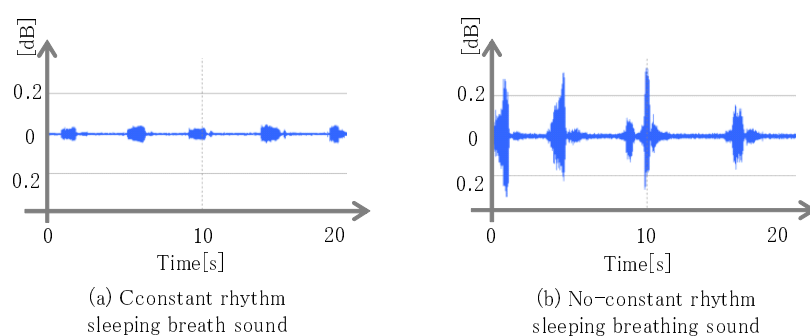


図 5.1 Example of constant rhythm and no-constant sleeping breath sound.

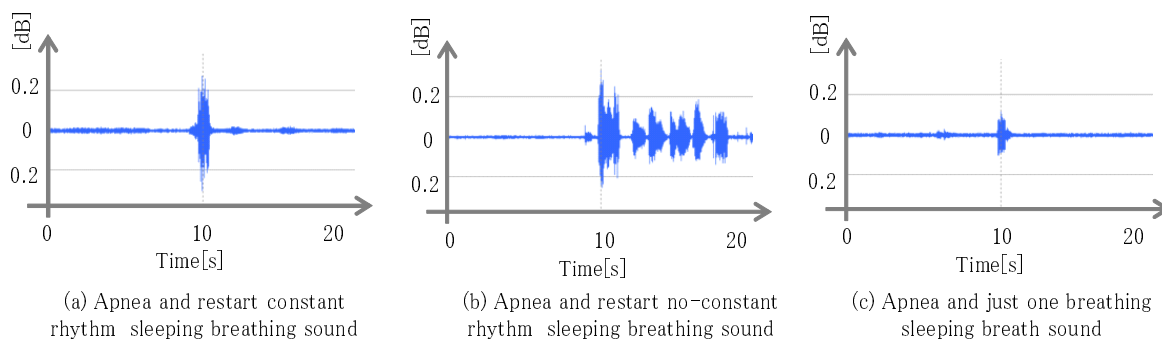


図 5.2 Example of apnea and sleeping breathing sound.

本論文では、上記 3 つの特徴をもとに、SAS 判別法および予備群の早期発見プロセスを提案する。

5.2.3 SAS 判別法および予備群の早期発見プロセスの概要

前節の SAS の呼吸音に共通する 3 つの特徴、無呼吸、呼吸リズム、高音圧を切り口として、本節では 4 段階の Stage による SAS 判別法および予備群の早期発見プロセスを提案する。その各 Stage を以下に示す。

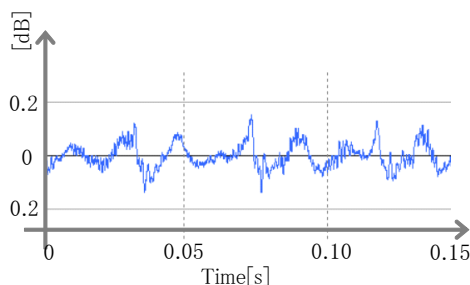


図 5.3 Example of SAS waveform sound.

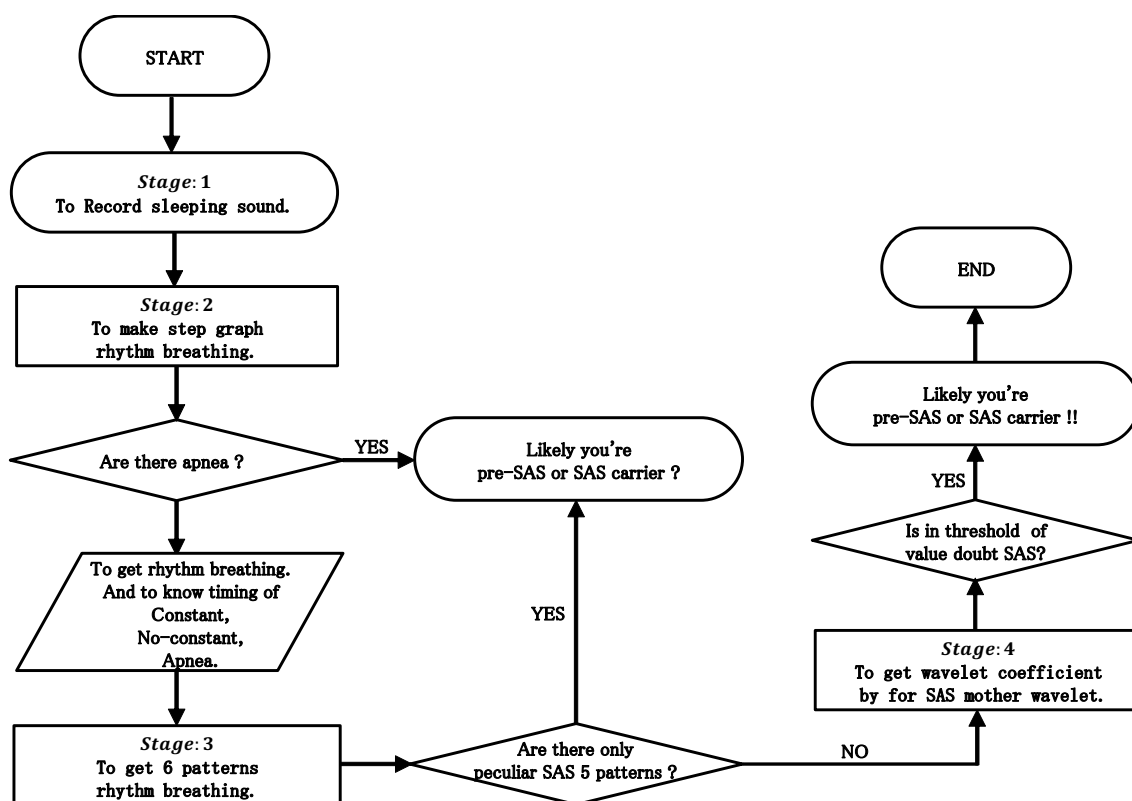


図 5.4 Flowchart of this thesis's SAS diagnosis, where being able to get likely pre-SAS or SAS carrier by each step from 1 to 4.

Stage1 : 睡眠中の呼吸音の録音

ICレコーダで睡眠中の呼吸音を1時間以上録音する。(録音時間は長時間であるほど望ましい)

Stage2 : 階段グラフによる無呼吸状態と呼吸リズムの視覚化

無呼吸状態の有無の確認, 無呼吸の回数をカウント, および呼吸リズムの状態を視覚化する.

Stage3 : クラスタ分析による呼吸パターンの傾向の把握

高音圧な呼吸音とその前後の呼吸をもとに、クラスタ分析を用いて呼吸のパターンを分類し、傾向をみる。

Stage4 : SAS 専用 MW による定量評価と判別

Stage2 から得られる呼吸リズムが一定の呼吸音, Stage3 から得られる高音圧な呼吸音について, SAS 専用に設計した MW を用いて解析し, 定量化評価をする。

上記の Stage1 から Stage4 のフローチャートを図 5.4 に示す。Stage2 および Stage3 を経ると, SAS の疑いは概ね示唆できるが, Stage3 で SAS 予備群およびキャリアの判別が明瞭にならない者について, Stage4 の SAS 専用 MW による定量評価が有用となる。それぞれの詳細を次節以後で説明する。

5.3 階段グラフによる無呼吸状態と呼吸リズムの視覚化

この節では, SAS の呼吸音に共通する 3 つの特徴のうち, 無呼吸, 呼吸リズムに着目し, 前節で示した SAS 判別法および予備群の早期発見プロセスの「Stage2 : 階段グラフによる無呼吸状態と呼吸リズムの視覚化」について述べる。睡眠中の呼吸リズムの状態を階段状のグラフで視覚化することにより, 無呼吸状態の有無とその回数, および呼吸リズムの状態の把握と確認が可能になる。

5.3.1 階段グラフの作成手順

本節で提案するグラフは 3 つの Step で作成するが, この事前処理として簡易的なノイズ除去を行った。ノイズ除去前後の精度比較は, 被験者をランダムに 7 人分抽出し, それぞれ 30 分間の呼吸数をカウントした。ノイズ除去前の回数を基準とした場合, ノイズ除去後の呼吸カウント数と基準との差は平均 -3.82% である。さらに, これらノイズ除去後の音声データについて, Step1 から Step3 の各段階で確認をした結果, 問題ないと判断した。

また, 本章では, 第 5.2 章で示した各手順において, 呼吸音の絶対値の最大音圧を検索する方法により波形解析をしている。この最大音圧を採択する際に, パルス音のように波形の一部が瞬間的に突出したものを除外したい。そこで, 検索された最大音圧を中心に前後 0.5 秒について音声波形の包絡線を求め, この形状に問題のないものを用いた。

上記の事前処理と確認を経た睡眠中の呼吸音について, 以下のような手順でグラフを作成する。

Step1 : 呼吸有無の二値化

呼吸音の無音時間帯における暗騒音を評価し, それを閾値と設定する。閾値より音圧が高い呼吸音を「呼吸有り」, それ以下を「呼吸無し」とし二値化する。この例を図 5.5 と図 5.6 に示す。前者はオリジナルの呼吸音, 後者は二値化された呼吸音である。

Step2 : 無呼吸状態の有無とその回数のカウント

Step1 で呼吸有りの時間間隔が一定以上 (今回は 8 秒以上) 離れているものを「無呼吸状態」とする。同時にその回数をカウントする。この例を図 5.6 に示す。

つまり, 図中の矢印の区間が一定時間以上のときを無呼吸と判断する。この方法は, 他の先行研究でも採用されている [71] が, 本論文の提案法はこれに次の Step2 と Step3 を加える。

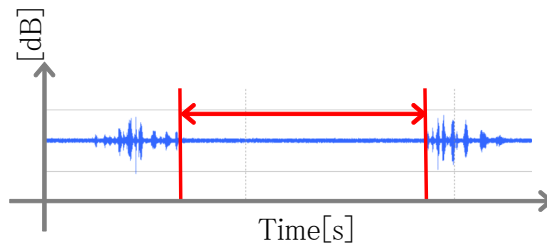


図 5.5 Example of apnea interval.

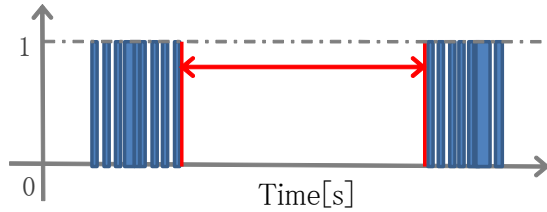


図 5.6 Example of apnea and breathing binarization.

なお、無呼吸状態について、SAS の定義では「10 秒以上の呼吸停止」としている。そこで、本論文の主題のひとつである SAS 予備群の発見のために、これより小さい任意の値にする。健康者の覚醒時の平均呼吸数は 12~20 回/分、つまり、ひと呼吸：4~5 秒であり、睡眠時はこれより若干緩やかだが、覚醒時とほぼ同じである [73]。これを考慮し、今回は 8 秒以上とする。また、無呼吸の回数について、同定義では「無呼吸が一晚（7 時間の睡眠中）に 30 回以上、若しくは 1 時間あたり 5 回以上あるもの」としているが、今回は無呼吸状態の有無の確認を目的とするため、ここでは単純に回数のみをカウントする。

この Step2 では、除去しきれなかったノイズを除くため、適切な閾値： τ を設定し、 τ 以上の音圧を呼吸音とみなす。なお、今回、設定した閾値は、本来無音であれば望ましい、呼吸と呼吸の間（息継ぎ間）に含まれるノイズの最大音圧とした。この閾値は、録音状態により差異が生じたため、各被験者について逐次求めた。その結果、最大音圧を 1 とした場合、暗騒音除去は 0.112~0.138 が閾値として適当である。この過程から、呼吸（音圧）有り：1，無し：0，となり、式 (5.1) のように表す。

$$g_{I/C}(i) = \begin{cases} 1, & |\text{dB}| \geq \tau \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.1)$$

ただし、 $i, \tau > 0, i \in \mathbb{N}$ ：整数全体の集合、 $\tau \in \mathbb{R}$ ：実数全体の集合。

さらに式 (5.1) もとに無呼吸状態が何回出現するかをカウントする。そのフローチャートを図 5.7 に示す。

Step3 : 階段グラフの作成

Step1 で二値化された値の和を求め、これを時系列グラフで表す。このとき、無呼吸状態の出現箇所を明示する。

式 (5.1) の総和を下式 (5.2) より求める。

$$S_{g_{I/C}}(i) = \sum_{i=1, i \in \mathbb{N}}^n g_{I/C}(i) \quad (5.2)$$

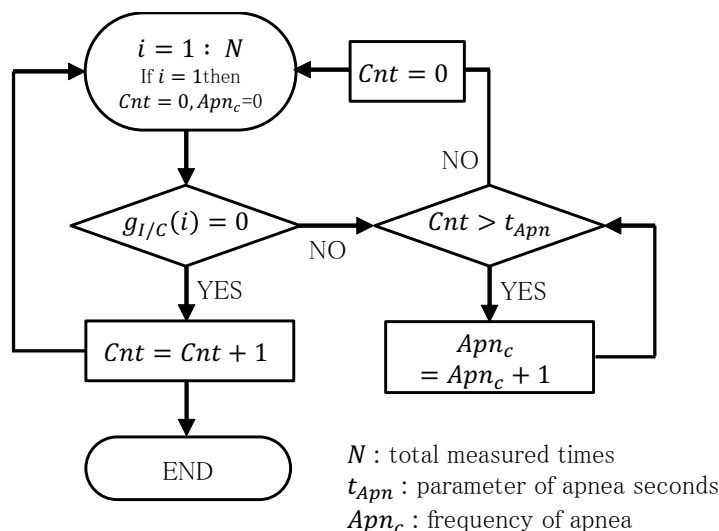


図 5.7 Flowchart of frequency apnea.

ただし、 N 、つまり、この式 (5.2) は解析対象時間における、呼吸の有 : 1, 無 : 0 とした総和グラフとなる。

上記の Step より作成したグラフの例を図 5.8 に示す。図 5.8 は、SAS 中等度の睡眠中の呼吸音、4.41kHz、録音時間 1.50h である。縦・横軸ともに経過秒数を表す。赤色の折れ線は式 (5.2) に対応する。青色の縦に入る「帯」は無呼吸が 8 秒以上続いている状態であり、この例ではグラフの前半に 8 回みられる。その拡大図の例を図 5.9 に示す。

このように、Step1 から Step3 を経て呼吸リズムの状態を時系列グラフで表現したとき「階段」のようになり、無呼吸の状態を表す帯の部分には、式 (5.2) の和が 0 となる箇所、勾配が 0 となる。グラフの階段においては、いわゆる「踊り場」のようになる。そして、無呼吸状態が長く続いた場合には、この踊り場も長くなる。図 5.8 の前半は、呼吸リズムに乱れがあるため階段の勾配が緩やかになっている。そして後半では、呼吸リズムが一定のため、勾配は前半よりやや急になっている。一方、健康上問題のない者は、解析時間内の階段の勾配が一定となる。

以上のような過程を経て作成するグラフを、本論文では階段グラフ、無呼吸の状態を踊り場と呼ぶ。また、録音機器や録音環境の関係で、音圧の低い呼吸音を拾えないケースもある。この場合、解析時間中の階段グラフは至極平坦になり、ほぼ呼吸がない状態になる。よって、このような状態に類似する階段グラフが作成された場合は、計測ミスと判断すれば良い。

以上より、SAS 予備群およびキャリアの無呼吸状態と呼吸リズムの状態を確認するための階段グラフを作成すると、無呼吸の状態を踊り場で確認でき、帯の数は無呼吸回数、帯の幅は無呼吸時間となる。そして、階段状の勾配が一定である区間を参照すれば、呼吸リズムが一定に保たれている状態の確認ができる。

5.4 クラスタ分析による呼吸パターン傾向の把握

この節では、第 5.2.3 章の SAS 判別法および予備群の早期発見プロセス、「Stage3 : クラスタ分析による呼吸パターン傾向の把握」について述べる。第 5.2 章であげた SAS の呼吸音に共通な 3 つの特徴である、無呼吸、呼吸リズム、高音圧すべてに着目する。

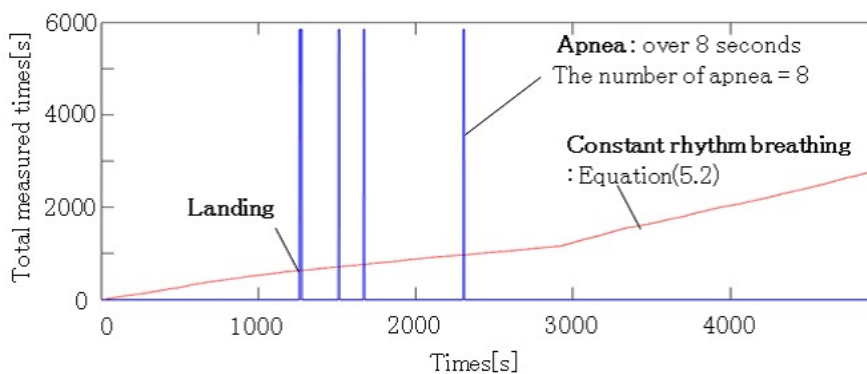


図 5.8 Example of step graph rhythm breathing.

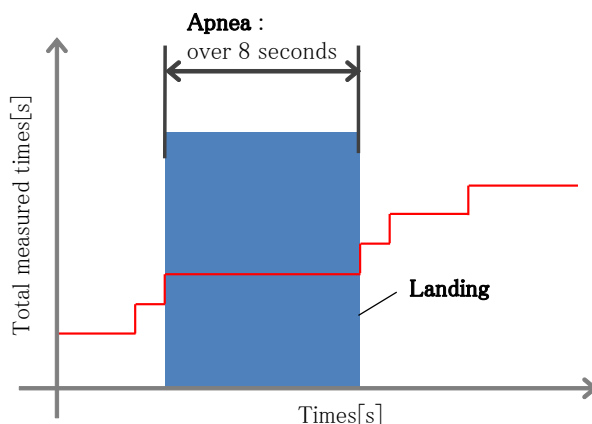


図 5.9 Example of the partially expanded image of the step graph rhythm breathing.

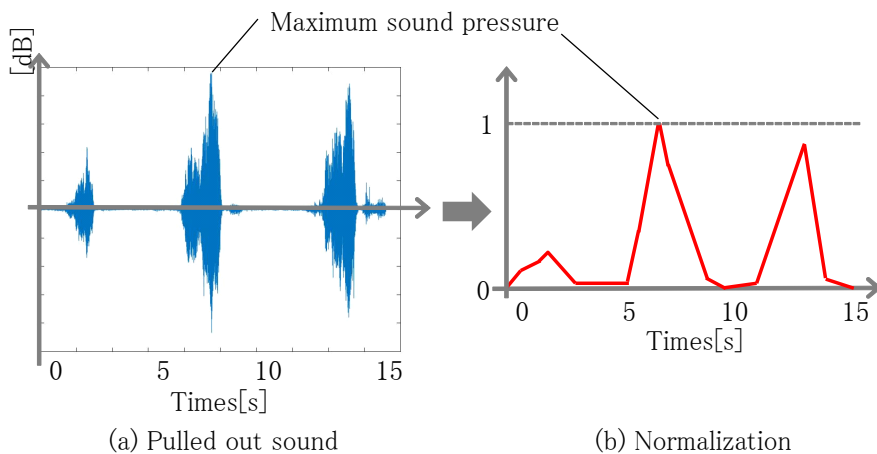


図 5.10 Pulled out sound and normalization, where (a) is example of pulled out 15 seconds sound that is centered maximum sound pressure, (b) is example of normalized (a).

5.5 呼吸パターンのクラスタリングとその傾向

被験者の呼吸音を確認すると、無呼吸からの呼吸再開時に、音圧の高い呼吸音が発せられる傾向がみられる。これは、SAS の顕著な呼吸音である。被験者から、この呼吸再開時の

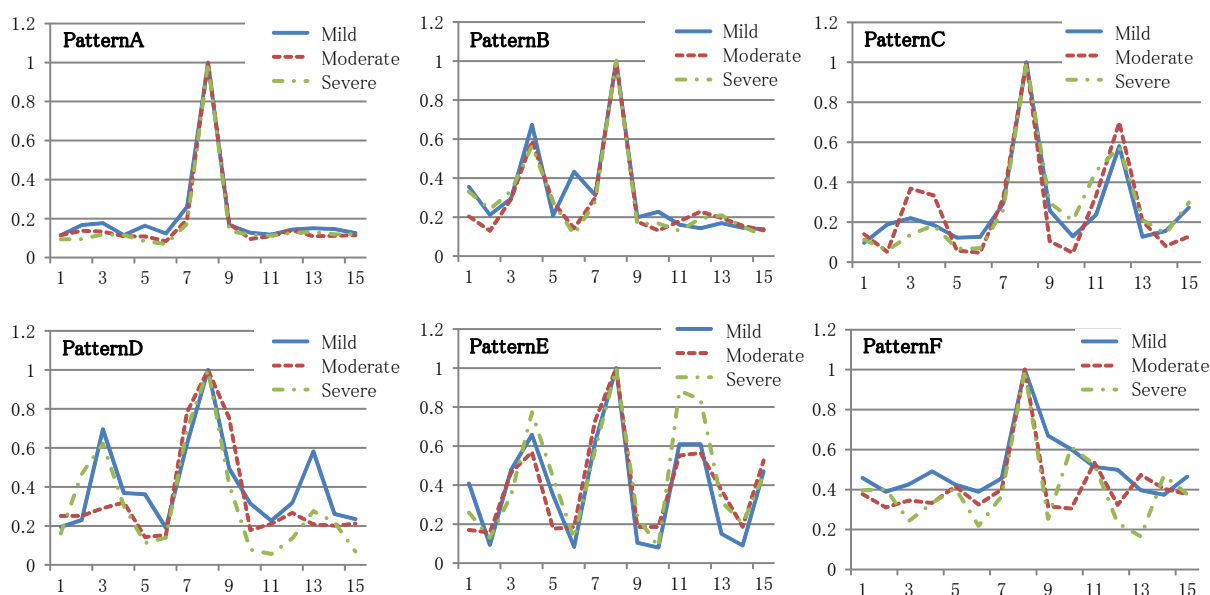


図 5.11 Classter 6 patterns sleeping breathing rhythm.

パターンを統計的に解析したところ、概ね 6 種類に分類される。解析は次のような手順で行った。

Step1 : 呼吸音の切り出し

各被験者について、呼吸音の絶対値の最大音圧上位 5 個を検索し、その最大値を中心に前後 7 秒（最大値を含め 15 秒）を切出す。このとき、互いの音声には 5 分以上間隔があるものとする。

Step2 : 切り出した音声の正規化

Step1 で切出した各呼吸音について絶対値をとり、中央の最大音圧を 1 とした正規化をする。

Step3 : クラスタリング

Step2 で正規化された各被験者の 5 個のデータをもとに、SAS の重さとは無関係に k-means 法 [70] でクラスタリングする。

上記の手順を施し、Step3 において k-means 法でクラスタリングしたパターンと SAS の重さの内訳を表 5.2 に、その各パターンの概形を図 5.11 に示す。なお表 5.2 については、各被験者の 5 個のデータが重複してクラスタリングされているものもあるため、その重複を除いた人数で示した。なお、各分母は各 SAS の重さの総被験者数とする。表 5.2 の太字は、SAS の各症状の重さにおいて比較的多く出現したものを表す（約 40% 以上）。ただし、図 5.11 には SAS キャリアのみを表示する。

図 5.11 と表 5.2 を合わせて考察すると、SAS キャリアにおいて次のような傾向がみられる。

パターン A : 無呼吸状態に息継ぎのような大きな呼吸を 1 回。中等度～重度の 90% 以上の確率で出現。

パターン B : 小さな呼吸後、大きく呼吸し無呼吸へ。軽度～中等度の約 80～90% の確率で出現。

表 5.2 The detail of samples of 6 patterns sleeping breathing rhythm.

	No health problem	Pre-SAS	Mild	Moderate	Severe	The proportion in relation to SAS*
PatternA	0/4	0/1	2/5	11/11	19/21	86.5%
PatternB	0/4	1/1	4/5	9/11	8/21	56.8%
PatternC	0/4	1/1	4/5	3/11	8/21	40.5%
PatternD	0/4	0/1	2/5	3/11	4/21	24.3%
PatternE	4/4	1/1	1/5	2/11	5/21	21.6%
PatternF	0/4	0/1	3/5	1/11	2/21	16.2%

unit : people, * : Mild, Moderate and Severe

パターン C : かすかな呼吸の後, 大きな呼吸と共に呼吸再開. 軽度の 80% の確率で出現.

パターン D : 小さな呼吸の途中で長めの大きな呼吸. 軽度～重度の 25% 弱の確率で出現.

パターン E : 呼吸リズムが一定の途中で大きな呼吸. 重度の 25% 弱の確率で出現.

パターン F : 呼吸リズムが乱れた小さな呼吸の最中に大きな呼吸. 軽度の 60% の確率で出現.

パターン A は, SAS キャリアの 86.5% に該当する. また, SAS の特徴である無呼吸状態からの呼吸再開はパターン C, D, F である. なお, 各被験者で同一パターンの重複がある者について傾向をみたところ, 重度の被験者はパターン A の重複が多くみられる. これは, 無呼吸が常習化しているためと考えられる.

次に, 本論文の目的である SAS 予備群の早期発見の対象に最も近い, SAS 予備群および軽度の者に着目すると, パターン B と C がみられる. よって, パターン B と C が, SAS の予兆にみられる可能性がある. また, 健康上問題のない者は全てパターン E に分類される. ただし, SAS キャリアとは異なり, 中心の最大音圧とその前後の呼吸の音圧の比は, 最大音圧を 1 としたとき, 0.82~0.94 であり, 3 つの山の高低差は小さい. これより, 健康上問題のない者の呼吸音は, 比較的安定していることがわかる.

以上より, SAS 予備群の発見の糸口は, 呼吸リズムの乱れであり, 無呼吸状態も呼吸リズムの乱れの一つであると考えられる. そして, 呼吸リズムの乱れは, 最大音圧前後にヒントがあると考えられる. さらに, 呼吸パターン E 以外の 5 種類のうちいずれかに該当すると, SAS 予備群およびキャリアの可能性が疑われることがわかった.

5.6 SAS 専用マザーウェーブレットの設計と定量評価

ここでは, 第 5.2 章で挙げた SAS の呼吸音の特徴である, 呼吸リズム, 高音圧に着目した解析方法, 「Stage4 : SAS 専用 MW による解析と判別」について述べる.

まず, SAS 専用の MW を設計し, 次にその MW により得られた解析結果から SAS の定量評価を行う. この SAS 専用 MW の目的は, 第 5.4 章で SAS の重さ全てにみられたパターン E について, 健康上問題のない者, そして SAS 予備群およびキャリアの明確な判別である.

5.6.1 SAS 専用マザーウェーブレットの設計

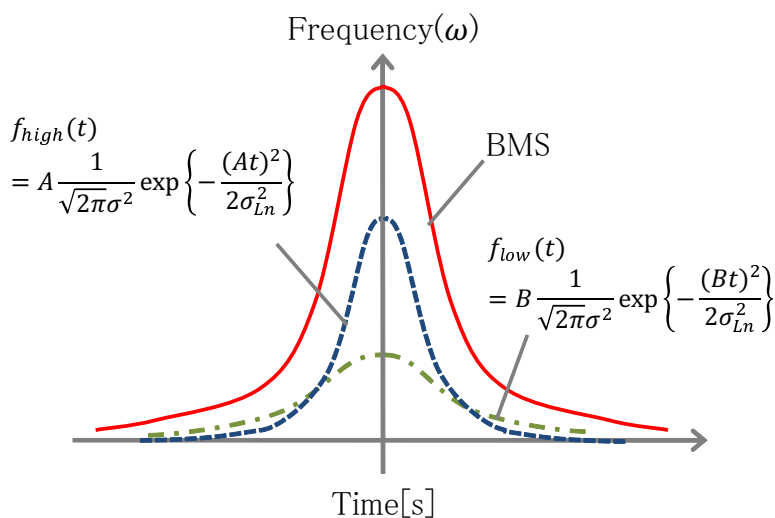


図 5.12 Envelope of mother wavelet for SAS : BMS.

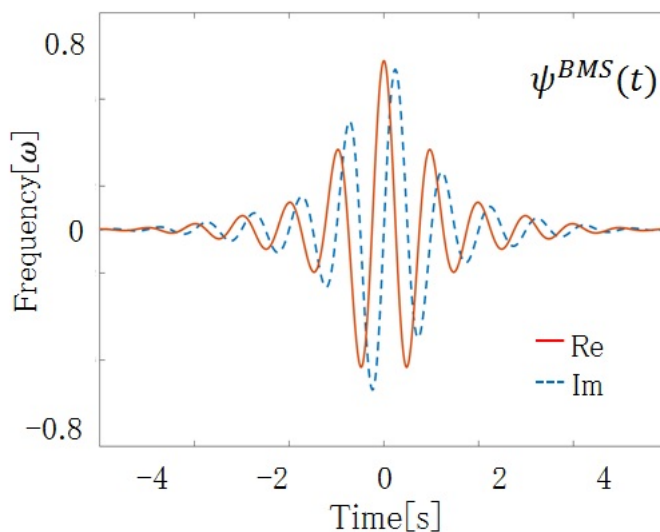


図 5.13 Example of mother wavelet for SAS : BMS form.

本論文で設計する SAS 専用 MW は、前章までに述べてきた、式 (5.3) で表される GW の長所を活かしつつ、これに改良を施す。

$$\psi^G(t) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{\delta_0}} e^{-\frac{t^2}{2\delta_0^2}} e^{i2\pi t} \quad (\text{再述}) \quad (5.3)$$

ただし、 $t \in \mathbb{R}$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$ かつ $\delta_0 > 0$.

SAS の波形は、図 5.3 に例を示したように、高周波と低周波が混在した形状を持つ。この高低周波を同時に捉え、周波数に応じて解析度に可変を持つ MW を次の式 (5.4) のように

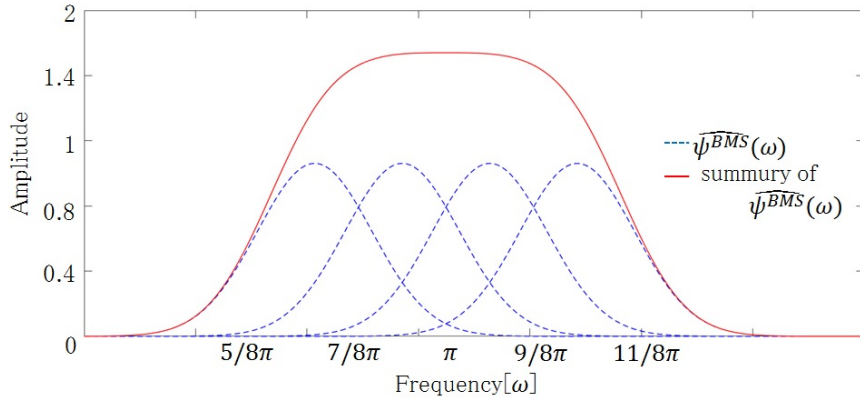


図 5.14 Frequency characteristic of BMS, where is been into quarters in π .

提案する.

【SAS 専用 MW : Better mother wavelet for SAS】

$$\psi^{BMS}(t) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{\delta_{Ln}} (\sqrt{A} + \sqrt{B})} \times \left(A e^{-\frac{(At)^2}{2\delta_{Ln}^2}} + B e^{-\frac{(Bt)^2}{2\delta_{Ln}^2}} \right) e^{i2\pi t} \quad (5.4)$$

ここで, $A > B > 0$, $t, \delta_{Ln} \in \mathbb{R}$ かつ $\delta_{Ln} > 0$. またパラメータ δ_{Ln} は, 高周波になるほど解析の感度が上がるように可変を持たせ, 式 (5.5) のように設定する.

$$\delta_{Ln} = v_0 \cdot (Ln) \quad (5.5)$$

ここで, $v_0 \in \mathbb{R}$ かつ $v_0 > 0$, $Ln = 1, 2, \dots \in \mathbb{N}$. $v_0 > 0$ は初期値であり, Ln はウェーブレットの開始周波数を基準にしたときの, 現在の解析の深さ, つまり現在の解析周波数までのステップ数である. 例えば, ウェーブレットの解析周波数を $\lambda \sim \lambda/2$ Hz まで, 1 オクターブ n 分割で行ったとき, Ln は $1, 2, \dots, n+1$ と可変する. このように, MW のパラメータを周波数に応じて値を可変させる方法は, 脳波解析などに用いられている [76]. 以後, この式 (5.4) で表される, SAS 専用 MW を本論文内では BMS (Better MW for SAS : BMS) と呼び, 従来の GW を特筆のない限り, 単に GW と呼ぶことにする.

この BMS の概形の例を図 5.13 に示す. ただし, $A = 1.0$, $B = 0.5$, $\delta_0 = 1$, 青色の実線は実部, 赤色の破線は虚数部である. また, 包絡線の様子を図 5.12 に示す. 図 5.12 において, $f_{high}(t)$ は解析対象波形の高周波成分を, $f_{low}(t)$ は低周波成分を捉える. この理由から, BMS の包絡線は GW のものより, 上部が尖り, 下部の裾が長くなっていることが確認できる. さらに, BMS の周波数特性の例を図 5.14 に示す. この例では, π を中心に 1 オクターブを 1/4 分割し, $A = 1.0$, $B = 0.6$, $\delta_0 = 1$, としている. そして, GW 同様にこの BMS もアドミッシブル条件を満たさず, コンパクトではないため, 本論文内の計算では, 振幅の 1.0×10^{-5} 以下をカットしている.

次に, GW と BMS を用いて睡眠中の呼吸音の解析結果の例を示す. 図 5.15 は SAS 中等度, 図 5.16 は健康上問題ない者の呼吸音である. 各図の上段の (a-1) と (b-1) は GW の結果, 中段の (a-2) と (b-2) は BMS の結果, そして, 最下段の (a-3) と (b-3) は解析対象の呼吸音の信号である.

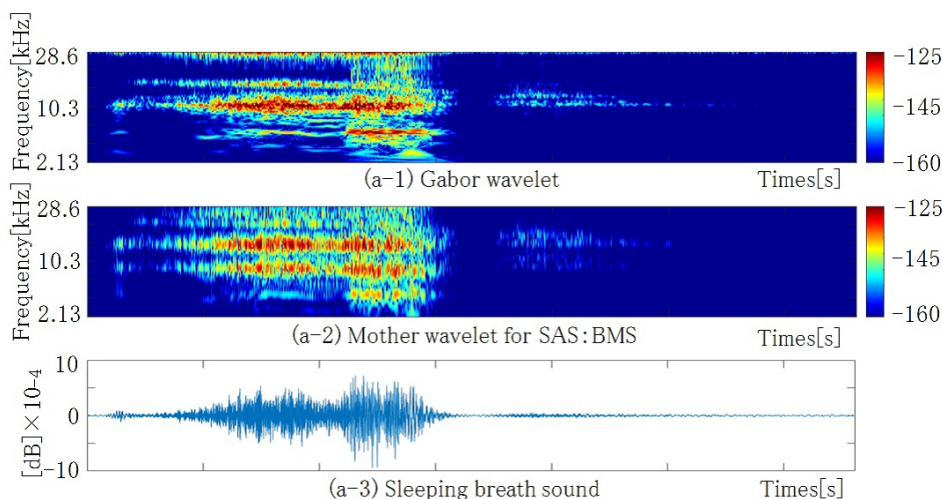


図 5.15 Example of analysis result of GW and mother wavelet for SAS : BMS, where is SAS carrier Mild.

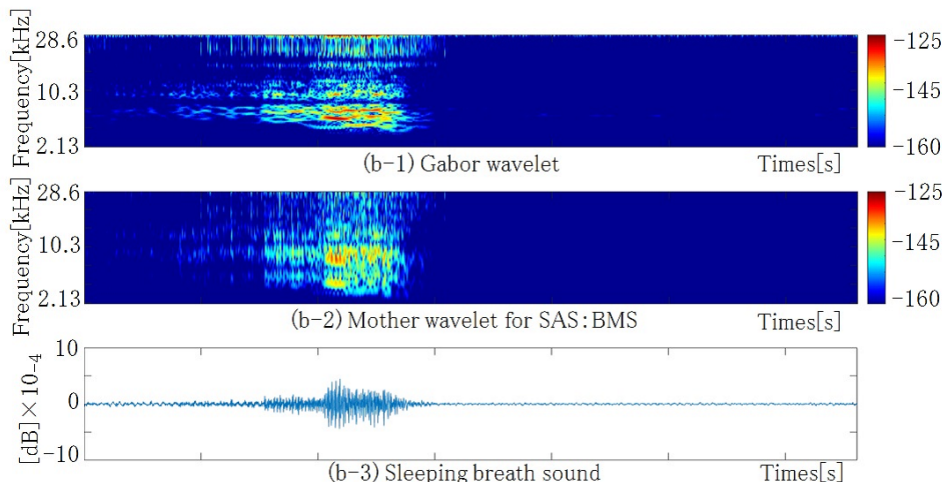


図 5.16 Example of analysis result of GW and mother wavelet for SAS : BMS, where is no problem health.

なお、今回用いる GW について、パラメータ δ_0 を BMS と同様のパラメータ δ_{L_n} に置き換え、BMS と同様に可変を持たせている。各パラメータは、 $A = 1.5$, $B = 0.5$, $\delta_{L_n} = 0.5$, $v_0 = 0.1$, 周波数 44.1kHz, 1 オクターブ 32 分割で $2^{\frac{3}{4}}\pi \sim 2^{-\frac{1}{2}}\pi$ である。

結果より、SAS キャリアの解析結果である図 5.15 について、GW の (a-1) よりも、BMS の (a-2) はの赤い部分、つまり WC の値が大きい部分が、時間軸および周波数軸の両方において局所的に集中している。また、健康上問題ない者の結果である図 5.16 について、GW の (b-1) よりも BMS の (b-2) の方が反応が薄くなっている。なお、従来の GW、すなわち δ_0 を任意の定数で固定した（ここでは $\delta_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$ ）WC の結果と、BMS の結果を比較したところ、高周波成分の特徴抽出において BMS よりも劣ることが確認できた。さらに、SAS の呼吸音が声道（上気道）から発せられることを考慮し、覚醒時の仰向け状態で開口と閉口の呼吸音を GW と BMS で比較した。結果、後者は開口時の特徴をより顕著に捉えていることも確認できた。

以上より、健康上問題ない者および SAS キャリアの睡眠中の呼吸音解析に関して、 δ_0 を固定、および周波数に応じて可変を持たせた GW よりも、BMS は特徴抽出適した MW であると確認できた。

5.6.2 SAS 専用マザーウェーブレットによる呼吸音の解析と定量評価

ここでは、第 5.5.1 章で設計した SAS 専用 MW を用いた定量評価を行うための手順と手法を述べる。定量評価は、2 パターン行う。最初のパターンは、第 5.4 章で 6 種類に分類された呼吸パターンのうち、パターン E を持つ者のみを対象とした、健康上問題のない者と、SAS 予備群およびキャリア判別分析。そして、2 つ目のパターンは、呼吸パターンに関わらず全被験者を対象としたものについて判別分析である。異常信号や音声信号の定量評価には、WC を用いた定量評価値 [74] や、周波数成分による定量評価値 [75] があるが、本論文では睡眠中の呼吸音を専用 MW で算出する WC を用いる。

なお前節までは、被験者を総合的な切り口で解析を行ったが、この章からは、個人内解析による評価とする。性別、体型別、喉の状態など、呼吸には個人差があるため、CWT による解析にも差異が生じるためである。

本節で解析対象とする呼吸音は、第 5.2 章で挙げた SAS キャリアの呼吸音の特徴である、呼吸リズム、高音圧をもとに、「呼吸リズムが一定のとき」と「高音圧＝呼吸リズムが一定でないとき」ときの 2 つのタイプとする。これら 2 パターンの呼吸音を BMS で解析し WC を求める。そして、その値を各被験者内で比較し、非線形判別分析により定量評価する。上記の手順は以下のような各 Step とする。

Step1 : 呼吸リズムが一定の呼吸音の切り出し

第 5.3 章の階段グラフより、呼吸リズムが一定の区間を検索し、ランダムに 5 個を選択する。それぞれの最大値を中心に前後 1 秒（最大値を含め 2 秒）を切出す。

Step2 : 高音圧の呼吸音の切り出し

第 5.4 章で呼吸パターンのクラスタリングに用いた（第 5.4 章の Step1 で切出した）各呼吸音の最大値を中心に前後 1 秒（最大値を含め 2 秒）を切出す。

Step3 : WC の算出

上記 Step1 と Step2 で切り出した 10 個の呼吸音について、BMS で WC を求める。BMS の各パラメータは、 $A = 1.5$, $B = 0.5$, $\delta_{L_n} = 0.5$, $v_0 = 0.1$, 周波数 44.1kHz, 1 オクターブ 32 分割で $2^{-\frac{1}{4}}\pi \sim 2^{-\frac{1}{2}}\pi$ である。

Step4 : 各周波数の代表最大 WC の取得

ここでは Step3 の条件で算出した WC について、周波数軸のみ着目する方法を考える。各被験者の呼吸音を Step1 と Step2 で切出したとき、呼吸音の長さに統一性がないためである。しかし、最大値にはランダム性があるため、以下のような方法をとる。

まず各周波数内で、時間幅 Δt 内の平均値を算出する。すると、周波数軸 : n 番目で固定した、時間幅 Δt により M 等分された時間軸 : m 番目の呼吸リズムが一定時の呼吸音の WC : CWC (constant rhythm continuous wavelet coefficient) の平均値は、次の式 (5.6) で表せる。なお、 i は被験者、 j は切り出した各呼吸音を区別する添え字とする。

$$\overline{CWC}_{i,j}^{n,m}(f,t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} CWC_{i,j}^{n,m}(f,t+\tau) d\tau \quad (5.6)$$

ただし, $i, j, m, n \in \mathbb{N}$, $f > 0, t > 0, \tau > 0 \in \mathbb{R}$. これより, 周波数軸 : n 番目の時刻 : m における WC の合計 $EngF_i^m$ は, 式 (5.6) を用いて, 以下のように表せる.

$$EngCF_{i,j}^m = \sum_{n=1}^N \overline{CWC}_{i,j}^{n,m}(f) \quad (5.7)$$

そして, 時刻 : m におけるその最大値を取得する.

$$CWC_{i,j}^{m\max} = \max_{i,j}^m \left(\overline{CWC}_{i,j}^{1,m}(f), \dots, \overline{CWC}_{i,j}^{n,m}(f), \dots, \overline{CWC}_{i,j}^{N,m}(f) \right) \quad (5.8)$$

高音圧の呼吸音の WC : HWC (high rhythm continuous wavelet coefficient) についても同様にして, 以下のそれぞれの式で表せる.

$$HWC_{i,j}^{n,m}(f, t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} HWC_{i,j}^{n,m}(f, t + \tau) d\tau \quad (5.9)$$

$$EngHF_{i,j}^m = \sum_{n=1}^N HWC_{i,j}^{n,m}(f) \quad (5.10)$$

$$HWC_{i,j}^{m\max} = \max_m \left(HWC_{i,j}^{1,m}(f), \dots, HWC_{i,j}^{n,m}(f), \dots, HWC_{i,j}^{N,m}(f) \right) \quad (5.11)$$

本論文では時間幅を $\Delta t = 10$, つまり 10 サンプル幅としている. この方法の例を図 5.17 に示す. この例では, 時刻 : m において周波数 : n 番目の CWC_n を取得している.

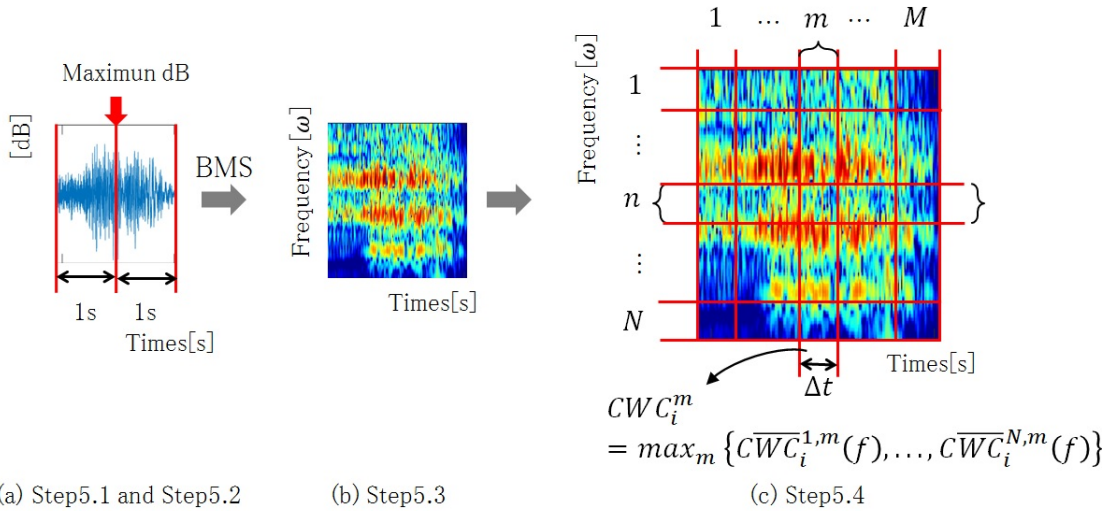


図 5.17 Example of getting wavelet coefficient from frequency and times, where is getting maximum from mean Δt for each frequency.

Step5 : 最大 WC と標準偏差の算出

Step4 の式 (5.8), 式 (5.11) をもとに, 各呼吸音ごとの最大 WC を求める. そして被験者 : i について, 呼吸リズムが一定のとき, 高音圧の呼吸音のとき, 両者を複合させた, 呼吸リズムが一定のときと高音圧の呼吸音のときの計 3 パターンについて, 最大

WC の標準偏差を算出する．呼吸リズムが一定のときの各呼吸音： $j = 1, \dots, 5$ の最大 WC とそれら 5 つの最大 WC の標準偏差は，次の式で表される．

$$CWC_{i,j\max} = \max_j (CWC_{i,j}^{1\max}, \dots, CWC_{i,j}^{m\max}, \dots, CWC_{i,j}^{M\max}) \quad (5.12)$$

$$\delta CWC_{i\max} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^5 (CWC_{i,j\max} - \overline{CWC_{i,j\max}})^2 \right\}^{1/2} \quad (5.13)$$

ただし， $\overline{CWC_{i,j\max}}$ は式 (5.12) の平均値である．同様にして，高音圧の呼吸音のときの各呼吸音： $j = 1, \dots, 5$ の最大 WC とそれら 5 つの最大 WC の標準偏差は，次の式で表される．

$$HWC_{i,j\max} = \max_j (HWC_{i,j}^{1\max}, \dots, HWC_{i,j}^{m\max}, \dots, HWC_{i,j}^{M\max}) \quad (5.14)$$

$$\delta HWC_{i\max} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^5 (HWC_{i,j\max} - \overline{HWC_{i,j\max}})^2 \right\}^{1/2} \quad (5.15)$$

ただし， $\overline{HWC_{i,j\max}}$ は，式 (5.14) の平均値である．そして，各被験者の呼吸リズムが一定のときと高音圧の呼吸音のときを複合させた呼吸音： $j = 1, \dots, 10$ の最大 WC とそれら 10 つの最大 WC の標準偏差は，次の式で表される．

$$CHCW_{i,j\max} = CWC_{i,j\max} + HWC_{i,j\max} \quad (5.16)$$

$$\delta CHCW_{i\max} = \left\{ \frac{1}{9} \sum_{j=1}^{10} (CHCW_{i,j\max} - \overline{CHCW_{i,j\max}})^2 \right\}^{1/2} \quad (5.17)$$

ただし， $\overline{CHCW_{i,j\max}}$ は，式 (5.16) の平均値である．

Step6 : 高音圧の呼吸音のとき同士の相互相関係数算出

Step4 の次の式 (5.18) より各被験者ごとに高音圧の呼吸音同士の相互相関係数 [77] を求める．高音圧の呼吸音のとき同士の相互相関係数は，周波数幅を F とすると，

$$WC_{H_a H_b} = \max \left(\frac{\frac{1}{F} \int_{-F/2}^{F/2} \overline{HWC}_{i,j}^{m_k}(f) \overline{HWC}_{i,j}^{m_l}(f + \tau) df}{\|\overline{HWC}_{m_k}(f)\| \|\overline{HWC}_{m_l}(f)\|} \right) \quad (5.18)$$

となる．ただし， $a, b \in \mathbb{N}$ は $a \neq b$ で呼吸音を区別するため添え字であり， $k > 0$, $l > 0 \in \mathbb{R}$ は時刻を区別するための添え字とする．

Step7 : 最大 WC の標準偏差と相互相関係数を用いた定量評価値の算出

健康上問題ない者，そして SAS 予備群およびキャリアを非線形判別分析 [79] により解析するための定量評価値として以下の 2 つを算出する．

標準偏差による定量評価値：Step5 で求めた式 (5.13)，式 (5.15)，および式 (5.17) から算出する以下の値．

$$\delta WC_{BMS} = \delta WC_{CH} - \min(\delta WC_{CC}, \delta WC_{HH}) \quad (5.19)$$

相互相関係数による定量評価値：Step6 で求めた式 (5.18) の値．

以上の Step を経て，非線形判別分析を行う．説明変数は，各被験者における式 (5.19) と式 (5.18)，目的変数は，健康上問題ない者，そして SAS 予備群およびキャリアとする．

まず，第 5.4 章の呼吸パターンのクラスタ分析で呼吸パターン E を持つ被験者について判別を行う．表 5.2 において呼吸パターン E を持つ者は，健康上問題ない者：4 名，SAS 予備群：1 名，軽度：1 名，中等度：2 名，重度：5 名の計 13 名である．この分析結果を表 5.3 に示す．なお，BMS, GW それぞれの右列に記した数字は，判別分析の結果によるフラグで，0：健康上問題ない者，1：SAS 予備群あるいはキャリアである．

表 5.3 The result from discriminant analysis by Equation(5.18) and Equation(5.19) from BSM and GW where is calculated participants who has breathing pattern E from Table 5.2. (0 : No health problem, 1 : Pre-SAS or SAS carrier.)

—	Sumple No.	BMS			GW		
		\overline{WC}_{HH}	δWC_{BMS}	Discrimi -natio	\overline{WC}_{HH}	δWC_{GW}	Discrimi -nation
No health problem	1	0.7206	2.1433	0	0.7726	4.2308	0
	2	0.7156	1.8595	0	0.7218	1.7141	0
	3	0.7006	4.1327	1	0.7756	3.8258	0
	4	0.6887	4.1335	1	0.7257	5.6031	0
Pre-SAS	5	0.6837	3.5400	1	0.7101	5.2526	1
Mild	6	0.7149	5.6670	1	0.7308	5.4305	0
Moderate	7	0.6714	5.0658	1	0.7075	3.2292	1
	8	0.7243	3.3765	1	0.7421	3.6687	0
Severe	9	0.6997	5.4624	1	0.7016	3.4456	1
	10	0.6773	3.3764	1	0.6921	1.4680	1
	11	0.6733	2.3672	1	0.6810	2.7852	1
	12	0.6486	1.1257	1	0.6599	1.3758	1
	13	0.6835	2.7459	1	0.6934	2.1719	1
—		Correct answer rate		84.62%	Correct answer rate		84.62%

表 5.4 The result from discriminant analysis by Equation(5.18) and Equation(5.19) from BSM and GW where is calculated doubt of SAS seriousness.

—	BMS			GW		
	NHP - Mild	NHP - Moderate	ALL	NHP - Mild	NHP - Moderate	ALL
No health problem (NHP)	3/ 4	3/ 4	2/ 4	3/ 4	2/ 4	2/ 4
Pre-SAS	1/ 1	1/ 1	1/ 1	1/ 1	1/ 1	1/ 1
Mild	5/ 5	5/ 5	5/ 5	3/ 5	2/ 5	2/ 5
Moderate	—	11/11	11/11	—	7/11	7/11
Severe	—	—	21/21	—	—	20/21
Correct answer rate	90.00%	95.23%	95.24%	70.00%	57.14%	78.57%

表 5.3 より, BMS による結果, GW による結果ともに正判別率は 84.62% (11/13 名) と等しく, SAS 予備群については正しく判別をしている. しかしながら, GW による結果では, SAS 軽度の者: 1/1 名と中等度の者: 1/2 名を健康上問題ない者, つまり現時点では SAS 予備群およびキャリアの疑いはないと判別している. いわゆる誤診断の可能性がある. 一方の BMS による結果では, 健康上問題ない者: 2/4 名を SAS 予備群およびキャリアの疑いがあると判別している.

次に, 第 5.4 章の呼吸パターンとは無関係に, 健康上問題ない者と SAS の重さの段階を別けて同様に判別分析を行う. 本論文では, SAS 予備群の早期発見を目的のひとつとしているため, 健康上問題ない者と SAS 予備群との判別に焦点を絞りたいが, 今回は SAS 予備群のサンプル数が十分でない. そのため, SAS 予備群と SAS の重さが軽い者を含めて判別を行うことにする. ここでの判別は次の 3 段階に別けて行う. まず健康上問題ない者から軽度の判別 (NHP-Mild), 次に健康上問題ない者から中等度の判別 (NHP-Moderate), そして全ての被験者の判別 (ALL) とする. その結果を表 5.4 に記す. ただし表の分数は, 分母: 被験者数, 分子: 正解判別数である.

表 5.4 より, BMS による結果では, SAS の重さによる 3 段階の判別 (表 5.4 の GW の 1 列, 2 列, 3 列と SAS の重さを進めた判別) すべてにおいて, SAS 予備群およびキャリアについての誤判断がない. しかしながら, GW による結果では誤判断がある, GW の誤判断の割合は, 3 段階の判別に関係なく一定だが, 先ほどのパターン E を持つ者を対象とした判別分析と同様に誤診の可能性がある. また, SAS 予備群については, BMS および GW の結果も正しく判別をしている. そして, 健康上問題ない者を SAS 予備群およびキャリアの疑いがあると判断した割合については, BMS が GW よりも比較的低くなっている. この割合は, SAS の重さによる 3 段階の判別を進めるにしたがって, 若干多くなっている. なお, この理由について, 生の呼吸音データを合わせて考慮してみると, SAS の重さが進行するほど高音圧な呼吸音が常習になることに起因が考えられる. 高音圧な呼吸音が常習な者と健康上問題ない者の判別に用いた, 説明変数式 (5.19) と式 (5.18) の値が近くなり, 後者に SAS 予備群およびキャリアの疑いが生じている. ただし, SAS 予備群およびキャリアの早期発見を目的とした, 健康上問題ない者と, SAS 予備群および軽度から中等度の判別には期待ができる.

以上より, SAS 専用 MW をもとに算出した WC の標準偏差および相互相関係数を定量評価値とした判別分析は, 従来の GW による同様の判別分析と比較して, 第 5.4 章の呼吸パターン E を持つ者, および SAS 予備群およびキャリアの判別に良好な結果が得られると示された. BMS を用いた SAS の重さによる段階的な判別分析では, 今回はサンプル数が少ないものの, 段階を軽度, 中等度とした結果においては, 健康上問題ない者, および SAS 予備群およびキャリアの判別における有用性が確認できた.

5.7 まとめ

この章では, SAS キャリアの睡眠中の呼吸音の特徴に着目し, 基礎統計解析による, 健康上問題ない者, SAS 予備群およびキャリアの音声解析を行った. さらに, SAS 専用の MW を設計し, 健康上問題ない者と, SAS 予備群およびキャリアの判別を行った. 主な結果は以下のとおりである.

1. SAS キャリアの睡眠中の呼吸音に共通する, 無呼吸, 呼吸リズム, 高音圧の 3 つの特徴をあげ, これに着目した 4 段階の SAS 判別法および予備群の早期発見プロセスを提案した.

2. SAS 予備群およびキャリアの無呼吸状態を確認するための、呼吸リズムの階段グラフの作成方法を提案した。このグラフを作成することで、無呼吸の状態、無呼吸回数、呼吸のリズムが一定に保たれている区間の状態を視覚的に確認できることを示した。
3. 高音圧な睡眠中の呼吸音を切り出し、それをもとに呼吸パターンのクラスタ分析を行った。6 種類のパターンがあり、そのうち 5 種類のいずれかを持つと、SAS 予備群およびキャリアの可能性が疑われることを示した。
4. SAS 専用の MW を設計した。これを用いて、呼吸リズムが一定のとき、高音圧のときの呼吸音の WC を算出した。さらに、これらの WC から個人内の標準偏差および相互相関係数を算出し、定量評価値を出した。これにより、上記 3 では判別が困難であった、すべての SAS の重さに共通する呼吸パターンの判別、および健康上問題ない者、そして SAS 予備群およびキャリアの判別において、従来の GW より良好な結果が得られた。

第6章 結言および将来展望

6.1 結言

本論文では、Gabor wavelet (GW) の基礎理論をもとに、第3章では、GW を用いた実用的な近似タイトウェーブレットフレーム (approximate tight wavelet frame : ATWF) を設計した。また第4章では、GW を用いた連続ウェーブレット変換 (continuous wavelet transform : CWT) の高速化について述べた。さらに第5章ではGW を改良した睡眠時無呼吸症候群 (SAS : Sleep Apnea Syndrome) 専用のマザーウェーブレット (mother wavelet : MW) を設計し、定量評価を行った。これらの結果は以下のとおりである。

【第3章】 Gabor wavelet を用いた近似タイトウェーブレットフレームの設計

複素指数関数に対する GW を用いた変換式について考察し、その結果をもとに、いくつかの実用的な GW を用いた ATWF を構築した。

まず、1つの帯域に限定した GW による変換式を用いて、理論面および数値計算の解析から歪率を算出し、双方の数値の一致を確認した。そして、楕円テータ関数を用いて、時間軸、周波数軸の歪成分のエネルギーの収束性を証明した。次に、GW を2オクターブに配置した実験モデルでは、時間軸および周波数軸の両方向に離散的に展開した実用的な ATWF を構築し、理論的に歪率や周波数特性の解析を行った。これらより、高い精度を保ちながら GW による ATWF の実現が可能であることが確認された。

【第4章】 Gabor wavelet を用いた連続ウェーブレット変換の高速化

適切に設計された、周波数領域にコンパクトサポートなウェーブレット関数を持つ性質に着目し、GW を用いた CWT の高速化を提案した。

まず、基本原理を説明するために必要な、周波数領域にコンパクトサポートな関数の特徴の定理を示した。次に、この定理を用いて以下のことを証明した。すなわち、適切に設計された、周波数領域にコンパクトサポートなウェーブレット関数による、時間領域の連続的なウェーブレット係数は、適切な等間隔をおいて離散的にウェーブレット係数を間引いて計算し、さらに適切に設計された補間関数を用いて間引いた間を補間することにより、求めることができる。そして、この原理を応用し、GW を用いた CWT における、演算量削減法を提案した。この提案では、従来の GW の計算の制度を保持した計算の高速化が確認された。

【第5章】 Gabor wavelet を改良した SAS 専用マザーウェーブレットの設計と音声解析への応用

音声データのみを用いた、SAS 判別法、および予備群の早期発見プロセスを提案した。

まず、SAS キャリアの睡眠中の呼吸音から共通する特徴を示した。そして、無呼吸の状態、呼吸リズムの状態を視覚的に確認できるグラフの作成、呼吸パターンのクラスタ分析を行った。これらより、SAS 予備群およびキャリアの疑いを簡易的に確認できることを示した。さらに、SAS 専用の MW を設計し、これを用いて、定量評価を行った。基礎統計分

析では判別が困難であった呼吸音，そして SAS 予備群およびキャリアの判別において，従来の GW より良好な結果が得られた。

6.2 今後の課題および展望

前節の結言を含め，本論文および関連分野における今後の課題，展望について述べる。

本論文では解決しきれなかった内容，その課題は以下のとおりである。

1. GW のパラメータ δ_0 は経験法則により 0.5~2 の範囲に設定されることが多い。本論文第 3 章ではこの範囲の δ_0 を一般的な設定値として扱い，実用的な ATWF の設計を行った。今後は， δ_0 の最適値を求める視点も必要と考える。
2. 本論文第 5 章では，GW を改良した SAS 専用の MW を設計し解析を行った。この SAS 専用 MW について，第 4 章の演算量削減法を適用した解析を適用し，その減算効果と精度，および計算速度効果を検証，把握する意味は大きいと考える。今後，GW に改良を施した MW を設計する際の指標となることを期待する。
3. 同じく第 5 章において，健康上問題ない者と SAS 予備群のサンプル数は十分ではない。今後は，サンプル数の充足と共に，本論文の提案への改良と精度向上を期待する。

本論文を執筆するにあたり，研究全般への課題と展望は以下のとおりである。

1. GW に限らず，ウェーブレット全般の研究においては，数学的理論に特化した研究，あるいは，既存の理論をもとに工学に応用させた研究報告が多い。そのため，理論と応用で別途に研究が発展している傾向が見受けられる。今後の双方の協力・連携に期待する。
2. また，長大なデータを CWT を用いて解析する際には，膨大な計算量と時間を必要とする。この点に着目し，本論文第 4 章では，GW を用いた CWT の高速化（演算量の削減）を理論的に考察した。しかし，プログラミングのアルゴリズムによっては，この演算削減理論を十分に活かすことができない。効率的なアルゴリズムを交えた研究の発展を望む。
3. 上記に関連するが，CWT を用いたデータ解析を行うにあたり，解析対象となるデータのポイントを絞る必要がある。本論文第 5 章では，基礎統計学を用いてポイントを抽出したが，他分野の手法との組み合わせによる有用な活用を期待する。
4. 本論文第 5 章ではウェーブレット変換を SAS の音声解析へ応用した。医療分野に限らず，ウェーブレット変換は多岐の分野で応用・発展が可能である。応用分野の専門家や機関との協力・連携は重要であり，これらを通じた今後のウェーブレット並びに工医学ほかの発展に期待する。

参考文献

- [1] はじめての計測工学 改訂第2版 (KS 理工学専門書), 南茂夫, 木村一郎, 荒木勉, 講談社, 改訂第2版, 2012.
- [2] 計測工学, 鈴木亮輔, 小寺秀俊, 横小路泰義, 田中功, 中部主敬, 富井洋一, 神野郁夫, 簗島 弘二, 朝倉書店, 2014.
- [3] 計測システム工学の基礎, 西原主計, 山藤和男, 松田康広, 森北出版, 第3版, 2012.
- [4] 和田成夫, よくわかる信号処理 - フーリエ解析からウェーブレット変換まで, 森北出版, 2009.
- [5] 貴家仁志, デジタル信号処理のエッセンス, 昭晃堂, 2007.
- [6] V. Alan Oppenheim and W. Ronald Schaffer, Discrete-time Signal Processing, Prentice-Hall, 1989.
- [7] 中村周, フーリエ解析 (応用数学基礎講座), 朝倉書店, 2003.
- [8] 城戸健一, デジタルフーリエ解析 1 基礎編 (1), コロナ社, 2007.
- [9] M.J. Lighthill, An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions (Cambridge Monographs on Mechanics), Cambridge University Press, 1958.
- [10] M.J. Lighthill, フーリエ解析と超関数, ダイヤモンド社, 1975.
- [11] 山本貴弘, 石原聖司, ウェーブレットフレーム特徴に基づく MRF モデルを用いたテクスチャ画像の領域分割, 映像情報メディア学会年次大会講演予稿集, Vol. 17-3, pp.1-2, 2009.
- [12] 石川孝明, 渡辺裕, フレーム展開による信号の冗長度制御方式に関する検討, 電子情報通信学会技術研究報告, 108 (128), pp.61-66, 2008
- [13] 新井 仁之, ウェーブレット・フレームとその錯視研究への応用, Journal of the Visualization Society of Japan Vol. 29 (115), pp.236-243, 2009.
- [14] 芦野隆一, 隙間のないウェーブレットフレームによる超局所フィルタリング, 実解析学シンポジウム, 2001.
- [15] 章忠, 戸田浩, シフト不変性を実現する複素数離散ウェーブレット変換, 数理解析研究所講究録, 第 1622 巻, 2009.
- [16] I. Daubechies : Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.

- [17] H. Toda, Z. Zhang and T. Imamura, Perfect-translation-invariant customizable complex discrete wavelet transform, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process*, Vol.11, No.4, 1360003 [20 pages], 2013.
- [18] 戸田浩, 章忠, 川畑洋昭, 最新ウェーブレット実践講座, ソフトバンククリエイティブ, 2005.
- [19] 新誠一, 中野和司, ウェーブレット変換ハンドブック, 朝倉書店, 2005.
- [20] 芦野隆一, 山本鎮男, ウェーブレット解析, 共立出版, 1997.
- [21] 山田道夫, 萬代武史, 芦野隆一, 応用のためのウェーブレット, 共立出版, 東京, 2016.
- [22] C.K. Chui, ウェーブレット応用 - 信号解析のための数学的手法 (数理科学セミナー), 東京電機大学出版局, 1997
- [23] B.B. Hubbard, ウェーブレット入門 - 数学的道具の物語, 朝倉書店, 2003.
- [24] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing, Third Edition: The Sparse Way*, Academic Press, 2008.
- [25] P. Goupillaud, A. Grossman, and J. Morlet, Cycle-Octave and Related Transforms in Seismic Signal Analysis. *Geoexploration*, Vol.23, pp.85-102, 1984.
- [26] D.L. Donoho and J. M. Johnstone, Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage, *Biometrika* Vol. 81, Issue 3, pp.425-455, 1994.
- [27] D.L. Donoho, I.M. Johnstone, G. Kerkyacharian and D. Picard, Wavelet Shrinkage: Asymptopia, *J.R. Statist. Soc. B*, 57-2, pp.301-369, 1995.
- [28] D.L. Donoho and I.M. Johnstone, Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage, *J. America Statist. Assoc.*, 90-432, pp.1200-1244, 1995.
- [29] Z. Zhang, J. Suzuki, T. Akiduki, T. Miyake and T. Toda, Consideration of Composing Method of the Optimized Real-Signal Mother Wavelet, *Proceeding of the 2016 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition (ICWAPR2016, Jeju, South Korea, 10-13 Jul)*, pp.107-113, 2016.
- [30] 章忠, 池内宏樹, 斎木典保, 今村孝, 石井秀明, 戸田浩, 三宅哲夫, 寄生的離散ウェーブレット変換およびその異常信号検出への応用, *日本機械学会論文集. C編 75(757)*, pp.2529-2536, 2009.
- [31] 酒井智弥, 内田貴大, 坂口亜絵梨, 喜安千弥, 宮原末治, 岡三喜男, 肺音認識のための信号処理: 連続性ラ音・断続性ラ音の分離と識別, *電子情報通信学会技術研究報告. PRMU, パターン認識・メディア理解 114(41)*, pp.55-60, 2014.
- [32] 石川康宏, *臨床医学のためのウェーブレット解析*, 医学出版, 2000.
- [33] 三輪昭生, 藤原久永, 福田章一郎, 福島邦博, 国末和也, 吉田浩治, 戸田浩, 章忠, 川畑洋昭, *ITヘルスケア誌*, 2巻2号, pp.80-94, 2008.

- [34] C. Bishop, Pattern Recognition and Machine Learning (Information Science and Statistics), Springer, 2nd printing, 2011.
- [35] I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer. Citation, J. Math. Phys. 27, 1271, J. Math. Phys., Vol. 27, No.5, 1986.
- [36] A. Grossmann, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, Reading and understanding continuous wavelet transforms, Wavelets, Springer Berlin Heidelberg, 1989.
- [37] C.K. Chui, An Introduction to Wavelets, Academic Press, 1992.
- [38] S.G. Mallat, A Wavelet Tour of Signal Processing, 3rd ed. Academic Press, 2008.
- [39] 富士電子株式会社, 富士電子式メータ用語説明, 2006.
- [40] 一般社団法人日本電気計測器工業会, 技術解説 オーディオ・映像機器用測定器&システム ひずみ率測定器, 2012.
- [41] 杉浦光夫, 解析入門 (2) 基礎数学 3, 東京大学出版会, 1985.
- [42] 寺沢寛一, 自然科学者のための数学概論 増訂版改版, 岩波書店, 1983.
- [43] 森口繁一, 一松信, 級数・フーリエ解析 (岩波 数学公式 2), 岩波書店, 1987.
- [44] A. Aldroubi and M. Unser, Wavelets in Medicine and Biology, CRC Press, 1996.
- [45] O. Rioul and P. Duhamel, Fast algorithms for discrete and continuous wavelet transforms, IEEE transactions on information theory 38(2), pp.569-586, 1992.
- [46] M.J. Shensa, The discrete wavelet transform: Wedding the trous and Mallat algorithms. IEEE Trans. Signal Process. 40(10), pp.2464-2482, 1992.
- [47] 章忠, 中堀智之, 川畑洋昭, 高速ウェーブレット変換およびその脳波解析への応用, 日本機械学会論文集 (C 編), 65 巻 633 号, 1915-1921, 1999.
- [48] 高橋宣明, 工学系学生のためのヒルベルト空間入門, 東海大学出版会, 2000.
- [49] T. Kato, Z. Zhang, H. Toda, T. Imamura, T. Miyake, A novel design method for directional selection based on 2-dimensional complex wavelet packet transform, Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process, 11 (4), Article ID:1360010 [27], 2013.
- [50] H. Toda, Z. Zhang, Orthonormal basis of wavelets with customizable frequency bands, to appear in Int. J. Wavelets, Multiresolut. Inf. Process.
- [51] H. Toda, Z. Zhang, Orthonormal wavelet basis with arbitrary real dilation factor, Int. J. Wavelets, Multiresolut. Inf. Process, 14 (3), Article ID:1650010 [33 pages], 2016.
- [52] H. Toda, Z. Zhang, Signal quantitative analysis using customizable perfect-translation-invariant complex wavelet functions, Int. J. Wavelets, Multiresolut. Inf. Process, 12 (4), Article ID:1460010 [29 pages], 2014.

- [53] H. Toda, Z. Zhang and T. Imamura, Practical design of perfect-translation-invariant real-valued discrete wavelet transform, *Int. J. Wavelets, Multiresolut. Inf. Process*, 12 (4), Article ID:1460005 [27 pages], 2014.
- [54] H. Toda, Z. Zhang and T. Imamura, Perfect-translation-invariant variable-density complex discrete wavelet transform, *Int. J. Wavelets, Multiresolut. Inf. Process*, 12 (4), Article ID:1460001 [32 pages], 2014.
- [55] H. Toda, Z. Zhang and T. Imamura, Perfect-translation-invariant customizable complex discrete wavelet transform, *Int. J. Wavelets, Multiresolut. Inf. Process*, 11 (4), Article ID:1360003 [20 pages], 2013.
- [56] H. Toda, Z. Zhang, T. Imamura, The design of complex wavelet packet transforms based on perfect translation invariance theorems, *Int. J. Wavelets, Multiresolut. Inf. Process*, 8 (4), pp.537–558, 2010.
- [57] H. Toda, Z. Zhang, Perfect translation invariance with a wide range of shapes of Hilbert transform pairs of wavelet bases, *Int. J. Wavelets, Multiresolut. Inf. Process*, 8 (4) pp.501–520, 2010.
- [58] Z. Zhang, N. Komazaki, T. Imamura, T. Miyake, H. Toda, Directional selection of two-dimensional complex discrete wavelet transform and its application to image processing, *Int. J. Wavelets, Multiresolut. Inf. Process*, 8 (4), pp.659–676, 2010.
- [59] 佐藤公則, 睡眠時無呼吸症候群の診療メソッド - 睡眠呼吸障害の集学的治療, 中外医学社, 2016.
- [60] 厚生労働省, 厚生労働省 生活習慣病予防のための健康情報サイト 睡眠時無呼吸症候群 e-ヘルスネット 情報提供 (online), available from <<https://www.e-healthnet.mhlw.go.jp/information/heart/k-02-002.html>>, (参照日 2016 年 11 月 22 日).
- [61] 国土交通省, 「睡眠時無呼吸症候群」に注意しましょう! (online), available from <<http://www.mlit.go.jp/kisha/kisha03/09/090318/090318.pdf>>, (参照日 2016 年 11 月 22 日).
- [62] 塩見利明, 睡眠無呼吸症: 広がる SAS の診療, 朝倉書店, 2013.
- [63] 白濱龍太郎, 図解 睡眠時無呼吸症候群を治す! 最新治療と正しい知識, 日東書院本社, 2015.
- [64] 内田直, 好きになる睡眠医学 第 2 版, 講談社, 2013.
- [65] A. Figliola and E. Serrano, Analysis of physiological time series using wavelet transforms, IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, 2002.
- [66] M. Emin Tagluk, M. Akin and N. Sezgin, Classification of sleep apnea by using wavelet transform and artificial neural networks, *Expert Systems with Applications*, 2010.

- [67] VP. Rachim, G. Li and WY. Chung, Sleep aponea classification using ECG-signal wavelet-PCA features, Biomed Mater Eng, Vol. 24, Issue 6, 2014.
- [68] Z. Zhang, I. Sawamura, H. Toda, T. Akiduki and T. Miyake, A new approach to diagnose Sleep Apnea Syndrome using a continuous wavelet transform, 2015 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition (ICWAPR), 2015.
- [69] F. Dalmaso and R. Prota, Snoring: analysis, measurement, clinical implications and applications, Eur Respir J, 9 (1), 1996.
- [70] J. MacQueen, Some methods for classification and analysis of multivariate observations, Berkeley Sympp.on Math. Statist. and Prob. Proc. Fifth Berkeley Sympp.on Math. Statist. and Prob., Vol. 1 Univ. of Calif. Press , 1967.
- [71] 加科優希, 中田日都, 坂田直人, 中島弘史, 山口泰弘, 呼吸音による無呼吸低呼吸指数予測モデルの分析, 電子情報通信学会技術研究報告. SIP, 信号処理 Vol. 114, No. 474, 2015.
- [72] 高橋宏明, 睡眠時呼吸障害 - その診断と治療, 金芳堂, 1993.
- [73] 玉置淳, 全部見える呼吸器疾患 - スーパービジュアル, 成美堂出版, 2013.
- [74] 章忠, 池内宏樹, 齋木典保, 今村孝, 石井秀明, 戸田浩, 三宅哲夫, 寄生的離散ウェーブレット変換およびその異常信号検出への応用, 日本機械学会論文集 (C 編) , 75 巻, 757 号, pp.163-170, 2009.
- [75] 荒川薫, 乳幼児泣き声の定量的解析と啼泣原因推定, 電子情報通信学会基礎・境界サイエティ Fundamentals Review, Vol.1, No.2, pp..21-25, 2007.
- [76] 井上勝裕, ウェーブレットの脳波解析への応用, 数理解析研究所講究録 第 1622 巻, 2009.
- [77] 城戸健一, デジタルフーリエ解析 2 基礎編 (2), コロナ社, 2007.
- [78] 柳井晴夫, 高根芳雄, 多変量解析法 現代人の統計, 朝倉書店, 1997.
- [79] 安道知寛, Kernel Flexible Discriminant Analysis による高次非線形データの判別とその応用, 統計数理 51 (2) , pp.389-406, 2003.

論文目録

査読付学術論文

1. 白砂絹和, 章忠, 戸田浩, 三宅哲夫, “Gabor Wavelet を用いた近似タイトウェーブレットフレームの設計”, *Journal of Signal Processing*, Vol.20, No.1, pp.41-53, 2016.
2. 白砂絹和, 章忠, 三宅哲夫, 秋月拓磨, 戸田浩, “Gabor Wavelet を用いた連続ウェーブレット変換における演算量の削減”, *日本応用数学会論文誌*, 採録決定 (2017年2月3日通知受信).

査読付国際会議論文

1. Miyori SHIRASUNA, Zhong ZHANG, Hiroshi TODA and Tetsuo MIYAKE, “APPROXIMATE TIGHT WAVELET FRAME USING GABOR WAVELET”, *Proceedings of the 2015 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition(ICWAPR2015, Guangzhou, China 12-15 July)*, pp.105- 110, 2015.

謝辞

この博士論文は、多くの方々のお力添えとご支援のもと執筆しました。皆さまからのご厚意に心より感謝をいたしております。

章忠教授，戸田浩研究員。懇切丁寧なご指導とご鞭撻を賜りました。工学的な感覚と研究の基礎が身に付いてない私を根気よく見守り，お付き合いくださいました。両先生のお心遣いにより，今日に至ることができました。月並みな言葉でしか謝意を表すことができず恐縮ですが，大変感謝いたしております。どうもありがとうございました。

飯田明由教授，内山直樹教授，三宅哲夫准教授。本論文の審査にご快諾を頂き，ご指導，アドバイスを賜りました。どうもありがとうございました。

本学 安田好文元客員教授，石川医院 石川康弘医院長，平塚市民病院 持丸文雄元副院長。SAS 音声のサンプルデータ収集にあたり，ご尽力を賜りました。どうもありがとうございました。

豊橋メイツ睡眠障害治療クリニック 山本勝徳事務長，坂名智課長，スタッフの皆さま，SAS 音声被験者の皆さま。音声データのご提供とご協力を賜りました。どうもありがとうございました。

大阪教育大学 芦野隆一教授，守本晃准教授，流通経済大学 井川信子教授，東海大学 藤ノ木健介講師。学会，シンポジウムでご助言やご意見を賜りました。どうもありがとうございました。

日本女子大学 故貝塚徹元教授，峰村勝弘元教授。ご指導に感謝いたしております。どうもありがとうございました。

本学 秋月琢磨助教授，新潟大学 今村孝准教授。事務的な手続きなど承ってくださいました。どうもありがとうございました。

本学教務課 前田勝典さん，同研究室 鈴木隼爾さん。登校の度にお世話になりました。どうもありがとうございました。

芝浦工業大学 齋藤真講師，尾崎匠さん。ご助言を賜りました。どうもありがとうございました。

Trento 大学 Enzo Loner 講師，Giulianna Loner さん。遠くから励ましてくれました。Grazie mille.

高校時代の数学恩師 荒井純先生。ご指導に感謝いたしております。どうもありがとうございました。

東京都千代田区立教育研究所 川西昭治元所長，日本女子大学 立花厚子元准教授，温かいお心配りを賜りました。どうもありがとうございました。

父，母，姉，弟。感謝しております。どうもありがとうございました。

いまは亡き愛猫さくら，愛犬べる。どうもありがとう。

2017年01月 白砂 絹和