Homology of q-cycles

Ko-Ki Ito

Abstract

The Euler type integral defines a pairing between (singular) homology with local coefficients and (twisted) de Rham cohomology([1]), and its q-analogue has been introduced in [2]. This q-analogue is also explained in terms of a comparison isomorphism between (Čech) cohomology with local coefficients and (twisted) de Rham cohomology in [3]. The author has introduced a q-analogue of D-module (q-difference module) in the case of dimension 1 for the purpose of understanding [3] sheaf-theoretically and for solving the conjectures (Čech-de Rham isomorphism, Euler number, vanishing theorem) in [3]. ([5][6]) The cohomology in [3] describe (its dual of) the solution complex of our q-difference module.

In this paper, we introduce homology to be dual of the above q-cohomology. q-cycles in [2] correspond to q-analogues of (noncompact) locally finite chains. We need regularize Jackson integrals over such q-cycles. Essentially, a regularization of such a q-cycle has been introduced in [3]. Nevertheless, such a regularization has not been understood as a compact chain. Thus, we introduce q-cycles including compact ones in the case of dimension 1.

q サイクルのホモロジー

伊　藤　公　毅

1　導入

局所系係数（特異）ホモロジーと（ツイスト）ド･ラームコホモロジーのペアリングはオイラー型積分で記述される（[1]）が、その q 類似について［2］で論じられている。また、局所系係数（チェック）コホモロジーと（ツイスト）ド・ラームコホモロジーの比較同型という立場からも論説［3］で論じられている。この論説［3］を層複体のコホモロジーとして理解すること、或いはそこで提示されている予想（Čech-de Rham 同型、オイラー数、消滅定理）の証明を目指して、筆者は $\mathscr{D}$ 加群の q 類似を 1 次元コンパクトトーリック多様体(即ち射影直線)上に導入した。([5]、[6]）その解複体（の双対）のコホモロジーを記述とするものとして、ド・ラームコホモロジーやチェックコホモロジーは理解出来る。

本小論では、それらと双対であるべきホモロジーの定義 [1] を提案する。論説［2］で述べられている q サイクルは、（コンパクトではない）局所有限チェインの q 類似に相当するものである。この q サイクル上でのジャクソン積分は、一般に正則化を行う必要がある。サイクルの正則化の q 類似に相当するものについても、（実質的には）［3］で述べられている。しかしながら、正則化を何らかのコンパクトなチェインと理解するには至っていない。（試みとしては [4] があるが、中途半端であり、自然さに欠ける箇所が多かった。）そこで、本小論では「コンパクト」な q サイクルとして（一応）機能しうる概念を（複素）1 次元の場合に導入する。

以下、$0<q<1$ とする。[2] 尚、本文中では証明を与えない。従って、真偽が正式には確定していないという意味を込めて「“ 命題 ”」と記すことにした。

2　q 差分加群のド・ラーム複体と解層（[5]［6］のレビュー＋α）

q シフト作用素を考える際には、$\mathbb{P}^1$はトーリック多様体と理解する :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}[t^-] & \hookrightarrow & \mathbb{C}[t^+,t^-]/(t^+t^- - 1) & \hookleftarrow & \mathbb{C}[t^+] \\ & \longleftarrow\!\!- & \underset{0}{\bullet} & -\!\!\longrightarrow & \\ & - & & + & \\ \mathbb{C}_- := \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} & \hookleftarrow & \mathbb{C}^* & \hookrightarrow & \mathbb{C}^* \cup \{0\} =: \mathbb{C}_+. \end{array}$$

以下、$(\varsigma_0,\ldots,\varsigma_p) \in \{+,-\}^{p+1}$に対し、

$$\mathbb{C}_{\varsigma_0\cdots\varsigma_p} := \begin{cases} \mathbb{C}^* \cup \{0\} & \{\varsigma_0,\ldots,\varsigma_p\} = \{+\} \\ \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} & \{\varsigma_0,\ldots,\varsigma_p\} = \{-\} \\ \mathbb{C}^* & \{\varsigma_0,\ldots,\varsigma_p\} = \{+,-\} \end{cases}$$

とおき、集合 $A \subset \mathbb{C}_{\varsigma_0\cdots\varsigma_p}$が $q^{\varsigma_0\cdots\varsigma_p}$-不変であるとは、$q^{\varsigma_k\nu}A \subset A$ が $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$k=0,\ldots,p$ で成立することと定める。$q^{\pm}$-不変開集合上では$\partial_{q^\pm}: f \mapsto \dfrac{f(t^\pm)-f(qt^\pm)}{(1-q)t^\pm}$が定義されることに鑑みて、$\mathbb{C}_{\varsigma_0\cdots\varsigma_p}$上の $q^{\varsigma_0\cdots\varsigma_p}$- 不変開集合 $V_{\varsigma_0\cdots\varsigma_p}$の disjoint union $\displaystyle\coprod_{(\varsigma_0,\ldots,\varsigma_p)\in\{+,-\}^{p+1}} V_{\varsigma_0\cdots\varsigma_p}$に対し、

$$\mathscr{D}^p_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}\left(\coprod V_{\varsigma_0\cdots\varsigma_p}\right) := \prod \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_{cl}}(V_{\varsigma_0\cdots\varsigma_p})\langle \partial_{q^{\varsigma_0}},\ldots,\partial_{q^{\varsigma_p}}\rangle$$

とおく。但し、$t^+\partial_{q^+} + t^-\partial_{q^-} + (1-q^{-1})\,\partial_{q^+}\partial_{q^-}$ 等が生成する両側イデアル（関係式）でわっておく。すると、$\mathscr{D}^p_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}$ は「位相」空間 ${}_q\mathbb{P}^1_p := \coprod \mathbb{C}_{\varsigma_0\cdots\varsigma_p}$ 上の層を定める。但し、$\mathbb{C}_{\varsigma_0\cdots\varsigma_p}$の開集合としては $q^{\varsigma_0\cdots\varsigma_p}$- 不変なものだけを採用し、開集合 U の被覆 $\{U_i\}_i$ としては $U=\bigcup U_i$ に加えて $U^{+-}=\bigcup U_i^{+-}$が成立するものだけに限定することでグロタンディーク位相を入れる。ここで、開集合 V に対し V^{+-} は $V\cap\mathbb{C}_{+-}$の最大 q^{+-}-不変開部分集合を表すものとする。

次に、$\mathbb{P}^1$ に別のグロタンディーク位相を入れた空間 ${}_q\mathbb{P}^1$ を以下で定める：開集合としては q^+-不変開集合$\cup q^-$-不変開集合なるものだけを採用し、開集合 U の被覆 $\{U_i\}_i$ としては、

$$\bigcup U_i^+ = U^+、\bigcup U_i^- = U^-、\bigcup U_i^{+-} = U^{+-}$$

が成立するものだけに限定する。ここで、開集合 V に対し V^+ は $V\cap\mathbb{C}_+$ の最大 q^+- 不変開部分集合、V^- は $V\cap\mathbb{C}_-$ の最大 q^-- 不変開部分集合を表すものとする。サイトとしての射 a_0 : ${}_q\mathbb{P}^1_0 \longrightarrow {}_q\mathbb{P}^1$ を 函手 $U^+ \amalg U^- \leftarrow\!\shortmid U$ で定めると、以下が成立する：

“命題”1 ${}_q\mathbb{P}^1_\bullet = ({}_q\mathbb{P}^1_p)_{p\geq 0} = \mathrm{cosk}_0({}_q\mathbb{P}^1_0/{}_q\mathbb{P}^1) = \left(\underbrace{{}_q\mathbb{P}^1_0 \times_{{}_q\mathbb{P}^1} \cdots \times_{{}_q\mathbb{P}^1} {}_q\mathbb{P}^1_0}_{(p+1)\ \text{times}}\right)_{p\geq 0}$ で単体的空間になり、$a_0 : {}_q\mathbb{P}^1_0 \longrightarrow {}_q\mathbb{P}^1$ は普遍的 cohomological descent であり、特に、${}_q\mathbb{P}^1$ 上の層の複体 $\mathscr{F}^\bullet$ に対して $\mathbb{R}a_*a^{-1}\mathscr{F}^\bullet \cong \mathscr{F}^\bullet$。

以上の準備の下、単体的空間 ${}_q\mathbb{P}^1_\bullet$ 上に q 差分加群が定義できる。我々が研究する q 差分加群

$\mathscr{M}^\bullet$ は以下で定義される：$\{b_\chi(t)\}_{\chi\in\mathbb{Z}}$ を有理函数 $b_\chi(t)\in\mathbb{C}(t)$ の族で、$b_{\chi+\chi'}(t)=b_\chi(t)b_{\chi'}(q^\chi t)$ を満たすものとする。この b 函数 $\{b_\chi(t)\}_{\chi\in\mathbb{Z}}$ に対し、$\mathscr{M}^\bullet$ を $\mathscr{D}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}$ の $(b^-_\chi\sigma^\chi_q-b^+_\chi)$ が生成する左イデアルによる商とする。 但し σ^χ_q は、$\chi\geq 0$ に対しては $f(t^+)\mapsto f(q^\chi t^+)$ 、$\chi\leq 0$ に対しては $f(t^-)\mapsto f(q^{|\chi|}t^-)$ で定る q シフト作用素を表す。また b_χ は、$\chi\geq 0$ に対しては $b_\chi(t^+)$ 、$\chi\leq 0$ に対しては $b_\chi\left(\dfrac{1}{t^-}\right)$ を表すものとし、$\chi\geq 0$ に対し $b^\pm_\chi$ は $b_\chi=\dfrac{b^+_\chi}{b^-_\chi}$ を満たすような互いに素な t^+ の多項式、$\chi\leq 0$ に対し $b^\pm_\chi$ は $b_\chi=\dfrac{b^+_\chi}{b^-_\chi}$ を満たすような互いに素な t^- の多項式とする。

この q 差分加群 $\mathscr{M}^\bullet$ のド・ラーム複体 $DR\mathscr{M}^\bullet$ を

$$DR\mathscr{M}^\bullet:=\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}}(\mathscr{O}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet},\mathscr{M}^\bullet)\text{、但し }\mathscr{O}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}:=a^{-1}\mathscr{O}_{{}_q\mathbb{P}^1}$$

と定義する。[3] ここで $\mathscr{O}_{{}_q\mathbb{P}^1}$ は、忘却函手が定める射 $\mathbb{P}^1_{cl}\longrightarrow{}_q\mathbb{P}^1$ による古典的 $\mathbb{P}^1_{cl}$ の構造層 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_{cl}}$ の押し出しである。$\mathscr{O}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}$ の自由分解をとることで、

$$DR\mathscr{M}^\bullet\cong\left[\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}}\left(\mathscr{D}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet},\mathscr{M}^\bullet\right)\longrightarrow\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}}\left(\mathscr{D}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}\partial_q,\mathscr{M}^\bullet\right)\right]$$

となるが、右辺各項について

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}}\left(\mathscr{D}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet},\mathscr{M}^\bullet\right)\left(\coprod V_{\varsigma_0\cdots\varsigma_p}\right)\cong\prod\bigcup_{k,\chi\geq 0}\frac{1}{b^-_{\varsigma_k\chi}}\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_{cl}}(*\{0\}+*\{\infty\})\left(V_{\varsigma_0\cdots\varsigma_p}\right)$$

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}}\left(\mathscr{D}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}\partial_q,\mathscr{M}^\bullet\right)\left(\coprod V_{\varsigma_0\cdots\varsigma_p}\right)\cong\prod\bigcup_{k,\chi\geq 0}\frac{1}{b^-_{\varsigma_k\chi}}\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_{cl}}(*\{0\}+*\{\infty\})\left(V_{\varsigma_0\cdots\varsigma_p}\right)d_qt^{\varsigma_0}$$

と表示できる。ここで、$f\in\bigcup_{k,\chi\geq 0}\dfrac{1}{b^-_{\varsigma_k\chi}}\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_{cl}}(*\{0\}+*\{\infty\})\left(V_{\varsigma_0\cdots\varsigma_p}\right)$ に対し、

$$fd_qt^{\varsigma_0}(\partial_{q,t^{\varsigma_0}})=f$$

で $fd_qt^{\varsigma_0}$ を定める。上記の表示を用いて射 $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}}\left(\mathscr{D}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet},\mathscr{M}^\bullet\right)\longrightarrow\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}}\left(\mathscr{D}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}\partial_q,\mathscr{M}^\bullet\right)$ を記述すると、$f\in\bigcup_{k,\chi\geq 0}\dfrac{1}{b^-_{\varsigma_k\chi}}\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_{cl}}(*\{0\}+*\{\infty\})\left(V_{\varsigma_0\cdots\varsigma_p}\right)$ に対し

$$f\mapsto\nabla_qf:=\frac{f(t^{\varsigma_0})-b_{\varsigma_0 1}(t^{\varsigma_0})f(qt^{\varsigma_0})}{1-q}\frac{d_qt^{\varsigma_0}}{t^{\varsigma_0}}$$

とできる。結局、以下が成立する：

“命題”2　この複体は

$$a^{-1}\bigcup_{\chi\in\mathbb{Z}}\frac{1}{b^-_\chi(t)}\mathscr{O}_{{}_q\mathbb{P}^1}(*\{0\}+*\{\infty\})\xrightarrow{\nabla_q}a^{-1}\bigcup_{\chi\in\mathbb{Z}}\frac{1}{b^-_\chi(t)}\mathscr{O}_{{}_q\mathbb{P}^1}(*\{0\}+*\{\infty\})\frac{d_qt^+}{t^+}$$

とチェインホモトピー同値となる。(ここで $\mathscr{O}_{{}_q\mathbb{P}^1}(*\{0\}+*\{\infty\})$ は、忘却函手が定める射 $\mathbb{P}^1_{cl}\longrightarrow{}_q\mathbb{P}^1$ による層 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_{cl}}(*\{0\}+*\{\infty\})$ の押し出しである。)

実際、この複体のコホモロジーは、（a が cohomological descent であることから）a^{-1} を大域切断 Γ（${}_q\mathbb{P}^1, -$）で置き換えた複体

$$\bigcup_{\chi\in\mathbb{Z}} \frac{1}{b_\chi^-(t)}\mathbb{C}[t^+,t^-] \xrightarrow{\nabla_q} a^{-1} \bigcup_{\chi\in\mathbb{Z}} \frac{1}{b_\chi^-(t)}\mathbb{C}[t^+,t^-]\frac{d_q t^+}{t^+}$$

となり、[2]［3］で考察されている青本の q 差分ド・ラーム複体を与えている。

さて、$DR\mathscr{M}^\bullet$ は、${}_q\mathbb{P}^1_\bullet$ 上の擬定数の層 $\mathscr{C}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}$

$$\mathscr{C}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet} := \left\{ f \in \mathscr{O}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet} \,\middle|\, \partial_q f = 0 \right\}$$

上の加群の複体である。[4] この $DR\mathscr{M}^\bullet$ の $\mathscr{C}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}$ 上の双対を与えるのが $\mathscr{M}^\bullet$ の解複体

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}}\left(\mathscr{M}^\bullet, \mathscr{O}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}\right)$$

である。実際これは、$\mathscr{M}^\bullet$ の自由分解をとることで ${}_q\mathbb{P}^1_\bullet$ 上の解層 $\mathscr{L}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}$

$$\mathscr{L}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet} := \left\{ f \in \mathscr{O}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet} \,\middle|\, (b_\chi^- \sigma_q^\chi - b_\chi^+) f = 0 \right\}$$

と擬同型であり、以下が成立する：

“命題”3 $\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{C}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}}\left(DR\mathscr{M}^\bullet, \mathscr{C}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}\right) \cong \mathscr{L}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}$。[5]

同様にして、${}_q\mathbb{P}^1$ 上の擬定数の層 $\mathscr{C}_{{}_q\mathbb{P}^1}$ や ${}_q\mathbb{P}^1$ 上の解層 $\mathscr{L}_{{}_q\mathbb{P}^1}$ も定義され、

$$a^{-1}\mathscr{C}_{{}_q\mathbb{P}^1} \cong \mathscr{C}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}、a^{-1}\mathscr{L}_{{}_q\mathbb{P}^1} \cong \mathscr{L}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}$$

が成立する。更に、“命題”2 そして a が cohomological descent である事より

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{C}_{{}_q\mathbb{P}^1}}\left(\mathbb{R}a_* DR\mathscr{M}^\bullet, \mathscr{C}_{{}_q\mathbb{P}^1}\right) \cong \mathscr{L}_{{}_q\mathbb{P}^1}$$

が従う。

3 局所系の q 類似

q の世界での局所系の対応物は、ナイーヴに考えて局所自由 $\mathscr{C}_{{}_q\mathbb{P}^1}$ 加群であろう。${}_q\mathbb{P}^1$ 上の解層 $\mathscr{L}_{{}_q\mathbb{P}^1}$ は、一般には局所自由にはならないので“特異点の補集合 ${}_q(\mathbb{P}^1 \setminus D)$”を考える必要がある。[6]

$$D_+ := \bigcup_{\chi\geq 0} \left\{ t^+ \in \mathbb{C}^* \,\middle|\, b_\chi^- = 0 \right\}、D_- := \bigcup_{\chi\leq 0} \left\{ t^- \in \mathbb{C}^* \,\middle|\, b_\chi^- = 0 \right\}$$

とおく。サイト ${}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)$ を、その下部圏が

$$U^+ \subset \mathbb{C}^* \setminus D_+、U^- \subset \mathbb{C}^* \setminus D_-$$

を満たす開集合 U を対象とする ${}_q\mathbb{P}^1$ の充満部分圏で（被覆族は ${}_q\mathbb{P}^1$ の被覆族に属すもので）あるものとして定める。[7] 特に、$b_\chi = 1$ の場合には ${}_q\mathbb{C}^*$ と記すことにする。“包含射”$j : {}_q(\mathbb{P}^1 \setminus D) \longrightarrow {}_q\mathbb{P}^1$

を、函手

$$U\cap(\mathbb{C}^*\setminus D) \leftsquigarrow U \quad (\text{但し、}D:=\{b_1^-=0\}\cup\{b_{-1}^-=0\})$$

で定める。$\mathbb{R}a_*DR\mathscr{M}^\bullet$（$\cong a_*DR\mathscr{M}^\bullet$）と、その ${}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)$ への制限との関連は以下で与えられる。

“命題”4　$\mathscr{M}^\bullet$ が半単純であれば、[8] $j_*j^{-1}a_*DR\mathscr{M}^\bullet\cong a_*DR\mathscr{M}^\bullet$。[9]

従って、$\mathscr{M}^\bullet$ が半単純であれば

$$\mathbb{R}\Gamma DR\mathscr{M}^\bullet\cong\mathbb{R}\Gamma j^{-1}a_*DR\mathscr{M}^\bullet$$

が成立するので、以下では、$DR_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)}\mathscr{M}^\bullet:=j^{-1}a_*DR\mathscr{M}^\bullet$ とおいてこれを考察の対象とする。${}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)$ 上でも、擬定数の層 $\mathscr{C}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)}$ や解層 $\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)}$ が定義され、以下が成立する：

“命題”5　$\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)}$ は局所自由 $\mathscr{C}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)}$ 加群である。

“命題”6　$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{C}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)}}(DR_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)},\mathscr{C}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)})\cong\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)}$。

次に、局所自由 $\mathscr{C}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)}$ 加群と（古典的）楕円曲線 $E_q:=\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ 上の局所自由 $\mathscr{O}_{E_q}$ 加群との関連をみよう。射影 $\pi:{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)\longrightarrow E_q$ を、函手

$\pi^{-1}U\cap(\mathbb{C}^*\setminus D)\leftsquigarrow U$（但し、$\pi^{-1}U$ は標準射影 $\mathbb{C}^*\longrightarrow\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ による集合としての引き戻し）

で定める。容易に分かるように $\pi_*\mathscr{C}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)}\cong\mathscr{O}_{E_q}$ である。更に、$\pi_*\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)}$ は階数 1 の局所自由 $\mathscr{O}_{E_q}$ 加群（つまり E_q 上の直線束）である。[10] 実は、以下が成立する：

“命題”7　$\mathbb{R}\pi_*\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)}\cong\pi_*\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)}$。特に、$H^k\left(E_q,\pi_*\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)}\right)$、$H^k\left({}_q(\mathbb{P}^1\setminus D),\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)}\right)$ と（前述）k 次ド・ラームコホモロジーは同型。

例 1　$b_1=q^\alpha\prod_{i=1}^m\dfrac{1-a_it}{1-a_i't}$ で、[11] $\alpha\notin\mathbb{Z}$、$a_ia_i'\neq 0$、$\dfrac{a_i}{a_i'}\notin q^{\mathbb{Z}}$ ならば、

$$\pi_*\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)}\cong\mathscr{O}_{E_q}(-\{p_1'\}-\cdots-\{p_m'\})\otimes\mathscr{O}_{E_q}(-\{p'\}+\{p\})$$

が成立する。ここで、p_i'、p、p' は楕円曲線上の点であり

$$p_i':=\pi({a_i'}^{-1})\text{、}p':=\pi({a'}^{-1})\text{、}p=\pi(q^{-\alpha}{a'}^{-1})$$

で、$a'\in\mathbb{C}^*$ は何でもよい。[12] 従って、$\deg\pi_*\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)}=m,\ H^0(E_q,\pi_*\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)})=0$ であるからリーマン・ロッホの定理より $H^1(E_q,\pi_*\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)})\cong\mathbb{C}^m$。

局所自由 $\mathscr{O}_{E_q}$ 加群に関するセール双対性の助けを借りて Verdier 双対性の q 類似が得られる。このことを述べる為に、函手 $\pi_!$ や Γ_c を導入する：先ず、${}_q\mathbb{C}^*$ 上の層 $\mathscr{F}$ についてその定義を与える。この場合には、π の代わりに $\bar\pi$ と記すことにして、

$$\bar\pi_!\mathscr{F}(U):=\left\{s\in\mathscr{F}(\bar\pi^{-1}U)\ \middle|\ s|_{\bar\pi^{-1}U\times_{{}_q\mathbb{C}^*}\{|t^\pm|<q^\nu\}}=0\ (\nu:\text{十分大})\right\}$$[13]

と定める。${}_q(\mathbb{P}^1\backslash D)$ 上の層 $\mathscr{F}$ に対し、${}_q\mathbb{C}^*$ への 0 拡張を $\mathring{j}_!\mathscr{F}$[14] と記すことにして、

$$\pi_! \mathscr{F} := \bar{\pi}_! \circ \mathring{j}_!、\Gamma_c := \Gamma \circ \pi_!$$ [15]

と定める。以上の準備の下、局所自由 $\mathscr{C}_{q(\mathbb{P}^1 \setminus D)}$ 加群 $\mathscr{F}$ の q-Verdier 双対を、

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{C}_{q(\mathbb{P}^1 \setminus D)}}(\mathscr{F}, \pi^{-1}\Omega^1_{E_q}[2])$$

と定義する。[16] ここで、$\Omega^1_{E_q}$ は E_q 上の正則 1 次微分形式の層を表す。この時、以下が成立する :

“ 命題 ” 8　$\mathbb{R}\pi_! \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{C}_{q(\mathbb{P}^1 \setminus D)}}(\mathscr{F}, \pi^{-1}\Omega^1_{E_q}[2]) \cong \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{E_q}}(\mathbb{R}\pi_* \mathscr{F}, \Omega^1_{E_q}[1])$ 。

これと、セール双対性

$$\mathbb{R}\Gamma \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{E_q}}(\mathbb{R}\pi_* \mathscr{F}, \Omega^1_{E_q}[1]) \cong \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}\Gamma \mathbb{R}\pi_* \mathscr{F}, \mathbb{C})$$

を併せることで q-Verdier 双対性が得られる :

“ 命題 ” 9　$\mathbb{R}\Gamma_c \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{C}_{q(\mathbb{P}^1 \setminus D)}}(\mathscr{F}, \pi^{-1}\Omega^1_{E_q}[2]) \cong \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}\Gamma \mathscr{F}, \mathbb{C})$ 。

“ 命題 ”6 に注意して、$\mathscr{F} = DR_{q(\mathbb{P}^1 \setminus D)} \mathscr{M}^\bullet$ の場合について q-Verdier 双対性を適用すると

$$\mathbb{R}\Gamma_c \left(\mathscr{L}_{q(\mathbb{P}^1 \setminus D)} \otimes \pi^{-1}\Omega^1_{E_q}[2] \right) \cong \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}\Gamma DR_{q(\mathbb{P}^1 \setminus D)} \mathscr{M}^\bullet, \mathbb{C})$$

となる。この場合について、命題 “8” は次章の結果から従う。[17]

4　q サイクルのホモロジー [18]

特異チェインの q 類似を導入することで、$\mathscr{L}_{q(\mathbb{P}^1 \setminus D)} \otimes \pi^{-1}\Omega^1_{E_q}[2]$ の Γ_c- 非輪状分解を与える。先ず、$q^\nu A_0 := \left\{ q^\nu t^+ \in \mathbb{C}^* \,\middle|\, q \le |t^+| \le 1 \right\}$、$\partial^+ q^\nu A_0 := \left\{ q^\nu t^+ \in \mathbb{C}^* \,\middle|\, |t^+| = q \right\}$ とおき、${}_q(\mathbb{P}^1 \setminus D)$ 上の層 $\mathbb{C}_{q^\nu A_0}$、$\mathbb{C}_{\partial^+ q^\nu A_0}$ を

$$\mathbb{C}_{q^\nu A_0}(U) := \begin{cases} \mathbb{C} & (U \cap q^\nu A_0 \neq \emptyset) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}、\mathbb{C}_{\partial^+ q^\nu A_0}(U) := \begin{cases} \mathbb{C} & (U \cap \partial^+ q^\nu A_0 \neq \emptyset) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で定め、

$$\mathcal{S}^0_{q^{\mathbb{Z}}} := \prod_{\nu \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}_{q^\nu A_0} / \mathbb{C}_{\partial^+ q^\nu A_0}、\mathcal{S}^0_{E_q} := \pi^{-1} \left(\prod_{p \in E_q}^{lf} \mathbb{C}_p \right)$$

とおく。ここで、$\mathbb{C}_p$ は点 p を台とする摩天楼層を表し、

$$\prod_{p \in E_q}^{lf} \mathbb{C}_p(U) := \left\{ s \in \prod_{p \in E_q} \mathbb{C}_p(U) \,\middle|\, \text{supp } s \text{ は局所有限} \right\}$$

と定める。すると、

$$\mathcal{S}^0 := \mathcal{S}^0_{q^{\mathbb{Z}}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{S}^0_{E_q} := \prod_{\nu \in \mathbb{Z}} (\mathbb{C}_{q^\nu A_0} / \mathbb{C}_{\partial^+ q^\nu A_0}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{S}^0_{E_q}$$

が局所有限特異 0 チェインの層の q 類似を与える。 $1 \otimes 1 \in (\mathbb{C}_{q^\nu A_0} / \mathbb{C}_{\partial^+ q^\nu A_0}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_p$ が定める $\mathcal{S}^0$ の元を $\langle q^\nu p \rangle$ と表すことにする。 $A_0 := q^0 A_0 \longrightarrow E_q$ は全単射であるから、$p \in E_q$ は A_0 上の点と

同一視され、$\langle q^\nu p\rangle$ は $q^\nu A_0$ 上の点と同一視される。この様にして、$\mathcal{S}^0$ の元は $\mathbb{C}^*\setminus D$ 上の 0 チェインと思 える。次に、

$$\mathcal{S}_{q^{\mathbb{Z}}}^{-1}:=\prod_{\nu\in\mathbf{Z}}\mathbb{C}_{q^\nu A_0}/\mathbb{C}_{\partial+q^\nu A_0}\text{、}^{19)}\ \mathcal{S}_{E_q}^{-1}:=\pi^{-1}\Omega_{E_q}^1\left(\sum_{p\in E_q}^{lf}\{p\}\right)$$

とおく。ここで、$\Omega_{E_q}^1\left(\sum_{p\in E_q}^{lf}\{p\}\right)$ は、高々 1 位の極をもつ有理型微分形式の層とする。局所有限特異 1 チェインの層の q 類似 $\mathcal{S}^{-1}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{-1}&:=\left(\mathcal{S}_{q^{\mathbb{Z}}}^{-1}\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}\mathcal{S}_{E_q}^0\right)\oplus\left(\mathcal{S}_{q^{\mathbb{Z}}}^{0}\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}\mathcal{S}_{E_q}^{-1}\right)\\&:=\left(\prod_{\nu\in\mathbb{Z}}\left(\mathbb{C}_{q^\nu A_0}/\mathbb{C}_{\partial+q^\nu A_0}\right)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{S}_{E_q}^0\right)\oplus\left(\prod_{\nu\in\mathbb{Z}}\left(\mathbb{C}_{q^\nu A_0}/\mathbb{C}_{\partial+q^\nu A_0}\right)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{S}_{E_q}^{-1}\right)\end{aligned}$$

で与えられる。$1\otimes 1\in\left(\mathbb{C}_{q^\nu A_0}/\mathbb{C}_{\partial+q^\nu A_0}\right)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}_p$ が定める $\mathcal{S}^{-1}$ の元を $\langle q^{\nu+1}p,q^\nu p\rangle$ と表し、

$$\frac{1}{1-q}\otimes 2\pi\sqrt{-1}\xi\in\left(\mathbb{C}_{q^\nu A_0}/\mathbb{C}_{\partial+q^\nu A_0}\right)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{S}_{E_q}^{-1}$$

[20] が定める $\mathcal{S}^{-1}$ の元を $C(0;q^\nu)\otimes\xi$ と表すことにする。[21] 局所有限特異 2 チェインの層の q 類似 $\mathcal{S}^{-2}$ は

$$\mathcal{S}^{-2}:=\mathcal{S}_{q^{\mathbb{Z}}}^{-1}\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}\mathcal{S}_{E_q}^{-1}:=\prod_{\nu\in\mathbb{Z}}\left(\mathbb{C}_{q^\nu A_0}/\mathbb{C}_{\partial+q^\nu A_0}\right)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{S}_{E_q}^{-1}$$

で与えられる。

$$\frac{1}{1-q}\otimes 2\pi\sqrt{-1}\xi\in\left(\mathbb{C}_{q^\nu A_0}/\mathbb{C}_{\partial+q^\nu A_0}\right)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{S}_{E_q}^{-1}$$

が定める $\mathcal{S}^{-2}$ の元を A $(0;q^{\nu+1}$、$q^\nu)\otimes\xi$ と表すことにする。[22] 境界作用素 ∂ を定めよう :

$$\partial\left(A(0;q^{\nu+1},q^\nu)\otimes\xi\right):=-\sum_p\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}\ \underset{p}{\mathrm{res}}\ \xi}{1-q}\right)\langle q^{\nu+1}p,q^\nu p\rangle+C(0;q^\nu)\otimes\xi-C(0;q^{\nu+1})\otimes\xi$$

$$\partial\langle q^{\nu+1}p,q^\nu p\rangle:=\langle q^\nu p\rangle-\langle q^{\nu+1}p\rangle$$

$$\partial\left(C(0;q^\nu)\otimes\xi\right):=\sum_p\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}\ \underset{p}{\mathrm{res}}\ \xi}{1-q}\right)\langle q^\nu p\rangle$$

ここで、$\sum_p$ は ξ のすべての極に亘っての和で、$\underset{p}{\mathrm{res}}$ は p での留数を表す。$\partial\circ\partial=0$ であることは容易に確かめられる。ここで得られた複体 $\mathcal{S}^\bullet$ について、以下が得られる :

“命題” 10 $\pi^{-1}\Omega_{E_q}^1[2]\cong\mathcal{S}^\bullet$。

“命題” 11 $\Omega_{E_q}^1[1]\cong\pi_!\mathcal{S}^\bullet$。

“命題” 12 $\mathbb{R}\pi_!\mathcal{S}^\bullet\cong\pi_!\mathcal{S}^\bullet$。

以上より、$\mathscr{L}_{q(\mathbb{P}^1\setminus D)}\otimes\pi^{-1}\Omega_{E_q}^1$ [2] の Γ_c- 非輪状分解 $\mathscr{L}_{q(\mathbb{P}^1\setminus D)}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{S}^\bullet$ が得られた。ここで、$\mathscr{L}_{q(\mathbb{P}^1\setminus D)}$ 係数での境界作用素 ∂ は

$$\begin{aligned}\partial\left(s\otimes A(0;q^{\nu+1},q^{\nu})\otimes\xi\right):=&-\sum_{p}\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}\ \underset{p}{\mathrm{res}}\ s\pi^{*}\xi}{1-q}\right)s\otimes\langle q^{\nu+1}p,q^{\nu}p\rangle\\&+s\otimes C(0;q^{\nu})\otimes\xi-s\otimes C(0;q^{\nu+1})\otimes\xi\\\partial(s\otimes\langle q^{\nu+1}p,q^{\nu}p\rangle):=&s\otimes\langle q^{\nu}p\rangle-s\otimes\langle q^{\nu+1}p\rangle\\\partial\left(s\otimes C(0;q^{\nu})\otimes\xi\right):=&\sum_{p}\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}\ \underset{p}{\mathrm{res}}\ s\pi^{*}\xi}{1-q}\right)s\otimes\langle q^{\nu}p\rangle\end{aligned}$$

で与えられる。ここで、$\sum_{p}$ は $s\pi^{*}\xi$ の $q^{\nu}A_0$ 上のすべての極に亘っての和である。

$$S_k({}_q(\mathbb{P}^1\setminus D),\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)}):=\Gamma_c({}_q(\mathbb{P}^1\setminus D),\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)}\otimes\mathcal{S}^{-k})$$

とおき、複体 $S_{\bullet}({}_q(\mathbb{P}^1\setminus D),\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)})$ のホモロジーを q サイクルのホモロジーとよび、

$$H_k({}_q(\mathbb{P}^1\setminus D),\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)})$$

と記すことにする。

最後に、$DR_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)}$ の大域的コホモロジーと q サイクルのホモロジーのペアリングについて述べる。先ず、0 チェイン $\sum s\otimes\langle q^{\nu}p\rangle\in S_0({}_q(\mathbb{P}^1\setminus D),\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)})$ と q 差分 0 形式 $f\in\bigcup_{\chi\in\mathbb{Z}}\frac{1}{b_{\chi}^{-}(t)}\mathbb{C}[t^{+},t^{-}]$ のペアリングは、

$$\left\langle\ \sum s\otimes\langle q^{\nu}p\rangle\ \middle|\ f\ \right\rangle:=\sum s(q^{\nu}p)f(q^{\nu}p)$$

で与える。[23]（ここで、$s\in\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)}$ 。また、$q^{\nu}p$ は前述の手続きにより $q^{\nu}A_0$ 上の点とみなしている。）次に、q 差分 1 形式 $f\dfrac{d_qt^{+}}{t^{+}}\in\bigcup_{\chi\in\mathbb{Z}}\dfrac{1}{b_{\chi}^{-}(t)}\mathbb{C}[t^{+},t^{-}]\dfrac{d_qt^{+}}{t^{+}}$ と 1 チェインとのペアリングを定める。1 単体 $s\otimes\langle q^{\nu+1}p,q^{\nu}p\rangle\in S_1({}_q(\mathbb{P}^1\setminus D),\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)})$ とのペアリングは、“ジャクソン積分”

$$\left\langle s\otimes\langle q^{\nu+1}p,q^{\nu}p\rangle\ \middle|\ f\frac{d_qt^{+}}{t^{+}}\right\rangle:=(1-q)s(q^{\nu}p)f(q^{\nu}p)$$

で定め、1 単体 $s\otimes C(0;q^{\nu})\otimes\xi\in S_1({}_q(\mathbb{P}^1\setminus D),\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)})$ とのペアリング [24] は、“留数積分”

$$\left\langle s\otimes C(0;q^{\nu})\otimes\xi\ \middle|\ f\frac{d_qt^{+}}{t^{+}}\right\rangle:=\int_{C(0;q^{\nu})}sf\pi^{*}\xi$$

で定める。このペアリングは、“命題”8 の同型を与えるペアリングとセール双対性の併せ技となっている：$U\subset E_q$ を十分小さくとると、古典的意味での開部分集合 $\tilde{U}\subset\mathbb{C}^{*}\setminus D$ が採れて

$$\pi|_{\tilde{U}}:\tilde{U}\overset{\cong}{\longrightarrow}U\text{が古典的意味で双正則、}\tilde{U}\cap q^{\nu}A_0\neq\emptyset\text{、}\tilde{U}\cap q^{\nu+1}A_0=\emptyset$$

となる様にでき、$s\otimes C(0;q^\nu)\otimes\xi\in\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)}\otimes\mathcal{S}^{-1}(\pi^{-1}U)$ と $f\dfrac{dt^+}{t^+}\in\mathscr{H}^1(\pi_*DR_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)}\mathscr{M}^\bullet)(U)$ に対して、

$$\left\langle s\otimes C(0;q^\nu)\otimes\xi \;\middle|\; f\frac{dt^+}{t^+}\right\rangle := (sf)|_{\tilde{U}}\xi$$

とおく。更に、ξ が U 上に極をもたないとき $s\otimes C(0;q^\nu)\otimes\xi$ はサイクルとなり、上のペアリングは $\pi_*\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)}\otimes\Omega^1_{E_q}$（$U$）の元を定め、$\pi_!(\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)}\otimes\mathcal{S}^\bullet)$ と $\pi_*DR_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)}\mathscr{M}^\bullet$ のペアリングを与えている。

以上により、1 チェインと q 差分 1 形式のペアリングが定まった。更に、コホモロジーとホモロジーのペアリングとなっていることはストークスの定理により担保される：

“命題” 13　$f\in\bigcup_{\chi\in\mathbb{Z}}\dfrac{1}{b^-_\chi(t)}\mathbb{C}[t^+,t^-]$ とする。

(1) $s\otimes\langle q^{\nu+1}p,q^\nu p\rangle\in S_1({}_q(\mathbb{P}^1\setminus D),\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)})$ に対し

$$\left\langle \partial(s\otimes\langle q^{\nu+1}p,q^\nu p\rangle)\;\middle|\; f\right\rangle=\left\langle s\otimes\langle q^{\nu+1}p,q^\nu p\rangle\;\middle|\; d_qf\right\rangle 。$$

(2) $s\otimes C(0;q^\nu)\otimes\xi\in S_1({}_q(\mathbb{P}^1\setminus D),\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)})$ に対し

$$\langle \partial(s\otimes C(0;q^\nu)\otimes\xi)\mid f\rangle=\langle s\otimes C(0;q^\nu)\otimes\xi\mid d_qf\rangle 。$$

(3) $s\otimes A(0;q^{\nu+1},q^\nu)\otimes\xi\in S_2({}_q(\mathbb{P}^1\setminus D),\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)})$ に対し

$$\left\langle \partial(s\otimes A(0;q^{\nu+1},q^\nu)\otimes\xi)\;\middle|\; f\frac{d_qt^+}{t^+}\right\rangle=0 。$$

これにより、大域的ド・ラームコホモロジーと「コンパクト」な q サイクルからなるホモロジー $H_k({}_q(\mathbb{P}^1\setminus D),\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)})$ とのペアリングが得られた。

さて、$s\otimes C$（$0;q^\nu$）$\otimes\,\xi$ とのペアリングは、ある場合に於いてはジャクソン積分で与えられる：

“命題” 14　$s\otimes C(0;q^\nu)\otimes\xi\in S_1({}_q(\mathbb{P}^1\setminus D),\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)})$、$f\dfrac{d_qt^+}{t^+}\in\displaystyle\bigcup_{\chi\in\mathbb{Z}}\frac{1}{b^-_\chi(t)}\mathbb{C}[t^+,t^-]\frac{d_qt^+}{t^+}$ に対し、

$$\left\langle s\otimes C(0;q^\nu)\otimes\xi\;\middle|\; f\frac{d_qt^+}{t^+}\right\rangle=\frac{2\pi\sqrt{-1}}{1-q}\sum_p\int_0^{q^\nu p}\operatorname*{res}_{t^+}(sf\pi^*\xi)\frac{d_qt^+}{t^+}$$

が、右辺が収束すれば成立する。但し、$\sum_p$ は A_0 上の $sf\pi^*\xi$ の極すべてに亘っての和を表す。

これは、右辺が収束せずとも、左辺がその「正則化」を与えることを意味している：

例 2　前述の例 1 と同様、$b_1=q^\alpha\prod_{i=1}^m\dfrac{1-a_it}{1-a'_it}$、$\alpha\notin\mathbb{Z}$、$a_ia'_i\neq0$ とする。また、$\dfrac{a_i}{a'_i}=:q^{\alpha_i}$、$\alpha_-:=-\alpha-\sum\alpha_i$ とおき、$\alpha_i\notin\mathbb{Z}$、$\alpha_-\notin\mathbb{Z}$ とする。この場合、$\mathscr{L}_{{}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)}$ の局所切断は $t^{+\alpha}\displaystyle\prod_{i=1}^m\frac{(a'_it^+;q)_\infty}{(a_it^+;q)_\infty}$

の擬定数倍で与えられる。ここで、$(x;q)_\infty := \prod_{\nu=0}^{\infty}(1-xq^\nu)$ を表す。以下

$$s_+ := t^{+\alpha}\prod_{i=1}^{m}\frac{(a'_it^+;q)_\infty}{(a_it^+;q)_\infty}、s_- := t^{+\alpha}\prod_{i=1}^{m}\frac{(a'_it^+;q)_\infty}{(a_it^+;q)_\infty}t^{\alpha_i}\frac{\theta(a_it^+)}{\theta(a'_it^+)}$$

とおく。但し、$\theta(x) := (x;q)_\infty(q/x;q)_\infty(q;q)_\infty$で定義される。ジャクソン積分 $\int_{0\cdot p}^{\infty\cdot p} s_+ f\frac{d_qt^+}{t^+}$ の

正則化は、q サイクル

$$\frac{(1-q)\theta'(1)}{2\pi\sqrt{-1}\theta(q^{-\alpha})}s_+\otimes C(0;q^{\nu_+})\otimes t^{-\alpha}\frac{\theta(q^{-\alpha}t^+/p)}{\theta(t^+/p)}\frac{dt^+}{t^+}+\sum_{\nu=\nu_-}^{\nu_+}s_+\otimes\langle q^{\nu+1}p,q^\nu p\rangle$$
$$-\frac{(1-q)\theta'(1)}{2\pi\sqrt{-1}\theta(q^{-\alpha_-})}s_-\otimes C(\infty;q^{\nu_-})\otimes t^{-\alpha_-}\frac{\theta(q^{-\alpha_-}t^+/p)}{\theta(t^+/p)}\frac{dt^+}{t^+}$$ [25]

と $f\frac{d_qt^+}{t^+}$とのペアリングで得られる。ここで、$C(\infty;q^{\nu_-}) := -C(0;q^{\nu_-})$ である。[26] また、ν_+ は

ループの内部に(ν_- はループの外部に)、p の q スパイラル $q^{\mathbb{Z}}p$ 以外の極を含まないようにとっておく。これは、適切なやり方で$q\to 1$での極限をとると、古典的オイラー型積分の正則化の青本解釈([1])

$$\frac{1}{e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}-1}\left(t^\alpha\prod(1-a'_it)^{\alpha_i}\right)\otimes C(0;r_+)+\left(t^\alpha\prod(1-a'_it)^{\alpha_i}\right)\otimes[r_+p,r_-p]$$
$$-\frac{1}{e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_-}-1}\left(t^\alpha\prod(1-a'_it)^{\alpha_i}\right)\otimes C(\infty;r_-)$$

に収束する。([4]) ここで、$C(0;r_+)$ は r_+p を始点とする 0 を廻る適当なループで、$C(\infty;r_-)$ は r_-p を始点とする ∞ を廻る適当なループである。

注　　釈

1) 野海先生に「q ホモロジーとは何ですか」と尋ねたところ、「q コホモロジーの dual だ」という答えが返ってきた。誠にもってその通りであるが、(本文で述べるように) どのレベルで dual をとるのかは聊かデリケートである。
2) $|q|\neq 0,1$ であればほぼ全ての議論が同様に展開できると思われる。
3) $\mathscr{D}_X$ 加群の理論では、$\mathscr{M}$のド・ラーム複体の定義を $\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{O}_X,\mathscr{M})[\dim X]$ とする流儀もある([8])。ここでは、[7] の流儀に従った。その方が、Verdier 双対との相性が良い。
4) これが偏屈層の q 類似となるべきものである。
5) ここでは、$\mathscr{C}^\bullet_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}$ 加群のレベルで $DR\mathscr{M}^\bullet$ の双対を考えているが、$\mathscr{D}_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}$ 加群のレベルで $\mathscr{M}^\bullet$ の双対もあって然るべきである。但し、$\mathscr{D}_{{}_q\mathbb{P}^1_\bullet}$ 加群においては左加群と右加群の区別は、古典的 $\mathscr{D}$ よりも更にデリケートである。(例えば、q シフト作用素 σ_q^χ と $\sigma_q^{-\chi}$ が入れ替わったりする。) 従って、双対を考える為にはもう少し慎重な議論が必要となる。これは、今後の課題である。
6) これは、古典的場合でも同様である。$\mathbb{P}^1$上の線形微分方程式の解層は $\mathbb{P}^1$ 上の局所定数層にはならず、構成可能層にしかならない。微分方程式の特異点 D の補集合 $\mathbb{P}^1\setminus D$ 上に制限すると局所定数層になるのであった。
7) $\mathbb{C}^*\setminus\bigcup_{\chi\geq 0}\{b_\chi^-=0\}\cup\{b_{-\chi}^-=0\}$ は ${}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)$ の開集合だが、$\mathbb{C}^*\setminus\bigcup_{\chi\geq 0}\{b_\chi^-=0\}$ は、開集合にはならない。また、$\mathbb{C}^*\setminus\{b_1^-=0\}\cup\{b_{-1}^-=0\}$ は開集合である。

8) $b_1 = q^{\alpha}\prod_{i=1}^{m}\dfrac{1-a_i t}{1-a'_i t}$ で、$\alpha \notin \mathbb{Z}$ 、$a_i a'_i \neq 0$、$\dfrac{a_i}{a'_i} =: q^{\alpha_i}$ とおいて、$\alpha_i \notin \mathbb{Z}$ 、$\alpha + \sum \alpha_i \notin \mathbb{Z}$ ならば、$\mathscr{M}^{\bullet}$ は半単純である。

9) 偏屈層にあたるものをきちんと定義して$j_{!*}j^{-1}\mathbb{R}a_* DR\mathscr{M}^{\bullet} \cong \mathbb{R}a_* DR\mathscr{M}^{\bullet}$とかく方がよりよいであろう。とはいえ、結局本文中の主張と一致する。

10) $\mathscr{C}_{q(\mathbb{P}^1\setminus D)} \cong \pi^{-1}\mathscr{O}_{E_q}$も成立する。しかし、局所自由 $\mathscr{C}_{q(\mathbb{P}^1\setminus D)}$ 加群は局所自由 $\mathscr{O}_{E_q}$ 加群の引き戻しとは限らない。

11) b 函数の分類定理が知られており、実はいかなる場合もこの形に$f(qt)/f(t)$（但し、fは有理函数）をかけたものになる。[2]［3]

12) $p = p_i$ や $p' = p'_i$ となっても構わない。

13) $s|_{\tilde{\pi}^{-1}U\times_{q\mathbb{C}^*}\{|t^{\pm}|<q^{\nu}\}}$ は、$\tilde{\pi}^{-1}U \cap \{|t^{\pm}| < q^{\nu}\}$ 部分集合で ${}_q\mathbb{C}^*$ の対象となる最大のもの $\tilde{\pi}^{-1}U \times_{q\mathbb{C}^*} \{|t^{\pm}| < q^{\nu}\}$ への制限を表す。

14) $\mathring{j}_!\mathscr{F}(U) = \begin{cases} 0 & (U \cap D \neq \emptyset) \\ \mathscr{F}(U) & \text{otherwise} \end{cases}$

15) 元来 $\Gamma_c := \Gamma_c \circ \pi_!$ と定義すべきである。ここで、左辺のΓ_cは ${}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)$ 上の層に対する函手であり、右辺のΓ_cは E_q 上の層に対する（古典的意味での）コンパクト台を持つ大域切断をとる函手である。しかし、E_q はコンパクトであるから本文中の定義でよい。

16) $\pi^{-1}\Omega^1_{E_q} \cong \pi^{-1}\mathscr{O}_{E_q} \cong \mathscr{C}_{q(\mathbb{P}^1\setminus D)}$ 故、$\mathbb{R}\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{C}_{q(\mathbb{P}^1\setminus D)}[2])$ と定義すべきか？

17) 一般の場合も同様にできると思われる。

18) この章では、思考の節約上全て座標変数をt^+とした。しかし、対称性、すなわち 0 近傍と∞ 近傍を並行して扱うにはよろしくない。

19) これは、$\mathcal{S}^0_{q^{\mathbb{Z}}}$ と同じ定義であるが、後に導入する記号が示唆する様にニュアンスとしては異なるものである。

20) $\dfrac{1}{1-q} \in \mathbb{C}_{q^{\nu}A_0}/\mathbb{C}_{\partial + q^{\nu}A_0}$は、$q \to 1$ おいて何らかの意味で有限の量をはきだすと思われる。

21) 後にみるようにこれは、原点を中心とする半径 q^{ν} の円周に対応している。

22) 後にみるようにこれは、円環領域 $\{q^{\nu+1} \leq t^+ \leq q^{\nu}\}$ に対応している。

23) fの極は b^-_{χ} の零点である。従って、fの極は $s \in \mathscr{L}_{q(\mathbb{P}^1\setminus D)}$ でキャンセルされ well-defined となる。

24) $s \otimes C(0; q^{\nu}) \otimes \xi$ とのペアリングは、大域的でないと上手く機能しない。$C(0; q^{\nu})$ を含む十分小さい開集合をとり、そこ上の q 差分 1 形式とペアリングをとったものは、$C(0; q^{\nu})$ 上の積分の q 類似とは思えない。古典的 $C(0; q^{\nu})$ とは大分様子が異なる。$s \otimes C(0; q^{\nu}) \otimes \xi$を殊更円周の q 類似と思うのは、かえって道を誤るおそれがある。

25) $\dfrac{dt^+}{t^+} \in \Omega^1_{E_q}$は、$q$ サイクルを記述する「微分」形式である。q 差分形式ではない。

26) これは、∞を廻るループに対応する。ペアリングは、∞ 近傍の留数を拾う積分で与えられる。

文　　献

［1］青本 和彦，喜多 通武，超幾何関数論，丸善出版.

［2］K. Aomoto, Y. Kato, *A q-analogue of de Rham cohomology associated with Jackson integrals*, Spe- cial Functions, M. Kashiwara and T. Miwa, eds., Proc. of the Hayashibara Forum, Springer, 1990.

［3］青本和彦, q-差分 de Rham 複体と Čech コホモロジー（底つき超幾何関数についての一考察), 数学 49 (4), 350-364, 1997-10-01.

［4］伊藤公毅, *Jackson integral and homology I*, un- published.

［5］伊藤公毅，q 差分加群とそのコホモロジー（層複体としての q 差分ド・ラームコホモロジー），無限可積分系特別セッション講演アブストラクト，2017 年度秋季総合分科会，日本数学会.

［6］K-K. Ito, *Twisted Cˇech to q-de Rham isomor-phism on the Projective line*, in preparation.

［7］柏原正樹，代数解析概論，岩波書店.

［8］谷崎俊之，堀田良之，D 加群と代数群，シュプリンガー.