

非ユークリッド幾何学を用いた
リアクタンス回路の特性の表現
(Representation of Performance of Reactance
Circuits Based on Non-Euclidean Geometry)

2018年1月

博士 (工学)

山田 恭平

豊橋技術科学大学

平成 30 年 1 月 10 日

電気・電子情報工学専攻	学籍番号	第 113442 号	指導教員	大平 孝
氏名	山田 恭平			上原 秀幸

論文内容の要旨 (博士)

博士学位論文名	非ユークリッド幾何学を用いたリアクタンス回路の特性の表現
---------	------------------------------

(要旨 1,200 字程度)

回路を利用するあらゆるアプリケーションにおいて、インピーダンス変換は必須の要素である。特に、回路応用の代表例である通信や、近年実用化が進んでいる無線給電、高周波パワーエレクトロニクスなど、幅広い領域で用いられているのが、キャパシタとインダクタを組み合わせた集中定数回路によるインピーダンス変換である。本論文では、このような、インピーダンス変換を意図したリアクタンス回路（以降、インピーダンス変換回路）を取り扱い、この特性が非ユークリッド幾何学を援用することで視覚的に表現できることを明らかにした。加えて、インピーダンス変換回路の特性が幾何学的に表現できるという結果に基づき、変換回路の特性を最適化する設計方法と、そのような設計を視覚的に行える、新しい図表を提案した。

従来より、インピーダンス変換回路の設計にはスミスチャートが用いられてきた。スミスチャートの使用により、リアクタンス素子を追加することによるインピーダンスの変化を視覚的に表現でき、回路設計の問題を、スミスチャート上の2点間を結ぶパス（区分的に滑らかな曲線）を探すという幾何学的な問題に置き換えることができる。本論文では、この回路設計と幾何学との対応をさらに推し進め、少なくとも、1. 回路に蓄積されたエネルギー; 2. 回路で発生する損失; 3. 素子値の微小な変動が回路の入力インピーダンスの変動として現れる度合い、すなわち製作誤差に対する耐性; 4. 同じく周波数の微小な変動に対する入力インピーダンスの変動耐性 の四つの特性が、スミスチャート上の「パスの長さ」と比例することを明らかにした。ただし、ここでいうパスの長さとは、ポアンカレ計量と呼ばれる、2次元可微分多様体上で定義される量に基づいて計られた、双曲幾何学的な長さである。

この結果を用い、上記の四つの特性の最適化（蓄積エネルギーと損失の最小化、および素子値と周波数の変動に対する耐性の最大化）に関する問題を、スミスチャート上のパスの長さを最小化する問題に置き換え、この問題に対する解法を与えた。解法は、微分幾何学に基づくものである。上記の可微分多様体の概念を用いて、インピーダンスやアドミタンス、反射係数といった、一般的な回路パラメータとは異なる新しい表現である、 rg 局所座標系を提案した。また、 rg 局所座標系に基づく新しい図表である、両対数 rg 平面を提案した。両対数 rg 平面の利点は、リアクタンスの追加によるインピーダンスの動きや、長さが最短となるパスが、すべて直線で表される点である。これにより、スミスチャート上の最適なパスを探す問題は、両対数 rg 平面上の2点を直線で結ぶ問題に置き換わり、ほとんど直感だけを頼りに、最適な回路構成を選択することが可能になる。

Date of Submission: January 10, 2018

Department of Electrical and Electronics Information Engineering	Student ID Number	D113442	Supervisors	Takashi Ohira
Applicant's name	Kyohei Yamada			Hideyuki Uehara

Abstract (Doctor)

Title of Thesis	Representation of Performance of Reactance Circuits Based on Non-Euclidean Geometry
-----------------	---

Approx. 800 words

Impedance Transformation is a ubiquitous concept used in almost all applications of circuits. Especially in variety of fields including communication, emerging wireless powering and high-frequency power conversion, impedance transformation by reactance circuit, a lumped-element circuit with inductors and capacitors, is a basic technique. This paper deals with such impedance transformation oriented reactance circuits and shows that the performance of reactance circuits has a visual representation based on non-Euclidean geometry. By utilizing this visual representation, this paper also shows a new design method to maximize the reactance circuits' performance, as well as a new graphical chart for the optimization.

In a conventional design of reactance circuits, Smith chart is used as a basic tool. Smith chart visualizes the change of an impedance by insertion of reactive elements as a path on a chart, and then such a circuitual problem that finding a circuit topology is replaced by such a geometric problem that finding a path connecting two points which correspond to original and transformed impedances. This paper pushes on with this graphical representation, and shows that not only topologies, but also the performance of reactive circuits is represented visually as the length of a path measured by the Poincaré metric. It is shown that at least following four (and possibly more) kinds of performance are proportionate to the path length: Stored energy in the circuit; dissipative power loss measured in dB or Np; sensitivity of the input impedance fluctuation to the small error of circuit parameters such as inductance or capacitance; and to the small fluctuation of the working frequency.

Besides the graphical representation, we also give a solution for the minimization problem of the path length, namely maximization of the performance of reactance circuits. Our solution is given based on two concepts, one of which is the graphical representation, and the other is a novel local coordinate system named rg-local coordinate system. Projecting the rg-local coordinate system onto a plane, we obtain the rg-plane as an alternative of the Smith chart. Then the path minimization is performed on the rg-plane instead of the Smith chart. The benefit of the rg-plane is that reactance circuit is represented as a combination of orthogonal line segment, so the calculation of path length gets much easier than that on the Smith chart. The conditions for the shortest path is clarified, and the way how to find a path satisfying the conditions is also given.

目次

第1章 序論	1
1.1 背景, 目的	1
1.2 本論文の構成	3
第2章 導入	5
2.1 インピーダンス変換	5
2.1.1 リアクタンス素子を用いた集中定数インピーダンス変換	6
2.1.2 Smith チャートを用いたインピーダンス変換回路設計	8
2.1.3 回路パラメータ	12
2.2 非 Euclid 幾何学	15
2.2.1 位相空間	16
2.2.2 多様体	21
2.2.3 Poincaré計量とモデル	26
第3章 逆 L 型インピーダンス変換回路の電力損失	28
3.1 損失の定式化	35
3.2 低域通過ラダーへの拡張	46
第4章 電力損失と非 Euclid 幾何学	56
4.1 マンハッタン距離を用いた逆 L 型インピーダンス変換回路の選択	62

4.2	50 Ω 電源に対する最適な逆 L 型インピーダンス変換回路の選択 . . .	67
4.3	電力損失の双曲幾何学的表現	71
4.3.1	インピーダンス/アドミタンス平面上のパス	73
4.3.2	Smith チャート上のパス	80
第 5 章	素子値および周波数の変動と非 Euclid 幾何学	84
5.1	変動と双曲幾何学的な長さ	86
5.2	素子値の変動による影響	88
5.3	周波数の変動による影響	92
5.4	変動の幾何学的表現	93
第 6 章	2 点間を結ぶ最短のパス	95
6.1	rg 局所座標系	97
6.2	rg 平面	102
6.3	最短のパスの導出	106
第 7 章	結論	114
	謝辞	116
	文献	117
	業績リスト	122

第1章

序論

1.1 背景, 目的

本論文の目的は、非 Euclid 幾何学を線型回路の設計、解析に応用することの有用性を示すことである。

月並みな表現ではあるが、我々技術者、あるいは研究者にとっての数学とは、対象を表現するための言葉である。そしてまさに言葉であるからこそ、我々が対象をどのように捉え、表現し、考察するかは、我々がどのような言語、すなわち数学を用いるかに強く依存している。現在、回路技術者の用いる数学は主に Fourier 解析や線型代数、代数学、複素関数論などであるが、これらの道具立は、かつて Bode が線型回路設計に関する記念碑的な教科書 “Network Analysis and Feedback Amplifier Design” (邦題「回路網と饋還の理論」) [1,2] を出版した頃となんら変わっていない。これはある意味で、上で例に挙げた数学が線型回路を記述するのに十分な語彙を備えていたことを示すものであり、回路技術者にとっては幸運であった。

しかしながら、この幸運が同時に、回路技術者が新しい言葉を学ぶ気力を奪ってしまったのではないかと筆者は思う。本論文で用いる非 Euclid 幾何学 (より正確には双曲幾何学) の歴史は古く、1830 年頃に Gauß や Lobachevsky, Bolyai らによって発見された。電子工学の歴史において、1900 年前後における真空管の発明が重要な転機となったことに議論の余地はないであろうが、これよりもさらに約 70 年も前の出来事である。その後、1854 年に行われた Riemann の講演による、非 Euclid 幾何学を統一的に扱うためのアイデア (Riemann 幾何学) の確立や、1915–1916 年の Einstein による非 Euclid 幾何学の物理学への応用 (一般相対性理論) を経て、非 Euclid 幾何学は実用上の問題が議論できる言葉として成熟していた。回路理論との関わりで言っても、1980 年頃、Helton らがすでに非 Euclid 幾何学を線型回路理論に

用いる術を報告している（例えば [3–5]）。もし Helton らの研究成果が回路技術者の間で十分に認識されていたならば、あるいはそれをきっかけに回路技術者たちが未知の数学に興味を持ったならば、今日の電気電子系の学科において、科目の一つとして非 Euclid 幾何学が教えられていてもおかしくなかったのではないだろうか。

無論、すべての回路技術者が未知の数学に対し無関心だったわけではない。21世紀に入り、かつて Helton が指摘した非 Euclid 幾何学と線型回路理論との関係が、部分的ではあるが Gupta により再発見されている [6]。また、Muller らによる3次元 Smith チャートの提案と活用法の研究 [7–9]、線型回路による作用を代数幾何の観点から捉える Arsenovic の研究 [10] など、回路と幾何学を関連づけた研究をいくつか見つけることができる。しかしながら、これらの研究が、回路技術者が非 Euclid 幾何学を学ぶ動機となるであろうかと考えると、これは難しいのではないかと思う。例えば Gupta の文献 [6] を見てみよう。この文献は、線型回路理論と非 Euclid 幾何学との関係を、画家 Escher の作品と関連付けて説明するという独創的なものである。単なる Helton の主張の繰り返しに止まらない、独自の視点を持った興味深い研究ではあるが、この「興味深さ」というのは、ある種の神秘的なものに対する感動のような、回路理論の持つ実用的な側面からは切り離されたところにある「興味深さ」である。Muller や Arsenovic などの研究についても同様のことが言える。これらには、形而上的な面白さという点で大いに惹かれるものがあるが、一度「これでどういった回路を作ることができるか」、「これで回路の性能がよくなるのか」と問うてしまうと、答えに詰まってしまう。回路の設計や解析に応用するという観点で非 Euclid 幾何学を評価したとき、その評価は Helton の研究以来、ほとんど変化がないのである。

回路技術者にとっての非 Euclid 幾何学とは、無理に学ぶ必要のない、遠い異国の言葉なのであるだろうか。この質問に対して、筆者らは強く「否」と否定したい。その根拠となるのが、本論文で述べる非 Euclid 幾何学を用いた線型回路の特性の表現である。この表現を用いることで、かつての Helton の結果とは異なる方面から、非 Euclid 幾何学を線型回路の設計・解析へ応用することが可能になる。

表現の肝となるのが、回路的な概念と幾何学的な概念との対応である。より具体的に言えば、例えば回路的な概念とは「回路構成」や「反射量」、「損失」などであり、幾何学的な概念とは「曲線」や「距離」、「長さ」といったものである。この対応により、回路設計者は非 Euclid 幾何学の持つ利点を享受することができ、例えば、幾何学の持つ直感的なわかりやすさを回路設計に持ち込むこともできるし、先人達の残した数々の数学的な定理を活用することもできる。我々はこの表現を武器に、線型回路のある性能に関する最適化問題を解く。この解は、もし非 Euclid 幾何学を用いないで導出しようとする、鋭い洞察力と、複雑な代数計算を必要とするであろう

ものである。そのような解をほとんど直感的に導くことができるほどに、非 Euclid 幾何学は強力な言語である。

1.2 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。

2章では、この論文の主題であるインピーダンス変換回路と非ユークリッド幾何学の導入を行う。本論文では、線型回路を「インピーダンス変換を行うもの」と考えて、回路によるインピーダンスの移動を非 Euclid 幾何学と関連付けて議論する。しかし、インピーダンス変換という概念自体は、回路を用いるほとんどすべてのアプリケーションで用いられる普遍的なものであり、その実現方法や役割も様々である。本稿で扱う線型回路によるインピーダンス変換が、より広い意味でのインピーダンス変換の中でどのような位置付けにあるのかを説明し、本論文の扱う範囲を明確にするのがこの章の目的の一つである。加えて、線型回路によるインピーダンス変換を実現する上で重要な、Smith チャートの説明もこの章で行う。非 Euclid 幾何学の節は、主に術語の定義のためと、非 Euclid 幾何学に触れたことのない読者のために設けた。この節で説明する事柄に精通している読者は、この節を読み飛ばしても問題ない。

3章では、筆者らが回路理論と非 Euclid 幾何学の関連に気づききっかけ¹となった、逆L型インピーダンス変換回路の電力損失に関する検討を述べる。そのような事情なので、この章では非 Euclid 幾何学は一切使っておらず、従来の線型回路理論の範疇で検討が進む。

続く4章では、前章の結果を幾何学的な観点から見直す。研究の流れとしては、4章の内容がちょうど芽生えに当たる部分であり、この検討で得られた重要な結果が、本論文の主題である、回路の特性の幾何学的表現である。この章の結果を標語的に述べるならば、「インピーダンス変換回路の電力損失は、対応するパスの双曲幾何学的な長さに一致する」となる。

3,4章と続けて電力損失を扱ったが、5章の主題は「変動」である。この章では、無損失、あるいは損失が十分に小さいとみなせるインピーダンス変換回路の入力インピーダンスの変動を取り扱う。入力インピーダンスの変動を引き起こす二大要因

¹正直に言うと、筆者らが非 Euclid 幾何学に興味を持った後も、かなり長い間、Helton の研究を知らないままであった。この意味では、筆者らも Helton の結果を認識していなかった回路技術者のうちの一人であったと言えるが、そのおかげで Helton とは異なる観点から回路理論との関わりを検討することができた。

である，素子値（キャパシタンスやインダクタンス）と周波数の変動を考え，これが入力インピーダンスの変動として現れる度合い，すなわち変動の伝わりやすさが，損失と同じように双曲幾何学的な長さで記述できることを明らかにする。

4, 5章の結果は，共に「回路の特性が双曲幾何学的な長さで決まる」というものであった。この長さはインピーダンス変換回路に対応したパスに対して決まる量であるから，この最小化はそのまま，インピーダンス変換回路の損失の最小化，変動耐性の最大化に繋がる。6章では非 Euclid 幾何学を駆使し，このパスの長さを最小化する問題に解を与える。冒頭で述べた「非 Euclid 幾何学を線型回路の設計・解析に応用することの有用性を示す」という目論見は，本論文で明らかにされる回路特性の幾何学的表現と共に，6章で述べる回路の最適化への応用を以って，ここに完成を見る。

第2章

導入

この章では、以降の議論の準備としてインピーダンス変換回路と非ユークリッド幾何学の基本事項を確認する。インピーダンス変換回路に関する事柄を2.1節、非ユークリッド幾何学に関する事柄を2.2節で取り扱う。

2.1 インピーダンス変換

回路を用いるほとんどすべてのアプリケーションは、インピーダンス変換なしには成立しないであろう。しかし、その汎用性ゆえに、インピーダンス変換という概念を体系立てて説明するのは非常に難しい。

インピーダンス変換という言葉がどれほど漠然としたものかを垣間見るために、まずはインピーダンス変換が使われる例と、その目的について考えてみる。まず真っ先に思い浮かぶのが、送電網における変圧である。変圧という表現だと、電圧の変化に目が行きがちであるが、その本質はインピーダンスの変換である。送電線での電圧降下を抑える、電力の浪費を防ぐという送り手側の目的は、インピーダンス変換によって負荷インピーダンスを高く見せることで実現される。一方の受け手では、受け取った電力をさらに変換し、5Vや12Vといった所望の電圧に調整してから使用するであろう。この時の変換もやはりインピーダンス変換であるが、その目的は使用する負荷に合った電圧、電流の比を実現することであり、送電網で行われるそれとは全くの別物である。

電力網から離れ、話を通信に移そう。すると、上とは全く異なるインピーダンス変換の役割が現れる。代表的な例がインピーダンス整合である。増幅器に対しては電力変換効率を上げるために、アンテナに対しては放射利得の向上のために、検波器に対しては S/N 比の改善のためにと、通信に関連したありとあらゆる場面におい

て、インピーダンス整合が重要な役割を担っている（そもそも、増幅器やアンテナ自体がインピーダンス変換器でもある）。この他、フィルタなども一種のインピーダンス変換の形態と言えるであろう。整合と異なるのは、ミスマッチによる反射を積極的に利用している点である。周波数によって反射の量をコントロールすることにより、所望の周波数帯の信号のみを取り出している。

このように様々な役割を担うインピーダンス変換であるが、その実現方法も実に多彩である。電力利得のある能動的な手段によるもの（増幅器やアクティブフィルタ）や、逆に電力損失を伴うもの（アッテネータやシリーズレギュレータ）、増幅も減衰も許されないもの（磁気トランス）など、インピーダンス変換が用いられる状況、目的、要求に応じて、様々な特徴をもったインピーダンス変換の手段が使い分けられている。

2.1.1 リアクタンス素子を用いた集中定数インピーダンス変換

こうした色々なインピーダンス変換の中でも、通信や、近年実用化が進んでいる無線電力伝送、高周波パワーエレクトロニクスなどといった領域で重要な役割を担っているのが、インダクタとキャパシタを用いた集中定数インピーダンス変換回路である。本論文で言うところのインピーダンス変換回路とはすべて、リアクタンス素子を用いた集中定数インピーダンス変換回路のことである。

この回路は、インダクタとキャパシタのリアクタンスを用いてインピーダンスの変換を行うものであり、上記の通信、無線電力伝送、高周波パワーエレクトロニクスなどでは、最も一般的なインピーダンス変換の手段といえるものである。その一般性から、リアクタンス素子によるインピーダンス変換については、古くから様々な検討がなされている。これらの検討のうち、本論文の内容と関連の深いいくつかについては、3章で詳しく言及している。

では、具体的にどのような方法でインピーダンスが変換されるのかを見てみよう。例として $100\ \Omega$ が最適負荷の電源を、 $50\ \Omega$ の負荷に接続するという状況を考え、 $50\ \Omega$ から $100\ \Omega$ へのインピーダンス変換を行う（図 2.1）。まずは、このインピーダンス変換が昇圧なのか降圧なのかを判断する。例えば、電源から $1\ \text{W}$ の電力を出力したとしよう。このとき、電源に最適な負荷（つまり $100\ \Omega$ の負荷）を繋げば、電源からの出力は実効値で $10\ \text{V}$ 、 $100\ \text{mA}$ となる。一方の負荷側では、 $1\ \text{W}$ の電源を受け取った時の電圧、電流の実効値は約 $7.07\ \text{V}$ と約 $141\ \text{mA}$ になる。よって $50\ \Omega$ から $100\ \Omega$ へのインピーダンス変換は約 $7.07\ \text{V}$ から $10\ \text{V}$ への昇圧となるので、リアクタンス素子の共振による昇圧を用いた、図 2.2 のような回路を用いれば変換が可能

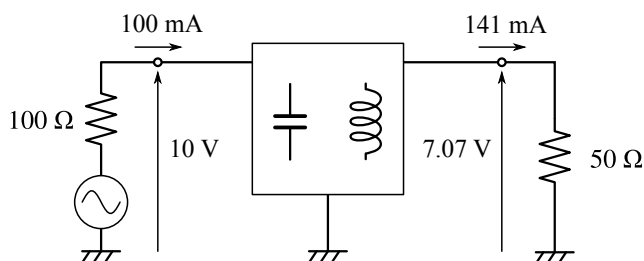


図 2.1: 50 Ω から 100 Ω へのインピーダンス変換

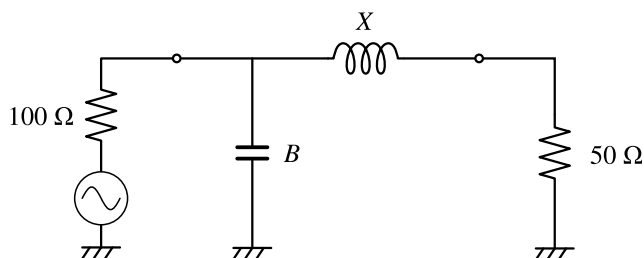


図 2.2: 昇圧を実現するインピーダンス変換回路

である。無論，この構成が唯一のものではなく，インダクタとキャパシタを入れ替えた図 2.3 の回路や，より素子の数が多い回路を用いても所望のインピーダンス変換を行うことができる。

回路の構成が決まったら，次に素子値を決める。インダクタのリアクタンスを X ，キャパシタのサセプタンスを B とする。この時，電源側から見込んだ変換回路のイ

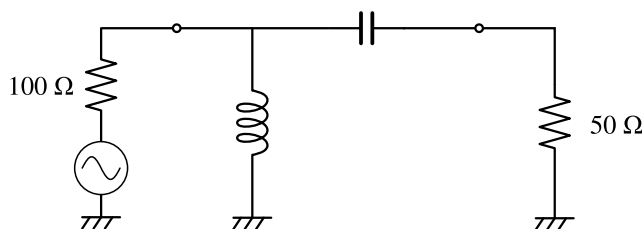


図 2.3: 図 2.2 のインダクタとキャパシタを入れ替えた例

インピーダンス Z は

$$Z = \left(jB + \frac{1}{50\Omega + jX} \right)^{-1} \quad (2.1)$$

となる。これが電源の最適負荷インピーダンス 100Ω に一致するようにすれば良いのだから、

$$X = 50\Omega, B = 10\text{ mS} \quad (2.2)$$

となる。

2.1.2 Smith チャートを用いたインピーダンス変換回路設計

前節の整合回路設計の例で見たように、整合回路の設計は大別して

- 回路構成を決める
- 素子値を決める

という二つのステップに分けることができる。回路構成を決めるステップにおいて非常に重要な役割を果たすのが、図 2.4 に示す Smith チャートである。Smith チャートを用いると、先ほどのように「昇圧かどうか」や「共振を用いて」といったことを一切議論せずに、直感だけを頼りにインピーダンス変換回路の構成を決めることができる。

Smith チャートが何であることを説明する前に、まずは反射係数の説明をしよう。図 2.5 のように、無限に長い一様な線路をインピーダンスが Z の素子で終端したとする。線路の側から素子に対して電力を与えたときに、素子に入る波 w_{in} と出てきた(反射した)波 w_{out} との複素振幅比

$$\Gamma = \frac{w_{\text{out}}}{w_{\text{in}}} \quad (2.3)$$

を反射係数と呼ぶ。「波」と言ってしまうが、この波をどのような物理量を表すのかによって、複数の反射係数の定義がある。本論文では Kurokawa の定義に基づいた電力反射係数 [11] を用いる。この他の定義としては、広く一般に用いられている電圧反射係数などがある。電力反射係数の定義に基づけば、上の式の Γ と Z と

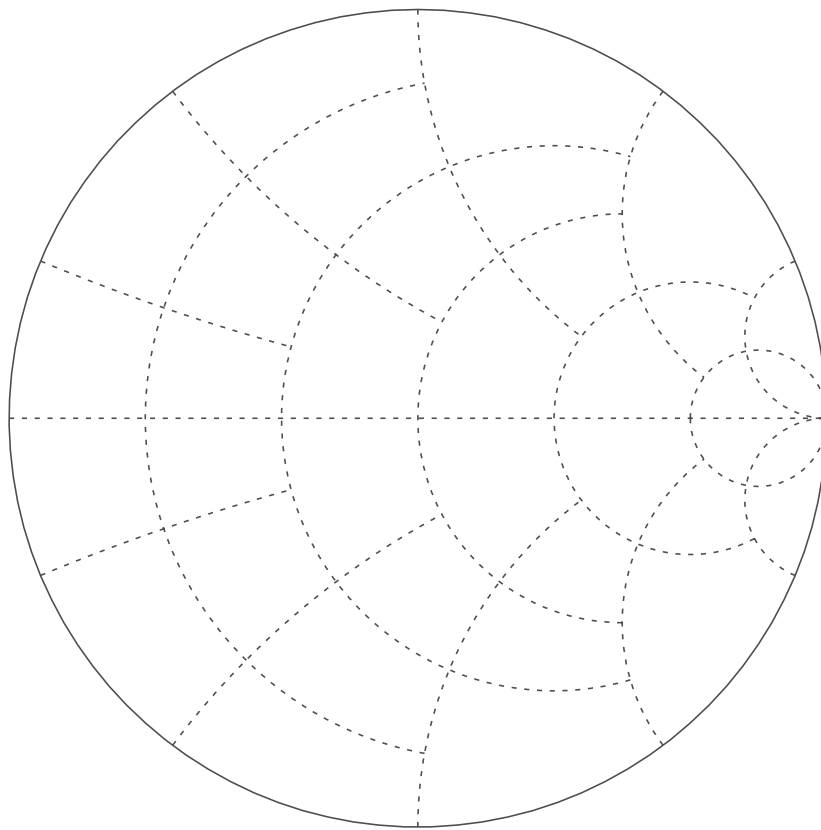
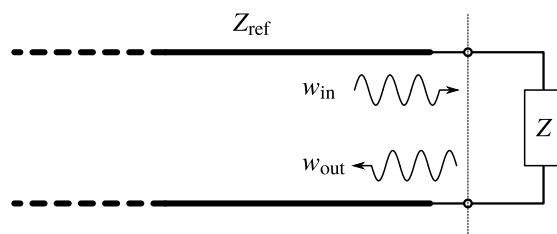
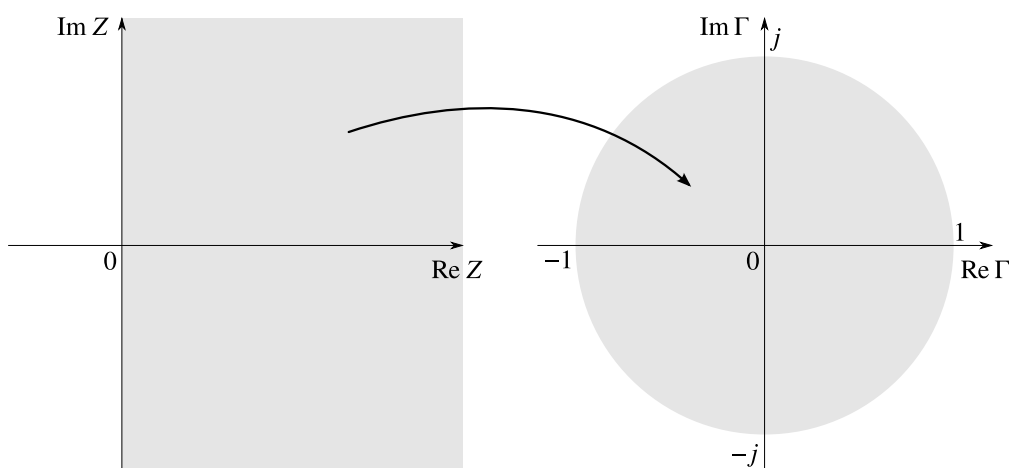


図 2.4: Smith チャート

図 2.5: 無限に長い一様な線路とインピーダンス Z との接続面での反射図 2.6: 正実なインピーダンス Z から反射係数 Γ への変換

の間には、無限に長い線路の特性インピーダンス Z_{ref} を用いて

$$\Gamma = \frac{Z - Z_{\text{ref}}^*}{Z + Z_{\text{ref}}}, \quad Z = \frac{Z_{\text{ref}}^* + Z_{\text{ref}}\Gamma}{1 - \Gamma} \quad (2.4)$$

という関係が成り立つ。 Z_{ref} のことを「反射係数を求めるための基準」という意味で、基準インピーダンスと呼ぶことにする。

式 (2.4) は物理的な考察から導かれる式であるが、定義としてはむしろ、図 2.5 のような状況設定もすべて忘れてしまい、「式 (2.4) により Z を変換した値 Γ のことを Z_{ref} を基準インピーダンスとする反射係数と呼ぶ」としてしまった方がシンプルである。本論文では、そのような立場に立って反射係数を用いることにする。つまり「反射係数」とは言うものの、そこに「反射」の介在する余地はなく、単に式 (2.4) で定義される変換規則が存在するだけである。

式(2.4)による変換では、正実なインピーダンス Z ($\text{Re } Z > 0$) に対応した複素平面の右半分が、同じく複素平面上の単位円盤に移される(図2.6)。これは要するに、反射係数 Γ を複素平面上に表したということである。この反射係数を表す複素平面上に

1. インピーダンスとしての実部が一定となるような円(等抵抗円¹⁾)
2. インピーダンスとしての虚部が一定となるような円(等リアクタンス円)
3. アドミタンスとしての実部が一定となるような円(等コンダクタンス円)
4. アドミタンスとしての虚部が一定となるような円(等サセプタンス円)

などを書き込んだものを Smith チャートと呼ぶ。文献によっては、1., 2. のみを書き込んだものを Smith チャートと呼んだり、3., 4. のみを書き込んだものをアドミタンスチャート、すべての円を書き込んだものをイミタンスチャートと呼んだりもするが、本論文では区別することなく Smith チャートと呼ぶ。また、インピーダンスやアドミタンスが示された複素平面を、反射係数が示された複素平面と区別するために、本論文中ではインピーダンスが示された複素平面を指してインピーダンス平面、アドミタンスが示されたものをアドミタンス平面、反射係数が示されたものを Smith チャートと呼び分けることがある。

Smith チャートを用いたインピーダンス変換回路の設計で重要なのが、図2.7, 2.8に示したような、素子の挿入とインピーダンスの移動との対応である。例えば負荷インピーダンス Z に対してインダクタを直列に挿入すると、インダクタ越しに回路を見た時の入力インピーダンスは、インダクタにより増えたりアクタンス X を Z に加えた $Z + jX$ になる。これを、 Z から $Z + jX$ へのインピーダンスの移動と捉え、Smith チャート上にその軌跡を書き入れたものが図2.7の左の矢印である。この時の移動は等抵抗円に沿った動きである。等抵抗円は一般に、Smith チャート上の点 $\Gamma = 1 + 0j$ を通る、実軸に対して対象な円になる。挿入する素子をキャパシタにすると、今度は Z のリアクタンスが減る方向に動く。これを表したのが図2.7の右の矢印である。同様のことを、素子の並列接続で考えると図2.8が得られる。この時の移動は等コンダクタンス円に沿ったものとなり、等コンダクタンス円は一般に Smith チャート上の $\Gamma = -1 + 0j$ を通る実軸対象な円になる。ただこれは、基準インピーダンスとして純抵抗を取った場合であり、純抵抗以外の基準インピーダンスを取っ

¹なんの証明もなく、この曲線が円になることを前提にしているが、これは式(2.4)が正則な写像であることに気づけば、ほとんど自明な事実であろう。

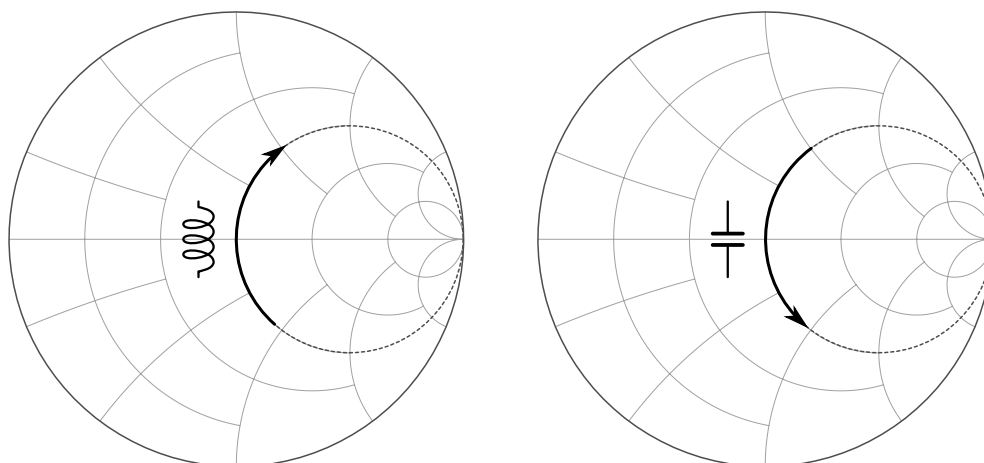


図 2.7: 直列素子による移動

てしまうと、図 2.9 のように等コンダクタンス円の位置が動いてしまう。これだと、基準インピーダンスごとに異なったチャートを用意する必要があるため、あまり使い勝手がよくないので、以降の議論では、Smith チャートを用いるときは暗黙的に「基準インピーダンスは純抵抗」という仮定をおくことにする。

Smith チャートを用いて、冒頭に挙げた $50\ \Omega$ から $100\ \Omega$ へのインピーダンス変換を考える。まず $50\ \Omega$ と $100\ \Omega$ に対応して、図 2.10 のような 2 点が決まる。この 2 点間を図 2.7, 2.8 の移動を用いて結ぶと、図 2.11 のような折れ目のある曲線が得られ、これに対応する構成として図 2.1 の回路が得られる。このように、Smith チャート上の折れ目のある曲線と、インピーダンス変換回路との間には、図 2.7, 2.8 の移動による対応がある。以降では、Smith チャート上の折れ目のある曲線を指して「パス」という呼び方をする。また、このパスに沿って実現された回路を「パスに対応する回路」と表現したり、その逆に「回路に対応するパス」などと表現することがある。

2.1.3 回路パラメータ

インピーダンス変換回路に限った話ではないが、線型回路の設計では、上で見たようにインピーダンスやアドミタンス（両者をひっくるめてイミタンスと呼ぶこともある）、反射係数といった複数の表現を自由に使い分けて検討を行う。インピーダンス、アドミタンス、反射係数という三つの表現は、線型回路の振る舞いをどう表現するか（電流の流れやすさや、電圧のかかりやすさ、一様な媒質との境界面に

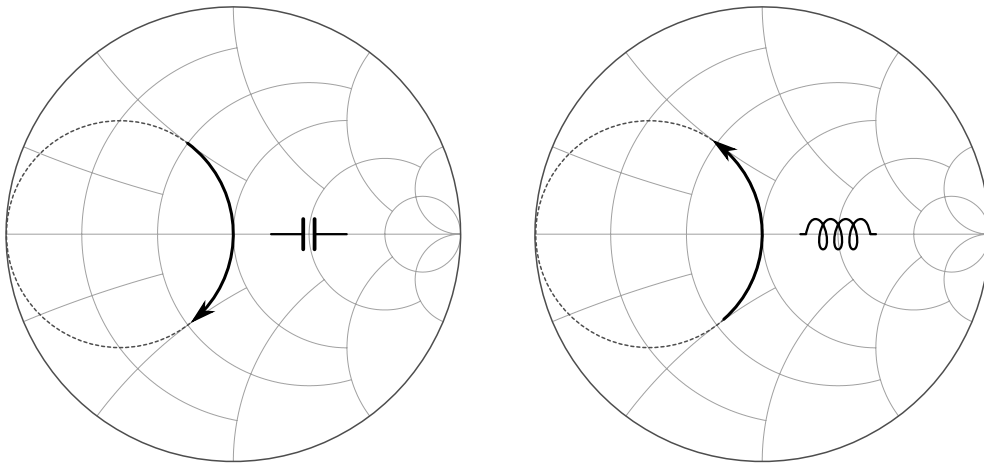


図 2.8: 並列素子による移動

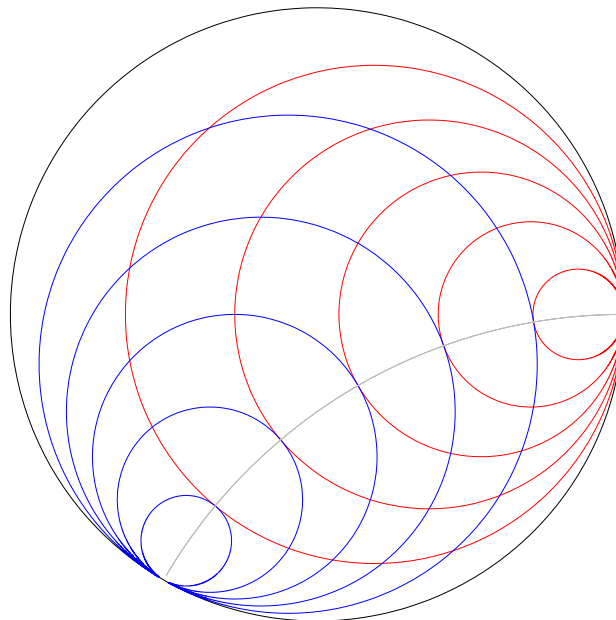


図 2.9: 基準インピーダンス Z_{ref} が純抵抗でない場合の Smith チャート ($Z_{\text{ref}} = e^{\frac{1}{2}j\pi} \Omega$, 赤い線が等抵抗円, 青い線が等コンダクタンス円)

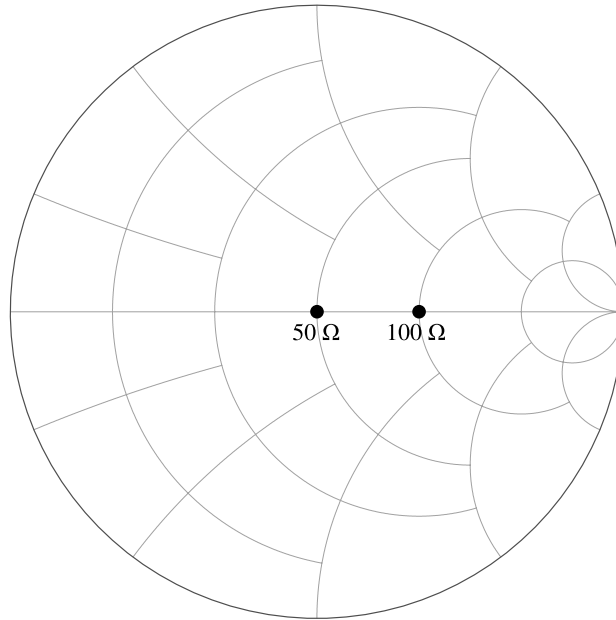


図 2.10: Smith チャート上にプロットされた $50\ \Omega$ と $100\ \Omega$ ($Z_{\text{ref}} = 50\ \Omega$)

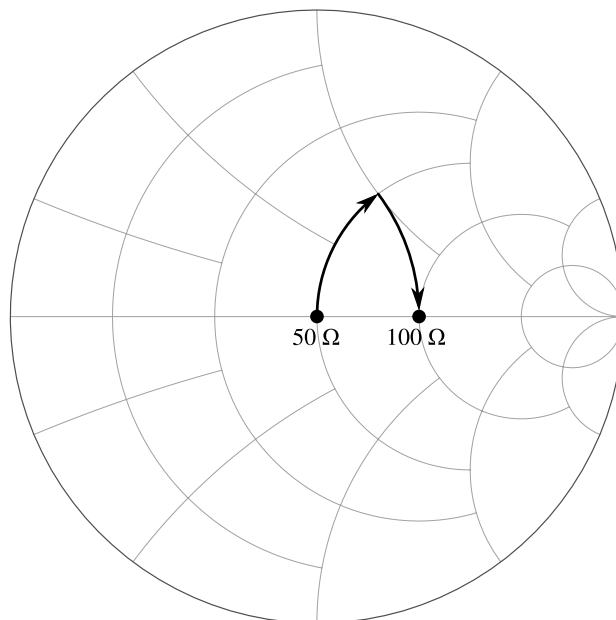


図 2.11: 図 2.1 の回路に対応するパス

においてどれだけの反射が起こるか等) という違いはあるが、本を正せば、ただ一つの対象を表している。本論文では、「線型回路の振る舞い」を指して、「回路パラメータ」という言葉を用いることにする。この立場に立つと、ある一つの線型回路の振る舞いは一つの回路パラメータで表現され、回路パラメータはインピーダンスやアドミタンス、反射係数といった複数で表現できる、という解釈になる²。上記の三つの表現（インピーダンス、アドミタンス、反射係数）は、特に1ポートの線型回路の振る舞いを表しているという意味で「1ポート回路パラメータ」と呼ぶこともできる。これは当然、多ポートの線型回路の振る舞いを表す表現が他にあるからであり、Z行列やY行列、散乱行列（S行列）、基本行列（F行列、ABCDパラメータ）、遷移行列（T行列）などがこれに当たる。

2.2 非 Euclid 幾何学

非 Euclid 幾何学は一般に「曲がった空間の幾何学」とも呼ばれ、この曲がった空間を記述するためには、計量の定義された多様体である Riemann 多様体が用いられる。本論文で中心的な役割を果たす双曲幾何学も、今日では Riemann 多様体の一例（負の一定曲率を持った2次元 Riemann 多様体）として扱われる。

Riemann 多様体、あるいは双曲幾何学については、すでに多くの教科書 [12-16] が世に出ており、あえて本論文で紙面を割かずとも、2, 3の参考文献を引用して説明を済ますこともできる。それでもなお、筆者の労力と紙面を費やしてこれらの概念を説明するのには、単に用語の意味を明確に定義しておきたいという理由以上に、次のような事情がある。まず第一に、これらの概念を知る回路の技術者や研究者がほとんどいないことである。筆者は数回にわたって、本論文に含まれる結果を学会等で発表してきたが、その時の反響として最も多かったのが「背景とする数学に馴染みがないのでわかりづらい」であった。本論文の読者像を考えた時に、上記の概念を説明せずに済ますというのは、「わからないから」と言っただけで本論文が敬遠される理由になりうると考えた。第二に、そういった初学者が一から幾何学を学ぶことの敷居の高さを鑑みてである。数学の専門書には独特の取っ付きにくさがあり、慣れないうちは読みにくいという意見をよく聞く。それに加え、この論文を読み進めるという目的であれば、一般的な幾何学の教科書は量の面でも、厳密さの面でも過剰

²このような説明だと「回路パラメータ」というものが、実体のないあやふやなものに思えるかもしれない。このことに不満を感じる読者は、先に6.1節の説明を参照されたい。そうすれば、筆者らの意図するところが掴めると共に、「回路パラメータ」というものが「線型回路の振る舞いの全体からなる多様体上の一点」という、具体性を持った概念であることが理解されるであろう。

である。必要な事項のみを抜き出した上で、あまり専門的すぎないように説明する必要があると考えた。

2.2.1 位相空間

多様体の定義に入る前に、多様体に固有のものではないが、回路を学んでいるものからすると馴染みの薄いとおもわれる用語の意味を明らかにしておく。

数空間 白抜き文字の \mathbb{R} で全ての実数からなる集合を表す。同様にして、 \mathbb{C} で全ての複素数からなる集合を表す。周知のとおり、複素数 $z \in \mathbb{C}$ はこれの実部、および虚部と称される二つの実数 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$ からなる。この事実を用いて、一つの複素数 z を実数の二つ組 (x, y) と同一視することができる。実数の二つ組の全体は、二つの \mathbb{R} を「掛け合わせ」た集合になり

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

あるいは、数の掛け算との類推により

$$\mathbb{R}^2 \quad (2.6)$$

と表す。上記の集合同士の演算 \times は直積と呼ばれる。これは任意の n つ組に拡張でき、

$$\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ 個}} = \mathbb{R}^n \quad (2.7)$$

と書ける。 \mathbb{R}^n を n 次元数空間と呼ぶ。

写像 先ほど \mathbb{C} の元と \mathbb{R}^2 の元が「同一視」できると述べたが、この同一視を数学的に定義するには全単射を用いる。集合 A の全ての元に対して、集合 B の元をただ一つ対応させる規則 f を、 A の上で定義された写像や A から B への写像と呼び、

$$f: A \rightarrow B \quad (2.8)$$

と表す。また、 f により $a \in A$ が $b \in B$ に対応することを

$$f: a \mapsto b, f(a) = b \quad (2.9)$$

などで表現し、「 f は a を b に写す」、「 a の f による像は b である」などという。先ほどの同一視は \mathbb{C} から \mathbb{R}^2 への写像

$$f: z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \quad (2.10)$$

によるが、このとき我々は暗に、この逆の対応

$$g: (x, y) \mapsto x + jy \quad (j \text{ は虚数単位}) \quad (2.11)$$

があることを期待している。 g が再び写像となるためには、 f に次のような性質が望まれる。

- f によりすべての \mathbb{R}^2 の元に対応がつく。すなわち任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(z) = (x, y)$ となるような z が、少なくとも一つ存在する。
- f により、ある $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に写る $z \in \mathbb{C}$ はただ一つである。この結果、相異なる二つの $z, w \in \mathbb{C}$ があったときに、必ず $f(z) \neq f(w)$ となる。

前者の性質を満たす写像を全射、後者の性質を満たす写像を単射と呼び、両方の性質を満たす写像を全単射と呼ぶ。写像 f が全単射のときかつその時に限り、上記のように、その逆の対応を表すような写像 f^{-1} が存在し、 f^{-1} を f の逆写像と呼ぶ。定義より f^{-1} は再び全単射となり、これの逆写像は f である。同一視とはつまり、全単射 f とその逆写像 f^{-1} により、異なる表現の間を自由に行き来することである。

同相写像 全単射は二つの集合の間に対応を与えるが、これが「性質」を保存した対応であるとは限らない。この結果として、例えば次のようなことが起こる。

集合論の始祖であるCantorは \mathbb{R} と \mathbb{R}^2 の間に全単射が存在することを見つけた[17]。我々は前に \mathbb{C} と \mathbb{R}^2 間に全単射が存在することを見たから、結局 \mathbb{C} と \mathbb{R} の間には全単射が存在し、我々は一つの複素数を一つの実数と「同一視」できる。

この結果を奇妙に思う者は「同一視」に対して単なる対応以上のものを求めている。この場合で言えば、奇妙さの原因はおそらく「空間と平面は異なる」、「平面と直線は異なる」といった、「次元の異なるもの同士は異なる」という認識であろう。上記の通り、全単射は次元という性質を保存するとは限らないので、ここに齟齬が生まれる。次元を保存するような同一視は、全単射にさらに条件を加えた同相写像なるものにより定義される。

同相写像に課される条件は連続性である。周知の通り、 \mathbb{R}^n の二つの元 $a = (a_1, a_2,$

$a_3, \dots, a_n), b = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ に対して距離が定義できる:

$$d(a, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}. \quad (2.12)$$

\mathbb{R}^m から \mathbb{R}^n への写像 f が $x \in \mathbb{R}^m$ において連続であるとは、 $a \in \mathbb{R}^m$ と x との距離が十分近いならば $f(a)$ と $f(x)$ との距離も十分近いことを言う。もう少し定量的に言うと、今、 $f(x)$ からこれ以上は離れて欲しくないという距離の上限 ϵ があったとして、この ϵ に対して x からの距離の上限 δ を決めることで、

$$d(x, a) < \delta \quad (2.13)$$

を満たすような a に限っては

$$d(f(x), f(a)) < \epsilon \quad (2.14)$$

を満たすようにできることを言う。 f が、自身が定義されている全ての点で連続であれば、単に f は連続であると言う。

f が全単射で、かつ f と f^{-1} が共に連続であるとき、 f を同相写像と呼ぶ。定義より、 f が同相写像ならば f^{-1} も同相写像である。二つの集合 A と B の間に同相写像が存在する時、 A と B は同相であるという。上の例で言えば、 \mathbb{R}^2 と \mathbb{C} は同相だが、 \mathbb{R} と \mathbb{R}^2 は同相でない。

感覚として、これまでの「同一視」は「同相写像による対応」と考えるのがよいと思われる。

位相空間 上で述べた同相の定義は距離という概念に依存している。これは、同相写像が連続性、すなわち「繋がり」を保つ写像として定義されており、「繋がり」とは何かを考える上で、距離が本質的な役割を担っていたからである。ところが、驚くべきことに、現代数学においては「距離」を用いることなく「繋がり」を定義することが可能であり、距離の概念によらない同相の定義を与えることができる。

「繋がり」を抽象化するための出発点が、以下に述べる閉集合と開集合である。 \mathbb{R}^n の部分集合 A について

- A 上の任意の収束する点列が、 A 内の点に収束するならば³、 A を閉集合と呼ぶ。

³この定義を最初に読むと「点列は収束するといっているのだから、 A 内の点に収束するのは当たり前だろう」と思うかもしれないが、それは正しくない。例えば \mathbb{R} の部分集合として $A = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a \leq 1\}$ を取ろう。点列 $a_k = 1/k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) は、任意の k について $a_k \in A$ を満たすので A 上の点列だが、その極限值は 0 であり、これは A に属さない。

- A 上の任意の点 a について, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < \epsilon\} \subset A$ となる ϵ が存在するならば, A を開集合と呼ぶ。

閉集合と開集合のイメージは, その字面通り「閉じた世界」と「開いた世界」である。例えば, 閉集合の中に出てきた点列を, A の中での移動と考えると, 閉集合は「どれだけ頑張っても A から出れない」という意味で閉じた世界である。一方で開集合の中で点 a の移動を考えると, 開集合の定義より, a の周りには常に ϵ だけの「広がり」が存在しているので, その広がりの範囲で自由に移動できる。移動した先の点においても「広がり」があるので, 開集合の点は立ち止まることなく, 開いた世界をいくらでも進むことができる⁴。また, 次の意味においても, 閉集合と開集合は対照的な存在である。

定理 1 開集合の補集合は閉集合である。また, 閉集合の補集合は開集合である。

開集合と閉集合を用いれば, 上で定義した同相写像には, 次のような別の定義を与えることができる。

定理 2 全単射 $f: A \rightarrow B$ が同相写像になるための必要十分条件は, f が A の開集合を B の開集合に写し, f^{-1} が B の開集合を A の開集合に写すことである。

上の定理において, 「開集合」をすべて「閉集合」に置き換えても定理は成り立つ。開集合, 閉集合に基づく定義によれば, 同相写像とは「閉じた世界を閉じた世界に, 開いた世界を開いた世界に対応させる対応」ということになり, 我々が同相写像に持っている「繋がりを保つ対応」というイメージがそのまま反映されていることがわかる。

閉集合と開集合を特徴づけているのは, 以下に述べるような性質である。

定理 3 閉集合は次の 3 条件を満たす。

1. \mathbb{R}^n と \emptyset は閉集合である。
2. (無限個を許す) 任意の個数の閉集合の積は, 再び閉集合になる。
3. (無限個を許さない) 任意の個数の開集合の和は, 再び閉集合になる。

定理 4 開集合は次の 3 条件を満たす。

1. \mathbb{R}^n と \emptyset は開集合である。

⁴ここでの記述は教科書 [12] を参考にした。

2. (無限個を許す) 任意の個数の開集合の和は, 再び開集合になる。
3. (無限個を許さない) 任意の個数の開集合の積は, 再び開集合になる。

上の性質の中で注目すべきは「無限個の集合の集まり」についての積/和をとる操作を許すかどうかである。例えば, 閉集合の場合は無限個の集合の積をとる操作は許されるが, 無限個の集合の和を取ることは許されない。これは裏を返せば, 無限個の閉集合同士の和を取った時に, その結果が閉集合ではなくなる場合があるということである。そのような例が, \mathbb{R} の閉集合 $F_k = \{a \in \mathbb{R} \mid -1 + 1/k \leq a \leq 1 - 1/k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) の和を取った場合である。この開集合たちは, k が大きくなるごとに徐々に「端」が広がってゆき, 最終的には ± 1 に限りなく近づく。しかし, ± 1 自体は和集合に属さないので

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bigcup_{k=1,2,\dots,N} F_k = \{a \in \mathbb{R} \mid -1 < a < 1\} \quad (2.15)$$

となる。これは開集合である。

上のことを「閉じた世界」のイメージで解釈すると以下のようになる。「閉じた世界」を有限の数だけ合わせても, それは「閉じた世界」である。だが, 徐々に大きくなってゆく, 無限の数の「閉じた世界」を合わせてしまうと, その結果として「開いた世界」が出来上がってしまうかもしれない。開集合, すなわち「開いた世界」では, ちょうど逆のことが起こる。徐々に小さくなっていく, 無限の数の「開いた世界」の共通部分を考えて, そのの行き着く先はもはや「開いた世界」ではないかもしれない, というのである。このように, 「無限個の集合の集まり」に対する操作は, 閉集合と開集合の持った「閉じた」や「開いた」という概念を端的に反映している。

そこで発想を逆転し, 閉集合, 開集合であるから定理3,4を満たすのではなく, 定理3,4を満たすようなものこそが開集合, 閉集合にふさわしいと考えるのが位相⁵という考え方である。集合 A の部分集合族 \mathcal{O} を考える。 \mathcal{O} が以下の三つの条件

1. $\mathbb{R}, \emptyset \in \mathcal{O}$.

⁵回路畑の人間からすると, 日本語では波の位相 (phase) と位相空間の位相 (topology) との区別がつかず, 使いづらいことこの上ない。ただ, 本論文中に限って言えば, 波の位相の意味で「位相」という単語を使うことはないので, 「位相」といえば常に「開集合系」の意味である。

2. 有限個または無限個の元からなる O の部分集合 $\{U_i\}_{i \in I}$ について

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in O. \quad (2.16)$$

3. 有限個の元からなる O の部分集合 $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ について

$$U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k \in O. \quad (2.17)$$

を満たすならば、 O を開集合系、または位相と呼ぶ。 A と O の組 (A, O) を位相空間と呼び、特に A にどのような位相が入っているかがはっきりして入る場合は、 O を省略して、単に A を位相空間と呼ぶ。例えば \mathbb{R}^n を考える時、いちいち「... という位相が入っていて」など考えずとも、上で用いていた素朴な意味での開集合（距離の定義に基づく開集合）の集まりを \mathbb{R}^n の位相と考えて、これらを位相空間とみなすであろう。

定理2に基づく同相写像の定義によれば、 \mathbb{R}^n に限らず、あらゆる位相空間の間で同相という概念を用いることが可能になる。

2.2.2 多様体

次の性質をもった位相空間 M を n 次元位相多様体と呼ぶ⁶。

- M の任意の元 p に対して、 M の p を含む開集合 U と、 U から \mathbb{R}^n の開集合との間の同相写像 ϕ が存在する。

上の定義を大雑把に解釈すると、多様体 M とは、それ自体が \mathbb{R}^n と同相とは限らないが、 M から一部の開集合 U を取ってくると、その上に限れば \mathbb{R}^n の一部と同相になるような位相空間である。

位相多様体は、多様体の中でも最も素朴なものである。以下では順次、多様体に構造を入れてゆき、最終的には多様体上の曲線の長さが定義できる Riemann 多様体を定義する。

⁶普通、多様体の定義には空間 M が Hausdorff 空間であるという条件をつける。しかし、本論文の範囲では M が Hausdorff 空間かどうかを気にする必要性を感じなかったため、そもそも Hausdorff 性の説明をしていない。そのような事情のため、ここに書いた多様体の定義は、ふつうは多様体とは見なされない非 Hausdorff 多様体と呼ばれるものを含む定義になっている。例えば教科書 [15] の pp. 14–15 にある例や、文献 [18] を参照。

座標変換 多様体 M の定義では, M の開集合 U の上で定義された同相写像 ϕ を考えた。一般には, このような M の部分集合 U は複数存在し, これに対応して ϕ も複数ある。また, ある $p \in M$ が属する U は一つとは限らず, 複数の開集合の上で定義された同相写像によって, それぞれ異なる \mathbb{R}^n の点に移される, ということもあり得る。 M で定義された, 全ての開集合 U_λ と U_λ から \mathbb{R}^n の開集合への同型写像 ϕ_λ の組 $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ を集めた集合

$$\mathcal{S} = \{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda} \quad (2.18)$$

を M のアトラスという。定義より, \mathcal{S} に属する組のすべてから開集合 U_λ を集めてくると, これは M を完全に覆っている。

U_λ から \mathbb{R}^n の開集合への同相写像を

$$\phi_\lambda : U_\lambda \ni p \mapsto \phi_\lambda(p) = (\phi_{\lambda 1}(p), \phi_{\lambda 2}(p), \dots, \phi_{\lambda n}(p)) \quad (2.19)$$

とする。 U_λ と ϕ_λ の組 $(U_\lambda, \phi_\lambda)$, または ϕ_λ そのもののことを局所座標系, U_λ を ϕ_λ の座標近傍といい, 各 $\phi_{\lambda k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) を局所座標という⁷。二つの局所座標系 (U_α, ϕ_α) と (U_β, ϕ_β) を選んだとき,

$$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \quad (2.20)$$

であれば, ϕ_α^{-1} と ϕ_β を合成することで $\phi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ から $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ への同相写像

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} \quad (2.21)$$

が定義できる。これを座標変換と呼ぶ。座標変換は, ある局所座標系で表された $p \in M$ の座標 $(\phi_{\alpha 1}(p), \phi_{\alpha 2}(p), \dots, \phi_{\alpha n}(p))$ を, 異なる局所座標系で表された座標 $(\phi_{\beta 1}(p), \phi_{\beta 2}(p), \dots, \phi_{\beta n}(p))$ に変換する役割を果たす。

可微分多様体 多様体 M のアトラス \mathcal{S} について, 座標変換が定義できる (二つの座標近傍の積が空でない) 任意の二つの局所座標について, (x_1, x_2, \dots, x_n) から

⁷この辺りの用語については, 教科書によって若干の違いがあったので主に [16] を参考にした。

(y_1, y_2, \dots, y_n) への座標変換

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \\x_2 &= x_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \\&\vdots \\x_n &= x_n(y_1, y_2, \dots, y_n)\end{aligned}$$

がすべて微分可能なとき、 S を C^1 アトラスとよび、 M を可微分多様体と呼ぶ。この時、上の逆の座標変換

$$\begin{aligned}y_1 &= y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\y_2 &= y_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\&\vdots \\y_n &= y_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

もすべて微分可能でないといけないことに注意されたい。なぜなら、「任意の座標変換」の中には、 (x_1, x_2, \dots, x_n) から (y_1, y_2, \dots, y_n) への座標変換と、 (y_1, y_2, \dots, y_n) から (x_1, x_2, \dots, x_n) への座標変換の両方が含まれるからである。

可微分多様体を考えるのは、座標の微小変化⁸ dx_i を考えたいからである。全ての座標変換が微分可能なので、異なる座標系で定義された微小変化 dx_1, dx_2, \dots, dx_n と dy_1, dy_2, \dots, dy_n の間には

$$dx_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j \quad (2.22)$$

という変換関係がある。

Riemann 多様体 多様体の困ったところは、そのままでは「長さ」が定義できないところである。

M を可微分多様体とする。 \mathbb{R} の閉区間 $[a, b]$ から M への写像

$$c : [a, b] \ni t \mapsto c(t) \in M \quad (2.23)$$

を考える。筆者は今、この写像を M 上の曲線のつもりで定義したのだが、「曲線」と

⁸正確には1-微分形式。詳しくは [15]などを参照。

いうからには、上の定義の他に「なめらか」である必要があるであろう。そのためには適当な t_0 を固定し、 $c(t_0)$ を含む適当な座標近傍 U_λ を選んで ϕ_λ により局所座標

$$(\phi_{\lambda 1}(p(t_0)), \phi_{\lambda 2}(p(t_0)), \dots, \phi_{\lambda n}(p(t_0))) = (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)) \quad (2.24)$$

で表せば良い。各局所座標 $x_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) が t_0 において t により微分可能であれば、 $c(t)$ は t_0 で滑らかである。これが任意の $t_0 \in [a, b]$ で成り立つときに $c(t)$ を曲線と呼べば良い。この時の t の微小変化 dt に対応する $c(t)$ の微小長さ $|dc|$ を計算しよう。上と同じく ϕ_λ 局所座標系をとれば、この時の各座標の微小変化は

$$dx_i = \frac{dx_i}{dt} dt \quad (2.25)$$

となる。これを用いて $|dc|$ を

$$|dc| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2} dt \quad (2.26)$$

と定義すれば良さそうである。しかし、問題は $c(t)$ が他の局所座標系でも表される場合である。もしも $c(t)$ が ϕ_λ とは異なる局所座標系により

$$(y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_n(t_0)) \quad (2.27)$$

と表現できてしまうと、同様の計算を得て、 $|dc|$ の長さを

$$|dc| = \sqrt{\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dy_n}{dt}\right)^2} dt \quad (2.28)$$

と定義できる。これでは $|dc|$ に対して、二つの異なる長さが定義されることになってしまい⁹、理論に整合性がなくなる。

この問題を回避するために用いるのが計量テンソルである。計量テンソルは局所座標を用いて

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i dx_j, \quad (g_{ij} = g_{ji}) \quad (2.29)$$

⁹上記の説明が理解しにくければ、具体例として、平面上の直交座標系 (x, y) と極座標系 (r, θ) を考えれば良い。上の主張は要するに、 $|dc| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ であると同時に $|dc| = \sqrt{dr^2 + d\theta^2}$ だと言っているのである。

と表され, $g_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ はその表記からもわかるよう, 局所座標 x_k に依存する値である。計量テンソルを他の局所座標系で表現するときは, 式 (2.22) の変換規則をもちいて

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i dx_j \quad (2.30)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_i dy_j. \quad (2.31)$$

とすればよい。ただし, ここで

$$h_{ij} = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial x_l}{\partial y_j} g_{kl}(x_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, y_2, \dots, y_n)) \quad (2.32)$$

である。 $|dc|$ の長さは, 計量テンソルを用いて

$$|dc| = \sqrt{ds^2} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} dt} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n h_{ij} \frac{dy_i}{dt} \frac{dy_j}{dt} dt} \quad (2.33)$$

と定義できる。このように, 局所座標系による長さのカウントの仕方の違いが g_{ij} , h_{kl} に反映されるため, 座標系によらない曲線の長さを定義することが可能になる。

補足だが, 最初の整合性のない長さの定義式 (2.26) と (2.28) は, それぞれの局所座標系に対して Euclid 計量と呼ばれる計量

$$g_{ij}, h_{ij} = \delta_{ij}, (\delta: \text{Kronecker のデルタ}) \quad (2.34)$$

を定義したことに相当する。このように定義した g_{ij} , h_{ij} は変換式 (2.32) によって写りあうとは限らないので, これらは, それぞれ異なる M 上の計量になる。こう考えると, 使っている計量が違うのだから, 定義される長さが異なるのは当然である。

2.2.3 Poincaré計量とモデル

本論文では、回路によるパスの長さを測るのに Poincaré計量を用いる。Poincaré計量は複素平面の上半分 $\mathbb{H} = \{x + jy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ に対して

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad (2.35)$$

で定義される [19]。ただ、回路理論においては複素平面の上半分よりも、正実なインピーダンス/アドミタンスに対応する右半平面が重要である。そこで、我々は一般的な Poincaré計量の定義を用いなくて、次のように変更した定義を用いる。

- 左半平面 $\mathbb{H} = \{x + jy \mid x > 0\}$ における Poincaré計量を

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{x^2} \quad (2.36)$$

と定義する。

次に、違う局所座標系を選び、複素平面の単位円盤内 $\mathbb{D} = \{x + jy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 < 1\}$ の上で、同じく Poincaré計量を

$$ds^2 = \frac{2(dx^2 + dy^2)}{1 - x^2 - y^2} \quad (2.37)$$

と定義する。こちらに関しては定義を変更せずに、そのまま用いる。上で定義した二つの複素平面上の開集合、および計量を、以下では次のように呼び分ける [19, 20]。

- 式 (2.36) で定義される計量が備わった右半平面 \mathbb{H} を、Poincaréの半平面モデルと呼ぶ。
- 式 (2.37) で定義される計量が備わった単位円盤 \mathbb{D} を、Poincaréの円盤モデルと呼ぶ。

また、以下では Poincaré計量で測った長さのことを指して、双曲幾何学的な長さと呼ぶことがある。上で定義した「モデル」は、双曲幾何学の舞台の中でも、最も有名な二つである。

半平面モデルと円盤モデルで重要なのが、等長変換である。等長変換とは、その名前の通り (Poincaré計量に関しての) 長さを変えない変換である。例えば次のような変換が、長さを保存することが知られている。Möbius 変換 [21, 22] とは a, b, c, d

を $ad \neq bc$ を満たす複素係数として

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.38)$$

で定義される写像のことである。Möbius 変換 ϕ が \mathbb{H} から \mathbb{H} 自身への全単射¹⁰であれば、 ϕ により写された曲線の双曲幾何学的な長さと、写される前の曲線の双曲幾何学的な長さは一致する。同じように、 ϕ が \mathbb{D} から \mathbb{D} 自身への全単射を定めれば、 ϕ は曲線の双曲幾何学的な長さを保存する。

¹⁰少し補足すると、定義より Möbius 変換自体が全単射なので、 ϕ が \mathbb{H} から \mathbb{H} の上への写像になれば十分である。

第3章

逆L型インピーダンス変換回路の電力損失

導入でも述べたように、インピーダンス変換は、通信 [23–25], 無線給電 [26–28], 電力変換 [29, 30] など、あらゆる高周波応用に必須の概念である。インピーダンス変換回路に求められる性能は、回路が使われる状況によって様々である。しかし、近年における通信用 IC の微細化や無線給電技術の広がり、電力変換機器への小型化、高効率化といった要求を背景に、挿入損失の小さなインピーダンス変換回路の重要性が高まっている。

インピーダンス変換回路での挿入損失の検討とは、損失要因を持った、理想的でないリアクタンス素子によるインピーダンス変換を考えるということである。これは当たり前のことを言っているようであるが、実のところ、かなり微妙な問題をはらんでいる。なぜならば、損失のある素子を用いる場合、完全なインピーダンス変換は不可能か、あるいはそもそもインピーダンス変換がその役割を果たせないからである [31]。このことを理解するには文献 [31] にある、インピーダンス整合の例を参照するのがよい。表 3.1 がその例であり、図 3.1 がその状況を表した図である。表中の Z_1, Z_2 はそれぞれ、図 3.1 の逆 L 型インピーダンス変換回路を構成するインダクタの素子値である。また、その右側には各 Z_1, Z_2 の値を採用した時の、電源から負荷側を見込んだインピーダンス Z_{in} 、電源から取り出される電力、負荷で消費される電力が併せて示されている。表の各行の状況は、上から順にそれぞれ

1. 理想的なインダクタにより整合をとった場合
2. 1. のリアクタンス値を保ったまま、無負荷 Q 値を 2 とした場合
3. 整合をとらず、電源と負荷を直接繋いだ場合

表 3.1 文献 [31] のインピーダンス変換の例

	Z_1 [Ω]	Z_2 [Ω]	Z_{in} [Ω]	電源からの電力 [W]	負荷での消費電力 [W]
1.	$4j$	$\frac{10}{3}j$	$1 + 7j$	0.2500	0.2500
2.	$2 + 4j$	$\frac{5 + 10j}{3}$	$4.08 + 6.26j$	0.1550	0.0359
3.	0	∞	10	0.0588	0.0588

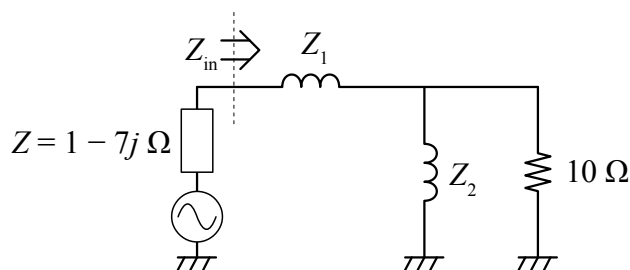


図 3.1: 逆L型回路による、容量性の電源と純抵抗負荷との間のインピーダンス変換

に相当する。注目すべきは、2. と 3. の比較である。インダクタでの損失により 2. では 1. に比べて電源から取り出せる電力が減少しているものの、それでもなお、3. と比べれば多くの電力を取り出せている。これは、3. に比べて 2. の方が電源との整合がよくとれている（インピーダンス変換がうまくいっている）ことを表しているが、他方、負荷で消費される電力を見ると 3. の方がより多くの電力を消費できている。損失を持った素子によるインピーダンス変換では変換回路自体での電力損失があるために、変換により反射電力を最小化することが、使える電力を最大化することには、必ずしも繋がらないのである。

この例は、素子の無負荷 Q 値が 2 という極端に損失が大きい場合であり、得られた結果もある意味で極端なものである。では逆に極端ではない場合、つまりは素子の無負荷 Q 値がそこまで小さいわけではなく、インピーダンス変換回路自体での損失がある程度制限されている状況ではどうなるだろうか。インピーダンス整合の問題は本来、電源での反射電力 P_{ref} のみを最小化する問題である。我々の操作できる量は、インピーダンス変換回路を構成する素子の値 Z_1, Z_2 であるから、 P_{ref} は Z_1, Z_2 の関数である。インピーダンス変換回路に損失がある状況ではこれに加えて、変換回路での損失 P_{loss} を最小化する必要がある。こちらも Z_1, Z_2 の関数となるから、

最適化すべきは

$$P_{\text{ref}}(Z_1, Z_2) + P_{\text{loss}}(Z_1, Z_2) \quad (3.1)$$

である。これを最小化する (Z_1, Z_2) と

$$P_{\text{ref}}(Z_1, Z_2) \quad (3.2)$$

を最小化する (Z_1, Z_2) は当然異なるため、インピーダンス変換による整合が意味をなさなくなる。ところで、素子の無負荷Q値が十分に大きい場合は、 P_{loss} が P_{ref} に比べて十分に小さい。この時、式(3.50)は

$$P_{\text{ref}}(Z_1, Z_2) + P_{\text{loss}}(Z_1, Z_2) \approx P_{\text{ref}}(Z_1, Z_2) \quad (3.3)$$

と近似できるため、再び整合に意味を見出すことができる。

上記の結果を踏まえ、損失を持ったインピーダンス変換回路の検討には大きく二つの方針が考えられる。一つ目は、無負荷Q値の大きい小さいに関わらず、厳密に $P_{\text{ref}} + P_{\text{loss}}$ を最小化するという方針である。二つ目は、無負荷Q値は十分大きいと仮定し、従来の意味での整合に意味を持たせつつ、ほぼ無反射であることを前提に挿入損失を最小化するという方針である。2番目の方針では、インピーダンス変換はインピーダンス変換、損失は損失として問題を分けて考えることができるため、検討が非常に簡単になる。また、無負荷Q値が十分大きいという仮定も、現在の「低損失なインピーダンス変換回路を」という目標からして不自然な設定ではない。実際、現在報告されているインピーダンス変換回路の損失に関する研究の多くが、無負荷Q値が十分大きいという仮定をおき、2番目の方針で検討を行なっている [32–35]。また、仮に無負荷Q値の大きさに関する言及がない文献でも、暗黙のうちに十分大きな無負荷Q値を前提としていたり、前述の理由のためにインピーダンス変換のそのその意味（何を最大化したくて整合をとるのか）が曖昧になってしまっていたりする場合がほとんどである [36]。本章で行う解析も2番目の方針を採用する。

インピーダンス変換回路の損失を検討する上での大前提が明らかとなったので、続いて、従来の研究を概観する。

インピーダンス変換回路での損失を定式化する出発点となるのが、図3.2に示す逆L型インピーダンス変換回路である。逆L型回路が重要なのは、この回路構成が1. 任意の正実なインピーダンスを他の正実なインピーダンスに変換でき、2. そのようなインピーダンス変換回路の構成の中で最もシンプルだからである。これはちょ

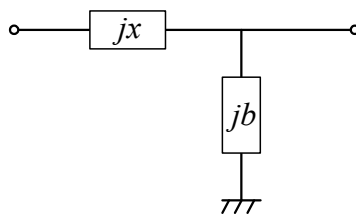


図 3.2: 逆L型インピーダンス変換回路

うど、線型空間における基底の存在に似ている¹。基底は 1. 任意のベクトルがそれらの線型結合で表され、2. そのような性質を持った組の中で最も要素の数が少ないものである。線型空間の性質（例えば、ある線型変換によってどのような線型空間に写るか）は基底の振る舞いを見ればわかった。似たように、逆L型回路の損失がわかりさえすれば、それだけで、多くのより複雑な構成のインピーダンス変換回路について損失を知ることができる。図 3.3 はそのような構成の例である。図 3.3 (a), (b) の構成はそれぞれ、T 型、 Π 型などと呼ばれ、逆L型と並んで代表的なインピーダンス変換回路の構成である。これらはそれぞれ図に示されたように、二つの逆L型回路の組み合わせで表現できる。よってこれらの構成での損失は、逆L型回路の損失を組み合わせで表現できる。同じように、図 3.3 (c) に示す直列素子、並列素子の繰り返しからなるラダー型インピーダンス変換回路も、逆L型回路の組み合わせに還元できる。また、ラダー型回路からの発展で、図 3.3 (d) のような分布定数線路によるインピーダンス変換の損失も定式化が可能である。

損失に関する初期の研究では、変換元と変換先のインピーダンスを純抵抗に限って検討が行われた [32,33]²。図 3.4 に示すように、無負荷 Q 値が Q_1 の直列素子と Q_2 の並列素子 ($Q_1, Q_2 \gg 1$) からなる逆L型回路を用いて、純抵抗 r_1 からもう一つの純抵抗 r_2 へとインピーダンス変換するとき、この回路の効率 η は Q_1, Q_2, r_1, r_2 を用いて

$$\eta \approx 1 - \frac{Q}{Q_1} - \frac{Q}{Q_2}, \quad \left(Q = \sqrt{\frac{r_2}{r_1} - 1} \right) \quad (3.4)$$

と近似できる。この式から次のことがわかる:

¹ 実のところ、これは単なる比喩とは言い難い。Smith チャートの内側から実軸を除いた領域を考えると、逆L型を構成する二つの素子の値 X, B について、接ベクトル $\partial/\partial x, \partial/\partial b$ はこの領域の接空間の基底になるからである。

² 文献 [32] と [33] は 2006 年から 2007 年にかけて、それぞれ独立に発表されたにもかかわらず、本質的に全く同じ指摘をしている。

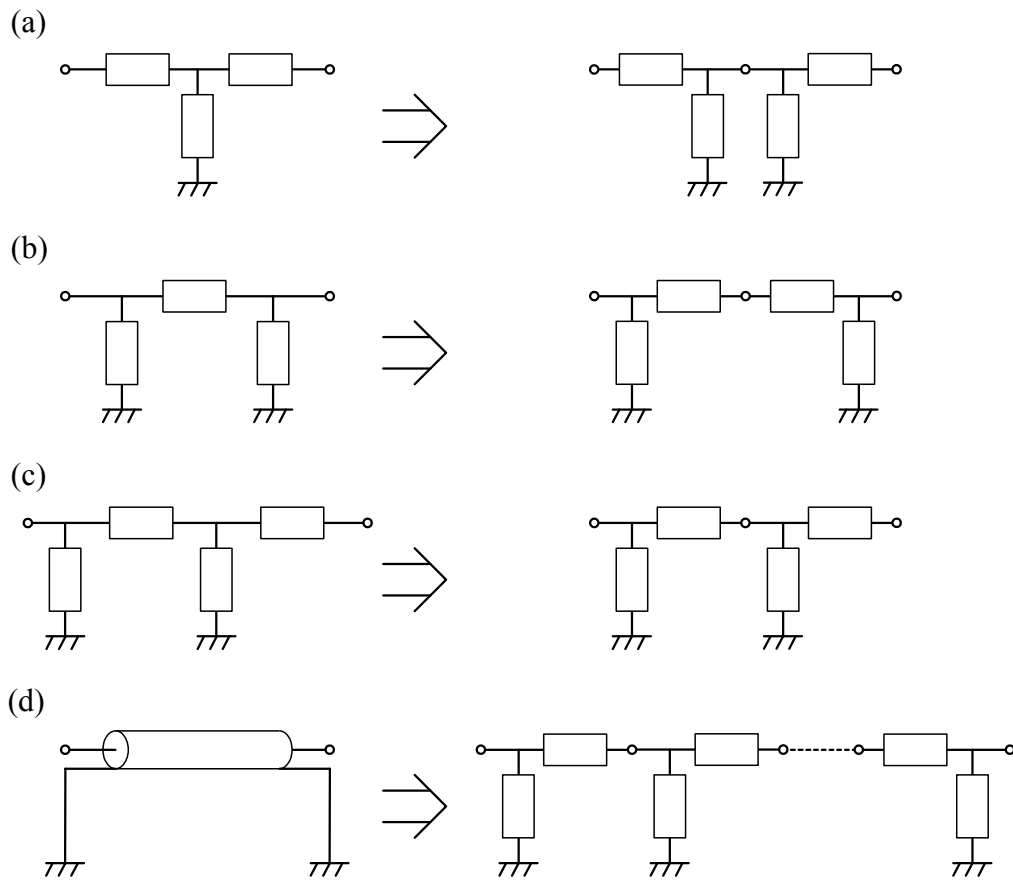


図 3.3: 様々な構成のインピーダンス変換回路と逆L型回路への分解

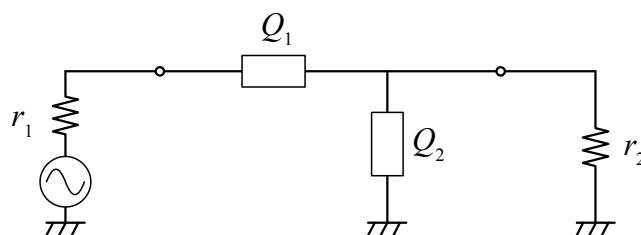


図3.4: 逆L型回路による純抵抗の間のインピーダンス変換

- 素子の無負荷Q値が小さいほど効率が低くなる。これに関しては、定式化をしなくともほとんど自明である。
- r_1 と r_2 の比が大きいほど効率が低くなる。また、 r_1, r_2 の値が異なっても、それらの比が一緒であれば効率は同じになる。

上の式は文献 [32] からの引用だが、文献 [33] でも表現の異なる同じ内容の式を導出している。これが一つ目の指摘である。二つ目の指摘は r_1, r_2 の比とインピーダンス変換回路の段数に関してである。図3.4の r_1, r_2 を固定したまま、図3.5のように逆L型回路を重ねる数（これを段数と呼ぶことにする）を増やすことができる。この時、全体での挿入損失が最小になる段数が r_1, r_2 の比によって決まる。具体的には、 r_1, r_2 の比が1から9までならば1段（単なる逆L型回路）が最も効率が良く、9から約48であれば2段、約48から約244であれば3段、… と比が大きくなるにつれて、最適な段数は大きくなってゆく。

この先行研究の欠点はやはり、インピーダンス変換を純抵抗間のものに限っている点である。これは「結果が適応できる状況に限られる」という意味でももちろん問題があるが、それ以上に上記の多段インピーダンス変換回路の検討への影響が大きい。先ほど、 r_1, r_2 の比により「最適」なインピーダンス変換回路の段数が決まると述べた。この「最適」には、前述の制限によって「純抵抗を経由するという条件付きで」という枕詞がつく。これを2.1節で述べたSmithチャート上のパスで表現すると、図3.6のように、途中で必ず実軸上に戻ってくるようなパスになる。仮に真に損失が最小となるパスが図3.7のようになるとすれば³、上の意味での「最適」にはほとんど意味がなくなる。これは致命的である。

そこでこの章では、上記の逆L型回路の損失の式(3.4)を複素インピーダンス間のインピーダンス変換に拡張する。複素インピーダンスへの拡張で難しいのが式の表現である。正直に言ってしまうと、単に損失を定式化するだけであればそこまで難

³そして残念なことに、この例での真に最適なパスは実軸上を経由しないことが本章で示される。

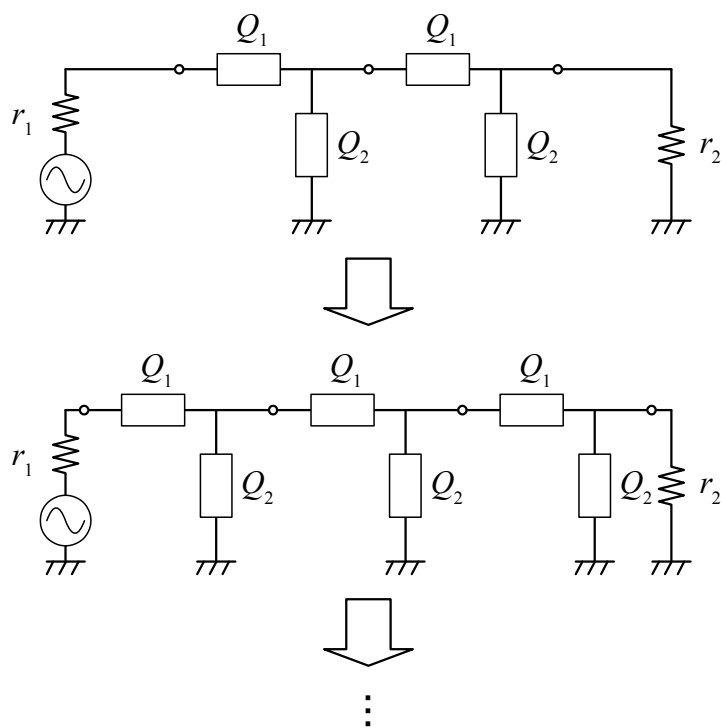


図 3.5: 多段逆L型回路による純抵抗の間のインピーダンス変換

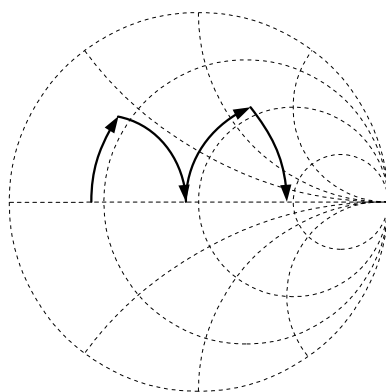


図 3.6: 純抵抗を経由する2段インピーダンス変換のパスの例

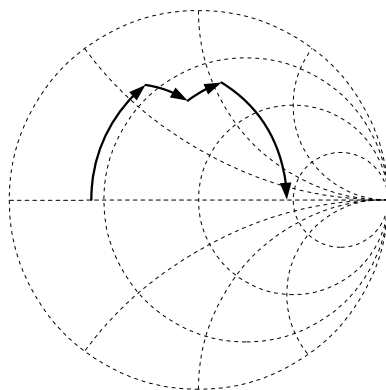


図 3.7: 純抵抗を經由しない2段インピーダンス変換のパスの例

しい問題ではない。しかし，設計に使えるようなシンプルな定式化となると，途端にハードルが高くなる。筆者らは，損失を支配しているパラメータがどれかを見極めることでシンプルな式を得ることに成功した。結果，式が使いやすくなり，設計の見通しが良くなることはもちろん，逆L型回路の損失が，本質的にどのようなパラメータで決定されるのかを明らかにすることができた。

上記の成果は筆者らによるものであるが，我々とは独立に，似たような検討を行った Kumar らの研究 [35] がある。Kumar らと筆者らの研究との最も大きな違いは，多段インピーダンス変換回路の検討方法である。Kumar らが主にコンピュータによる数値解析を用いているのに対して，筆者らは純粋に代数的な計算で解を求めている。その他，定式化についてもいくらか差がある。文献 [35] との詳細な比較は，以降の節の中で行う。

3.1 損失の定式化

問題の状況を図 3.8 に示す。図中の変数の意味はそれぞれ次のとおりである。

Z_1 電源の最適負荷インピーダンスの複素共役

Z_2 負荷のインピーダンス

x 直列素子のリアクタンス

r 直列素子の抵抗値

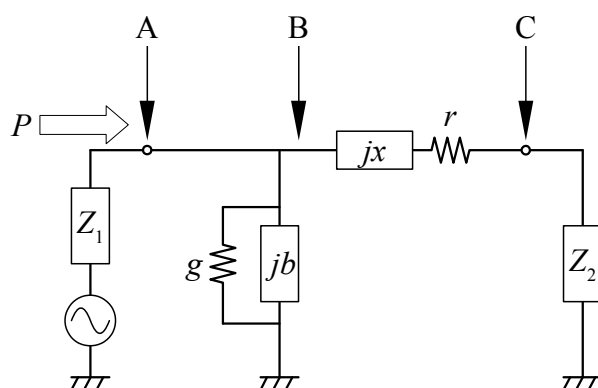


図 3.8: 損失のある素子からなる逆L型回路による, 複素インピーダンス間のインピーダンス変換

b 並列素子のサセプタンス

g 並列素子のコンダクタンス

P インピーダンス変換回路に入る有効電力

注意点として,

- 素子値の単位が混在している。直列素子の素子値はリアクタンスと抵抗値（単位が Ω の物理量）で、並列素子はサセプタンスとコンダクタンス（単位が S の物理量）で指定する。
- 便宜上、電源側に並列素子、負荷側に直列素子を配置した逆L型になっている。しかし、これから述べる結果は、この構成を反転して負荷側に並列素子、電源側に直列素子を配置した構成に対しても Z_1, Z_2 を入れ替えるだけで適応可能である。
- 図中の P は有効電力である。つまり、入力電圧を v_1 , 入力電流を i_1 とする時に、 P は $v_1 i_1^*$ ではなくて $\text{Re } v_1 i_1^*$ である。（よって P は実数になる。）

電源側の電圧, 電流を v_1, i_1 で定義したので, これに合わせて負荷側の出力電圧, 出力電流をそれぞれ v_2, i_2 で表すことにする。

直列素子の無負荷 Q 値 Q_S , および並列素子の無負荷 Q 値 Q_P はそれぞれ

$$Q_S = \frac{|x|}{r}, \quad Q_P = \frac{|b|}{g} \quad (3.5)$$

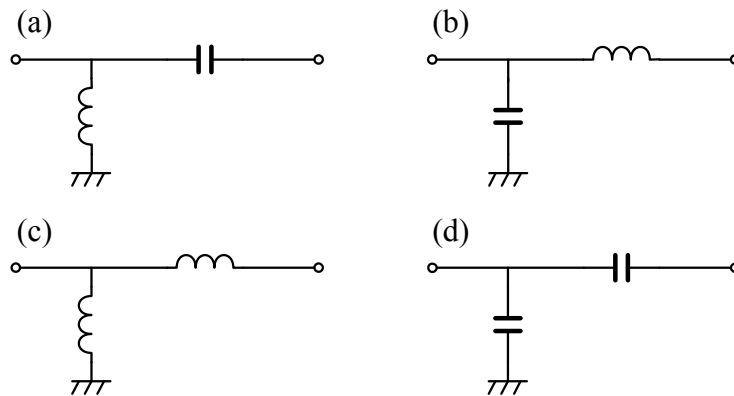


図 3.9: 逆L型インピーダンス変換回路の実装

である。損失の検討では r, g が重要だが、一般にこれらの値は x, b に強く依存するため扱いにくい。一方で、これらの比である無負荷 Q 値は、キャパシタ、インダクタの別が指定されれば、ほぼ一定とみなせる。この根拠として、筆者は2通りの考え方を持っている。一つ目の根拠は物理的なもので、無負荷 Q 値は単位キャパシタンス/インダクタンスあたりの体積と、素子を構成する材料でほぼ決まるからである。二つ目の根拠は論理的なもので、例えば、無負荷 Q 値が Q で容量が 1 F のキャパシタがあったとする。これを直列接続すればキャパシタンスが 0.5 F で無負荷 Q 値が同じく Q であるキャパシタが得られ、並列接続すればキャパシタンスが 2 F で無負荷 Q 値がやはり Q であるキャパシタが得られる。直列、並列接続を好きなだけ繰り返せば、任意の有理数値（無限回の手続きを許せば任意の実数値）の容量を持った無負荷 Q 値が Q の素子を作ることができる。本論文でもこの考えに従い、キャパシタの無負荷 Q 値を Q_C 、インダクタの無負荷 Q 値を Q_L で表される定数として扱う。マイクロ波帯で使用される素子であれば、これらの値は一般に数十から数百程度になる [37,38]。 Q_S, Q_P と Q_C, Q_L の関係は、図 3.8 の回路を構成する素子がキャパシタになるかインダクタになるかで決まる。直列素子は x が正ならばインダクタ、負ならばキャパシタになり、並列素子は b が正ならばキャパシタ、負ならばインダクタになる。結果として図 3.8 の逆L型回路は図 3.9 中のいずれかの形で実装される。

損失の定式化のためにまず、図 3.8 の回路での整合条件を考える。実は、図 3.8 において整合条件は一意には決まらない。例えば図 3.8 の矢印 A の箇所で整合を取ろうとすると、共役整合条件より

$$\frac{1}{Z_1} = \left(g + jb + \frac{1}{r + jx + Z_2} \right)^* \tag{3.6}$$

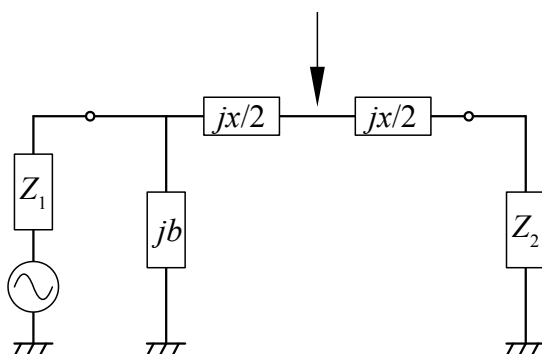


図 3.10: 直列素子を二分した間での整合

となり、これを整理して

$$(Y_1 + jb - g)(Z_2 + jx + r)^* = 1, \quad (Y_1 = 1/Z_1) \quad (3.7)$$

を得る。矢印Bの箇所で整合を取る場合は

$$Y_1 + g + jb = \frac{1}{(r + jx + Z_2)^*}, \quad (3.8)$$

すなわち

$$(Y_1 + jb + g)(Z_2 + jx + r)^* = 1. \quad (3.9)$$

矢印Cの箇所で整合をとれば

$$(Y_1 + jb + g)(Z_2 + jx - r)^* = 1 \quad (3.10)$$

である。式(3.7), (3.9), (3.10)を見比べればわかるように、 r と g の符号が少しずつ異なっている。この考えを突き詰めてゆくと、矢印A, B, Cの箇所以外にも、図3.10のように直列素子を半分に分けて、その真ん中で整合を取ったり、図3.11のように並列素子を分けて真ん中で整合をとったりと、整合を取れる箇所が無数にあることがわかる。結局、整合条件は-1から1の間を取る実数 s, t を用いて

$$(Y_1 + jb + gs)(Z_2 + jx + rt)^* = 1 \quad (3.11)$$

と表現できる。

背景で述べたように、我々は今、ほぼ無反射であることを前提に損失を最小化し

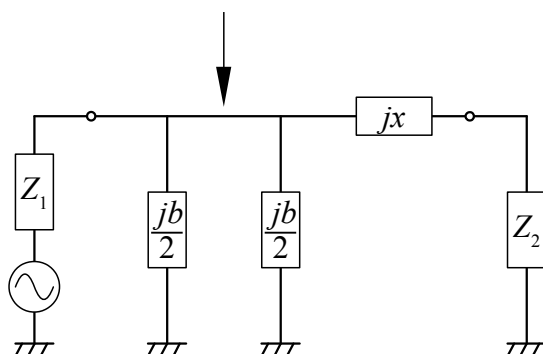


図 3.11: 並列素子を二分した間での整合

ようとしているが、ようやくこの前提の意味が明確になった。「ほぼ無反射である」とは式 (3.11) が s, t の値によらず近似的に成り立つ、すなわち、上記で示した矢印 A, B, C やその間など、あらゆる箇所での反射が十分に小さいという条件である。では、具体的にはどのような状況でそうなるであろうか。

式 (3.11) が s, t に依存しないようにするには、それらを含む項である gs, rt が近似により見えなくなれば良い。これは式 (3.11) が

$$(Y_1 + jb)(Z_2 + jx)^* \left(1 + s \frac{g}{Y_1 + jb}\right) \left(1 + t \frac{r}{Z_2 + jx}\right)^* = 1 \quad (3.12)$$

と変形できることから

$$\frac{|Y_1 + jb|}{g} \gg 1 \quad \text{かつ} \quad \frac{|Z_2 + jx|}{r} \gg 1 \quad (3.13)$$

を意味する。以降、我々は式 (3.13) が成り立つことを前提に議論を進める⁴。

式 (3.13) を仮定すると、整合条件は

$$(Y_1 + jb)(Z_2 + jx)^* \approx 1 \quad (3.14)$$

となる。当然、これは（近似であることを除いて）無損失素子を用いた時の整合条

⁴少し細かい話になるが、式 (3.13) を見ると、背景で述べた「無負荷 Q 値が十分大きい」が、実は十分な条件ではなかったことがわかる。以降の議論で得られる結果を用いると、式 (3.13) が、矢印 A で経由するインピーダンスを Z_A として $|Z_A|/r \gg 1, |Z_A^{-1}|/g \gg 1$ と表すことができる。 Z_1, Z_2 が任意である以上、 Z_A も任意の値を取ることができるので、例えば $r \gg |Z_A|$ となるような Z_A を取ることができてしまう。これを防ぐためには、「無負荷 Q 値が十分大きい」という条件に加えて「 Y_1 のコンダクタンスは並列素子のコンダクタンスに対して十分に大きい」、「 Z_2 の抵抗値は直列素子の抵抗値に対して十分に大きい」という条件を課す必要がある。

件と一致する。式を x, b について解けば,

$$x \simeq \pm r_2 \sqrt{\frac{1}{g_1 r_2} - 1} - x_2, \quad b \simeq \pm g_1 \sqrt{\frac{1}{g_1 r_2} - 1} - b_1 \quad (3.15)$$

を得る。ただし、式中の g_1, b_1, r_2, x_2 はそれぞれ

$$g_1 = \operatorname{Re} Y_1, \quad b_1 = \operatorname{Im} Y_1, \quad r_2 = \operatorname{Re} Z_2, \quad x_2 = \operatorname{Im} Z_2 \quad (3.16)$$

を表す。

各素子での損失は次のように計算できる。まず並列素子について、回路は電源側でほぼ整合が取れているから

$$\frac{i_1}{v_1} \simeq Y_1^* \quad (3.17)$$

が成り立つ。これと $P = \operatorname{Re} v_1 i_1^*$ より

$$P = g_1 |v_1|^2 \quad (3.18)$$

となる。 g による損失は $g|v_1|^2$ で計算でき、 g の値自体は b と Q_P から計算できるので、まとめると

$$g|v_1|^2 \simeq \frac{P}{Q_P} \left| \pm \sqrt{\frac{1}{g_1 r_2} - 1} - \frac{b_1}{g_1} \right| \quad (3.19)$$

を得る。同様にして、直列素子での損失も

$$r|i_2|^2 \simeq \frac{P}{Q_S} \left| \pm \sqrt{\frac{1}{g_1 r_2} - 1} - \frac{x_2}{r_2} \right| \quad (3.20)$$

となるので、逆L型回路全体での損失 P_{loss} は、おおよそ

$$P_{\text{loss}} = \frac{P}{Q_P} \left| \pm \sqrt{\frac{1}{g_1 r_2} - 1} - \frac{b_1}{g_1} \right| + \frac{1}{Q_S} \left| \pm \sqrt{\frac{1}{g_1 r_2} - 1} - \frac{x_2}{r_2} \right| \quad (3.21)$$

となる。以降では、表記を簡単にするため $P = 1$ として、単位有効電力あたりの損失のことを単に損失ということにする。

式(3.21)は一見すると複雑だが、よく見ると次のようなことがわかる。式(3.21)

中には素子値に関する四つの変数 g_1, b_1, r_2, x_2 が含まれているが、これらは独立に現れているのではなく、それらの積や商として

$$g_1 r_2, \frac{b_1}{g_1}, \frac{x_2}{r_2} \quad (3.22)$$

の形で現れる。これらを改めて三つの独立な変数として扱えば、変数の数を一つ減らすことができる。では、そのように置き換えてみよう。物理的意味をはっきりさせるために、 $b_1/g_1, x_2/r_2$ は Y_1, Z_2 の偏角を

$$\theta_1 = \arg Y_1, \theta_2 = \arg Z_2 \quad (3.23)$$

として、

$$\frac{b_1}{g_1} = \tan \theta_1, \frac{x_2}{r_2} = \tan \theta_2 \quad (3.24)$$

のように置き換えることにする。 $g_1 r_2$ に関しては、今のところうまい案がないので、とりあえず

$$g_1 r_2 = A \quad (3.25)$$

とおく。改めて損失の式を書くと

$$P_{\text{loss}} = \frac{1}{Q_P} \left| \pm \sqrt{\frac{1}{A} - 1} - \tan \theta_1 \right| + \frac{1}{Q_S} \left| \pm \sqrt{\frac{1}{A} - 1} - \tan \theta_2 \right| \quad (3.26)$$

になった。

A を含む項を簡単にするには、単なる代数的な置き換えだけでなく、三角恒等式に頼る必要がある。任意の実数 x に対して

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad (3.27)$$

が成り立つ。よく見ると上の式の最右辺は式(3.26)の根号の中身に似ている。そこで、

$$\cos^2 \theta_A = A = g_1 r_2 \quad (3.28)$$

となるような $\theta_A (= \pm \arccos \sqrt{g_1 r_2})$ を考えれば、式 (3.26) を

$$P_{\text{loss}} = \frac{1}{Q_P} |\tan \theta_A - \tan \theta_1| + \frac{1}{Q_S} |\tan \theta_A - \tan \theta_2| \quad (3.29)$$

と書くことができる。式 (3.26) の符号の任意性は、式 (3.29) においては θ_A の選び方に集約されるため、表面上は任意性が見えなくなっている点に注意を要する。

損失を表すシンプルな式 (3.29) が得られた。しかし、今のところ θ_A の物理的な意味がはっきりしないため、式 (3.29) に対しても、なんとなく漠然とした印象しか持つことができない。 θ_A とは一体何の角度なのだろうか。

答えを先に述べてしまうと、 θ_A は図 3.8 の矢印 B の箇所でも回路を切って、その断面から見込んだインピーダンスの偏角と一致する。このことは次のようにして導出できる。今、矢印 B の箇所でも回路を切って、その断面から電源側を見込んだインピーダンスを Z_A とすれば、これは

$$\frac{1}{Z_A} = Y_1 + g + jb \simeq Y_1 + jb \quad (3.30)$$

となる。ここで、近似的な整合が成り立つための条件である式 (3.13) を用いた。逆に、負荷側を見込んだインピーダンスを Z'_A とおく。回路が矢印 B の箇所において「ほぼ」整合が取れていることから

$$Z'_A \simeq Z_A^* \quad (3.31)$$

となるが、同時に回路図から言って

$$Z'_A = Z_2 + g + jx \simeq Z_2 + jx \quad (3.32)$$

にもなる。つまり

$$Z_A \simeq Z_2^* + jx \quad (3.33)$$

である。ここで重要なのが、上で求めた Z_A について

$$\operatorname{Re} \frac{1}{Z_A} = g_1, \operatorname{Re} Z_A = r_2 \quad (3.34)$$

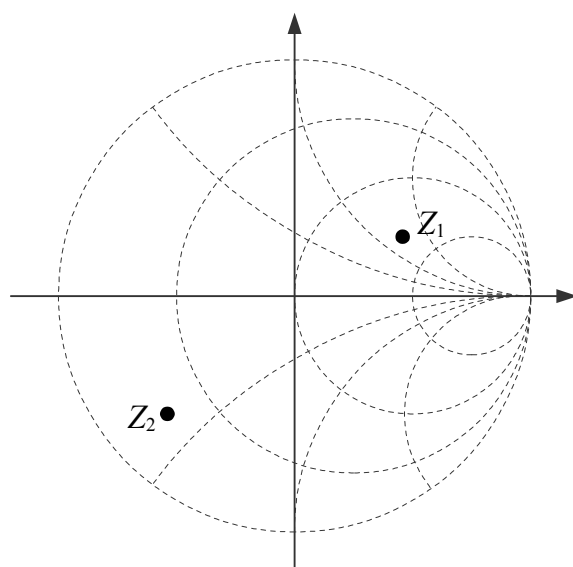


図 3.12: Smith チャート上に配置された二つのインピーダンス

が成り立つ点である。このことから、逆に g_1, r_2 について

$$g_1 = \frac{1}{|Z_A|} \cos \theta_A, \quad r_2 = |Z_A| \cos \theta_A \quad (3.35)$$

が言えるので、両者を乗じることで

$$g_1 r_2 = \cos^2 \theta_A, \quad \text{すなわち } \theta_A = \pm \arccos \sqrt{g_1 r_2} \quad (3.36)$$

となる。上のことを踏まえ、 $\theta_A = \pm \arccos \sqrt{g_1 r_2}$ の意味を言葉で表すならば、「インピーダンスで表した時の実部が r_2 、アドミタンスで表した時の実部が g_1 になるようなイミタンスの偏角」となる⁵。

θ_A の意味がはっきりすれば、これの符号の任意性が意味するところも明確になる。 θ_A を正に取ることは、図 3.12 のような 2 点間を、上側のパスを通してインピーダンス変換することに相当する (図 3.13)。 θ_A を負に取ることは下側のパスを通してインピーダンス変換することである (図 3.14)。

そして、これがある意味で最も重要なことであるが、損失の式 (3.29) を見るとわかるように、逆 L 型回路の損失は、インピーダンス変換時に経由するインピーダンスの偏角と素子の無負荷 Q 値のみで決まる。

定式化については以上だが、最後に文献 [35] で導出された式との比較を述べる。

⁵このような表現の仕方を緻密化し、回路パラメータを、インピーダンスの実部とアドミタンスの実部の組で指定できるようにしたのが 6 章で定義する rg 局所座標系である。

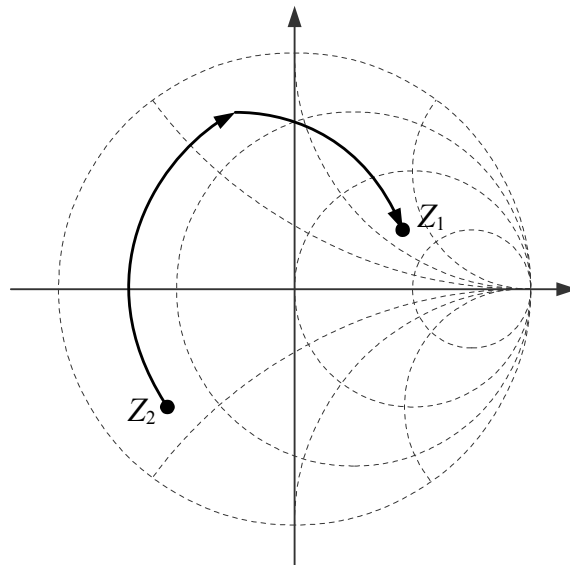


図 3.13: θ_A を正に取った時のパス

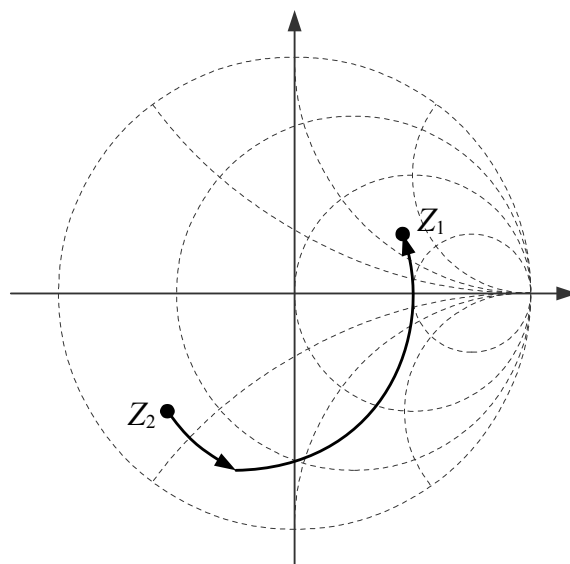


図 3.14: θ_A を負に取った時のパス

我々の式と文献 [35] の式との差異は、大別して三つである。一つめに、我々は損失の式を図 3.8 の回路について導出したが、文献 [35] では図 3.15 の四つの構成に対して、それぞれ個別に式を導出している。図 3.9 と比較すると、二つのキャパシタからなる構成や、二つのインダクタからなる構成は、そもそも考慮に入れていないことがわかる。式の表現については、我々の方が表現が統一されていて良いとかそういった問題ではなく、単に目的の違いである。我々は回路理論を作りたいので、同じ内容の式であってもより簡潔で一般化されたものを好む。文献 [35] の目的は、特定の回路を数値解析により最適化するという目的なので、表現の簡潔さよりも式自体の使いやすさが重要である。二つめに、文献 [35] では「無負荷 Q 値が十分に大きい」という仮定に加えて「キャパシタの無負荷 Q 値はインダクタの無負荷 Q 値に比べて十分に大きい」という仮定を置いており、インダクタの損失のみに注目して式を導出している。これも目的によるであろう。三つめに、損失を記述する変数として、我々は三つの偏角 $\theta_1, \theta_2, \theta_A$ を用いたが、文献 [35] では代わりに

- 電流ゲイン $G_i = \frac{|i_{out}|}{|i_{in}|}$
- 入力インピーダンス特徴量 $Q_{in} = \frac{X_{in}}{R_{in}}$
- 出力インピーダンス特徴量 $Q_{out} = \frac{X_{out}}{R_{out}}$

の三つの変数を用いている⁶。回路の損失は図 3.15 の (a) から (d) に対して

$$(a): \frac{1}{G_i} \sqrt{(1 - G_i^2) + Q_{load}^2} + Q_{in} \quad (3.37)$$

$$(b): \frac{1}{G_i} \sqrt{(1 - G_i^2) + Q_{load}^2} - Q_{load} \quad (3.38)$$

$$(c): G_i \sqrt{\left(1 - \frac{1}{G_i^2}\right) + Q_{in}^2} - Q_{load} \quad (3.39)$$

$$(d): G_i \sqrt{\left(1 - \frac{1}{G_i^2}\right) + Q_{in}^2} + Q_{in} \quad (3.40)$$

で与えられる。変数の置き方については、我々が一步先んじているように思う。そもそも表現が綺麗でないし、上のような表現では「インピーダンス変換回路の損失

⁶訳は筆者による。原文ではそれぞれ current gain, input impedance characteristic, load impedance characteristic.

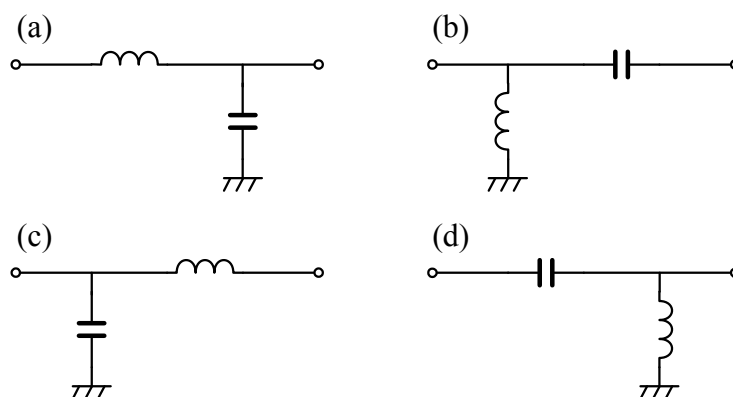


図 3.15: 文献 [35] で扱っている逆 L 型回路の構成

が、経由するインピーダンスの偏角のみで決まる」という本質を見抜くことができない。

3.2 低域通過ラダーへの拡張

前述の通り、逆L型回路は、より複雑な回路を構成する時の「単位」になる。ここでは、二つの逆L型回路を組み合わせた図3.16の低域通過ラダー型インピーダンス変換回路の損失を定式化し、損失の観点から中間インピーダンス Z_2 を最適化する。 Z_1, Z_3 は設計に際して与えられる電源の最適負荷インピーダンス、および負荷インピーダンスである。以下では簡単のために、素子の無負荷Q値は素子の種類によらず一定 ($Q = Q_C = Q_L$) とする⁷。また、近似的に等しいことを表す \approx の代わりに単なる $=$ を用いる。

前節の結果から、我々はインピーダンス変換回路の損失ではインピーダンスの偏角が重要であることを知っている。なのでまずは、極座標形式による表現が見やすくなるように

$$\theta_k = \arg Z_k, A_k = |Z_k|, (k = 1, 2, 3) \quad (3.41)$$

と定義しておく。これらを用いて、1段目（電源側）の逆L型回路で経由するインピーダンス Z_{12} の偏角を求めよう。 Z_{12} の満たすべきは「インピーダンスとしての実部が Z_2 と一致」して「アドミタンスとしての実部が Z_1^{-1} と一致」することである

⁷この仮定は6章で外れる

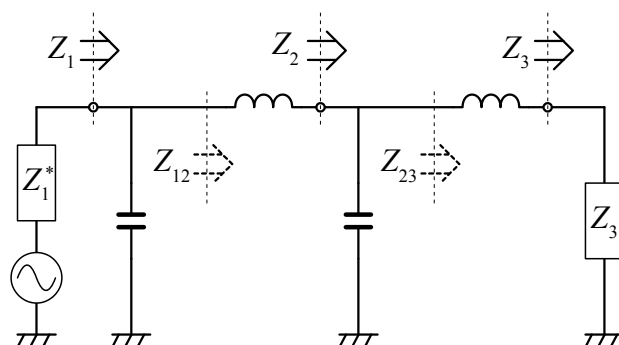


図 3.16: 低域通過ラダー型インピーダンス変換回路

から,

$$\arg Z_{12} = \theta_{12} = \pm \arccos \sqrt{\frac{A_2}{A_1} \cos \theta_1 \cos \theta_2} \quad (3.42)$$

となる。以降ではむしろ、上の式を変形した

$$\cos^2 \theta_{12} = \frac{A_2}{A_1} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad (3.43)$$

の形で用いることが多い。加えて、インピーダンス変換回路の素子の種類から次のことがわかる:

- Z_{12} は Z_2 からインダクタを経由してくるのでリアクタンスが増える。結果として偏角が $\theta_{12} > \theta_2$ とならなければならない。
- Z_1^{-1} は Z_{12}^{-1} からキャパシタを経由してくるのでサセプタンスが増える。結果として偏角が $-\theta_1 > -\theta_{12}$, すなわち $\theta_{12} > \theta_1$ とならなければならない。

上記をまとめて

$$\theta_{12} > \theta_1, \theta_2 \quad (3.44)$$

を得る。これは後ほど、損失の式の中の絶対値記号を外すときに使われる。2 段目(負荷側)の逆L型回路についても、同様の手順で同じような結果を得ることができる。結果だけ示すと,

$$\arg Z_{23} = \theta_{23} = \pm \arccos \sqrt{\frac{A_3}{A_2} \cos \theta_2 \cos \theta_3}, \quad (3.45)$$

$$\cos^2 \theta_{23} = \frac{A_3}{A_2} \cos \theta_2 \cos \theta_3, \quad (3.46)$$

$$\theta_{23} > \theta_2, \theta_3 \quad (3.47)$$

となる。

これまでに定義した変数を用いると、1段目の逆L型回路の損失は

$$\frac{1}{Q} |\tan \theta_1 - \tan \theta_{12}| + \frac{1}{Q} |\tan \theta_{12} - \tan \theta_2|, \quad (3.48)$$

2段目での損失は

$$\frac{1}{Q} |\tan \theta_2 - \tan \theta_{23}| + \frac{1}{Q} |\tan \theta_{23} - \tan \theta_3| \quad (3.49)$$

である。各絶対値記号の中身について、偏角の大小関係は式(3.44), (3.47)から分かり、かつ tangent は単調増加関数であるから、絶対値記号を外すことができる。絶対値記号を外し、1段目と2段目の損失を合計すれば、図3.16のラダー型回路での損失は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Q} \{(\tan \theta_{12} - \tan \theta_1) + (\tan \theta_{12} - \tan \theta_2) + (\tan \theta_{23} - \tan \theta_2) + (\tan \theta_{23} - \tan \theta_3)\} \\ & = \frac{1}{Q} \{2(\tan \theta_{12} + \tan \theta_{23} - \tan \theta_2) - \tan \theta_1 - \tan \theta_3\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

と求まる。

繰り返しになるが、 θ_1, θ_3 は設計に際して与えられるパラメータなので、我々が自由に動かせるのは $\theta_2, \theta_{12}, \theta_{23}$ である。しかし、これら三つの変数も完全に自由な値を取れるわけではなく、式(3.43), (3.46)による制限がある。改めて束縛条件(3.43), (3.46)を見てみると、これらの式にはインピーダンスの大きさ A_2 が含まれていて都合が悪い。損失の式(3.50)は偏角のみからなる式なので、束縛条件も偏角のみで記述されていてほしいからである。束縛条件から A_2 をなくすために、 A_2 を偏角を用いて記述してみよう。そのためには式(3.43), (3.46)それぞれの右辺の比を取れば良い:

$$\frac{\text{式(3.43)の右辺}}{\text{式(3.46)の右辺}} = \frac{\frac{A_2}{A_1} \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\frac{A_3}{A_2} \cos \theta_2 \cos \theta_3} = \frac{A_2^2 \cos \theta_1}{A_1 A_3 \cos \theta_3}. \quad (3.51)$$

これが左辺の比をとった量 $\cos^2 \theta_{12} / \cos^2 \theta_{23}$ に等しいので,

$$A_2^2 = A_1 A_3 \frac{\cos \theta_3 \cos^2 \theta_{12}}{\cos \theta_1 \cos^2 \theta_{23}} \quad (3.52)$$

となる。 A_2 は大ききなので正にしなければならないから

$$A_2 = \sqrt{A_1 A_3 \frac{\cos \theta_3 \cos \theta_{12}}{\cos \theta_1 \cos \theta_{23}}} \quad (3.53)$$

と書いてもよい。これを元の束縛条件 (3.43), (3.46) に戻してみよう。すると、式 (3.43) は

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta_{12} &= \frac{A_2}{A_1} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ &= \sqrt{A_1 A_3 \frac{\cos \theta_3 \cos \theta_{12}}{\cos \theta_1 \cos \theta_{23}} \frac{1}{A_1}} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ &= \sqrt{\frac{A_3}{A_1} \cos \theta_3 \cos \theta_1 \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_{12}}{\cos \theta_{23}}} \end{aligned} \quad (3.54)$$

すなわち,

$$\cos \theta_{12} \cos \theta_{23} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1} \cos \theta_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2} \quad (3.55)$$

となる。式 (3.46) は

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta_{23} &= \frac{A_3}{A_2} \cos \theta_2 \cos \theta_3 \\ &= \sqrt{\frac{1}{A_1 A_3 \cos \theta_3 \cos \theta_{12}} A_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3} \\ &= \sqrt{\frac{A_3}{A_1} \cos \theta_3 \cos \theta_1 \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_{23}}{\cos \theta_{12}}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

となり, こちらも

$$\cos \theta_{12} \cos \theta_{23} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1} \cos \theta_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2} \quad (3.57)$$

になり, 式 (3.55) と一緒になる。式中の $\sqrt{\frac{A_3}{A_1} \cos \theta_3 \cos \theta_1}$ は, Z_1 と Z_3 のみに依る

ので、最適化する上では定数として扱える。以降ではこれを

$$\cos \theta_{13} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1} \cos \theta_3 \cos \theta_1} \quad (3.58)$$

と書くことにする。

解くべき問題がはっきりしたので、ここで一度まとめておこう。我々は $\theta_2, \theta_{12}, \theta_{23}$ を変数として、損失

$$\frac{1}{Q} \{2(\tan \theta_{12} + \tan \theta_{23} - \tan \theta_2) - \tan \theta_1 - \tan \theta_3\} \quad (3.59)$$

を最小化したい。ただし、束縛条件として

$$\cos \theta_{12} \cos \theta_{23} = \cos \theta_{13} \cos \theta_2 \quad (3.60)$$

がある。では、これを Lagrange の未定乗数法を用いて解いてみよう。未定乗数を λ 、コスト f を

$$f(\theta_2, \theta_{12}, \theta_{23}) = \tan \theta_{12} + \tan \theta_{23} - \tan \theta_2, \quad (3.61)$$

束縛条件 g を

$$g(\theta_2, \theta_{12}, \theta_{23}) = \cos \theta_{12} \cos \theta_{23} - \cos \theta_{13} \cos \theta_2 \quad (3.62)$$

とする。このときに

$$h(\theta_2, \theta_{12}, \theta_{23}, \lambda) = f - \lambda g \quad (3.63)$$

の偏微分が0になる点を探す。 λ を含めた各変数について

$$-\frac{\partial h}{\partial \theta_2} = \frac{1}{\cos^2 \theta_2} + \lambda \sin \theta_2 \cos \theta_{13} = 0, \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta_{12}} = \frac{1}{\cos^2 \theta_{12}} + \lambda \sin \theta_{12} \cos \theta_{23} = 0, \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta_{23}} = \frac{1}{\cos^2 \theta_{23}} + \lambda \sin \theta_{23} \cos \theta_{12} = 0, \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda} = \cos \theta_{12} \cos \theta_{23} - \cos \theta_{13} \cos \theta_2 = 0 \quad (3.67)$$

である。

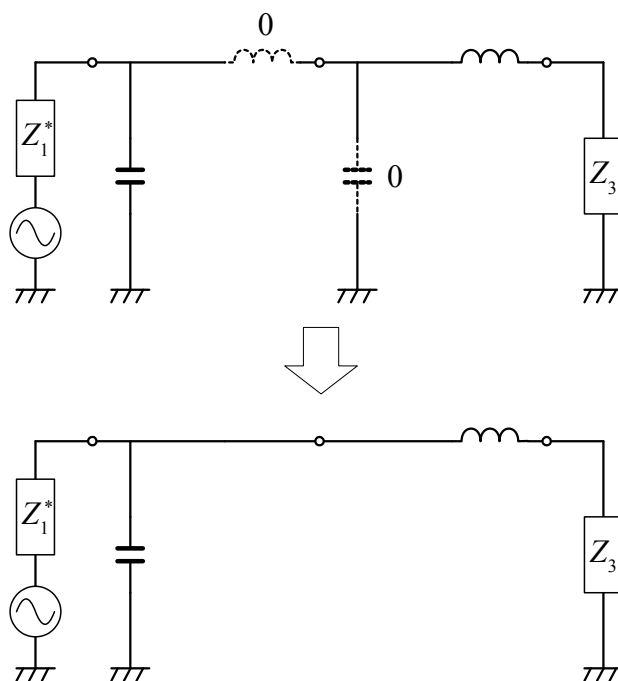


図 3.17: ラダー型回路から逆L型回路への縮退

上の方程式が幾つの解を持つかはわかっていないが、今の所、我々は二つの解を見つけている。一つ目が

$$\theta_2 = \theta_{12} = \theta_{23} = \theta_{13} \tag{3.68}$$

である。この解はすぐ見つかる上に、回路の構成的にも面白くない。図 3.16 が式 (3.68) を満たすとき、1 段目のインダクタと 2 段目のキャパシタの値が 0 になり、図 3.17 のように単なる逆L型回路に縮退する。これではわざわざラダー型回路を考えている意味がない。

二つ目は良い解である。まず式 (3.64), (3.65), (3.66), を整理して

$$\lambda \sin \theta_2 \cos^2 \theta_2 \cos \theta_{13} = 1, \tag{3.69}$$

$$\lambda \sin \theta_{12} \cos^2 \theta_{12} \cos \theta_{23} = 1, \tag{3.70}$$

$$\lambda \sin \theta_{23} \cos^2 \theta_{23} \cos \theta_{12} = 1 \tag{3.71}$$

となる。式(3.70)と(3.71)の比をとることで

$$\sin \theta_{12} \cos \theta_{12} = \sin \theta_{23} \cos \theta_{23}, \quad (3.72)$$

すなわち

$$\theta_{12} = \theta_{23}. \quad (3.73)$$

次に、式(3.69)と(3.70)の比を取ると

$$\sin \theta_2 \cos^2 \theta_2 \cos \theta_{13} = \sin \theta_{12} \cos^3 \theta_{12}. \quad (3.74)$$

上の式から、式(3.67)を用いて θ_{12} を消去する。そのためには式(3.74)を2乗して

$$\begin{aligned} (\sin \theta_2 \cos^2 \theta_2 \cos \theta_{13})^2 &= (\sin \theta_{12} \cos^2 \theta_{12} \cos \theta_{23})^2 \\ &= (1 - \cos^2 \theta_{12}) \cos^6 \theta_{12} \\ &= (1 - \cos \theta_2 \cos \theta_{13}) \cos^3 \theta_2 \cos^3 \theta_{13} \end{aligned} \quad (3.75)$$

とすればよい。手をつけていない最右辺についても、同様のやり方で $\sin \theta_2$ を $\cos \theta_2$ に置き換えることができる。そうして式を整理すると、最終的に

$$\cos^3 \theta_2 + (1 - \cos^2 \theta_{13}) \cos \theta_2 + \cos \theta_{13} = 0 \quad (3.76)$$

となる。上の式は $\cos \theta_2$ に関する3次方程式なので、一見すると解くのが手間そうである。しかし、我々はすでに目の子で見つかる解(3.68)を知っているので、式(3.76)を $\cos \theta_2 - \cos \theta_{13}$ で割ることができる:

$$\frac{\cos^3 \theta_2 + (1 - \cos^2 \theta_{13}) \cos \theta_2 + \cos \theta_{13}}{\cos \theta_2 - \cos \theta_{13}} = \cos^2 \theta_2 + \cos \theta_{13} \cos \theta_2 + 1 = 0. \quad (3.77)$$

これを解いて、二つ目の解⁸

$$\theta_{12} = \theta_{23}, \cos \theta_2 = \sqrt{\left(\frac{\cos \theta_{13}}{2}\right)^2 + 1} - \frac{\cos \theta_{13}}{2} \quad (3.78)$$

を得る。この解がどのような効果をもたらすかを以下で見てゆく。

図3.18, 3.19, 3.20はそれぞれ、 Z_1, Z_3, Q に適切な値を当てはめ、式(3.78)の前半

$$\theta_{12} = \theta_{23} \quad (3.79)$$

だけを満たすようにして θ_2 を変数としてラダー型回路の損失をグラフにしたものである。グラフ上には、式(3.78)の後半

$$\cos \theta_2 = \sqrt{\left(\frac{\cos \theta_{13}}{2}\right)^2 + 1} - \frac{\cos \theta_{13}}{2} \quad (3.80)$$

を満たす θ_2 も含まれているので、該当する位置を矢印で表している。また、比較のために同じ Z_1, Z_3 と Q を設定した時の逆L型回路の損失も併せて示してある。逆L型回路には可変できるパラメータがないので、 θ_2 の値によらず損失は一定である。想定している状況としてはそれぞれ、図3.18が高い変換比を要求するインピーダンス変換(50Ωから500Ω)、図3.19がそこそこの変換比のインピーダンス変換(50Ωから200Ω)、図3.20が変換比があまり高くないインピーダンス変換(50Ωから100Ω)となっている。

まず図3.18のインピーダンス変換比が高い場合を見てみよう。ラダー型回路の損失は、 θ_2 の値によらず逆L型回路の損失以下になっており、インピーダンス変換回路の多段化が損失の低減に有効であることが示されている。特に、式(3.78)による

⁸以下では用いないが、実際の設計をする際に便利な、解の別の表し方を補足しておく。式(3.77)の2番目の式に、再度、式(3.67)を代入すると

$$\cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_{12} + 1 = 0$$

が得られる。偏角を、45°を基準にして

$$\theta_2 = 45^\circ - \delta_2, \theta_{12} = 45^\circ + \delta_{12}$$

とおき直して代入すると

$$\delta_2 = \delta_{12}$$

になる。これはつまり、 θ_2 と θ_{12} (= θ_{23})は45°を中心に、それぞれ対称な位置にあるということを言っている。

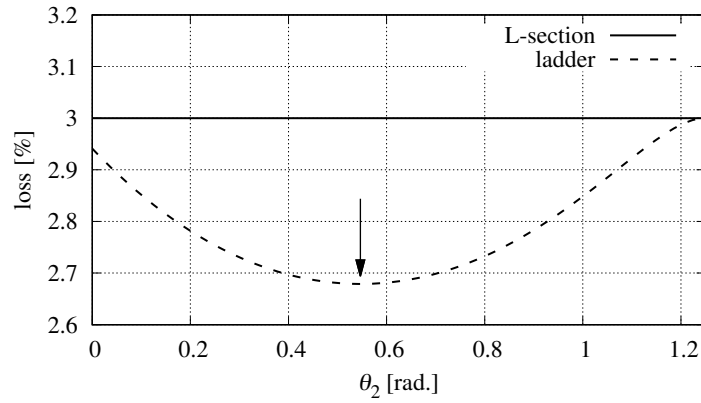


図 3.18: ラダー型回路と逆L型回路との損失の比較 ($Q = 100, Z_1 = 500 \Omega, Z_2 = 50 \Omega$)

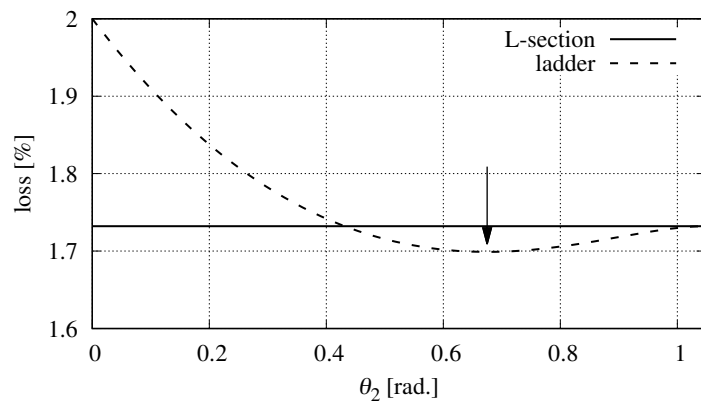


図 3.19: ラダー型回路と逆L型回路との損失の比較 ($Q = 100, Z_1 = 200 \Omega, Z_2 = 50 \Omega$)

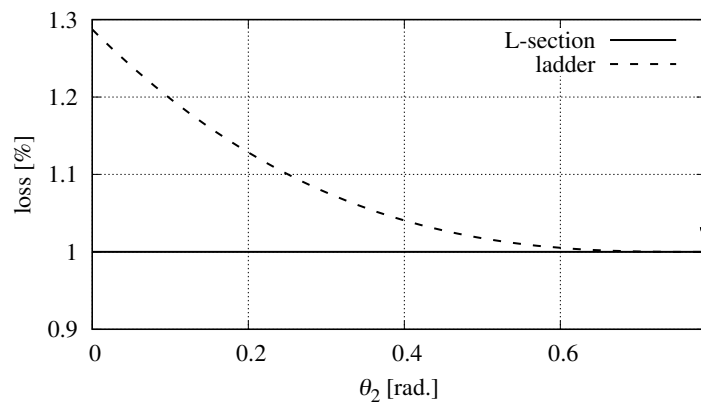


図 3.20: ラダー型回路と逆L型回路との損失の比較 ($Q = 100, Z_1 = 100 \Omega, Z_2 = 50 \Omega$)

設計では、その中でも最も損失が低い θ_2 を選ぶことができている。逆L型回路の損失が3%、式(3.78)を採用した時の損失が約2.68%であるから、多段化により損失を1割ほど低減できることになる。

次に図3.19のそこそこのインピーダンス変換比の場合を見てみる。この場合は必ずしも多段化が損失を低減するとは言えず、適切な θ_2 の値(たとえば式(3.78)の値)を選ばなければ意味がないことがわかる。損失の減少量も限定的であり、明らかに1割よりも少ない。多段化による損失の低減は、要求されるインピーダンス変換比が低いと効果が出にくくなる。

そして、さらにインピーダンス変換比を下げゆくと、あるところでラダー型回路の損失の底と、逆L型回路の損失が一致する。これがちょうど図3.20の状況であり、これ以降はもはや、多段化による損失の低減は望めず、逆に多段化により損失が増加するようになる。

設計者にとっての関心ごとは、自分が逆L型回路を使うべきか、ラダー型回路を使うべきかの判断の方法である。どのような Z_1, Z_3 に対して、両者の損失に差がなくなるかを導出しよう。改めて図3.20を見ると、このような状況は「ラダー型回路の損失を最適化した結果、単なる逆L型回路に縮退してしまった」という、図3.17のような場合だと考えることができる。この時、式(3.68)が成り立つので、この条件式と式(3.78)、それと偏角の束縛条件である式(3.60)を合わせることで、境界の条件式

$$\cos^2 \theta_{13} = \frac{1}{2}, \quad (3.81)$$

すなわち、

$$\theta_{13} = 45^\circ \quad (3.82)$$

を得る。必要なインピーダンス変換比がこれよりも大きい場合、すなわち $\theta_{13} > 45^\circ$ の時は、ラダー型回路によるインピーダンス変換の方が損失が小さくできる。逆に $\theta_{13} < 45^\circ$ の時は逆L型回路でよい。

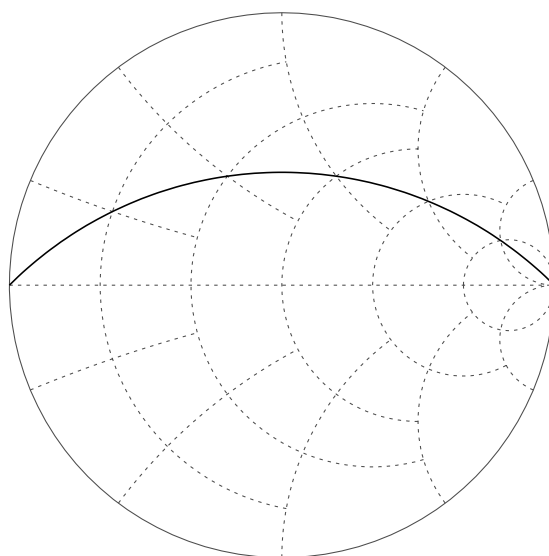
第4章

電力損失と非Euclid幾何学

前章でラダー型インピーダンス変換回路の最適化を行ったが、この時あえて触れなかったことに Smith チャート上での表現がある。ラダー型回路では 45° という偏角がある種のマジックナンバーであり、これの前後で回路設計の方針が大きく変化した。偏角が 45° であるインピーダンスの全体を Smith チャート上で表すと図 4.1 のようになる。これを用いると、ラダー型回路の最適設計を次のように説明できる。

1. インピーダンス変換したい 2 点を Smith チャート上にプロットする。
2. 相対的に見て左側にある点について、この点と $\Gamma = 1$ を通る実軸に関して対象な円（等抵抗円）を描く。
3. 相対的に見て右側にある点については、 $\Gamma = -1$ を通る円（等コンダクタンス円）を描く。
4. 上で描いた二つの円の交点が、実軸に関して対象な位置に 2 点現れる。上の点について、この点が図 4.1 で描いた線よりも上にあれば、ラダー型回路の方が効率がよい。線よりも下にあれば、逆 L 型回路の方がよい。

例えばインピーダンスを変換したい 2 点の配置が図 4.2 のような場合を考える。この時、円の交点は図 4.3 のように 45° の線より下に現れるので、逆 L 型回路が適している。与えられた 2 点は図 4.4 のようなパスを辿って結ぶのが良い。他方、結びたい 2 点が図 4.5 のような配置の場合、円の交点は 45° の線より上側に現れる（図 4.6）ので、ラダー型回路の方が損失が小さい。なのでまずは、図 4.7 のように、交点を 45° の線を跨ぐように折り返し、折り返し後の点を通るような円を二つ追加する。2 点間のインピーダンス変換は図 4.8 のようなパスを辿って実現するのが良い。

図 4.1: インピーダンスの偏角が 45° の線

前章での煩雑な計算を敬遠した読者であっても、上記の説明はすんなりと受け入れられたのではないだろうか。

上の例を読んで気づくように、我々はインピーダンス変換回路という純粋に回路的な要素の最適化を議論しているにも関わらず、話の中には電圧とかインピーダンスなどといった回路的な要素が一切でてこない。むしろ、二つの点をどういう風に結ぶかという、幾何学的な話に終始している。このことは、インピーダンス変換回路、あるいはもっと一般に Smith チャート上のパスとして表現できる任意の回路について、その設計を幾何学の問題として議論できるのではないかという可能性を示唆している。

上で示した例と同じように、回路の構成を Smith チャート上のパスとして捉える方法を積極的に用いている研究に [39,40] がある。文献 [39,40] の主題も、やはりインピーダンス変換回路の損失である。上記の例のように、回路の構成が Smith チャート上のパスとして表現できることを用いており、回路構成の選択という問題を、Smith チャート上のパスの選択の問題に置き換えている。

しかしながら、我々の例についても、また文献 [39,40] の研究についても、回路の最適化を純粋に幾何学の問題として扱えるかと言えば、これは明らかに否である。我々の例について言えば、回路の最適化を Smith チャート上で行うには 45° というマジックナンバーが必須であったが、これは幾何学的に得られたのではなく、前章の回路的な観点から得られたものであった。本節で示したような幾何学に基づく見

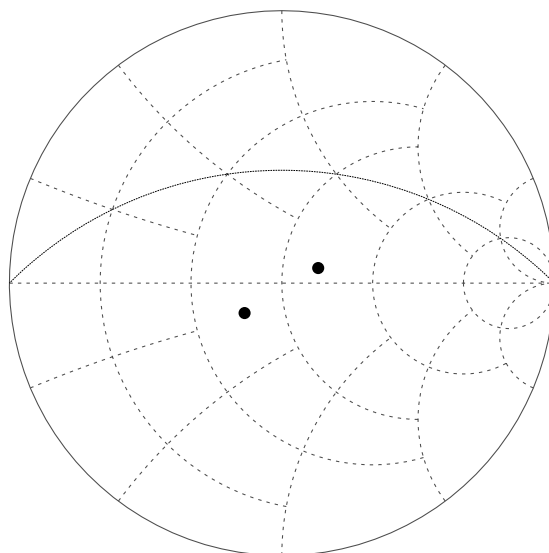


図 4.2: インピーダンス変換したい 2 点の例 (近い場合)

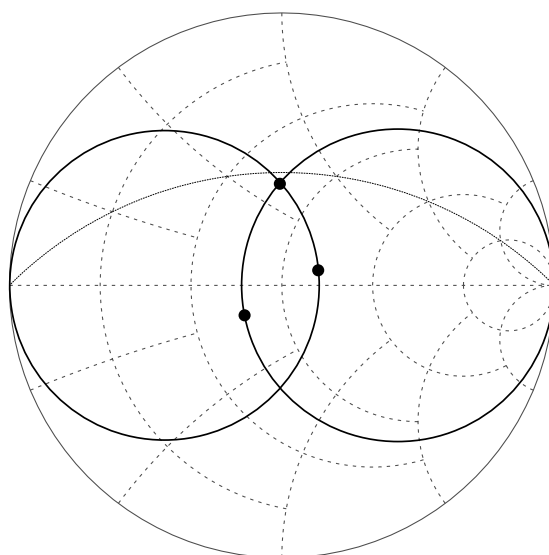


図 4.3: 図 4.2 に対して決まる交点

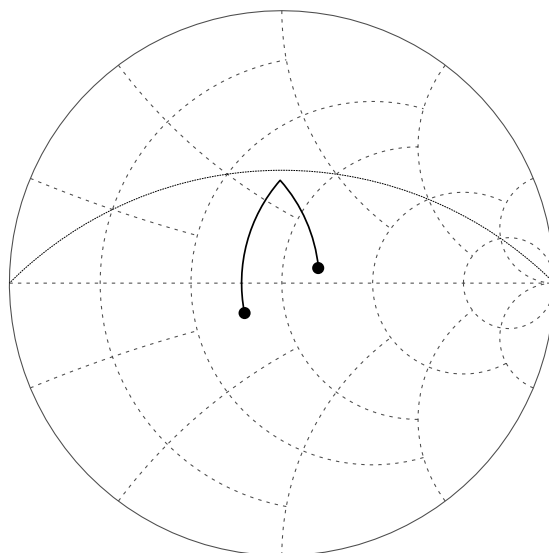


図 4.4: 図 4.2 の 2 点を結ぶパス (逆 L 型回路)

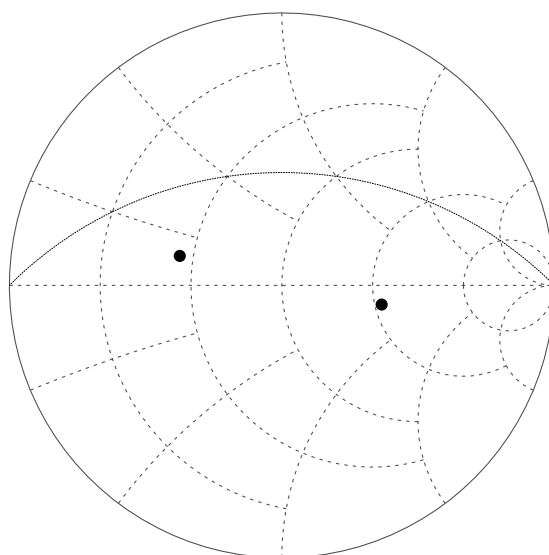


図 4.5: インピーダンス変換したい 2 点の例 (遠い場合)

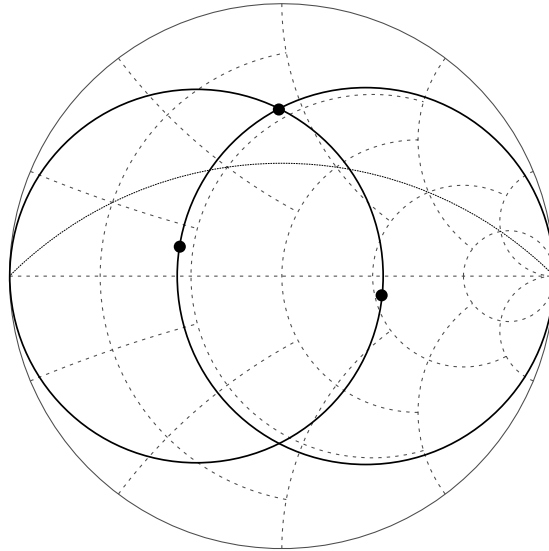


図 4.6: 図 4.5 に対して決まる交点

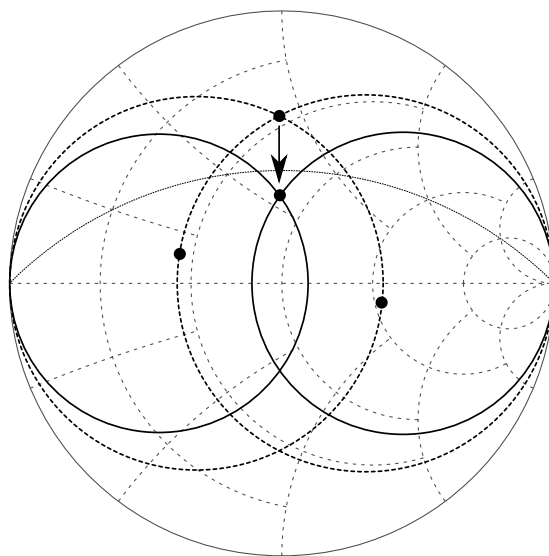


図 4.7: 交点の移動

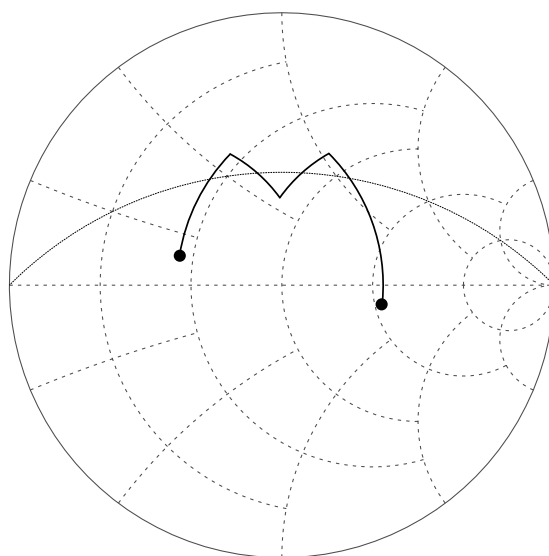
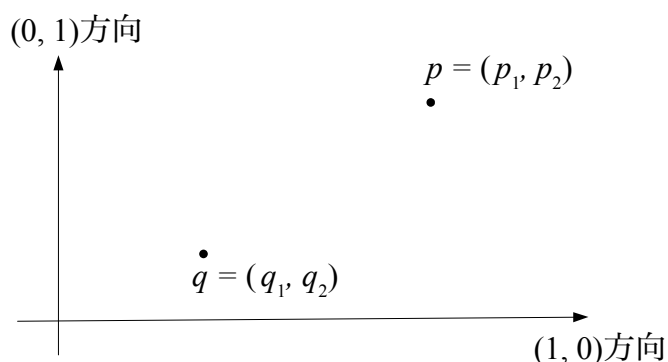


図 4.8: 図 4.5 の 2 点を結ぶパス (ラダー型回路)

通しの良い設計を行うには、そのための準備として、前節のような煩雑な計算を避けて通ることはできなかった。

では、このマジックナンバーを幾何学的な観点から導出することはできないのだろうか。実のところ、それは可能である。それどころか、幾何学的な直感を頼りにすることで、前章で仮定していた「回路構成は低域通過ラダー型とする」や「素子の無負荷 Q 値が全て等しい」などの条件を外した、より一般的な条件の下、はるかに見通しの良い方法で導出することができる。本章ではその導出のための準備として、回路理論と幾何学を結びつける、ある原理を明らかにする。その原理は、「回路素子による損失はその回路素子を表すパスの双曲幾何学的な長さに比例する」というものである。これにより、我々は「損失」という回路的な量を「長さ」という幾何学的な量に置き換えて議論することができる。回路の最適化を、もはや回路の問題として扱わず、純粋に幾何学的な問題として扱えるのである。

人によっては、損失を長さで表現するというアイデアをあまりにも唐突だと思われるだろう。実際、我々もいきなりそのような考えに至ったわけではなく、損失と長さの関係を考察するきっかけとなった二つの検討を経て、ようやくこのアイデアにたどり着いた。続く 4.1, 4.2 節ではまず、この二つの検討を取り上げる。その後の 4.3 節にて、上で示した原理を明らかにする。

図 4.9: p, q の配置の例

4.1 マンハッタン距離を用いた逆L型インピーダンス変換回路の選択

3章でも述べたように、変換したい二つのインピーダンス Z_1, Z_2 を決めたとしても逆L型回路の損失は一意には決まらない。これは、経由するインピーダンスの偏角について、その符号が選べるからである。二つの符号のうち、損失が小さくなる方の逆L型回路を選ぶにはどうすれば良いだろうか。この問題は、各符号について式(3.29)で損失を求め、それらを比較すれば解けるのだが、この節ではもう少し視覚的な方法で最適な設計を見つける方法を考える。例によって、以下では無負荷Q値は素子によらず一定 ($Q_S = Q_P = Q$) と仮定する。

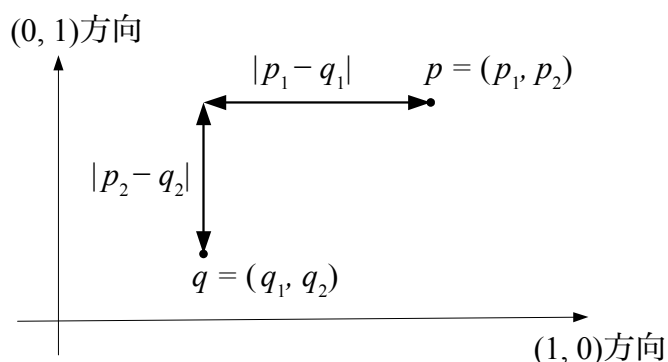
本節で述べる方法の鍵となるのがマンハッタン距離 (または1-ノルム) である。 $p = (p_1, p_2), q = (q_1, q_2)$ を \mathbb{R}^2 の元、すなわち平面上の2点とする。この2点間のマンハッタン距離 $d_1(p, q)$ は

$$d_1(p, q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| \quad (4.1)$$

で定義される。定義を見るよりも図の方がわかりやすい。 p, q が例えば図4.9のような配置であるとする。 p と q との間の (通常の意味での) 距離を、図4.10のように座標軸に対して平行に測り、それらを合わせたものがマンハッタン距離である。

逆L型回路の損失の式(3.29)をマンハッタン距離の定義式(4.1)と見比べるとわかるよう、両者は似た形をしている。というよりも、マンハッタン距離そのものである。先ほどの2点を、損失の式(3.29)中の変数を用いて

$$p = (\tan \theta_A, \tan \theta_A), \quad q = (\tan \theta_1, \tan \theta_2) \quad (4.2)$$

図 4.10: p, q 間のマンハッタン距離 $d_1(p, q)$

とすれば、逆L型回路の損失はマンハッタン距離により

$$\frac{1}{Q} d_1(p, q) \quad (4.3)$$

と表現できる。ところで、 $\tan \theta_A$ には符号の任意性があった。区別をつけるために、以降では p の代わりに

$$p_+ = (\tan |\theta_A|, \tan |\theta_A|), p_- = (-\tan |\theta_A|, -\tan |\theta_A|) \quad (4.4)$$

と表記する。これらを用いれば、正、負の偏角を選んだ時の損失はそれぞれ

$$\frac{1}{Q} d_1(p_+, q), \frac{1}{Q} d_1(p_-, q) \quad (4.5)$$

となる。これを平面上で表せば、例えば図 4.11 のようになる。この例では p_+ の方が q からのマンハッタン距離が近いので、正の偏角を選んだ方が回路の損失を小さくできることがわかる。

図 4.11 では q から p_+, p_- への距離を問題にしたが、より一般に、平面上のすべての点について p_+, p_- からの距離を考えよう。この時、平面上の点は

- p_+ からの距離の方が短い
- p_- からの距離の方が短い
- p_+ からの距離と p_- からの距離が等しい

の3種類のいずれかに分類される。この分類を色分けにより示したのが図 4.12 である（こういった図を Voronoi 図と呼ぶ）。 p_+ からの距離の方が短い領域を薄い灰色、

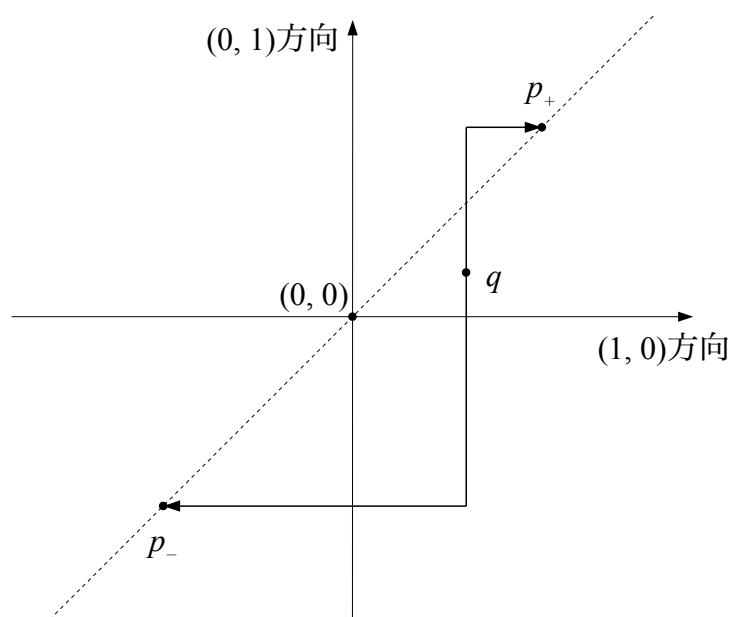


図 4.11: p_+, p_-, q の配置と損失の例

p_- からの距離の方が短い領域を濃い灰色, p_+ からの距離と p_- からの距離が等しい領域を白で表している。先ほどは「 q が p_+ と p_- のどちらに近いか」を考えたが、今はむしろ「 q がどの領域にあるか」と考えるのが自然であり、わかりやすい。

設計をさらに簡単にするために、各領域を p_{\pm} の位置に依存しないように再定義しよう。図 4.12 の p_+ からの距離と p_- からの距離が等しい領域について、この領域は p_{\pm} が端に動くとき狭くなる (図 4.13)。また、この移動により「 p_- からの距離の方が短い領域」が「 p_+ からの距離の方が短い領域」に変化したりはしないことがわかる。そこで次のような操作により、「 p_+ からの距離と p_- からの距離が等しい領域」を極力小さくするようにする。 θ を正数のパラメータとして $p_{\pm} = (\pm\theta, \pm\theta)$ とした時に $d_1(p_+, q) < d_1(p_-, q)$ となる q の全体を $X_{+\theta}$, $d_1(p_+, q) > d_1(p_-, q)$ となる q の全体を $X_{-\theta}$ とおく。上で見たように

$$\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow X_{\pm\theta_1} \subset X_{\pm\theta_2} \tag{4.6}$$

であり、また

$$\exists\theta, p \in X_{\pm\theta} \Rightarrow \forall\theta, p \notin X_{\mp\theta} \tag{4.7}$$

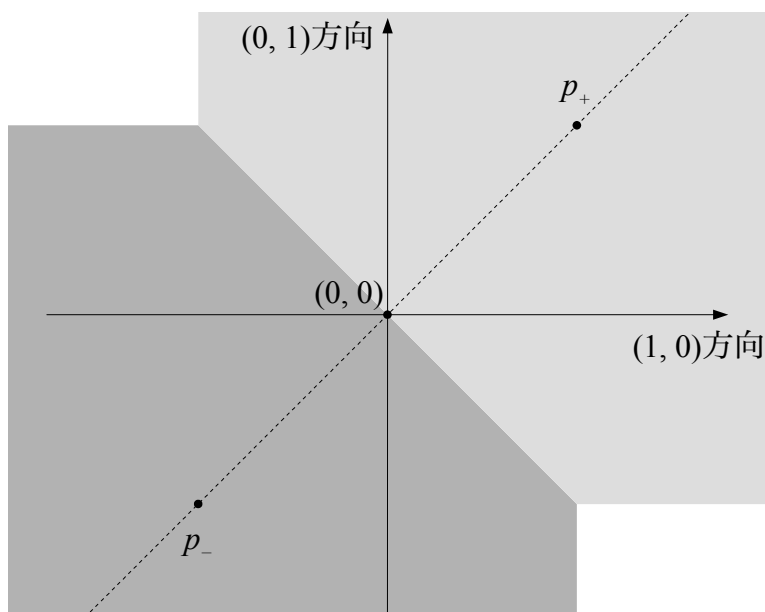


図 4.12: p_+, p_- の Voronoi 図

である。 θ が取りうるすべての値について $X_{\pm\theta}$ の和をとり

$$\bigcup_{0 < \theta < \infty} X_{\pm\theta} = X_{\pm} \tag{4.8}$$

とおく。これは当然

$$X_+ \cap X_- = \emptyset, \tag{4.9}$$

を満たす。配置としては図 4.14 のようになる。図 4.14 は p_{\pm} の値に依存しない定義になっている。そのため、符号を選ぶのに q の位置だけを見れば良く、設計が簡単になる。また符号を選ぶ際、「 p_+ からの距離と p_- からの距離が等しい領域」というのは何かと都合が悪い。図 4.14 はそのような領域がほとんどないので、その意味でも使いやす。

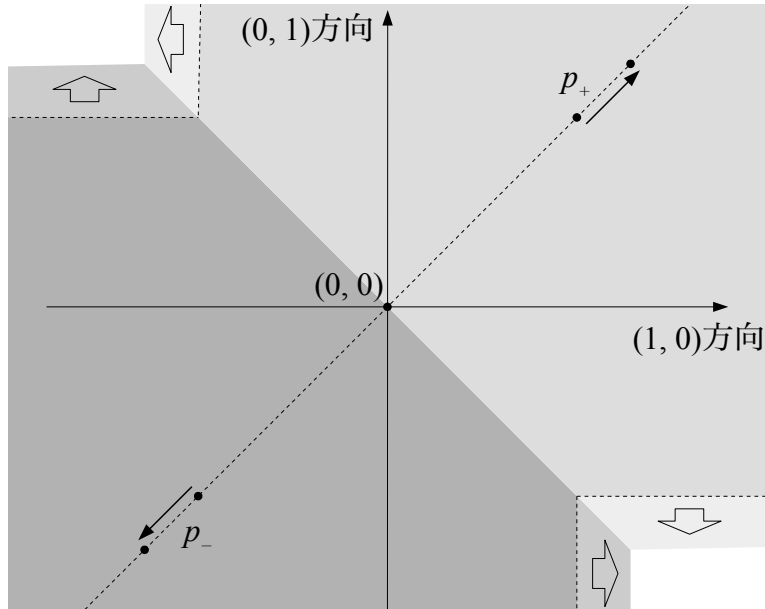


図 4.13: p_+, p_- の移動による領域の拡大

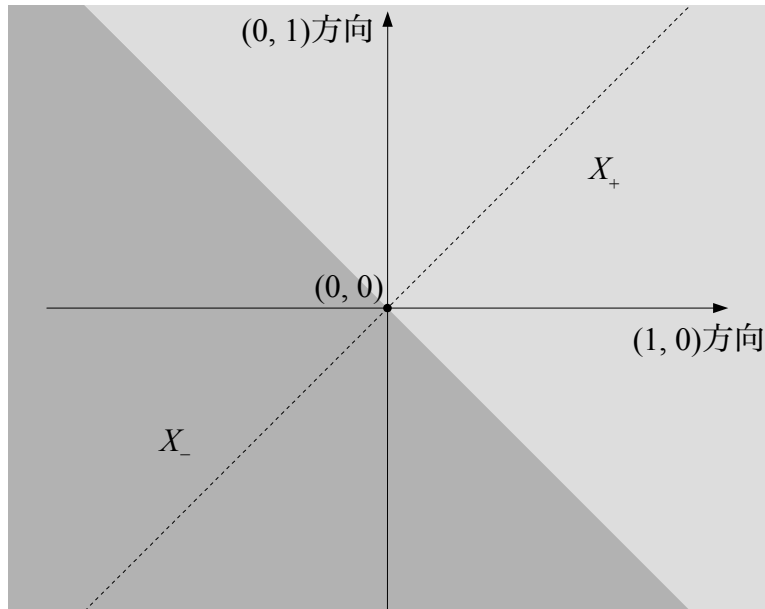


図 4.14: $p_+ \rightarrow (\infty, \infty)$ とした時の Voronoi 図

4.2 50 Ω 電源に対する最適な逆 L 型インピーダンス変換回路の選択

変換したい二つのインピーダンスのうち、片方は 50 Ω であるような状況がよくある。典型的な例が RF ケーブルとのインピーダンス整合である。この節では電源のインピーダンスが 50 Ω、負荷のインピーダンスが任意という状況を想定し、逆 L 型回路での損失を小さくするためのチャートを提案する。

例によって、電源のインピーダンスを $Z_1 (= 50 \Omega)$ 、負荷のインピーダンスを Z_2 とおく。 Z_2 を逆 L 型回路を用いて Z_1 に変換するのだが、このときにまずは、逆 L 型回路の「向き」を適切に選ぶ必要がある。図 4.15 が逆 L 型回路の向きを図で表したものであるが、要するに、直列素子と並列素子のどちらが先に（負荷側に）くるかという問題である。 Z_1 と Z_2 がどの向きで変換できるかは、経由するインピーダンスの偏角が実数になるかどうかで判断できる。図 4.15 の上にある回路（以降、この回路の向きを「向き A」と呼ぶ）でインピーダンス変換する場合、経由するインピーダンスの偏角は

$$\theta_A = \pm \arccos \sqrt{\operatorname{Re} Z_1^{-1} \cdot \operatorname{Re} Z_2} \quad (4.10)$$

になる。これが実数になるためには \arccos の中身が 1 以下、つまり

$$\operatorname{Re} Z_1^{-1} \cdot \operatorname{Re} Z_2 \leq 1 \quad (4.11)$$

を満たす必要がある。また、図 4.15 の下にある回路（この向きを「向き B」と呼ぶ）で変換する場合、経由するインピーダンスの偏角が、今度は

$$\theta_A = \pm \arccos \sqrt{\operatorname{Re} Z_1 \cdot \operatorname{Re} Z_2^{-1}} \quad (4.12)$$

になるので、偏角が実数になるための条件は

$$\operatorname{Re} Z_1 \cdot \operatorname{Re} Z_2^{-1} \leq 1 \quad (4.13)$$

となる。今回は $Z_1 = 50 \Omega$ なので、向き A で変換できるための条件は

$$\operatorname{Re} Z_2 \leq 50 \Omega \quad (4.14)$$

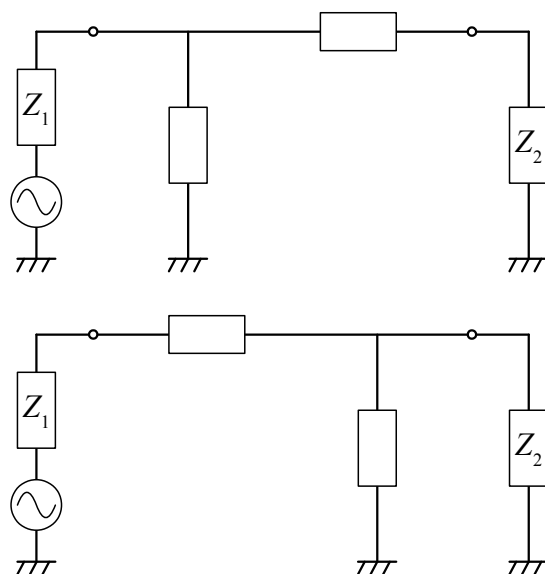


図 4.15: 逆 L 型回路の向き

となり，向き B で変換できるための条件は

$$\operatorname{Re} Z_2^{-1} \leq 20 \text{ mS} \tag{4.15}$$

となる。それぞれの条件を満たす Z_2 の範囲を基準インピーダンスが 50Ω の Smith チャート上に図示したものが図 4.16, 4.17 である。

以下では，変換に使用できる向きで領域を分け，それぞれの領域について損失が最小になるような逆 L 型回路の向きと，経由するインピーダンスの偏角の符号を選んでゆく。

まずは，向き A のみで変換が可能な範囲（図 4.17 の白い部分）について考える。損失が小さくなるような偏角の符号を選ぶには，4.1 節の結果を用いる。4.1 節で定義した点 q は，この場合

$$q = (\tan \arg Z_1, \tan \arg Z_2) = (0, \tan \arg Z_2) \tag{4.16}$$

となる。この点は常に図 4.14 の縦軸上にあるから，この点が領域 X_+ と Z_- のどちらに含まれるかは $\arg Z_2$ の符号で決まる：

$$\arg Z_2 > 0 \Rightarrow p \in X_+, \tag{4.17}$$

$$\arg Z_2 < 0 \Rightarrow p \in X_-. \tag{4.18}$$

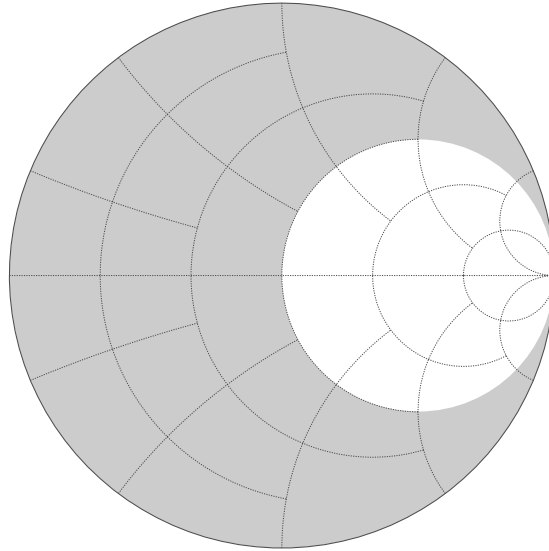


図 4.16: 条件式 (4.14) を満たす Z_2 の範囲

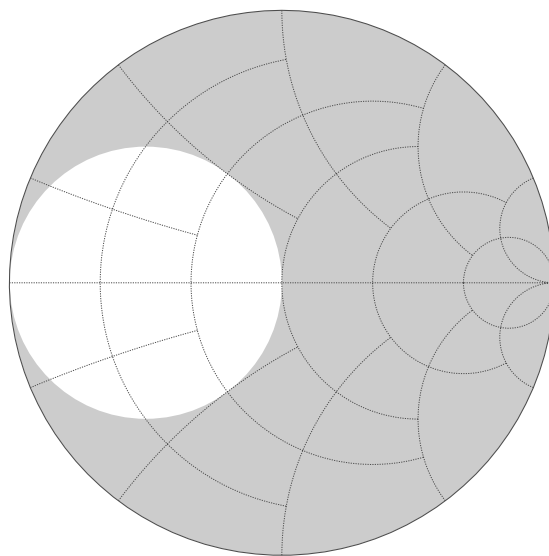


図 4.17: 条件式 (4.15) を満たす Z_2 の範囲

符号が決まると、今度は変換に用いる素子の種類（キャパシタかインダクタか）が決まる。この場合、

$$\arg Z_2 > 0 \Rightarrow \text{直列インダクタ, 並列キャパシタ,} \quad (4.19)$$

$$\arg Z_2 < 0 \Rightarrow \text{直列キャパシタ, 並列インダクタ} \quad (4.20)$$

である。向き B のみで変換が可能な範囲（図 4.16 の白い部分）についても、同様の手順で偏角の符号と素子の種類を決めることができる。結果だけ示すと

$$\arg Z_2 > 0 \Rightarrow p \in X_+, \text{ 並列キャパシタ, 直列インダクタ,} \quad (4.21)$$

$$\arg Z_2 < 0 \Rightarrow p \in X_-, \text{ 並列インダクタ, 直列キャパシタ} \quad (4.22)$$

となる。

次に、向き A, B の両方で変換が可能な領域（図 4.16 と 4.17 の領域の積集合）について考える。この領域では、向きの任意性と偏角の任意性によって計 4 種類の逆 L 型回路の候補がある。まずは向き A の回路を考えよう。偏角の符号は、あいかわらず $\arg Z_2$ の符号だけで決まるので

$$\arg Z_2 > 0 \Rightarrow p \in X_+, \quad (4.23)$$

$$\arg Z_2 < 0 \Rightarrow p \in X_- \quad (4.24)$$

であり、素子の種類は

$$\arg Z_2 > 0 \Rightarrow \text{直列キャパシタ, 並列キャパシタ,} \quad (4.25)$$

$$\arg Z_2 < 0 \Rightarrow \text{直列インダクタ, 並列インダクタ} \quad (4.26)$$

である。このような条件の下では、経由するインピーダンスの偏角 θ_A が

$$0 < |\theta_A| < |\arg Z_2| \quad (4.27)$$

を満たすので、損失を計算すると

$$\begin{aligned} & |\tan \arg Z_1 - \tan \theta_A| + |\tan \theta_A - \tan \arg Z_2| \\ &= 0 + \tan |\theta_A| - \tan |\theta_A| + \tan |\arg Z_2| \\ &= \tan |\arg Z_2| \end{aligned} \quad (4.28)$$

となつて、実は θ_A に依存しないことがわかる。次に向き B の回路を考える。同様の手順で

$$\arg Z_2 > 0 \Rightarrow p \in X_+, \text{ 並列キャパシタ, 直列キャパシタ,} \quad (4.29)$$

$$\arg Z_2 < 0 \Rightarrow p \in X_-, \text{ 並列インダクタ, 直列インダクタ} \quad (4.30)$$

を得る。この時もやはり、経由するインピーダンスの偏角 θ_B について

$$0 < |\theta_B| < |\arg Z_2| \quad (4.31)$$

となるので、損失は

$$|\tan \arg Z_1 - \tan \theta_B| + |\tan \theta_B - \tan \arg Z_2| = \tan |\arg Z_2| \quad (4.32)$$

と、 θ_B に依存しない値になるだけでなく、値が向き A の変換回路の損失と一致する。そのため、向き A, B の両方で変換できる場合は、回路の向きはどちらでも良い。

上記の結果を図にまとめたのが図 4.18 である。50 Ω へ効率よくインピーダンス変換できる逆 L 型回路の構成は、 Z_2 の値によって 6 種類に分類できることが、この図から理解される。ところで、この図の結論は標語的に一言で表現できる。「短いパスを選べ」である。例えば Z_2 が #3 の領域にある場合を考えよう。この時、 Z_2 は図 4.19 のような 2 通りのパスにより変換できる。どちらが選ばれるかを図 4.18 で確認すると、実線で表された短い方のパスが選ばれており、破線で表された遠まりのパスの方が損失が大きいということになる。これは Z_2 が #3 に含まれる時の例だが、他の #1 から #6 の領域に含まれる場合についても、パスの全長が短い方が選ばれることがわかっている。50 Ω への変換を考える際は、とりあえず「パスを短くすればよい」と覚えておくと低損失な逆 L 型回路を選ぶことができる。

4.3 電力損失の双曲幾何学的表現

前の二つの節の結果は、どちらも「損失」という回路的な量が「距離」あるいは「長さ」という幾何学的な量に対応しているというものだった。また、距離や長さの定義は若干異なる（一方はマンハッタン距離で、もう一方は通常の意味での長さ）ものの、両者は「距離が遠い、長さが長いほど損失も大きくなる」という点で定性的に一致している。これら二つの検討を通して、損失を距離に対応させることが突飛な考えではないことが理解されたのではないだろうか。また、損失を距離で表現

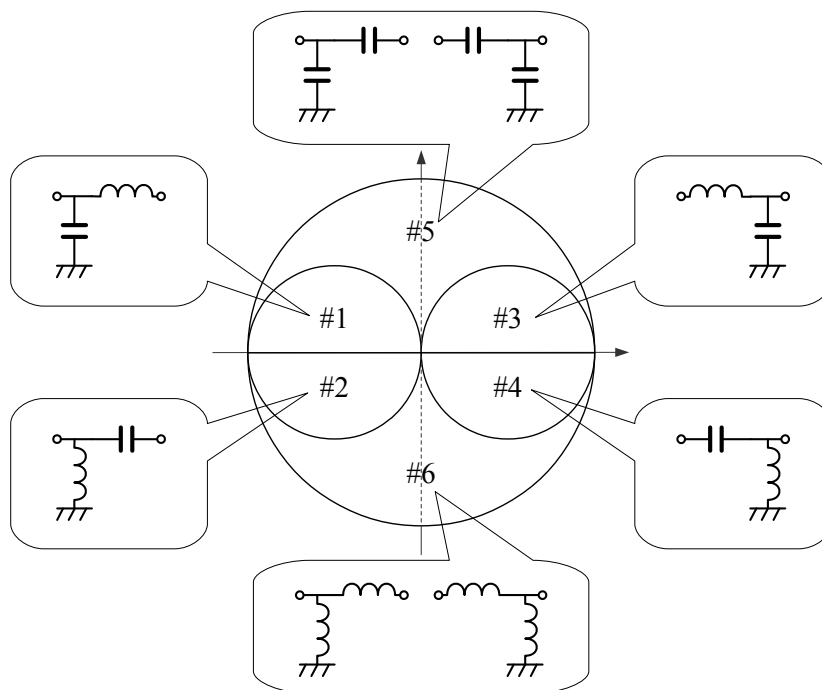


図 4.18: 50 Ω 電源に対して損失が最小となる逆 L 型回路

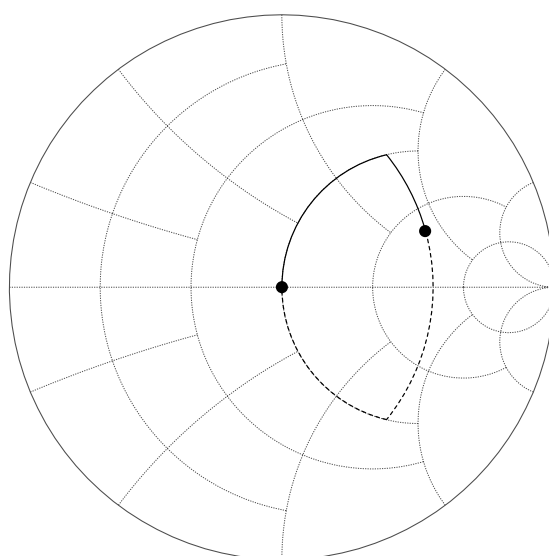


図 4.19: #3 に含まれる負荷インピーダンスから 50 Ω 電源への変換の例

することの利点である，直感的なわかりやすさも伝わったのではないかと思われる。

しかしなら，上記二つの結果にはまだまだ改善の余地がある。例えば一つ目の結果である「損失はマンハッタン距離を無負荷Q値で割ったものに一致する」では，損失と距離の関係を定量的に表すことには成功しているが，この表現をそのまま逆L型回路以外に適用することはできない。表現を拡張することも難しそうである。要するに汎用性がない。汎用性を確保するという意味では，やはり二つ目の結果のように Smith チャートを用いるべきであろう。回路を Smith チャート上のパスで表現するというやり方は汎用であるとともに，回路技術者にとって受け入れやすく，理想的な表現方法である。しかし二つ目の結果というのはあくまで，損失と長さの定性的な関係を述べているにすぎない。回路の最適設計を幾何学の問題として扱うという目的のためにも，関係は定量的なものでなければならない。

Smith チャート上のパスの長さとの定量的な関係を導くことはできないだろうか。これが本節のテーマである。

4.3.1 インピーダンス/アドミタンス平面上のパス

まず，これまであまり明確な定義を与えていなかった「パス」とは何なのかを明確にする。図4.20のように，インピーダンスが Z_0 の電源に対してインピーダンスが Z の素子を直列に繋ぐ場合を考える。この時，電源側を見込んだインピーダンスは Z_0 から $Z_0 + Z$ に変化する。これをインピーダンス平面上に表したのが図4.21である。この段階では， Z_0 と $Z_0 + Z$ は平面上にある離れた二つの点にすぎない。しかし，我々はこの2点の間に「中間点」があると考え。そのためには，3節でもそうしたように，素子を分割すればよい。図4.22のように，インピーダンスが Z の直列素子を N 等分すれば，電源側を見込んだインピーダンスは $Z_0, Z_0 + Z/N, Z_0 + 2Z/N, \dots$ というふうに徐々に変化しているように見えるであろう。このインピーダンスの列は， $\Delta Z = Z/N$ として

$$(Z_n)_{n=0}^N = (Z_0, Z_0 + \Delta Z, Z_0 + 2\Delta Z, \dots, Z_0 + Z) \quad (4.33)$$

という数列をなす。この数列を再びインピーダンス平面上で考えれば，図4.23左のように Z_0 と $Z_0 + Z$ の間を埋める無数の点になる。特に $N \rightarrow \infty$ の極限を取れば，これは図4.23右に示すような Z_0 と $Z_0 + Z$ を結ぶ直線になる。この直線を，インピーダンスが Z の直列素子によるパスと定義する。

このパスの長さを計算しよう。ただし，ここで言う長さとは普通の意味での長さ

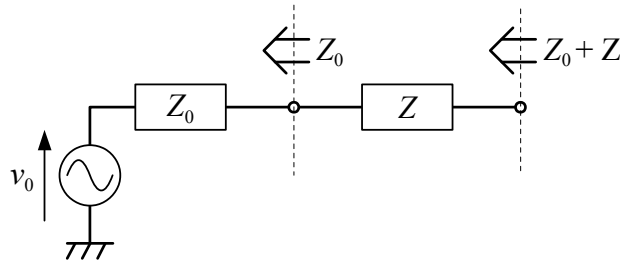


図 4.20: 素子の直列接続によるインピーダンス変換

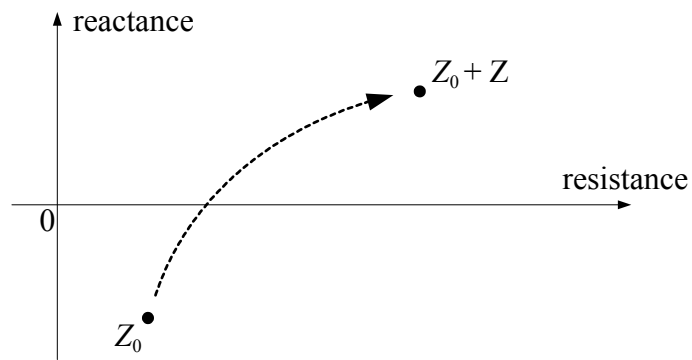


図 4.21: インピーダンス平面上で見た Z_0 から $Z_0 + Z$ の移動

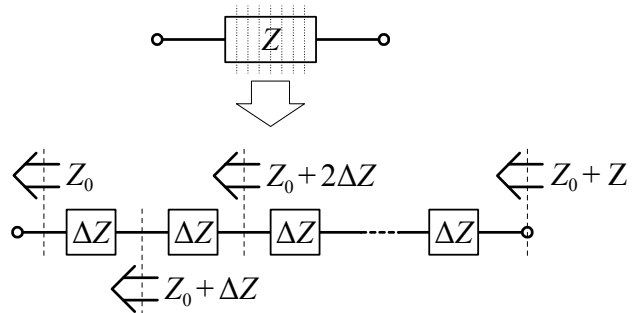


図 4.22: 直列素子の分割

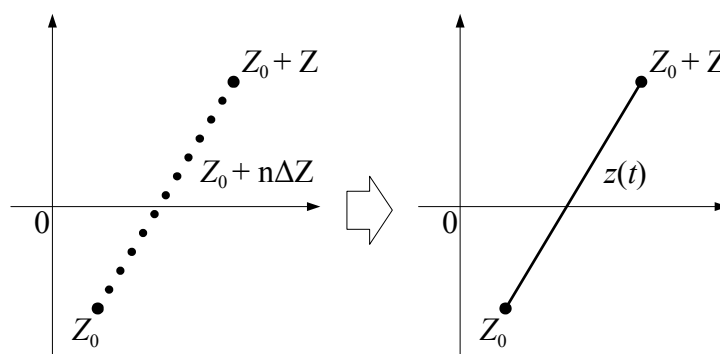


図 4.23: Z_0 と $Z_0 + Z$ の間の点列と, その極限としての直線

ではなく, 導入で紹介した双曲幾何学的な長さである。先ほどの数列に対して, 次のような和を考える:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{|Z_{n+1} - Z_n|}{\operatorname{Re} Z_n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|\Delta Z|}{\operatorname{Re} Z_n}. \tag{4.34}$$

和をとられる項は, 右半平面モデル上の Poincaré 計量

$$\frac{dz}{\operatorname{Re} z} \tag{4.35}$$

を模している。これの $N \rightarrow \infty$ の極限を取り, パスの双曲幾何学的な長さを, 曲線

$$z : Z(t) = Z_0 + tZ, t \in [0, 1] \tag{4.36}$$

に沿った積分

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|\Delta Z|}{\operatorname{Re} Z_n} = \int_0^1 \frac{1}{\operatorname{Re} z(t)} \left| \frac{dz}{dt} \right| dt = \int_z \frac{1}{\operatorname{Re} z} |dz| \tag{4.37}$$

で定義する。以降ではこれを

$$\operatorname{len}_{\mathbb{H}}(z) \tag{4.38}$$

と表す。

次に損失について考える。素子を挿入する前、図4.20の電源は最大有能電力 [41]

$$P_{av} = \frac{|v|^2}{4\text{Re } Z_0} \quad (4.39)$$

を供給する能力を持っていた。これが素子の挿入により

$$P'_{av} = \frac{|v|^2}{4\text{Re } (Z_0 + Z)} \quad (4.40)$$

に減少する。これは素子の損失によるものである。この時の効率 η は P_{av} と P'_{av} の比として

$$\eta = \frac{P'_{av}}{P_{av}} = \frac{\text{Re } Z_0}{\text{Re } (Z_0 + Z)} \quad (4.41)$$

で計算できる。

η は以下に示すような別の方法によっても計算可能である。図4.22中の、各区間における効率を η_n ($n = 1, 2, \dots, N$) とおく。 η_n は、先ほどの効率の式(4.41)において、 Z_0 を $Z_n - \Delta Z$ で、 Z を ΔZ で置き換えたもので計算できるから、

$$\eta_n = \frac{\text{Re } (Z_n - \Delta Z)}{\text{Re } (Z_n - \Delta Z + \Delta Z)} = 1 - \frac{\text{Re } \Delta Z}{\text{Re } Z_n} \quad (4.42)$$

である。直列素子全体での効率 η は、各微小区間の効率 η_n を掛け合わせることで得られる:

$$\eta = \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{\text{Re } \Delta Z}{\text{Re } Z_n} \right). \quad (4.43)$$

計算がしやすいように、右辺を総和の式に書き直す。そのためには両辺の $-\log_e$ をとり

$$-\log_e \eta = -\log_e \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{\text{Re } \Delta Z}{\text{Re } Z_n} \right). \quad (4.44)$$

とすれば良い。ここであえて \log_e に負号をつけたのは、右辺を「挿入損失のネーパ」にするためである¹。式(4.44)中の N として十分に大きな自然数を取り、すべての

¹この定義に従うと、 $\log_{10} \eta = \log_{10} e \cdot \log_e \eta \approx 0.4343 \log_e \eta$ となる。なので、回路設計で一般的なデシベルに変換する際は $1 \text{ Np} \approx 4.343 \text{ dB}$ とすればよい。ネーパは電圧や電流の比を表すのに用いられる(例えば伝送線路の電圧減衰量)ことが多いが、ここでは電力のネーパを考えていることに注意を要する。一般によく知られたデシベルとネーパの変換式 $1 \text{ Np} \approx 8.686 \text{ dB}$ を用いると挿入損失が実際よりも2倍大きく計算されてしまう。

$n \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ に対して

$$\frac{\operatorname{Re} \Delta Z}{\operatorname{Re} Z_n} < 1 \quad (4.45)$$

を満たすようにすれば, $\log_e(1-x)$ の Taylor 展開

$$\log_e(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \quad (4.46)$$

を用いて式(4.44)を

$$-\log_e \eta = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\operatorname{Re} \Delta Z}{\operatorname{Re} Z_n} \right)^k \quad (4.47)$$

と書き直すことができる。これは, 丁寧に書けば

$$-\log_e \eta = \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\operatorname{Re} \Delta Z}{\operatorname{Re} Z_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{Re} \Delta Z}{\operatorname{Re} Z_n} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\operatorname{Re} \Delta Z}{\operatorname{Re} Z_n} \right)^3 + \dots \right\} \quad (4.48)$$

である。総和の中の第1項目は Riemann 和の形をしており, $N \rightarrow \infty$ の極限において Riemann 積分

$$\int_z \frac{1}{\operatorname{Re} z} \operatorname{Re} dz \quad (4.49)$$

に収束する。第2項目以降はすべて0に収束する。よって

$$-\log_e \eta = \int_z \frac{1}{\operatorname{Re} z} \operatorname{Re} dz \quad (4.50)$$

となる。上の式と, パスの双曲幾何学的な長さの定義式(4.37)と見比べると, 両者は似た形をしているものの, $|dz|$ が $\operatorname{Re} dz$ に置き換わっていることがわかる。これらの間には, 素子の無負荷 Q 値 Q による

$$\operatorname{Re} dz = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2}} |dz| \quad (4.51)$$

という関係が成り立つので, これを式(4.50)に代入すれば, パスの双曲幾何学的な

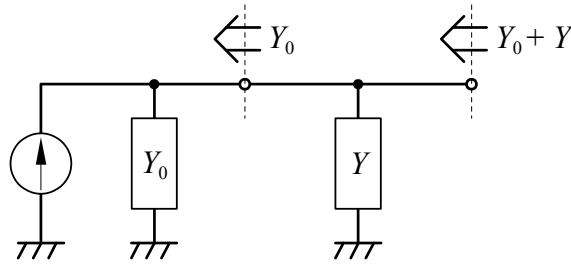


図 4.24: 並列の接続によるインピーダンス変換

長さによる表現

$$-\log_e \eta = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2}} \text{len}_{\mathbb{H}}(z) \tag{4.52}$$

を得る。式(4.52)の意味を言葉にするならば「直列素子の挿入による電力損失のネーバ値 $-\log_e \eta$ は、対応するインピーダンス平面上のパス z の双曲幾何学的な長さに比例し、その比例定数は、素子の無負荷 Q 値 Q を用いて $1/\sqrt{1+Q^2}$ と表される」となる。

並列素子の挿入による電力損失も、同様の手順によりアドミタンス平面上のパスの長さに関連付けることができる。図 4.20 に対応して、図 4.24 のようなアドミタンスが Y_0 の電源に、アドミタンス Y を並列に挿入する場合を考える。素子の挿入によるアドミタンス平面上のパスを

$$y : y(t) = y_0 + ty, t \in [0, 1] \tag{4.53}$$

と定義し、これの双曲幾何学的な長さを

$$\int_0^1 \frac{1}{\text{Re } y(t)} \left| \frac{dy}{dt} \right| dt = \int_y \frac{1}{\text{Re } y} |dy| \tag{4.54}$$

と定義する。直列素子の場合と同様に、素子を挿入する前の、電源の最大有能電力を P_{av} 、素子挿入後のそれを P'_{av} とおけば、これらの比としての挿入損失 $\eta = P'_{av}/P_{av}$ は

$$-\log_e \eta = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2}} \text{len}_{\mathbb{H}}(y) \tag{4.55}$$

と表現できることがわかる。ここで Q は、挿入した並列素子の無負荷 Q 値である。上で与えた長さの定義は、直列素子のパスの長さはインピーダンス平面上で、並

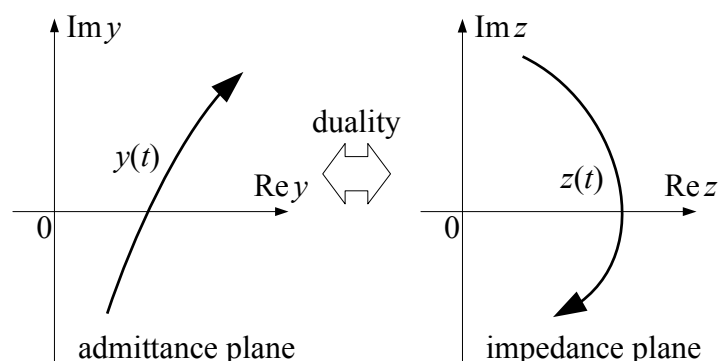


図 4.25: アドミタンス/インピーダンス平面上的パスの対応

列素子のパスの長さはアドミタンス平面上でという風に、それぞれ別々の平面を考え、独立して与えたものであった。この節では、実はそれら二つの定義が、本質的に全く同じものであることを示す。この同一性を担保する上で重要な役割を果たすのが、双曲幾何学的な長さの不変性である。

再び $z(t)$ により直列素子のパスを表す。先ほどは $z(t)$ をインピーダンス平面上で考えた。しかし、インピーダンスとアドミタンスは図 4.25 のように、互いに双対となるような存在であるから、インピーダンス平面上的 $z(t)$ に対応して、アドミタンス平面上的パス $y(t)$ が

$$y(t) = \frac{1}{z(t)} \quad (4.56)$$

によって定義できる。このパスを用いると直列素子のパスの長さをアドミタンス平面上（インピーダンス平面上ではなく！）で定義することができる：

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(1/z) = \int_y \frac{1}{\text{Re } y} |dy|. \quad (4.57)$$

結果、 $z(t)$ に対して、インピーダンス平面上で測った長さ $\text{len}_{\mathbb{H}}(z)$ とアドミタンス平面上で測った長さ $\text{len}_{\mathbb{H}}(1/z)$ という二つの長さが対応することになる。一つのパスが二つの異なる長さを持つことは、理論の整合性に問題を及ぼさないのだろうか。

実のところ、上のことは損失の幾何学的表現を考える上で全く問題にならない。なぜなら、 $\text{len}_{\mathbb{H}}(z)$ と $\text{len}_{\mathbb{H}}(1/z)$ は常に同じ長さになるため、一つのパスが二つの異なる長さを持つということ自体がありえないからである。このことは、実際に $\text{len}_{\mathbb{H}}(z)$

と $\text{len}_{\mathbb{H}}(1/z)$ を計算してみればわかる。まず dy について

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{z^2} \quad (4.58)$$

である。また、 $1/z$ の実部は

$$\text{Re} \frac{1}{z} = \text{Re} \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{\text{Re } z}{|z|^2} \quad (4.59)$$

となる。これらを式 (4.57) に代入すれば

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(1/z) = \int_y \frac{1}{\text{Re } y} |dy| = \int_z \frac{|z|^2}{\text{Re } z} \left| \frac{dy}{dz} \right| |dz| = \int_z \frac{1}{\text{Re } z} |dz| = \text{len}_{\mathbb{H}}(z) \quad (4.60)$$

と、確かに二つの長さは一致する。

しかし、こうして実際に計算をして確かめるよりも、さらに直感的でわかりやすい証明の方法がある。右半平面上の等長変換を用いる方法である。右半平面 \mathbb{H} 上の等長変換とは、 \mathbb{H} の上での双曲幾何学的な長さを変えない写像であった。例えば、Möbius 変換が \mathbb{H} から \mathbb{H} への写像になれば、これは等長変換になったが、インピーダンスをアドミタンスに移す写像は明らかにこの条件を満たす。なので計算せずとも、直ちに $\text{len}_{\mathbb{H}}(z)$ と $\text{len}_{\mathbb{H}}(1/z)$ は一致することがわかる。この他、次のような変換によっても $\text{len}_{\mathbb{H}}(z)$ は不変であることがわかる。

- 任意の正数 a によるスケーリング $z \mapsto az$.
- 上下方向への平行移動 $z \mapsto z + jx$ ($x \in \mathbb{R}$).
- 複素共役を取る操作 $z \mapsto z^*$.

このような事情なので、もはや素子が直列、並列のどちらで接続されているかを考慮する必要はない。以降では、インピーダンス平面、アドミタンス平面を問わず、パスの長さという表現を使う。

4.3.2 Smith チャート上のパス

これまで、素子のパスを右半平面 \mathbb{H} の上で考えてきた。これは、双曲幾何学の舞台に Poincaré の右半平面モデルを用いたということであるが、これとは別の、よく知られた双曲幾何学の舞台として Poincaré の円盤モデルというものがある。円盤モ

デルの舞台は、縁を含まない単位円盤 $\mathbb{D} = \{\gamma \in \mathbb{C} \mid |\gamma| < 1\}$ である。これを用いて、今度は Smith チャート上のパスの長さを定義し、これで損失を表現する。

導入でも述べたよう、キャパシタ、インダクタの直並列接続によるインピーダンス変換回路の設計には Smith チャート上のパスを用いる。しかし、例えば直列素子の接続によるパスをインピーダンス平面上で考えたように、Smith チャートの代わりにインピーダンス平面を用いて回路を設計しても良いのではないだろうか。筆者は以下の二つの理由から、やはりインピーダンス変換回路の設計は Smith チャート上で行うほうが良いと考える。まず第一に、インピーダンス平面上では素子の並列接続によるインピーダンスの動きがわかり辛い²。その代わりに、素子の直列接続による動きは単なる直線になるため Smith チャート上よりも見やすいかもしれない。しかし、それであれば直列素子の動きも、並列素子の動きも適度に見やすい Smith チャートの方がバランスが取れていて良いのではないだろうか。第二に、Smith チャートは円なので有限の紙面上に全てを収めることができるが、インピーダンス平面についてはそれが不可能である。 0Ω から $\infty \Omega$ に渡る非常に広い範囲を一目で見渡すことができるという利点は、インピーダンス平面にもアドミタンス平面にもない、Smith チャート特有のものである。インピーダンス変換回路の設計は、やはり図 4.26 のように Smith チャート上で行った方が良さそうである。

図 4.26 の曲線を例に Smith チャート上のパスの長さを定義しよう。 Γ_s でパスの始点を、 Γ_d でパスの終点を表す。この時、これら 2 点の間を結ぶパス γ を

$$\gamma : t \mapsto \gamma(t), t \in [0, 1], \gamma(0) = \Gamma_s, \gamma(1) = \Gamma_d \quad (4.61)$$

で表す。このパスの長さは \mathbb{D} 上の Poincaré 計量

$$\frac{2}{1 - |\gamma|^2} |d\gamma| \quad (4.62)$$

を用いて

$$\text{len}_{\mathbb{D}}(\gamma) = \int_0^1 \frac{2}{1 - |\gamma(t)|^2} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = \int_{\gamma} \frac{2}{1 - |\gamma|^2} |d\gamma| \quad (4.63)$$

で定義する。上の積分が意味を持つためにも、 γ は区分的に滑らかである必要がある。これはつまり、 γ を描いているキャパシタ、インダクタの数は有限でなければな

²これに関しては、単に慣れの問題かもしれない。もし日常的にインピーダンス平面上で回路の設計を行っていたのなら、素子の並列接続によるパスを、なんの苦もなく描けるようになるであろうか。

らないということである。以下でもそのように仮定して議論を進める。

あえて補足するまでもないかもしれないが、図4.26のパスは3素子の直列・並列・直列という構成のインピーダンス変換回路を表している。なので、ここの素子によるパスは、元々はインピーダンス平面/アドミタンス平面上のパスとして、例えば

$$z_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}, n = 1, 2, 3 \quad (4.64)$$

のように個別に定義されたものである。ただし、これらが1本のパスとして繋がるためにも

$$z_1(1) = z_2(0), z_2(1) = z_3(0) \quad (4.65)$$

を満たすものとする。これらのパスを、基準インピーダンスを Z_{ref} とするインピーダンスから電力反射係数 [11] への変換式

$$\phi(z) = \frac{z - Z_{\text{ref}}^*}{z + Z_{\text{ref}}} \quad (4.66)$$

を用いて、Smith チャート上のパス $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ へとそれぞれ変換し、これらを順番につなげたものが γ である。よって、この時の γ による電力損失 $-\log_e \eta$ は、個々の素子の無負荷 Q 値を Q_1, Q_2, Q_3 として

$$-\log_e \eta = \frac{1}{\sqrt{1+Q_1^2}} \text{len}_{\mathbb{H}}(z_1) + \frac{1}{\sqrt{1+Q_2^2}} \text{len}_{\mathbb{H}}(z_2) + \frac{1}{\sqrt{1+Q_3^2}} \text{len}_{\mathbb{H}}(z_3) \quad (4.67)$$

で表現できる。より一般に、 γ が N 個の素子からなるパスの場合は、 n 番目の素子のパスを z_n 、無負荷 Q 値を Q_n として

$$-\log_e \eta = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{1+Q_n^2}} \text{len}_{\mathbb{H}}(z_n) \quad (4.68)$$

となる。

上の式を $\text{len}_{\mathbb{H}}$ を用いた表現から $\text{len}_{\mathbb{D}}$ を表現に書き換えよう。そのためには、 \mathbb{H} と \mathbb{D} を結ぶ変換式 (4.66) の等長性を用いる。式 (4.66) 中の ϕ は \mathbb{H} と \mathbb{D} との間の全単射であるため、右半平面モデル上で定義された双曲幾何学的な長さと同盤モデル上で

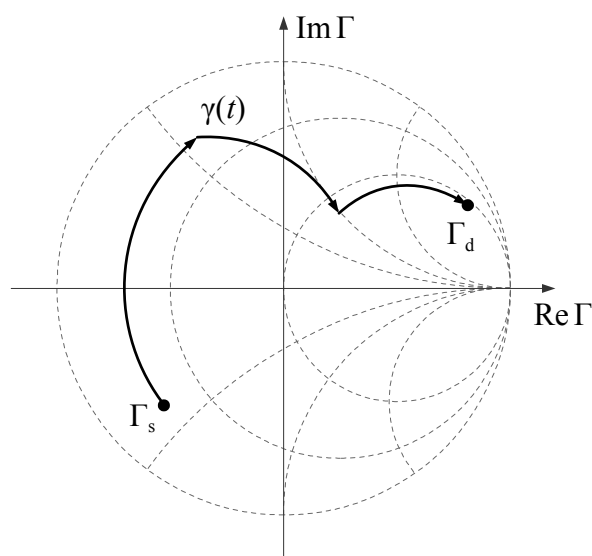


図 4.26: 3 素子インピーダンス変換によるパスの例

定義された双曲幾何学的な長さの間には

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(z) = \text{len}_{\mathbb{D}}(\phi(z)) \tag{4.69}$$

という関係がある。つまり ϕ は等長変換である。このため、式 (4.68) 中の $\text{len}_{\mathbb{H}}$ を $\text{len}_{\mathbb{D}}$ に、 z_n を $\gamma_n = \phi(z_n)$ に置き換えるだけで良い:

$$-\log_e \eta = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{1 + Q_n^2}} \text{len}_{\mathbb{D}}(\gamma_n). \tag{4.70}$$

上の式が、求めいた「損失を Smith チャート上の曲線の長さで表現する」式である。

第5章

素子値および周波数の変動と非Euclid幾何学

線型回路と非Euclid幾何学との関わりについて、4章ではインピーダンス変換回路の電力損失を扱い、これがパスの双曲幾何学的な長さで表現できることを示した。この結果は、回路的な量を幾何学的な量に置き換えて議論できる実例を示したという意味で、興味深いものであった。しかし、それ以上に興味深かったのが、線型回路理論と非Euclid幾何学との親和性の高さである。

例えば4章では、非Euclid幾何学のモデルであるPoincaréの半平面モデルと円盤モデルが登場した。これらの舞台となっている半平面 \mathbb{H} と単位円盤 \mathbb{D} は、そっくりそのままインピーダンス/アドミタンス平面とSmithチャートに対応していた。このおかげで、我々は既存の非Euclid幾何学の概念や定理を、ほとんど修正することなく線型回路理論に応用することができた。その結果得られたのが、回路パラメータの取り方によらないパスの長さの定義や、損失の幾何学的表現である。損失の他にも、非Euclid幾何学との親和性が高い回路的な量が存在するのではないだろうか。また、そもそもパスの双曲幾何学的な長さの物理的な意味はなんなのだろうか。

本章の内容は上記の疑問に対する答えになっている。まず一つ目の「損失の他にも、非Euclid幾何学との親和性が高い回路的な量が存在する」かについて、これの答えは「存在する」である。それが何かといえば、インピーダンス変換回路の、素子値と周波数の変動に対する耐性である。もう少し正確に述べよう。無損失、あるいはほぼ無損失とみなせるようなインピーダンス変換回路について、その回路を構成する素子の素子値（キャパシタンスやインダクタンス）や周波数の微小な変動に対する入力インピーダンスの変動は、やはり損失と同様に、パスの双曲幾何学的な長さで記述できる。次に、「パスの双曲幾何学的な長さの物理的な意味」である。これの

答えは「素子に蓄えられるエネルギーと負荷で消費されるエネルギーの比」である。回路理論において、上で定義される比は素子の負荷 Q 値と呼ばれる量であるが、これが素子のパスの双曲幾何学的な長さとも一致することが本章で示される。パスの長さと負荷 Q 値が一致するという事実は、インピーダンス変換回路の変動耐性が幾何学的に記述できることを示す上で、重要な役割を果たす。

入力インピーダンスの変動耐性が幾何学的に表現できることは、ロバストなインピーダンス変換回路の設計が、低損失なインピーダンス変換回路の設計と同じ恩恵を受けることができることを示している。これまで用いられてきた変動耐性の解析は、例えば解析する回路構成を固定して、素子値や回路パターンの誤差による影響を調べたりするもの [42] や、設計を終えた回路に対してモンテカルロ法などを用いて変動の耐性を見る方法 [43] などである。しかし、前者の方法は汎用性に難がある。後者の方法は適応できる対象は広いが、入力と出力の関係が明確でない、いわゆるブラックボックスなので、得られた結果から普遍的な法則、知見を見いだすのは難しいであろう。本章の結果は、直・並列接続されたキャパシタやインダクタで構成される、かなり広い範囲のインピーダンス変換回路に適応できる上、幾何学的な直感を頼りに、変動耐性の高い回路を設計するための普遍的なルールを導き出すこともできる。

5.1 節ではまず、インピーダンスや素子値、周波数といった各種の値の変動を、Poincaré計量を用いて表現することを考える。そもそも、我々が入力インピーダンスの変動耐性と非 Euclid 幾何学との関連に気づいたのは、この検討がきっかけであった。当初の目的は、変動耐性を幾何学的に表現することではなく、回路パラメータの変動を、インピーダンス、アドミタンス、反射係数などといった表現の方法に依存しない形で記述することであった。このような、表現に依存しない記述を実現する鍵が双曲幾何学的な長さの等長性である。5.2 節では素子値の、5.3 節では周波数の変動に対する入力インピーダンスの変動を計算する。この時に重要な役割を果たすのも、双曲幾何学的な長さの等長性である。等長性を用いることで、変動の伝搬に関する計算の大半を省略することができ、議論の見通しが非常に良くなる。また、入力インピーダンスの変動と素子値、周波数の変動との関係が素子の負荷 Q 値で記述されることも、これらの節で明らかになる事柄である。最後の 5.4 節では、パスの双曲幾何学的な長さと負荷 Q 値が一致することを示し、変動耐性の幾何学的表現を導出する。

5.1 変動と双曲幾何学的な長さ

本章では、回路パラメータや素子値、周波数の微小な変動を扱う。以降では微小な変動を表す記号として頭に δ をつけた変数を用いることにする。

変動の「大きさ」を指定する方法として、絶対的なやり方と相対的なやり方がある。絶対的なやり方とはすなわち、 δZ や δf をそのまま使って

$$|\delta Z|, |\delta f| \quad (5.1)$$

などと指定する方法である。他方、相対的なやり方とは、 δf を変動の中心 f との比で表した

$$\left| \frac{\delta f}{f} \right| \quad (5.2)$$

である。例えば素子値の許容誤差がパーセンテージで指定されたり、フィルタの特性が比帯域で評価されたりするように、工学的に合理的な表現は（少なくとも本章で扱う素子値と周波数に関しては） $|\delta f|$ ではなく $|\delta f/f|$ の方ではないかと思われる。

相対的な指定の利点は、工学における合理性の他に、スケーリングと逆数を取る操作に対する不変性がある。スケーリングの例として周波数 f と角周波数 $\omega = 2\pi f$ との関連を考える。周波数の変動 δf の大きさを相対的に与えておけば、角周波数の変動 $\delta\omega$ との間に

$$\left| \frac{\delta\omega}{\omega} \right| = \left| \frac{2\pi\delta f}{2\pi f} \right| = \left| \frac{\delta f}{f} \right| \quad (5.3)$$

という関係が成り立つ。逆数の例では周期 $T = 1/f$ を考えれば良い。この場合も、周期の変動 δT について

$$\left| \frac{\delta T}{T} \right| \approx \left| \frac{\frac{dT}{df}\delta f}{\frac{1}{f}} \right| = \left| \frac{\delta f}{f} \right| \quad (5.4)$$

となる。つまり、 f の変動を相対的に「1%」などとしておけば、 f の別表現である ω, T についても変動の大きさは（ほぼ）1%となり、すべての大きさが一致する。これは便利である。

このような扱いやすさを回路パラメータの表現にも導入しよう。回路パラメータの表現方法としては、インピーダンス Z , アドミタンス Y , 反射係数 Γ の3種類があ

るが、このうちのどれを選んだとしても（そして反射係数を定義するのにどんな基準インピーダンスを選んだとしても）、変動の大きさが常に一緒になるような「大きさ」を定義しよう。このような定義の候補として、例えば上の周波数の例からの類推で

$$\left| \frac{\delta Z}{Z} \right|, \left| \frac{\delta Y}{Y} \right|, \left| \frac{\delta \Gamma}{\Gamma} \right| \quad (5.5)$$

としたらどうであろうか。残念ながら、この定義だと $|\delta Z/Z| \approx |\delta Y/Y|$ にはなるが $|\delta Z/Z| \approx |\delta \Gamma/\Gamma|$ まで成り立たせるのは無理である。ではどうすればいいかだが、実は、我々はすでに答えを知っている。Poincaré計量である。回路パラメータの各微小変動 $\delta Z, \delta Y, \delta \Gamma$ について、これらの変動の大きさを双曲幾何学的な長さ

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Z) \approx \frac{|\delta Z|}{\text{Re } Z}, \text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Y) \approx \frac{|\delta Y|}{\text{Re } Y}, \text{len}_{\mathbb{D}}(\delta \Gamma) \approx \frac{|\delta \Gamma|}{1 - |\Gamma|^2} \quad (5.6)$$

で指定する¹と約束すれば、この変動の大きさは、回路パラメータの表現方法や基準インピーダンスの取り方に依存しない普遍的な表現になる。

補足だが、周波数 f の変動の大きさの相対的な表現 $|\delta f/f|$ も、双曲幾何学的な長さによる指定だと考えることができる。考えている量が実数の場合は、半平面上の Poincaré計量を採用することで

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta f) \approx \frac{|\delta f|}{\text{Re } f} = \left| \frac{\delta f}{f} \right| \quad (5.8)$$

になるからである。以下では、素子値や周波数の変動を相対的な大きさに指定することも含めて、「双曲幾何学的な大きさ」といったような呼び方をしたり、そのことを意識した数式の表記をすることがある。

¹より正確な定義としては、例えばインピーダンス Z とその微小な変動 δZ に対して、微小な線分

$$z: z(t) \mapsto Z + t \cdot \delta Z \quad (5.7)$$

を定め、これの双曲幾何学的な長さ $\text{len}_{\mathbb{H}}(z)$ のことを、省略して $\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Z)$ と表記する、となる。ただ、ここまで正確に述べなくとも、上の表記から筆者の意図するところは十分に伝わるのではないかと思う。

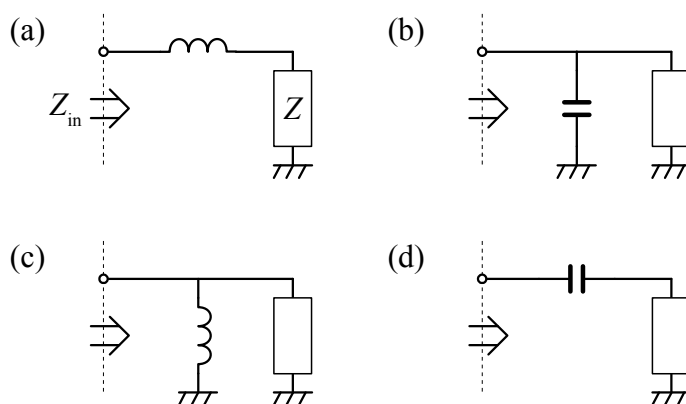


図 5.1: 一つのリアクタンス素子による Z のインピーダンス変換

5.2 素子値の変動による影響

まずはシンプルに、図 5.1 の (a) から (d) に示すような、負荷 $Z = R + jX$ を一つのリアクタンス素子でインピーダンス変換した場合について、素子値の変動と入力インピーダンス Z_{in} の変動との関係を調べよう。

(a) の回路について、この回路の Z_{in} は

$$Z_{in} = R + j\omega L \tag{5.9}$$

で与えられる。よって、素子値 L と Z_{in} の間には

$$dZ_{in} = \frac{\partial Z_{in}}{\partial L} dL = j\omega dL \tag{5.10}$$

が成り立つので、変動に対しては

$$\delta Z_{in} \simeq j\omega \delta L \tag{5.11}$$

となる。これを双曲幾何学的な表現に置き換えよう。そのためには

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Z_{in}) \simeq \frac{|\delta Z_{in}|}{\text{Re } Z_{in}}, \quad \text{len}_{\mathbb{H}} \simeq \frac{|\delta L|}{L} \tag{5.12}$$

に合わせて、式 (5.11) を

$$\frac{\delta Z}{R} \simeq \frac{j\omega L}{R} \frac{\delta L}{L} \tag{5.13}$$

と書き直して、両辺の絶対値をとり

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Z_{\text{in}}) \simeq \frac{\omega L}{R} \text{len}_{\mathbb{H}}(\delta L) \quad (5.14)$$

となる。ここで出てきた係数 $\omega L/R$ は

$$Q_{\text{loaded}} = \frac{|\text{Im } Z_{\text{in}}|}{\text{Re } Z_{\text{in}}} = \cot \arg Z_{\text{in}} \quad (5.15)$$

と表記することもできる。これは、素子の負荷 Q 値と呼ばれる量である。上の結果を言葉にすれば「入力インピーダンスの変動と、素子値の変動の双曲幾何学的な大きさの比率は、素子の負荷 Q 値で決まる」となる。

次に (b) の回路を考えよう。今度は負荷のアドミタンスを $Y = 1/Z = G + jB$ とし、入力アドミタンス Y_{in} の変動を考える。このときは

$$Y_{\text{in}} = G + j\omega C \quad (5.16)$$

であるが、これは変数が異なるだけで式 (5.11) と同じ形をしている。なので結果も、(a) の回路についての式の変数を置き換えた

$$\frac{\delta Y}{G} \simeq \frac{j\omega C}{R} \frac{\delta C}{C}, \quad (5.17)$$

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Y) \simeq \frac{\omega C}{G} \text{len}_{\mathbb{H}}(\delta C) \quad (5.18)$$

となる。ここで出てくる係数 $\omega C/G$ も、やはり負荷 Q 値と呼ばれる。

最後に (c), (d) の回路について考えよう。(c) の回路について、入力アドミタンス Y_{in} は

$$Y_{\text{in}} = G + \frac{1}{j\omega L} \quad (5.19)$$

である。(d) の回路についての結果は、 Y_{in} を Z_{in} に、 L を C に置き換えれば得られる。上の式を微分し、

$$dY_{\text{in}} = -\frac{1}{j\omega L^2} dL \quad (5.20)$$

表 5.1 回路構成と変動の式のまとめ

回路	変動の関係	変動の大きさの関係	負荷 Q 値
(a)	$\frac{\delta Z_{in}}{Z_{in}} \approx jQ_{loaded} \frac{\delta L}{L}$	$\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Z_{in}) \approx Q_{loaded} \cdot \text{len}_{\mathbb{H}}(\delta L)$	$\frac{\omega L}{R}$
(b)	$\frac{\delta Y_{in}}{Y_{in}} \approx jQ_{loaded} \frac{\delta C}{C}$	$\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Z_{in}) \approx Q_{loaded} \cdot \text{len}_{\mathbb{H}}(\delta C)$	$\frac{\omega C}{G}$
(c)	$\frac{\delta Y_{in}}{Y_{in}} \approx jQ_{loaded} \frac{\delta L}{L}$	$\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Z_{in}) \approx Q_{loaded} \cdot \text{len}_{\mathbb{H}}(\delta L)$	$\frac{1}{\omega L G}$
(d)	$\frac{\delta Z_{in}}{Z_{in}} \approx jQ_{loaded} \frac{\delta C}{C}$	$\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Z_{in}) \approx Q_{loaded} \cdot \text{len}_{\mathbb{H}}(\delta C)$	$\frac{1}{\omega C R}$

すなわち

$$\frac{\delta Y_{in}}{\text{Re } Y_{in}} \approx j \frac{1}{G} \frac{\omega L}{L} \frac{\delta L}{L}, \quad (5.21)$$

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Y) = \frac{1}{G} \frac{\omega L}{L} \text{len}_{\mathbb{H}}(\delta L) \quad (5.22)$$

である。この時も係数も、やはり

$$Q_{loaded} = \frac{|\text{Im } Z_{in}|}{\text{Re } Z_{in}} = \frac{|\text{Im } Y_{in}|}{\text{Re } Y_{in}} \quad (5.23)$$

であり、負荷 Q 値になる。

上記で導出した式をまとめたのが表 5.1 である。表をみるとわかるよう、図 5.1 の四つの回路すべてについて、入力インピーダンス Z_{in} の変動と素子値 $x (= C$ か $L)$ の変動との間に同じ関係式

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Z_{in}) = Q_{loaded} \cdot \text{len}_{\mathbb{H}}(\delta x) \quad (5.24)$$

が成り立っている。

表 5.1 の「変動の大きさの関係」にまとめた式は、図 5.1 に対して導いたものである。しかし、双曲幾何学的な長さの等長性を用いると、図 5.1 の回路の後に任意の

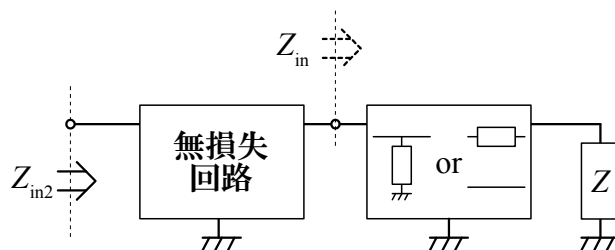


図 5.2: 図 5.1 の回路に無損失 2 ポート網を接続した回路

無損失な受動 2 ポート網を接続した図 5.2 のような回路に対しても、式をそのまま適応できることが示せる。そのことを示すには、2 ポート網によるインピーダンス変換

$$\phi: Z_{in} \mapsto \phi(Z_{in}) \tag{5.25}$$

が等長写像になることを用いる。2 ポート網は無損失であるから、このとき ϕ について

$$\text{Re } Z_{in} = 0 \Rightarrow \text{Re } \phi(Z_{in}) = 0 \tag{5.26}$$

が成り立つ。要するに Z_{in} が無損失ならば $\phi(Z_{in})$ も無損失ということである。よって ϕ を複素平面から自身への写像と見た時、

- 右半平面を右半平面に移す写像
- 右半平面を左半平面に移す写像

のいずれかになる。しかし、「右半平面を左半平面に移す写像」写像には成り得ない。なぜなら、このとき ϕ は受動 2 ポート網によるインピーダンス変換にも関わらず、普通の抵抗 $R > 0$ を負性抵抗 $-R < 0$ に変換できてしまうからである。よって ϕ は右半平面から自身への写像になり、定理よりこれは等長写像になる。 ϕ は双曲幾何学的な長さを変えないので、

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Z_{in2}) \simeq \text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Z_{in}), \tag{5.27}$$

つまり

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Z_{\text{in}2}) = Q_{\text{loaded}} \cdot \text{len}_{\mathbb{H}}(\delta x) \quad (5.28)$$

となる。

5.3 周波数の変動による影響

同じく図 5.1 の各回路について、周波数の変動による入力インピーダンスの変動を評価しよう。驚くべきことに、周波数の変動についても 5.2 節と全く同じ形をした式が成り立つ。

まず (a) の回路について。今度は式 (5.9) を ω で微分する:

$$dZ_{\text{in}} = jLd\omega. \quad (5.29)$$

この時点では、何の変哲も無い式である。しかし、これを双曲幾何学的に表現すると

$$\frac{\delta Z_{\text{in}}}{\text{Re } Z_{\text{in}}} \simeq \frac{j\omega L}{R} \frac{\delta f}{f}, \quad (5.30)$$

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Z_{\text{in}}) \simeq Q_{\text{loaded}} \cdot \text{len}_{\mathbb{H}}(\delta f) \quad (5.31)$$

となり、式 (5.24) と全く同じ形が現れる。これは (a) の回路に限った話ではなく、他の (b) から (d) の回路についても、周波数の変動に対する入力インピーダンスの変動が式 (5.24) で表される。例えば (c) について計算してみる。式 (5.19) を ω で微分し

$$dY_{\text{in}} = -\frac{1}{j\omega^2 L} d\omega, \quad (5.32)$$

となる。これを双曲幾何学的な長さで表せば

$$\frac{\delta Y_{\text{in}}}{Y_{\text{in}}} \simeq j \frac{\omega L}{G} \frac{\delta f}{f}, \quad (5.33)$$

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Y_{\text{in}}) \simeq Q_{\text{loaded}} \cdot \text{len}_{\mathbb{H}}(\delta f) \quad (5.34)$$

となり、やはり式 (5.24) に一致する。

5.4 変動の幾何学的表現

変動の大きさを双曲幾何学的に表現しようとした結果，変動同士を結びつける係数として負荷 Q 値が現れた。改めて，負荷 Q 値の式の形を眺めてみよう：

$$\frac{\omega L}{R}, \frac{\omega C}{G}, \frac{1}{G}, \frac{1}{R}. \quad (5.35)$$

これを，各回路の Z_{in}, Y_{in} の式

$$\begin{aligned} \text{(a): } Z_{in} &= R + jX + j\omega L, & \text{(b): } Y_{in} &= G + jB + j\omega C, \\ \text{(c): } Y_{in} &= G + jB - j\frac{1}{\omega L}, & \text{(d): } Z_{in} &= R + jX - j\frac{1}{\omega C}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

と見比べると，負荷 Q 値の外微分と， Z_{in}, Y_{in} の外微分の間には

$$dQ = \begin{cases} \frac{dZ_{in}}{\operatorname{Re} Z_{in}} & \text{(a),} \\ \frac{dY_{in}}{\operatorname{Re} Y_{in}} & \text{(b),} \\ -\frac{dY_{in}}{\operatorname{Re} Y_{in}} & \text{(c),} \\ -\frac{dZ_{in}}{\operatorname{Re} Z_{in}} & \text{(d)} \end{cases} \quad (5.37)$$

という関係が成り立っていることがわかる。特に，大きさだけに注目すれば，これらはすべて同じ式

$$|dQ| = \operatorname{len}_{\mathbb{H}}(dZ_{in}) \quad (5.38)$$

で表すことができる。つまり，負荷 Q 値とは，ある範囲に渡って $\operatorname{len}_{\mathbb{H}}(dZ_{in})$ を積分した時の値，すなわちパスの双曲幾何学的な長さであると言っているのである。「ある範囲」というのは，インピーダンス変換回路の損失を検討する時にも出てきた素子のパスである。例えば，素子の追加によるインピーダンスの動きが，図 5.3 のようであった時，この素子の素子値，あるいは周波数の微小な変動 $\operatorname{len}_{\mathbb{H}}(\delta x)$ が入力イ

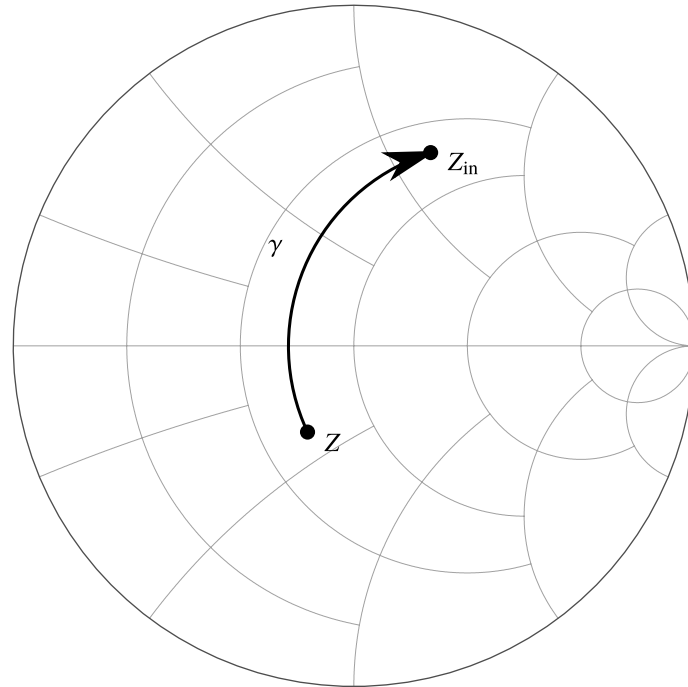


図 5.3: 素子の追加によるパスの動きの例

インピーダンスの変動 $\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Z_{\text{in}})$ として現れるときの大きさは

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(\delta Z_{\text{in}}) \simeq Q_{\text{loaded}} \cdot \text{len}_{\mathbb{H}}(\delta x) = \text{len}_{\mathbb{D}}(\gamma) \cdot \text{len}_{\mathbb{H}}(\delta x) \quad (5.39)$$

で評価できる。これは、「興味のある量が、パスの双曲幾何学的な長さとの積の形で表現できる」という意味で、損失の幾何学的表現と同じものである。言うなれば、上の式は「変動の幾何学的表現」といったところであろうか。

第6章

2点間を結ぶ最短のパス

これまでの結果をまとめると、素子のパスの双曲幾何学的な長さ l により、以下の様な線型回路の特性を表現できる。

- 挿入損失: 無負荷 Q 値が Q の素子を電源に接続したとき、素子を挿入する前の最大有能電力に対する、挿入した後の最大有能電力の割合 η は

$$-\log_e \eta = l \cdot \frac{1}{\sqrt{1+Q^2}} \quad (6.1)$$

となる。

- 素子値の変動に対する入力インピーダンスの感度: 素子値 X (キャパシタンスまたはインダクタンス) の微小な変動を dX とするとき、この素子を含む無損失線型回路 (あるいは損失が十分小さい線型回路) の入力インピーダンスの変動 dZ は

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(dZ) = l \cdot \text{len}_{\mathbb{H}}(dX) = l \cdot \left| \frac{dX}{X} \right| \quad (6.2)$$

で表される。

- 周波数の変動に対する入力インピーダンスの感度: 周波数 f の微小な変動 df による、無損失線型回路 (あるいは損失が十分小さい線型回路) の入力インピーダンスの変動 dZ について、パスに対応した素子による寄与は

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(dZ) = l \cdot \text{len}_{\mathbb{H}}(df) = l \cdot \frac{|df|}{f} \quad (6.3)$$

で表される。

これらは全て、回路の特性が l に比例するという形をしており、また、これらの特性は一般に値が小さいほど性能が良い¹。なので、これらの値を最小化する、つまりは回路全体のパスの長さを最小化するという問題は、実用上、重要な意味を持っている。

考えてみれば、3.2節で解いた問題というのがまさにこれであった。ただし、3.2節では以下のような条件を満たす場合に限り最適化を行ったのであった：

1. 回路構成は直列インダクタ、並列キャパシタを組み合わせた2段の逆L型整合回路
2. 素子の無負荷Q値は十分に大きい
3. インダクタとキャパシタの無負荷Q値は同じ値

この章ではより一般的な状況として、上の条件のうち1.と3.を緩和した条件

1. 回路構成はSmithチャート上のパスとして表される限り任意
2. 素子の無負荷Q値は十分に大きい
3. インダクタの無負荷Q値が Q_L 、キャパシタの無負荷Q値が Q_C

の下で、Smithチャート上の任意の2点間を結ぶ最短のパスを導出する。

導出の流れは次のとおりである。6.1節では新しい回路パラメータの表現法である rg 局所座標系を導入する。これまでは回路パラメータといえばインピーダンス、アドミタンス、反射係数のいずれかであった。これらとは異なる表現として、回路パラメータを「インピーダンスで表した時の実部」と「アドミタンスで表した時の実部」の組で表すのが rg 局所座標である。これに対応して、6.2節ではインピーダンス平面、アドミタンス平面、Smithチャートに続く第4の舞台である rg 平面を導入する。 rg 平面を導入する理由は、リアクタンス素子の接続によるパスの中間点(3.2節でいう所の θ_{12} や θ_{23})の算出がしやすいことである。これによって、他の平面上に比べてパスの最適化を非常に簡単に行うことができるようになる。パスの長さの最小化問題に関して、 rg 局所座標系と rg 平面の導入は解法の要である。6.3節では rg 平面上の幾何学を駆使し、最短のパスを導出する。

¹いくつかの例外がある。例えばフィルタは、カットオフ周波数付近では、周波数の変動に対して入力インピーダンスが大きく変化した方が特性が急峻にできるので良い。

6.1 rg 局所座標系

回路に関する問題を解く上で最も重要なことの 하나가、回路パラメータの表現方法である。例えばこの論文の主題であるインピーダンス変換を考える。この場合、取り扱う対象が「インピーダンス」変換なのだから、回路パラメータとしてインピーダンスを採用するのが最も素直であろう。しかし、これまで見てきた問題でもそうであったように、状況によってはインピーダンス以外の量でパラメータを表現した方が良い場合もある。アドミタンスや反射係数がまさにそれである。これらの表現のうち、反射係数についていえば、さらに基準インピーダンスをどう選ぶべきかという問題がある。一般には基準インピーダンスとして $50\ \Omega$ や $75\ \Omega$ を選ぶことが多いだろうが、これは決して、これ以外の基準インピーダンスを用いてはいけないということではない。

上で挙げたインピーダンス、アドミタンス、反射係数は複素数なので、これらをどのような実数の組で表すのかという選択もできる。要するに、「実部と虚部」の組で表すのか、「大きさと偏角」で表すのかという選択である²。3.2節では「損失は偏角で決まる」という理由から、「大きさと偏角」の方を採用したが、解くべき問題の種類によっては素直に「実部と虚部」を選んだ方が簡単に答えにたどり着けるかもしれない。

このように「どのような表現を選ぼうか」と悩むことができるのは、ある意味、回路技術者の特権かもしれない。回路パラメータという一つの実体に対して、これほど多彩な表現（基準インピーダンスの選び方を加味すれば、文字どおり数え切れないほどの!）を選べる分野が他にあるだろうか。ところで、この贅沢な悩みは、多様体の言葉を借りれば「どの局所座標系を用いるか」という問題になる。

1ポート回路パラメータの全体を M で表す。まずは M が多様体になることを示そう³。 M の元 p を、対応するインピーダンスに移す写像を ϕ_Z とする。 p がオープンサーキット（これを p_0 とする）でない限り、 p に対応するインピーダンス $\phi_Z(p)$ が存在するので、 ϕ_Z は M の部分集合 $U_Z = M \setminus \{p_0\}$ の上で定義された写像である。加えて、すべてのインピーダンス Z に対し、対応する回路パラメータ p が存在するので ϕ_Z は全射であり、異なるインピーダンスは異なる回路パラメータに対応するはずなので ϕ_Z は単射である。これで ϕ_Z は U_Z から \mathbb{C} への全単射になった。これの逆

²無論、これを選ばないといけないのは、相手にする量がインピーダンス（またはアドミタンスや反射係数）の正則な関数として表せない場合だけである。正則ならば、わざわざ実2変数関数として扱う理由がない。

³ここでは示さないが、 M は二次元球面 S^2 と同相な位相空間になることが知られる [44]。ただし、普通は球面とは呼ばず、複素構造を加味して Riemann 球面や拡張複素平面と呼ぶ。

像 ϕ_Z^{-1} を用いて, \mathbb{C} の普通の位相から誘導される位相 \mathcal{O}_Z を U_Z に入れば, ϕ_Z は (U_Z, \mathcal{O}_Z) から \mathbb{C} への同相写像になる。同じようにして, p を対応するアドミタンスに移す写像を ϕ_Y , ショートサーキット p_s を除いた M の部分集合を $U_Y = M \setminus \{p_s\}$ とおけば, 同様の手順によって ϕ_Y を (U_Y, \mathcal{O}_Y) から \mathbb{C} への同相写像にできる。ここで \mathcal{O}_Y は ϕ_Y^{-1} により \mathbb{C} の普通の位相から誘導された U_Y の位相である。 \mathcal{O}_Z と \mathcal{O}_Y を用いて, M の部分集合族 \mathcal{O} を

$$\mathcal{O} = \{V_Z \cup V_Y \mid V_Z \in \mathcal{O}_Z, V_Y \in \mathcal{O}_Y\} \quad (6.4)$$

と定義する。これは明らかに M の位相になる。加えて, 次の条件も満たす。

- $U \in \mathcal{O}$ が $U \notin p_0$ を満たすならば $\phi_Z(U)$ は開集合である。
- $U \in \mathcal{O}$ が $U \notin p_s$ を満たすならば $\phi_Y(U)$ は開集合である。

一つ目の条件は次のようにして証明できる。 $U \notin p_0$ であるということは U の材料となった \mathcal{O}_Y と \mathcal{O}_Z の元 V_Y と V_Z について $V_Y \notin p_0$ が成り立つということである。このとき ϕ_Y と, $0S$ でないアドミタンス Y から 0Ω でないインピーダンスへの同相写像

$$\phi_{YZ} : Y \mapsto \frac{1}{Y} \quad (6.5)$$

を経由して, V_Y をインピーダンス平面上の開集合 $(\phi_{YZ} \circ \phi_Y)(V_Y)$ に写すことができる。よって V_Y は M の開集合として, 誘導位相 \mathcal{O}_Z に最初から含まれていたことになるから, $V_Y \cup V_Z = U \in \mathcal{O}_Z$ となり, 定義より $\phi_Z(U)$ は開集合になる。二つ目の条件についても同様の手順で示すことができる。これで ϕ_Z, ϕ_Y はそれぞれ $(U_Z, \mathcal{O}), (U_Y, \mathcal{O})$ から \mathbb{C} への同相写像になり, $U_Z \cap U_Y = M$ なので, M は $\{(\phi_Z, U_Z), (\phi_Y, U_Y)\}$ をアトラスとする (可微分) 多様体になる。

証明の中で明らかになったように, インピーダンスとは M を局所座標系 ϕ_Z によって複素平面に写した時の局所座標のことである。そして, M を ϕ_Y で写したときの局所座標がアドミタンスである。今の所, M にはインピーダンスとアドミタンスの二つの局所座標系しか入っていないが, これに他の局所座標系 (例えば 50Ω 系の反射係数など) を追加するのは簡単であろう。例えば M 上の点 p に対して

$$\phi_{\Gamma, Z_{\text{ref}}} : p \mapsto \begin{cases} \frac{\phi_Z(p) - Z_{\text{ref}}^*}{\phi_Z(p) + Z_{\text{ref}}}, & (p \neq p_s), \\ 1, & (p = p_s) \end{cases} \quad (6.6)$$

と定義すれば, $\phi_{\Gamma, Z_{\text{ref}}}$ は $M \setminus \{\phi_Z^{-1}(-Z_{\text{ref}})\}$ から \mathbb{C} への同相写像になる。この写像でできる局所座標系を Z_{ref} 系の反射係数と呼ばばよい。

回路パラメータの全体 M が多様体であり, インピーダンス, アドミタンス, 反射係数が単なる局所座標系だとわかってしまうと, もはや回路パラメータの表現を上記の三つに限って考える必要がなくなる。我々は, 以下の二つの条件を満たす限りにおいて自由に局所座標系 (ϕ, U) を追加できるからである:

- ϕ は M の開集合 U から \mathbb{C} (または \mathbb{R}^2) の開集合への同相写像である。これは M (アトラスに (ϕ, U) を加えた新しい M という意味) が多様体となるための条件である。
- (ϕ, U) から他の局所座標系への座標変換は可微分同型写像である。これは M が可微分多様体になるための条件である。

M が可微分であることを要請するのは, この後に Poincaré 計量を入れて, 曲線の長さを議論したいからである。これまでも, 状況によってインピーダンス, アドミタンス, 反射係数を使い分けてきたが, これからはさらに, 状況によって都合の良い局所座標系を定義して使うということが可能になった。

では早速, その「都合の良い局所座標系」を定義しよう。 M の元 p を, ϕ_Z, ϕ_Y によりこれらの実部の組 $(\text{Re } \phi_Z(p), \text{Re } \phi_Y(p))$ に移す写像

$$\phi_{rg} : p \mapsto (\text{Re } \phi_Z(p), \text{Re } \phi_Y(p)) \quad (6.7)$$

を定義する。これを, 抵抗とコンダクタンスを表す標準的な記号 r と g を用いて rg 局所座標系と呼ぶことにする。 ϕ_{rg} は明らかに, すでにある他の局所座標系との間に可微分同型な座標変換を定める。 ϕ_{rg} による表現は, 4章の最初で, Smith チャート上の点を指定するのに等抵抗円と等コンダクタンス円の交点を用いたのと同じ理屈である。しかし, そう考えると一つ不味いことがある。4章でも述べたように, 等抵抗円と等コンダクタンス円の交点は, 二つの円がちょうど接する場合 (点が Smith チャートの実軸上にある場合) を除いて, 常に実軸対称な位置に二つ存在する。このため ϕ_{rg} が単写ではなくなってしまう。これを回避するには ϕ_{rg} の座標近傍として, 次のような二つの開集合を取れば良い:

$$U_{rg}^+ = \{p \in M \mid \phi_{\Gamma, 1\Omega}(p) \in \mathbb{D}, \text{Im } \phi_{\Gamma, 1\Omega}(p) > 0\}, \quad (6.8)$$

$$U_{rg}^- = \{p \in M \mid \phi_{\Gamma, 1\Omega}(p) \in \mathbb{D}, \text{Im } \phi_{\Gamma, 1\Omega}(p) < 0\}. \quad (6.9)$$

要するに, U_{rg}^+ が Smith チャート上の実軸を含まない上半分, U_{rg}^- が実軸を含まない下半分である。以下では, ϕ_{rg} がどちらの座標近傍で定義された局所座標系なのかを区別するために, ϕ_{rg} の U_{rg}^+ への制限を ϕ_{rg}^+ で, U_{rg}^- への制限を ϕ_{rg}^- で表す。これで, ϕ_{rg}^\pm はそれぞれ U_{rg}^\pm から \mathbb{R}^2 の開集合

$$V_{rg} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1 x_2 < 1\} \quad (6.10)$$

への同相写像になった。

ϕ_{rg} と他の座標系との関係を調べる。まずは座標変換である。 rg 座標系と, インピーダンス $Z = r + jx$, アドミタンス $Y = g + jb$ の間の座標変換は, それぞれ次のように表される:

$$(\phi_{rg}^\pm \circ \phi_Z^{-1})(r \pm jx) = \left(r, \frac{r}{|Z|^2} \right), \quad (6.11)$$

$$(\phi_Z \circ (\phi_{rg}^\pm)^{-1})(r, g) = r \left(1 \pm j \sqrt{\frac{1}{rg} - 1} \right), \quad (6.12)$$

$$(\phi_{rg}^\pm \circ \phi_Y^{-1})(g \mp jb) = \left(\frac{g}{|Y|^2}, g \right), \quad (6.13)$$

$$(\phi_Z \circ (\phi_{rg}^\pm)^{-1})(r, g) = g \left(1 \mp j \sqrt{\frac{1}{rg} - 1} \right). \quad (6.14)$$

次に微分である。これは計量の変換に用いたいだけなので, 他の局所座標系のいずれか一つからの変換がわかれば十分である。例えば, 計算しやすそうな Z を用いてみると,

$$dr = dr, \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial g} dg \\ &= \left(\sqrt{\frac{1-rg}{rg}} - \frac{1}{2rg} \sqrt{\frac{rg}{1-rg}} \right) dr - \frac{1}{2g^2} \sqrt{\frac{rg}{1-rg}} dg \end{aligned} \quad (6.16)$$

となる。よって rg 局所座標系での Poincaré 計量は

$$ds^2 = \frac{dr^2 + dx^2}{r^2} = \frac{1}{4rg(1-rg)} \left(\frac{dr}{r} \right)^2 + \frac{1}{4rg(1-rg)} \left(\frac{dg}{g} \right)^2 + \frac{2rg-1}{2rg(1-rg)} \frac{dr}{r} \frac{dg}{g}, \quad (6.17)$$

または

$$ds^2 = \frac{1}{4r^3g^3(1-rg)} (dr \ dg) \begin{pmatrix} g^2 & rg(2rg-1) \\ rg(2rg-1) & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ dg \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

となる。以降では、 rg 局所座標での計量を

$$h_{11} = \frac{1}{4r^3g^3(1-rg)}, \quad h_{22} = \frac{1}{4rg^3(1-rg)}, \quad h_{12} = h_{21} = \frac{2rg-1}{4r^2g^2(1-rg)} \quad (6.19)$$

で表す。

ところで、上の計算には $rg(1-rg)$ という形がよく出てくる。これを簡単に表記するために、次のような式を満たす変数 θ を導入する:

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = rg. \quad (6.20)$$

こうすると

$$rg(1-rg) = \frac{1}{4} \sin^2 \theta, \quad (6.21)$$

$$2rg-1 = \cos \theta \quad (6.22)$$

となるので、上の計量を

$$h_{11} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad h_{22} = \frac{1}{g^2 \sin^2 \theta}, \quad h_{12} = h_{21} = \frac{\cos \theta}{rg \sin^2 \theta} \quad (6.23)$$

と書くことができる。さらに、分母の r^2 や g^2 , rg といった項をなくすには、 r, g の対数値

$$L_r = \log_e r, \quad L_g = \log_e g \quad (6.24)$$

による表現を用いれば良い。この時

$$dL_r = \frac{dr}{r}, \quad dL_g = \frac{dg}{g} \quad (6.25)$$

となるので、これを代入すると、計量は

$$ds^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} dL_r^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} dL_g^2 + \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} dL_r dL_g \quad (6.26)$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \theta} (dL_r \ dL_g) \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dL_r \\ dL_g \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

と、非常に簡潔になる。この時の計量を、以下では

$$H_{11} = H_{22} = \frac{1}{\sin^2 \theta}, \quad H_{12} = H_{21} = \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (6.28)$$

で表す。以下では、これらの表現を自由に使い分けて計算を進める。

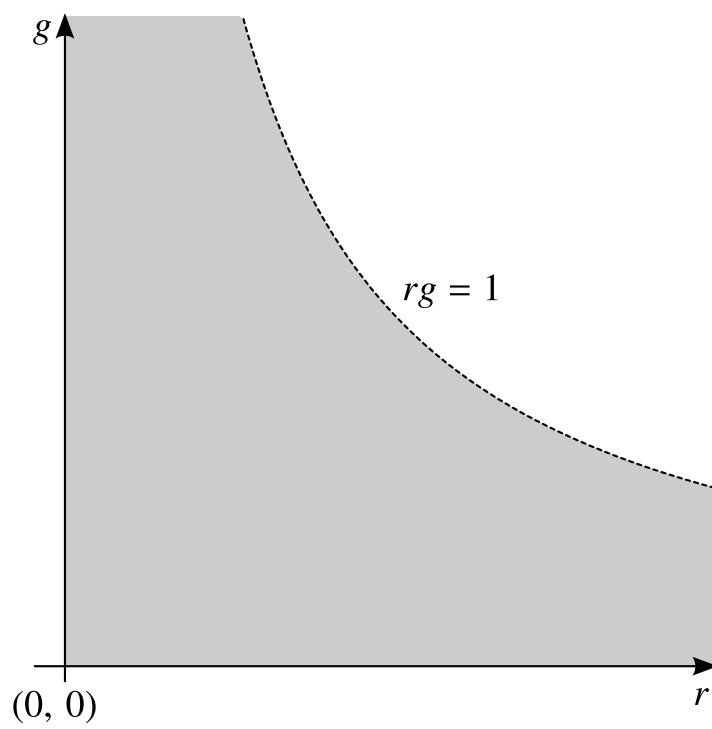
6.2 rg 平面

前節で定義した rg 局所座標を平面上に表したものを rg 平面と呼ぶ (図 6.1)。図中の灰色で示した領域 ($rg = 1$ の線と, r 軸, g 軸は領域に含まない) が ϕ_{rg}^\pm による像 V_{rg} である。特に, 図 6.2 のように r 軸と g 軸を対数で表せば, V_{rg} は半平面になる。インピーダンス平面やアドミタンス平面, Smith チャートとの間に, 曲線や領域の対応があったように, rg 平面との曲線や領域の対応も考えることができる。我々の目的はインピーダンス変換回路の設計なので, 特に Smith チャートと rg 平面との対応が重要である。以下ではその対応を見てゆく。

まず, Smith チャート上の等抵抗円は, rg 平面上の g 軸に平行な直線に対応する (図 6.3)。似たように, Smith チャート上の等コンダクタンス円は, rg 平面上の r 軸に平行な直線に対応する (図 6.4)。リアクタンス素子の接続によるインピーダンスの動きは, Smith チャート上では等抵抗円または等コンダクタンス円に沿った動きになった。これに対応して, rg 平面上では r 軸か g 軸に平行な動きになることがわかる。

次に, Smith チャート上でインピーダンス (アドミタンス) の偏角が一定の曲線は, rg 平面上では rg 積が一定の直線 (両対数でない場合は双曲線) になる (図 6.5)。

そして最後に, Smith チャートの実軸を跨ぐような動きは, rg 平面上の $rg = 1$ の線で折り返すような動きになる。例えば, 図 6.6 のように等抵抗円に沿って Smith

図6.1: rg 平面

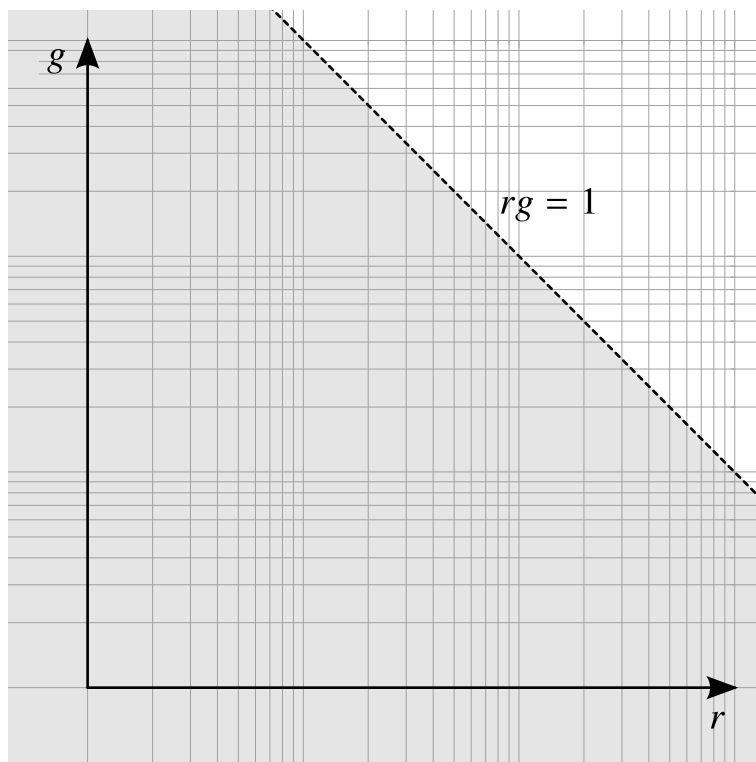


図 6.2: rg 平面 (両対数)

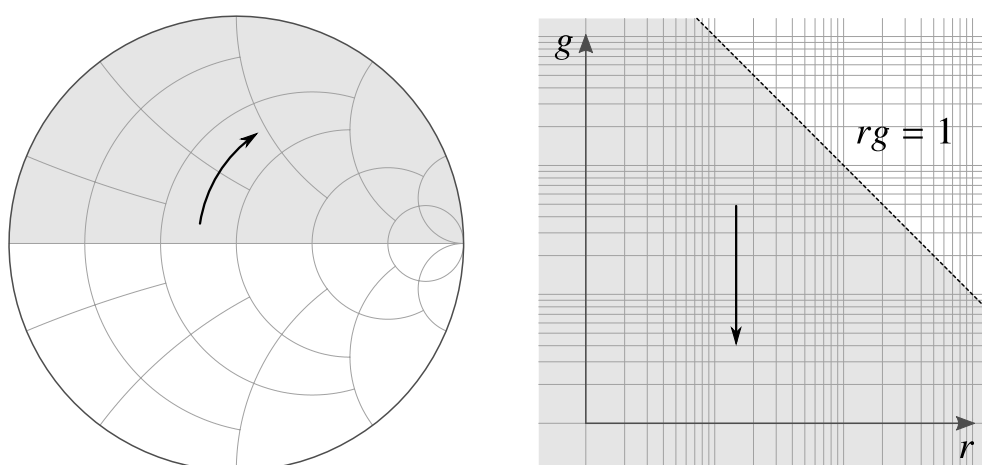


図 6.3: 等抵抗円と直線の対応

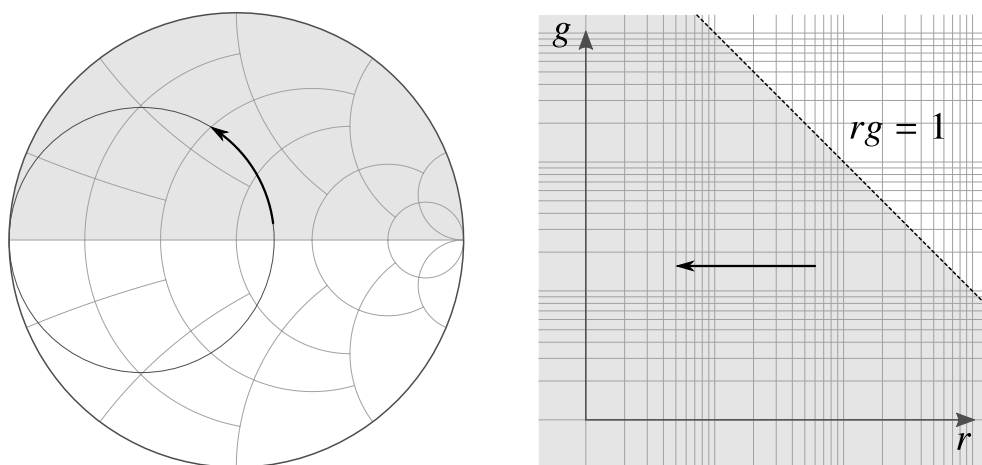


図6.4: 等コンダクタンス円と直線の対応

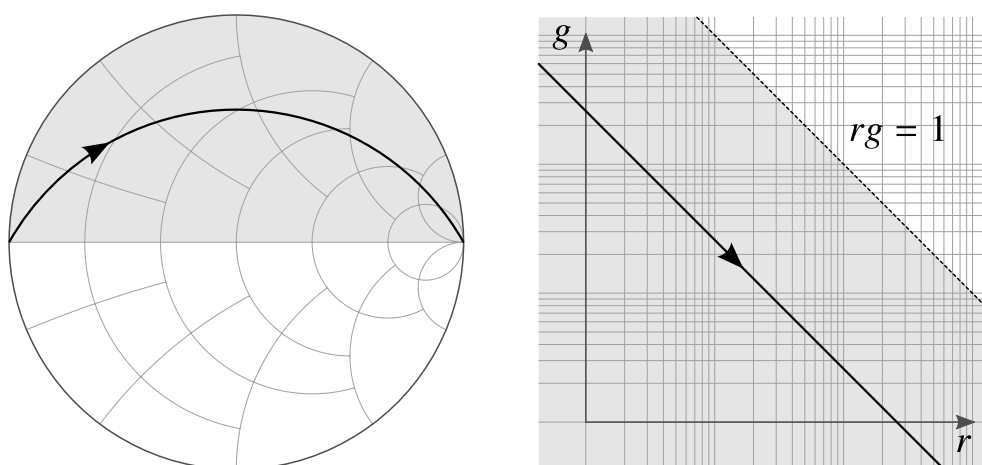


図6.5: 等偏角の曲線と直線の対応

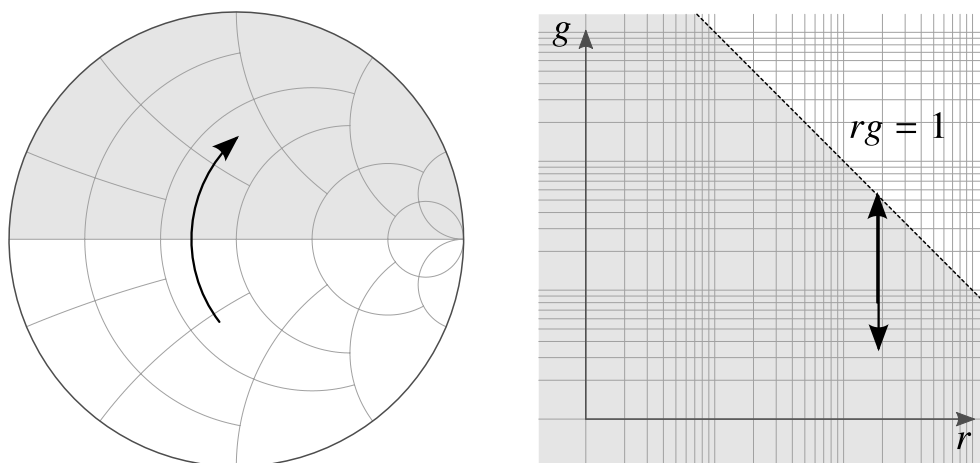


図 6.6: Smith チャートの実軸を跨ぐ等抵抗円との対応

チャートの実軸を跨ぐ場合は、 rg 平面上では $rg = 1$ の線で折り返して、逆の向きに戻ってくるような動きになる。また、図 6.7 のように Smith チャート上の実軸を境に等抵抗円から等コンダクタンス円に乗り換える場合は、 $rg = 1$ の線で向きを変えるような動きになる。

6.3 最短のパスの導出

パスの最適化の方法として、 rg 平面上の局所的な性質から、大域的な性質を導くという方法を取ろう。 rg 平面上のある点 (L_r, L_g) にて、図 6.8 のような微小な移動 dL_r と dL_g を考える。この時、図にも示した通り、 (L_r, L_g) から $(L_r + dL_r, L_g + dL_g)$ へ移るための移動の順序は

- A: $(L_r, L_g + dL_g)$ を経由する (つまり直列素子による移動を先に行う)。
- B: $(L_r + dL_r, L_g)$ を経由する (並列素子による移動を先に行う)。

の 2 種類がある。以降、これら 2 種類のパスを「パス A」、「パス B」と区別しよう。無論、これ以外にも「どこか他の点を寄り道してから $(L_r + dL_r, L_g + dL_g)$ に向かう」という選択もあるが、損失が曲線の長さで決まるとわかってる以上、良い結果にならないことは自明であろう。

パス A と B のどちらが損失が小さいかを判断するためには、これらのパスに沿った損失の差分を取れば良い。パス A の損失からパス B の損失を引いた量を δl とす

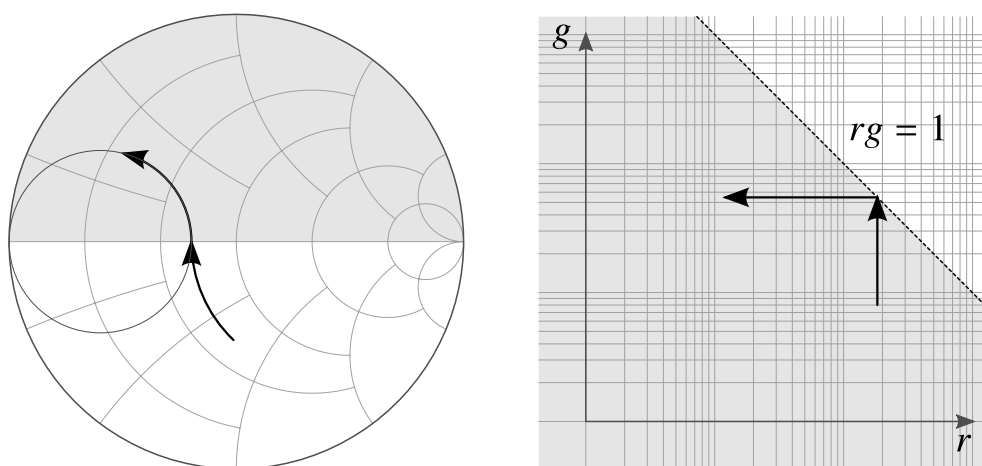


図 6.7: 実軸を境に等抵抗円から等コンダクタンス円に乗り換えるような動きとの対応

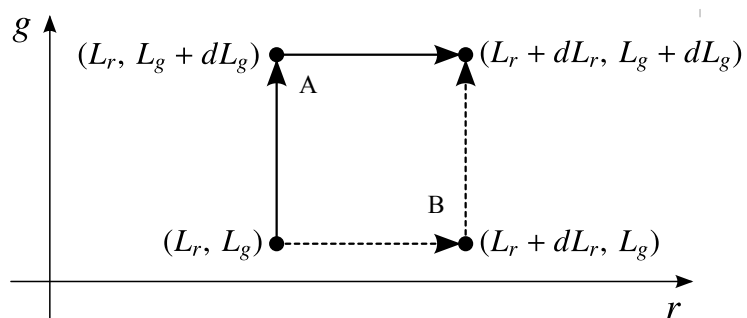


図 6.8: (L_r, L_g) から $(L_r + dL_r, L_g + dL_g)$ へのパス

る。 δl が正であればパスBの方が損失が小さく、逆に δl が負であればパスAの方が低損失である。素子の無負荷Q値を決めるために、まずは (L_r, L_g) が U_{rg}^+ から写された点であると仮定しよう。この時、 dL_r に対応する素子はキャパシタ、 dL_g に対応する素子もキャパシタである。よって、パスAの損失は

$$\frac{1}{Q_C} \left(\sqrt{g_{22}(L_r, L_g)} dL_g + \sqrt{g_{11}(L_r, L_g + dL_g)} dL_r \right) \quad (6.29)$$

となり、パスBの損失は

$$\frac{1}{Q_C} \left(\sqrt{g_{11}(L_r, L_g)} dL_r + \sqrt{g_{11}(L_r + dL_r, L_g)} dL_g \right) \quad (6.30)$$

となる。これの差分を取ると

$$\begin{aligned} \delta l &= \frac{1}{Q_C} \left(\sqrt{H_{22}(L_r, L_g)} dL_g + \sqrt{H_{11}(L_r, L_g + dL_g)} dL_r \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{H_{11}(L_r, L_g)} dL_r - \sqrt{H_{11}(L_r + dL_r, L_g)} dL_g \right) \\ &= \frac{1}{Q_C} \left(\frac{1}{2\sqrt{H_{11}}} \frac{\partial H_{11}}{\partial L_g} - \frac{1}{2\sqrt{H_{22}}} \frac{\partial H_{22}}{\partial L_r} \right) dL_r dL_g \\ &= \frac{1}{2Q_C \sqrt{H_{11}}} \left(\frac{\partial H_{11}}{\partial L_g} - \frac{\partial H_{22}}{\partial L_r} \right) dL_r dL_g \end{aligned} \quad (6.31)$$

となる。符号の決め手となるのは括弧内の

$$\frac{\partial H_{11}}{\partial L_g} - \frac{\partial H_{22}}{\partial L_r} \quad (6.32)$$

であるが、これは明らかに0である。よって、この場合は「パスの取り方は任意」という結果になる。 (L_r, L_g) が U_{rg}^- から写された点であると仮定しても、 Q_C が Q_L に置き換わるだけで、結果自体は変わらない。よって、パスA,Bについては、無負荷Q値やSmithチャート上の位置によらず、常に「どちらを選んでも良い」という結果になる。

では図6.9の状況ではどうであろうか。上と同じように、二つのパスを「パスC」と「パスD」で区別し、パスCの損失からパスDの損失を引いたものを δl とおく。 (L_r, L_g) が U_{rg}^+ から写された点であると仮定する。このとき、 dL_r による動きはキャ

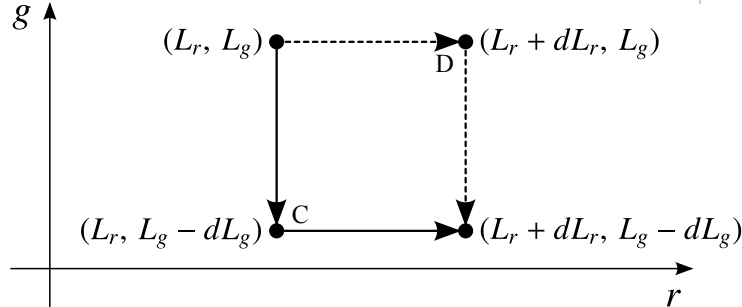


図 6.9: (L_r, L_g) から $(L_r + dL_r, L_g - dL_g)$ へのパス

パス C の損失はインダクタによる動きは $-dL_g$ による動きはインダクタで実現される。よって、パス C の損失は

$$\frac{1}{Q_L} \sqrt{g_{22}(L_r, L_g)} dL_g + \frac{1}{Q_C} \sqrt{g_{11}(L_r, L_g - dL_g)} dL_r, \quad (6.33)$$

パス D の損失は

$$\frac{1}{Q_C} \sqrt{g_{11}(L_r, L_g)} dL_r + \frac{1}{Q_L} \sqrt{g_{22}(L_r + dL_r, L_g)} dL_g \quad (6.34)$$

となる。これらの差分を取り、先ほどと同じように式を整理してゆくと、今度は

$$\delta l = -\frac{1}{2\sqrt{H_{11}}} \left(\frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C} \right) \frac{\partial H_{11}}{\partial L_r} dL_r dL_g \quad (6.35)$$

になる。つまり、 $\partial H_{11}/\partial L_r$ の符号で全てが決まる。

$$\frac{\partial H_{11}}{\partial L_r} = \frac{\partial H_{11}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial L_r} = -\frac{4g(1-2rg)}{\{4rg(1-rg)\}^2} e^{L_r} \quad (6.36)$$

なので、符号を決めるのは、結局

$$1 - 2rg \quad (6.37)$$

になる。式 (6.37) の符号を元に、「パス C の方が損失が小さい領域」と「パス D の方が損失が小さい領域」を rg 平面上に図示したのが図 6.10 である。図を見てわかるように、 rg 平面上でみると、それぞれの領域はとても素直な形をしている。また、Smith チャートと rg 平面との対応で見たように、 rg の積が一定の線は、インピーダンスの偏角が一定の線に対応する。 $rg = 1/2$ に対応する偏角は $\arg Z = 45^\circ$ となり、3.2

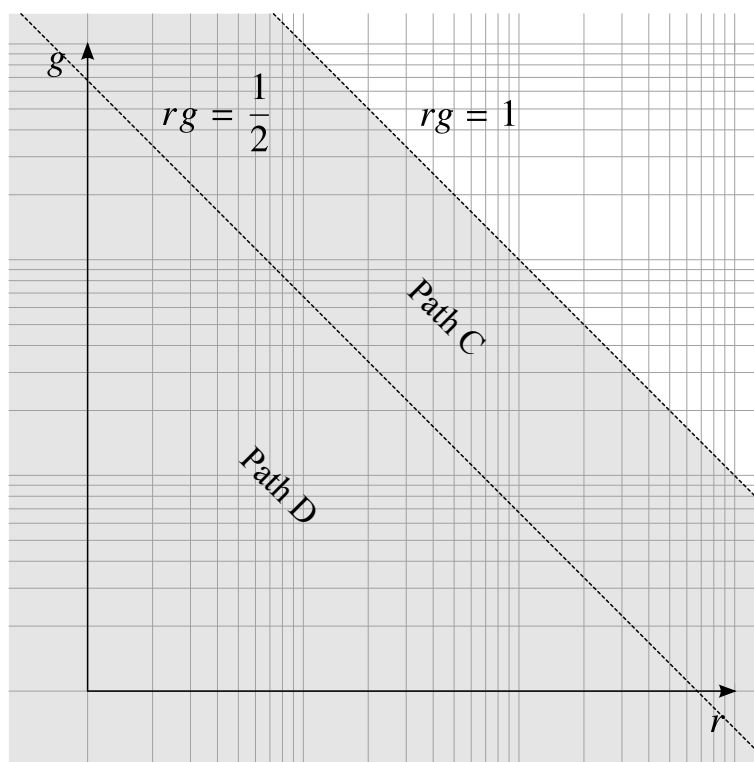


図 6.10: パス C, D の損失が小さい領域

節の結果とも合致する。

上で導いた事実を用いて、 rg 平面上の任意の2点間を結ぶ最短のパスを導出しよう。例えば2点が図 6.11 のような配置の場合、これらを結ぶ最短のパスは図 6.12 のようになる。このパスの導出方法は次のとおりである。まず最初に、2点間を図 6.13 のような仮のパスで結んだとする。すると、このパスは $\{(r, g) | rg < 1/2\}$ の領域内に、左下に尖った、パス C のような形の折れ曲りを持っている。この折れ曲りは、パスを変更してパス D のような状態にすることで、損失を小さくできる。そのようなパスの変更を行った結果が図 6.14 である。しかし、このパスの変更によって再び $\{(r, g) | rg < 1/2\}$ にパス C のような折れ曲りができてしまったので、再度パスを変更し、図 6.15 のようにする必要がある。上記の手順を延々と繰り返していけば、パスは徐々に図 6.12 の状態に近づいてゆく。そして、「もうこれ以上、損失が小さくならない」状態になった時には、得られたパスは図 6.12 のものと一致する。図 6.12 のパスを Smith チャート上に移すと、例えば図 6.16 のようになる。

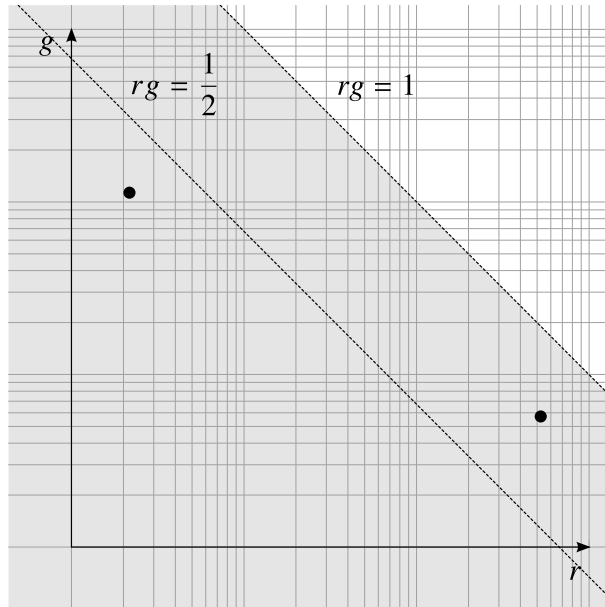


図 6.11: rg 平面上の 2 点の例

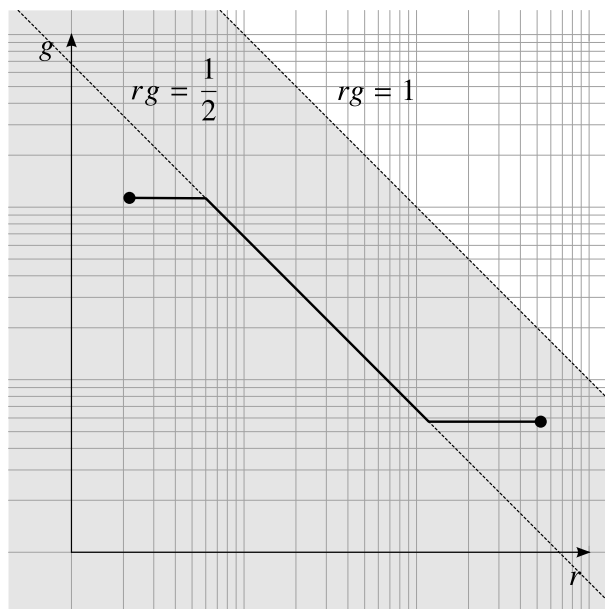


図 6.12: 2 点間の最短パス

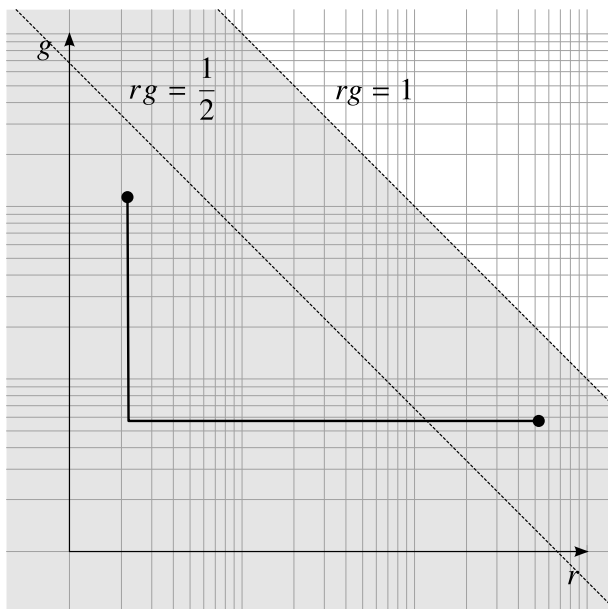


図 6.13: 2点間を結ぶ仮のパス

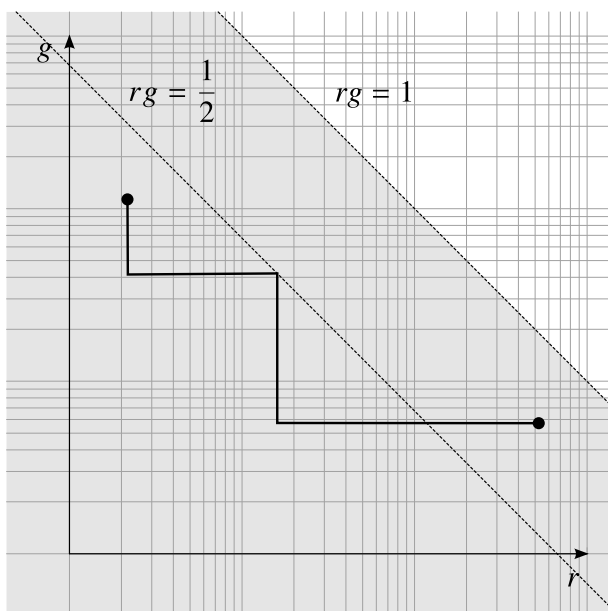


図 6.14: 仮のパスを変形した後

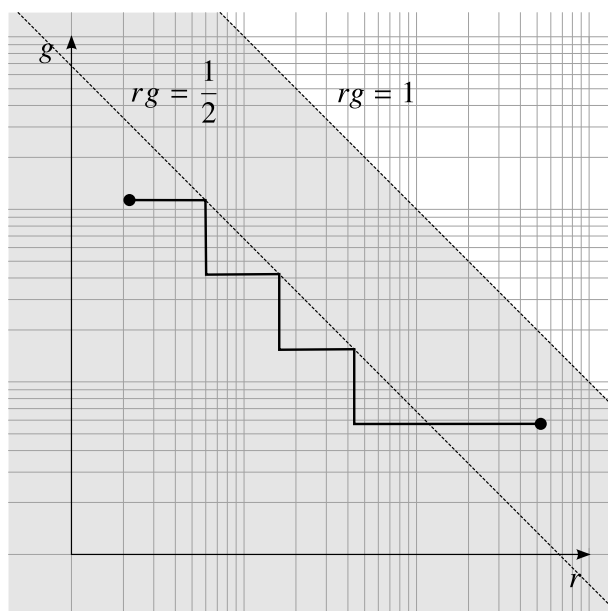


図 6.15: 仮のパスをさらに変形した後

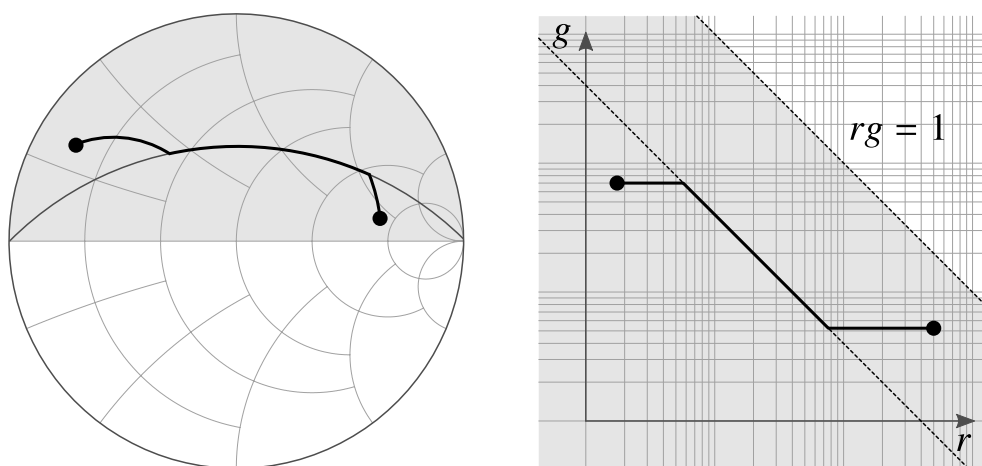


図 6.16: Smith チャート上のパスとの対応

第7章

結論

本論文では、非 Euclid 幾何学を線型回路の設計・解析に応用することの有用性を示すことを目的に、インピーダンス変換回路の特性と非 Euclid 幾何学との関わりを議論した。

何度も繰り返してきたように、本論文の主な成果は二つである。一つ目の成果が、線型回路の特性の幾何学的表現である。これは、回路的に興味のある量を非 Euclid 幾何学的な量に置き換えることができることを示したものであり、回路の設計を幾何学の問題に置き換えることで、幾何学的な直感を伴った回路設計を可能にするものである。6章の冒頭にも掲載したが、再度、本論文が明らかにした幾何学的表現の一覧を示す：

- 挿入損失: 無負荷 Q 値が Q の素子を電源に接続したとき、素子を挿入する前の最大有能電力に対する、挿入した後の最大有能電力の割合 η は

$$-\log_e \eta = l \cdot \frac{1}{\sqrt{1+Q^2}} \quad (7.1)$$

となる。

- 素子値の変動に対する入力インピーダンスの感度: 素子値 X (キャパシタンスまたはインダクタンス) の微小な変動を dX とするとき、この素子を含む無損失線型回路 (あるいは損失が十分小さい線型回路) の入力インピーダンスの変動 dZ は

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(dZ) = l \cdot \text{len}_{\mathbb{H}}(dX) = l \cdot \left| \frac{dX}{X} \right| \quad (7.2)$$

で表される。

- 周波数の変動に対する入力インピーダンスの感度: 周波数 f の微小な変動 df による, 無損失線型回路 (あるいは損失が十分小さい線型回路) の入力インピーダンスの変動 dZ について, パスに対応した素子による寄与は

$$\text{len}_{\mathbb{H}}(dZ) = l \cdot \text{len}_{\mathbb{H}}(df) = l \cdot \frac{|df|}{f} \quad (7.3)$$

で表される。

二つ目の成果が, 回路のパスの最適化問題に解を与えたことである。前述の幾何学的表現により, 低損失な回路設計, 変動耐性の高い回路設計という二つの目標が, 回路に対応したパスの長さを最小化する問題に置き換わった。任意の二つのインピーダンスを結ぶインピーダンス変換回路について, これを表すパスの長さが最小になるような設計法を非 Euclid 幾何学により導出した。また, パスの最適設計を容易に行うことのできる新しいチャートである, rg 平面という便利な道具を提案した。

謝辞

本研究を進めるにあたり、厳しくも優しい指導を賜りました指導教員の大平孝教授に深く感謝いたします。本研究を始めるきっかけとなった電化道路電気自動車の研究はもちろんのこと、小生が回路理論に関心を持ったのは同教授の数々の研究成果がきっかけでした。大平孝教授なしでは、本研究は成立しなかったでしょう。また、坂井尚貴助教には、日頃からあらゆる方面からのサポートをいただきました。坂井尚貴助教の協力なしに本論文の完成はあり得ませんでした。感謝いたします。加えて、本研究の内容に関して大変有益なご助言をくださった上原秀幸教授、市川周一教授、穂積直裕教授、田村昌也准教授、竹内啓悟准教授、宮路祐一助教、藤枝直輝助教に感謝の意を表します。最後に、本論文の校正を手伝ってくれた大平研究室の皆様に感謝いたします。

文献

- [1] H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, David Van Nostrand, Boston, 1945.
- [2] H. W. Bode, “回路網と饋還の理論,” 喜安善市 (訳), 岩波書店, 東京, 1955.
- [3] J. W. Helton, “The distance of a function to H^∞ in the Poincaré metric: electrical power transfer,” *Journal of Functional Analysis*, vol. 38, no. 2, pp. 273–314, Sept. 1980. DOI:10.1016/0022-1236(80)90066-X
- [4] J. W. Helton, “Broadbanding: gain equalization directly from data,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 28, no. 12, pp. 1125–1137, Dec. 1981. DOI: 10.1109/TCS.1981.1084944
- [5] J. W. Helton, “Non-Euclidean functional analysis and electronics,” *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, vol. 7, no. 1, pp. 1–64, July, 1982.
- [6] M. S. Gupta, “Escher’s art, Smith chart, and hyperbolic geometry,” *IEEE Microwave Magazines*, vol. 7, no. 5, pp. 66–76, Oct. 2006. DOI: 10.1109/MW-M.2006.247916
- [7] A. A. Muller, P. Soto, D. Dascalu, D. Neculoiu and V. E. Boria, “A 3-D Smith chart based on the Riemann sphere for active and passive microwave circuits,” *IEEE Microwave Wireless Components Letters*, vol. 21, no. 6, pp. 286–288, June 2011. DOI: 10.1109/LMWC.2011.2132697
- [8] A. A. Muller, E. Sanabria-Codesal, A. Moldoveanu, V. Asavei and J. F. Favennec, “On the sum of the reflection and transmission coefficient on the Smith chart and 3D Smith chart,” *2015 Asia-Pacific Microwave Conference*, Nanjing, China, pp. 1–3, Dec. 2015. DOI: 10.1109/APMC.2015.7411635

- [9] A. A. Muller, A. Moldoveanu, V. Asavei, E. Sanabria-Codesal and J. F. Favennec, “Lossy coupling matrix filter synthesis based on hyperbolic reflections,” 2016 IEEE MTT-S International Microwave Symposium, San Francisco, USA, pp. 1–4, May 2016. DOI: 10.1109/MWSYM.2016.7540243
- [10] A. Arsenovic, “Applications of conformal geometric algebra to transmission line theory,” IEEE Access, vol. 5, pp. 19920–19941, July 2017. DOI: 10.1109/ACCESS.2017.2727819
- [11] K. Kurokawa, “Power waves and the scattering matrix,” Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 13, no. 2, pp. 194–202, Mar. 1965. DOI: 10.1109/TMTT.1965.1125964
- [12] 志賀浩二, 現代数学への招待 多様体とは何か, ちくま学芸文庫, 東京, 2013.
- [13] 松本幸夫, 基礎数学5 多様体の基礎, 東京大学出版会, 東京, 1988.
- [14] 砂田利一, 現代数学への入門 曲面の幾何, 岩波書店, 東京, 2004.
- [15] 森田茂之, 岩波講座 現代数学の基礎 微分形式の幾何学 1, 2, 岩波書店, 東京, 1996
- [16] L. W. Tu, An Introduction to Manifolds, 2nd ed., SpringerScience+BusinessMedia, New York, 2010.
- [17] 遠山啓, “無限を数える, ” 無限と連続, pp. 1–48, 岩波書店, 東京, 1952.
- [18] M. Baillif and A. Gabard, “Manifolds: Hausdorffness versus homogeneity,” Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 136, no. 3, pp. 1105–1111, Mar. 2008.
- [19] 深谷賢治, 現代数学への入門 双曲幾何, 岩波書店, 東京, 2004.
- [20] J. W. Anderson, Hyperbolic Geometry, 2nd ed., Springer-Verlag, London, 2005.
- [21] H. Mextorf and R. Knöchel, “The intrinsic impedance and its application to backward and forward coupled-line couplers,” IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 62, no. 2, pp. 224–233, Feb. 2014. DOI: 10.1109/TMTT.2013.2294853

- [22] S. Sakihara, M. Tanaka, N. Sakai and T. Ohira, “Power dependent impedance measurement exploiting an oscilloscope and Möbius transformation,” *IEICE Transactions on Electronics*, vol. 100, no. 10, pp. 918–923, Oct. 2017.
- [23] I. J. Bahl, “Low loss matching (LLM) design technique for power amplifiers,” *IEEE Microwave Magazine*, vol. 5, no. 4, pp. 66–71, Dec. 2004. DOI: 10.1109/MMW.2004.1380279
- [24] M. M. Ebrahimi, M. Helaoui, and F. M. Ghannouchi, “Minimizing matching network loss in output harmonic matched power amplifiers using harmonic load-pull measurement,” *2012 IEEE Topical Conference on Power Amplifiers for Wireless and Radio Applications*, Santa Clara, USA, pp. 61–64, Jan. 2012. DOI: 10.1109/PAWR.2012.6174932
- [25] P. A. Godoy, D. J. Perreault and J. L. Dawson, “Outphasing energy recovery amplifier with resistance compression for improved efficiency,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 57, no. 12, pp. 2895–2906, Dec. 2009. DOI: 10.1109/TMTT.2009.2033976
- [26] Y. Suzuki, M. Mizutani, T. Sugiura, N. Sakai, and T. Ohira, “Prototype experiment of a 1/32-scaled model via-wheel power transfer running electric vehicle,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 134, no. 7, pp. 675–682, July 2014. DOI: 10.1541/ieejias.134.675
- [27] C. Chang and C. Yang, “Inductive 3-coil wireless power transfer improved by T-type impedance matching for implanted biomedical IC,” *2015 IEEE Wireless Power Transfer Conference*, Boulder, USA, pp. 1–4, May 2015. DOI: 10.1109/WPT.2015.7140147
- [28] C. Chang, G. G. Da Silva, A. Kumar, S. Pervaiz, and K. K. Afridi, “30 W capacitive wireless power transfer system with 5.8 pF coupling capacitance,” *2015 IEEE Wireless Power Transfer Conference*, Boulder, USA, pp. 1–4, May 2015. DOI: 10.1109/WPT.2015.7140184
- [29] Y. Han, O. Leitermann, D. A. Jackson, J. M. Rivas and D. J. Perreault, “Resistance compression networks for radio-frequency power conversion,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 22, no. 1, pp. 41–53, Jan. 2007. DOI: 10.1109/TPEL.2006.886601

- [30] K. Niotaki, A. Georgiadis, A. Collado and J. S. Vardakas, "Dual-Band resistance compression networks for improved rectifier performance," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 62, no. 12, pp. 3512–3521, Dec. 2014. DOI: 10.1109/TMTT.2014.2364830
- [31] E. Gilbert, "Impedance matching with lossy components," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 22, no. 2, pp. 96–100, Feb. 1975. DOI: 10.1109/TCS.1975.1084016
- [32] Y. Han and D. J. Perreault, "Analysis and design of high efficiency matching networks," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 21, no. 5, pp. 1484–1491, Sept. 2006. DOI: 10.1109/TPEL.2006.882083
- [33] A. M. Niknejad, "Resonance and impedance matching," in *Electromagnetics for High-Speed Analog and Digital Communication Circuits*, pp. 168–200, Cambridge University Press, New York, 2007.
- [34] S. Sinha, A. Kumar, S. Pervaiz, B. Regensburger and K. K. Afridi, "Design of efficient matching networks for capacitive wireless power transfer systems," 2016 IEEE 17th Workshop on Control and Modeling for Power Electronics, pp. 1–7, Trondheim, Norway, June 2016. DOI: 10.1109/COMPEL.2016.7556756
- [35] A. Kumar, S. Sinha, A. Sepahvand and K. Afridi, "Improved design optimization for high-efficiency matching networks," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. PP, no. 99, pp. 1–1. DOI: 10.1109/TPEL.2017.2670640
- [36] Q. Yuan and S. Suzuki, "Exact matching approach with circuit element ohmic loss," 2016 International Symposium on Antennas and Propagation, pp. 342–343, Okinawa, Japan, Oct. 2016.
- [37] D. A. Daly, S. P. Knight, M. Caulton, and R. Ekholdt, "Lumped elements in microwave integrated circuits," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 15, no. 12, pp. 713–721, Dec. 1967. DOI: 10.1109/TMTT.1967.1126571
- [38] M. Caulton, B. Hershenov, S. P. Knight, and R. E. DeBrecht, "Status of lumped elements in microwave integrated circuits - present and future," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 19, no. 7, pp. 588–599, July 1971. DOI: 10.1109/TMTT.1971.1127586

- [39] C. R. Chappidi and K. Sengupta, "Methods for finding globally maximum-efficiency impedance matching networks with lossy passives," 2015 IEEE Custom Integrated Circuits Conference, pp. 1–4, San Jose, USA, Sept. 2015. DOI: 10.1109/CICC.2015.7338434
- [40] C. R. Chappidi and K. Sengupta, "Globally optimal matching networks with lossy passives and efficiency bounds," IEEE Trans. Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. PP, no. 99, pp. 1–13. DOI: 10.1109/TCSI.2017.2720179
- [41] H. T. Friis, "Noise figures of radio receivers," Proceedings of the IRE, vol. 32, no. 7, pp. 419–422, July 1944.
- [42] V. Krischuk, A. Farafonov, G. Shilo and N. Gaponenko, "Optimization of microstrip filters tolerances," International Conference of The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics, Slavske, Ukraine, pp. 251–252, Feb. 2003. DOI: 10.1109/CADSM.2003.1255050
- [43] J. L. Rodriguez, I. Garca-Tunon, J. M. Taboada and F. Obelleiro Basteiro, "Broadband HF antenna matching network design using a real-coded genetic algorithm," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 55, no. 3, pp. 611–618, Mar. 2007. DOI: 10.1109/TAP.2007.891546
- [44] 尾崎 弘, 大学課程 電気回路 (2) 第 3 版, オーム社, 東京, 2000.

業績リスト

論文（査読あり）

- [1] K. Yamada, N. Sakai, and T. Ohira, “Internal power loss formulas of lumped-element matching circuits for high-efficiency wireless power transfer,” *IEICE Transactions Electronics*, vol. E99-C, no. 10, pp. 1182–1189, Oct. 2016. DOI: 10.1587/transele.E99.C.1182
- [2] K. Yamada and T. Ohira, “Graphical representation of the power transfer efficiency of lumped-element circuits based on hyperbolic geometry,” *IEEE Transactions on Circuits Systems II: Express Briefs*, vol. 64, no. 5, pp. 485–489, May 2017. DOI: 10.1109/TCSII.2016.2580626

国際会議（査読あり）

- [3] K. Yamada, N. Sakai, and T. Ohira, “Power loss formula for impedance matching circuits dedicated to wireless power transfer,” *2015 IEEE International Symposium on Radio-Frequency Integration Technology*, pp. 211–213, Sendai, Japan, Aug. 2015. DOI: 10.1109/RFIT.2015.7377937
- [4] K. Yamada, Y. Miyazaki, S. Abe, N. Sakai and T. Ohira “The simplest rectifier topology tolerant of load resistance variation and circuit analysis by square-wave approximation,” *2016 IEEE Region 10 Conference*, pp. 1788–1791, Singapore, Nov. 2016. DOI: 10.1109/TENCON.2016.7848327

国際会議（査読なし）

- [5] K. Yamada, T. Minami, S. Sakihara, T. Wuren, and T. Ohira, “Injection-locking-range estimation based on Q factor and experimental verification for Hartley oscillator,” *Interdisciplinary Research and Global Outlook Conference 2013*, p. 84, Tahara, Japan, Oct. 2013.

- [6] K. Yamada, S. Sakihara, and T. Ohira, “Graphical interactivity in power device and circuit S-parameter measurement exploiting Möbius transformation,” Progress in Electromagnetics Research Symposium 2014, p. 582, Guangzhou, China, Aug. 2014.
- [7] K. Yamada, S. Sakihara, N. Sakai, and T. Ohira, “Harmonics measurement for nonlinear RF components based on six-port technique,” Interdisciplinary Research and Global Outlook Conference 2015, p. 54, Tahara, Japan, Oct. 2015.
- [8] S. Sakihara, M. Tanaka, K. Yamada, N. Sakai, and T. Ohira, “Nonlinear load impedance measurement system exploiting time-domain waveform and Möbius transformation,” Interdisciplinary Research and Global Outlook Conference 2015, p. 90, Tahara, Japan, Oct. 2015.
- [9] K. Yamada, N. Sakai, and T. Ohira, “Impedance matching circuit optimization for a miniature EVER system from hyperbolic geometry,” Asian Wireless Power Transfer Workshop 2015, Tamsui, New Taipei, Dec. 2015.
- [10] M. Tanaka, K. Yamada, N. Sakai, and T. Ohira, “Sakihara-Möbius harmonometer to measure simultaneous voltage and current on nonlinear devices and circuits,” Asian Wireless Power Transfer Workshop 2015, Tamsui, New Taipei, Dec. 2015.

学会発表

- [11] 山田恭平, 崎原孫周, 南昂孝, ウリントヤ, 上原秀幸, 大平 孝, “Hartley 発振回路における Q による注入同期範囲推定および実証実験,” 2013 信学総大, エレクトロニクス分冊 1, no. C-2-9, pp. 40, Mar. 2013.
- [12] 山田恭平, 大平孝, “負荷変動に対して定変圧比となるトランスレス変圧器の提案,” 2013 信学ソ大, 通信分冊 2, no. B-9-3, p. 202, Sept. 2013.
- [13] K. Yamada and T. Ohira, “Load-invariant constant-voltage-ratio transformer without employing mutual inductance,” IEEE AP/MTT-S Midland Student Express 2014 Spring, no. S2-2, Apr. 2014.
- [14] 坂井尚貴, 山田恭平, 大平孝, “集中定数 LCR で構成される 2 ポート回路網の拡張 kQ 積,” 信学技報 MW2014-43, vol. 114, no. 111, pp. 7-12, June 2014.

- [15] 山田恭平, 一瀬健人, 大平孝, “帰還部の位相特性を考慮することによる大平の注入同期 Q を用いたロックレンジ推定の精度向上に関する考察,” 信学技報 MW2014-44, vol. 114, no. 111, pp. 13-16, June 2014.
- [16] 山田恭平, 大平孝, “磁気トランスを用いない線形インピーダンス変換器の提案とその最小構成の導出,” 信学技報 EE2014-7, vol. 114, no. 130, pp. 11-16, July 2014.
- [17] 山田恭平, 坂井尚貴, 大平孝, “一段及び二段 LC 整合回路の損失の比較,” 2014 信学ソ大, 通信分冊 1, no. B-21-12, p. 447, Sept. 2014.
- [18] 江頭大也, 山田恭平, 坂井尚貴, 大平孝, “高圧 8 倍電流型 DC-DC コンバータの提案 —ZVS 条件の導出と 1 kV プロトタイプ設計—,” 信学技報 EE2014-24, vol. 114, no. 309, pp. 31-36, Nov. 2014.
- [19] 田中將, 山田恭平, 崎原孫周, 坂井尚貴, 大平孝, “非線形回路の高調波を含めた測定の基礎検討,” 2015 信学総大, 通信分冊 1, no. B-21-21, p. 622, Mar. 2015.
- [20] 山田恭平, 坂井尚貴, 大平孝, “素子の Q 値を用いた逆 L 型整合回路の損失の定式化と損失最小トポロジ,” 2015 信学総大, 通信分冊 1, no. B-21-22, p. 623, Mar. 2015.
- [21] 崎原孫周, 田中將, 山田恭平, 坂井尚貴, 大平孝, “実動作状態における非線形インピーダンスのリアルタイム測定システム,” 2015 信学総大, 通信分冊 1, no. BS-7-3, p. S-23, Mar. 2015.
- [22] 山田恭平, 坂井尚貴, 大平孝, “複素インピーダンスを整合する基本 LC 回路の効率公式 —マンハッタン距離とボロノイ図を用いた定式化—,” 信学技報 WPT2015-16, vol. 115, no. 3, pp. 81-85, Apr. 2015.
- [23] 山田恭平, 坂井尚貴, 大平孝, “直・並列 LC 整合回路における電力損失のポアンカレ計量による双曲幾何的表現,” 信学技報 WPT2015-36, vol. 115, no. 129, pp. 1-6, July 2015.
- [24] 山田恭平, 坂井尚貴, 大平孝, “整合回路内部での損失の「マンハッタン距離」と「ポアンカレ計量に関する長さ」による表現,” 信学技報 MW2015-88, vol. 115, no. 227, pp. 9-12, Sept. 2015.

- [25] N. Ejima, M. Tanaka, K. Yamada, N. Sakai, and T. Ohira, “New circuit topology for broadband Sakihara system,” IEEE AP/MTT-S Midland Student Express 2015 Autumn, no. S1-1, Dec. 2015.
- [26] 江頭大地, 奥秋直幸, 山田恭平, 坂井尚貴, 大平孝, “倍速スイッチングによる電子制御無限可変リアクタの提案,” 2016 信学総大, 通信分冊 1, no. B-21-26, p. 697, Mar. 2016.
- [27] 山田恭平, 阿部晋士, 坂井尚貴, 大平孝, “線形 2 ポート回路網がスミスチャート上に描くベクトル場,” 信学技報 MW2016-30, vol. 116, no. 114, pp. 1-5, June 2016.
- [28] 山田恭平, 阿部晋士, 坂井尚貴, 大平孝, “3 ポート resistance compression network が達成しうる圧縮率についての考察,” 2016 信学ソ大, 通信分冊 1, no. B-21-3, p. 461, Sept. 2016.
- [29] 山田恭平, 宮崎陽一朗, 阿部晋士, 坂井尚貴, 大平孝, “倍電圧整流回路をベースとした負荷変動圧縮性のある整流回路の動作解析 — 矩形波近似を用いた新しい解析手法の提案 —,” 信学技報 WPT2016-32, vol. 116, no. 238, pp. 73-78, Oct. 2016.
- [30] 山田恭平, 阿部晋士, 大平孝, “入力抵抗値の変動幅を要求値以内にするための resistance compression network の分岐数の求め方,” 信学技報 MW2016-165, vol. 116, no. 363, pp. 189-194, Dec. 2016.
- [31] 阿部晋士, 山田恭平, 坂井尚貴, 大平孝, “ $\lambda/4$ 線路挿入型負荷変動圧縮整流回路のトポロジ提案 — 並列-並列型トポロジと直列-直列型トポロジ —,” 信学技報 MW2016-169, vol. 116, no. 363, pp. 211-214, Dec. 2016.
- [32] 山田恭平, “[依頼講演] 高 Q インダクタを用いた 6.78 MHz 倍電流整流回路,” 信学技報 WPT2017-15, vol. 117, no. 158, pp. 1-4, July 2017.
- [33] 山田恭平, “[依頼講演] 2.4 GHz 高インピーダンス整流回路,” 信学技報 WPT2017-30, vol. 117, no. 158, pp. 89-92, July 2017.
- [34] 馬場涼一, 山田恭平, 坂井尚貴, 大平孝, “整合回路効率の理論的上界,” 2017 信学ソ大, 通信分冊 1, no. B-21-12, p. 408, Sept. 2017.

- [35] 山田恭平, 大平 孝, “集中定数インピーダンス変換器における LC 素子値の誤差伝搬と Smith チャート上の曲線の長さとの関係,” 2017 信学ソ大, エレクトロニクス分冊 1, no. C-2-48, p. 56, Sept. 2017.

特許

- [36] 中幡英章, 志賀信夫, 弘津研一, 大平孝, 山田恭平, 江頭大也, “変圧装置,” 特願 2014-149787, July 23, 2014.
- [37] 中幡英章, 弘津研一, 大平孝, 山田恭平, 江頭大也, “変圧装置,” 特願 2014-225426, Nov. 5, 2014.
- [38] 中幡英章, 志賀信夫, 弘津研一, 大平孝, 山田恭平, 江頭大也, “変圧装置,” 特願 2014-225469, Nov. 5, 2014.
- [39] 中幡英章, 志賀信夫, 弘津研一, 大平孝, 山田恭平, “変圧装置,” 特願 2015-043565, Mar. 5, 2015.
- [40] 大平孝, 坂井尚貴, 北川裕理, 山田恭平, 江頭大也, “可変リアクタンス回路,” 特願 2015-224085, Nov. 16, 2015.
- [41] 初川聡, 中幡英章, 弘津研一, 大平孝, 山田恭平, 江頭大也, “半導体スイッチ駆動用絶縁カプラ, 半導体スイッチ駆動回路, 及び, 変圧装置,” 特願 2016-024316, Feb. 12, 2016.
- [42] 初川聡, 中幡英章, 弘津研一, 大平孝, 山田恭平, 江頭大也, “半導体スイッチ駆動用絶縁カプラ, 半導体スイッチ駆動回路, 及び, 変圧装置,” 特願 2016-024317, Feb. 12, 2016.
- [43] 中幡英章, 志賀信夫, 弘津研一, 大平 孝, 山田恭平, “変圧装置,” 特許第 5695712 号, Feb. 13, 2015.
- [44] 中幡英章, 志賀信夫, 弘津研一, 大平 孝, 山田恭平, 江頭大也, “変圧装置,” 特許第 5695782 号, Feb. 13, 2015.
- [45] 中幡英章, 志賀信夫, 弘津研一, 大平 孝, 山田恭平, “変圧装置,” 特許第 5727561 号, Apr. 10, 2015.
- [46] 中幡英章, 志賀信夫, 弘津研一, 大平 孝, 山田恭平, “変圧装置,” 特許第 6144709 号, May 19, 2017.

- [47] H. Nakahata, N. Shiga, K. Hirotsu, T. Ohira, and K. Yamada, “Distributed-constant type transformer for voltage conversion,” U.S. Patent 9 712 069 B2, July 18, 2017.

表彰（個人）

- [48] 山田恭平, “優秀発表賞,” 東海地区 3 大学合同修士論文発表会優秀発表賞銓衡委員会, Jan. 2014.
- [49] 山田恭平, “優秀学生賞,” IEEE 名古屋支部, Apr. 2015.
- [50] 山田恭平, “学生研究奨励賞,” 電子情報通信学会東海支部, June 2015.
- [51] 山田恭平, “若手奨励賞,” 電子情報通信学会コミュニケーションソサイエティ無線電力伝送研究専門委員会, Mar. 2016.
- [52] 山田恭平, “学生研究会優秀発表賞,” 電子情報通信学会マイクロ波研究専門委員会, Dec. 2016.
- [53] 山田恭平, “平成 28 年度学生表彰,” 豊橋技術大学学長, Mar. 2017.
- [54] 山田恭平, “高周波整流回路コンテスト MHz 部門 Highest Efficiency Award,” 電子情報通信学会無線電力伝送研究専門委員会, Mar. 2017.
- [55] 山田恭平, “高周波整流回路コンテスト GHz 部門 High Efficiency Award,” 電子情報通信学会無線電力伝送研究専門委員会, Mar. 2017.
- [56] K. Yamada, “Nagoya Section Conference Presentation Award,” IEEE Nagoya Section, Apr. 2017.

表彰（団体）

- [57] 山田恭平, 一瀬健人, “2013 年度マイクロ波回路設計試作コンテスト 特別賞,” 電子情報通信学会マイクロ波研究専門委員会, Sept. 2013.
- [58] 水谷豊, 山田恭平, 一瀬健人, 神山祐輔, 北川裕理, 江頭大也, 斉藤彰, 宮崎陽一郎, “大学展示最優秀発表賞,” Microwave Workshop & Exhibition 2013, Nov. 2013.