

近接モードおよび高減衰特性を有する構造物を対象とした
実験モード解析法の開発

(Development of experimental modal analysis method for structures
with close modes and high damping characteristics)

2021 年 7 月

博士 (工学)

田尻 大樹

豊橋技術科学大学

2021 年 7 月 5 日

機械工学専攻		学籍番号	第 189103 号	指導教員	河村 庄造
氏名	田尻 大樹				足立 忠晴
					松原 真己

論文内容の要旨 (博士)

博士学位論文名	近接モードおよび高減衰特性を有する構造物を対象とした実験モード解析法の開発
---------	---------------------------------------

(要旨 1,200 字程度)

機械構造物が発する振動や騒音を低減するためには、その対象物の振動特性を把握することが有効になる。その技術として、対象物の振動試験の応答から固有振動数、減衰特性、モード形状などのモード特性を同定する実験モード解析法が開発され、その技術はある程度確立されている。しかしながら今日では、機械構造物の特性の変化や要求の多様性ととともに、振動現象が複雑化し、減衰の大小を問わず多くの振動モードが広い周波数領域にわたって励起されるような新たな振動騒音問題が現れ、モード特性の同定においては、いくつかの解決すべき課題が現れてきた。

本研究では、周波数分解能に起因する課題、対象物が近接モードを有する場合の課題、高減衰特性を有する場合の課題を取り上げ、これらの課題を解決することを目的とする。本論文は6つの章で構成され、第1章で緒言を述べた後の各章の概要を以下に示す。

第2章では、振動系の運動方程式および周波数応答関数（以下、**FRF**）の定式化を行い、従来法であるハーフパワー法およびモード円適合法の周波数分解能に起因する課題を述べた。さらに、本研究における実験モード解析法の基礎となる直線フィット法の同定理論を説明し、従来法の課題を直線フィット法により解決できることを数値例により示した。

第3章では、対象物が近接モードを有し、対象外のモード成分がモード同定に悪影響を及ぼす課題を取り上げた。そして、比較的モードが近接する**FRF**を対象とする場合にも、モード特性を精度よく同定できる1自由度法を提案した。その方法は、**FRF**の実部と虚部の両方において、対象外のモード成分を振動数に関する多項式で近似し、直線フィット法の同定理論に導入するものである。その多項式の適切な次数を理論的なアプローチで定め、提案法の妥当性と適用性を数値例により検証したところ、良好な結果を得た。

第4章では、高減衰特性を有し、かつ二重曲率を持つ周期構造物への周方向縮約法の適用性の課題を取り上げた。初めに、数値例によって、二重曲率を持つ周期構造物の固有関数を三角関数で近似できることを明確にした。次に実験では、周方向縮約法を利用して、振動挙動に関して研究事例のほとんどない二輪車用タイヤを対象にモード特性を同定した。加えて、二輪車用タイヤと自動車用タイヤのモード特性を比較し、二重曲率を持つことに起因するモード特性の特徴を明確にした。

第5章では、高減衰特性を有する構造物を対象として、減衰の影響のみを小さくする加振法およびモード特性の同定法を提案した。具体的には、対象とする振動モードの減衰が小さくなるような速度フィードバック（以下、**FB**）加振の方法とゲインの決定方法を提案した。そのように決定したゲインを用いた速度**FB**加振により、**FRF**を低減衰化してモード特性を同定し、さらに、速度**FB**加振の影響を補正することで、構造物本来の減衰特性が把握できる方法を構築した。数値例では、高減衰特性を有する多自由度系を対象として提案法の適用性を検証したところ、良好な結果を得た。

第6章では、第2章から第5章で得られた成果を総括し、今後の研究の展望を示した。

Date of Submission (month day, year) : 7 5th, 2021

Department of Mechanical Engineering	Student ID Number	D189103	Supervisors	Shozo Kawamura Tadaharu Adachi Masami Matsubara
Applicant's name	Daiki Tajiri			

Abstract (Doctor)

Title of Thesis	Development of experimental modal analysis method for structures with close modes and high damping characteristics
-----------------	--

Approx. 800 words

In order to reduce the vibration and noise generated from mechanical structures, it is effective to understand the vibration characteristics of the object. As a technique for this end, the experimental modal analysis method has been developed to identify modal characteristics such as natural frequency, damping characteristics, and mode shape from the response of the vibration test of the object, and the technique has been established to some extent. However, today, along with changes in the characteristics of mechanical structures and diversification of requirements, the vibration phenomenon becomes complicated, and there is a new vibration and noise problem in which many vibration modes are excited over a wide frequency range regardless of the magnitude of damping characteristics. In the identification of modal characteristics, some problems to be solved have appeared.

The purpose of this study is to solve the problems caused by the frequency resolution, the problems when the object has close modes and high damping characteristics. This thesis is composed of six chapters, and the outline of each chapter is shown below.

In Chapter 1, the background of the research and the details of the tasks were represented.

In Chapter 2, the equation of motion of the mechanical structure and its frequency response function (FRF) were formulated, and the problems caused by the frequency resolution were described in the use of the conventional half-power method and mode circle adaptation method. Furthermore, the identification theory of the linear fit method, which is the basis of the experimental modal analysis method in this study was explained and showed that the problems of the conventional method could be solved by the linear fit method using numerical examples.

In Chapter 3, the problem that the mechanical structure has close modes and the non-target mode components adversely affect the mode identification was taken up. A new one-degree-of-freedom method that can accurately identify mode characteristics even when targeting FRFs whose modes are relatively close to each other was proposed. The method approximates the non-target mode components with

polynomials related to frequencies in both the real and imaginary parts of the FRF and introduces them into the identification theory of the linear fit method. The appropriate order of the polynomial was determined by a theoretical approach. The validity and applicability of the proposed method were verified by numerical examples, good results were obtained.

In Chapter 4, the problem of applicability of the circumferential reduction method to periodic structures with high damping characteristics and double curvature was taken up. First, it was clarified that the eigenfunctions of periodic structures with double curvature could be approximated by trigonometric functions by numerical examples. Next, in the experiment, the mode characteristics were identified for motorcycle tires, which have few research cases regarding vibration behavior, using the circumferential reduction method. In addition, the mode characteristics of motorcycle tires and automobile tires were compared, and the characteristics of the mode characteristics due to having a double curvature were clarified.

In Chapter 5, a new excitation method in which the damping characteristics of the target vibration mode can be reduced was proposed. Specifically, a velocity feedback (FB) excitation method and a gain determination method that reduce the damping of the target vibration mode were proposed. Using the velocity FB excitation method with the feedback gain determined above, the modal characteristics of the reduced damping structure can be identified, and then the original damping characteristics of the structure can be identified. In the numerical example, the applicability of the proposed method was verified for a multi-degree-of-freedom system with high damping characteristics, and good results were obtained.

Chapter 6 summarized the results obtained in Chapters 2 to 5 and presented the prospects for future research.

目次

第1章	緒論	1
1.1	実験モード解析の歴史と現在の役割	1
1.2	現在の実験モード解析の課題	2
1.2.1	従来法におけるモード特性同定の問題点	5
1.2.2	対象物が近接モードを有する場合の問題点	7
1.2.3	対象物が高減衰特性と高モード密度を有する場合の問題点	9
1.3	本研究の目的	11
1.3.1	周波数分解能が異なる場合の実験モード解析法の有効性検証	11
1.3.2	対象物が近接モードを有する場合の実験モード解析法の検討	11
1.3.3	対象物が高減衰特性と高モード密度を有する場合の実験モード解析法の検討	12
1.4	本論文の構成	12
第2章	直線フィット法の同定理論および周波数分解能が異なる場合の有効性検証	15
2.1	緒言	15
2.2	周波数応答関数の定式化とモード特性	16
2.3	従来法におけるモード特性同定の課題	19
2.4	直線フィット法の同定理論	21
2.5	周波数分解能が異なる場合のモード特性同定の有効性	23
2.5.1	1自由度系のFRFを用いたモード特性同定の数値例	23
2.5.2	打撃試験を想定したモード特性同定の数値例	26
2.6	結言	32
第3章	近接モードの成分を考慮した一般構造物のモード特性同定	33
3.1	緒言	33
3.2	近接モード成分に起因する同定の問題点	34
3.3	近接モード成分を考慮した同定法	37
3.3.1	対象外モード成分を考慮した従来の直線フィット法	37
3.3.2	対象外モード成分の厳密な表現	38
3.3.3	直線フィット法の基礎方程式における近接モードの挙動把握と近似多項式の次数決定	41
3.4	数値例による提案法の適用性検証	46
3.4.1	検証モデル	46
3.4.2	提案法の妥当性検証	51
3.4.3	提案法の適用性検証	55
3.4.4	検証結果のまとめと同定指針の提示	59
3.5	多自由度法への適用	61
3.6	結言	64

第4章	高減衰特性および高モード密度を有する周期構造物のモード特性同定	65
4.1	緒言	65
4.2	周期構造物を対象とした一般的な実験モード解析の課題	66
4.2.1	高減衰特性を有する場合の問題点と周方向縮約法による改善	69
4.2.2	二重曲率を有する場合の周方向縮約法の適用性に関する問題点	71
4.3	数値例による周方向縮約法の二重曲率構造物への適用性検証	72
4.3.1	有限要素モデル	72
4.3.2	周方向縮約の効果	73
4.3.3	モード特性同定の妥当性検証	74
4.4	二輪車用タイヤの実験モード解析	78
4.4.1	実験条件	78
4.4.2	周方向縮約の効果	79
4.4.3	モード特性の同定	80
4.5	周方向縮約法の必要性和二輪車用タイヤのモード特性の考察	86
4.6	結言	91
第5章	高減衰特性を有する構造物に対する低減衰化実験モード解析法の検討	93
5.1	緒言	93
5.2	高減衰特性を有する構造物の実験モード解析の問題	94
5.2.1	共振峰が明確に現れない周波数応答関数の例示	95
5.2.2	減衰の大きさがモード特性同定の精度に与える影響	95
5.3	速度フィードバック制御をベースとした従来の加振法の課題	97
5.4	速度フィードバック加振による低減衰化の効果	99
5.5	低減衰化実験モード解析法の提案	101
5.5.1	問題設定	101
5.5.2	多自由度系を用いた低減衰化実験モード解析の説明	102
5.6	多自由度系を対象とした低減衰化実験モード解析の妥当性検証	104
5.6.1	2自由度系を用いた検証	104
5.6.2	5自由度系を用いた検証	108
5.7	結言	115
第6章	結論	117
6.1	研究成果	117
6.2	今後の研究課題と方針	121
	参考文献	123
	謝辞	

主な記号

a	最小二乗法の係数マトリックス
α	未知の係数 自然数
A	対象外モード成分の実部
\mathbf{A}	最小二乗法の係数マトリックス
\mathbf{b}	最小二乗法の計測値ベクトル
β	未知の係数 自然数
B	対象外モード成分の虚部
c	粘性減衰係数
\mathbf{C}	減衰マトリックス
d	速度フィードバックのゲイン
e	周波数応答関数の入力点の自由度 自然数
E	誤差
f	振動数 周波数 外力
f_{np}	固有振動数
\mathbf{f}	外力ベクトル
F	外力の大きさ
\mathbf{F}	外力の大きさを表すベクトル
ϕ	固有振動モード
Φ	モードマトリックス
g_p	構造減衰係数
γ	整数
η	自然数
H	周波数応答関数
\mathbf{H}	周波数応答関数のマトリックス
i	自然数
\mathbf{I}	単位マトリックス
j	虚数単位
k	モード剛性 ばね定数
K_v	速度フィードバックのゲイン
\mathbf{K}	剛性マトリックス
l	1 自由度法を適用する場合の解析データ点数

m	モード質量 質量 自然数
μ	自然数
\mathbf{M}	質量マトリックス
n	自然数
N	周波数応答関数における最大モード次数
ω	角振動数
ω_p	固有角振動数
$\mathbf{\Omega}^2$	固有角振動数を対角成分に持つマトリックス
p	モード次数 自然数
q	モード座標系における応答
r	周波数応答関数の参照点の自由度
R	留数
S	剰余質量
t	時間
\mathbf{T}	転置を表す記号
u	速度フィードバックの制御力
x	変位
\mathbf{x}	変位ベクトル
\mathbf{x}	最小二乗法の解ベクトル
X	剰余項を表す記号
\mathbf{X}	変位の大きさを表すベクトル
y	多自由度法を適用する場合の解析データ点数
ζ	モード減衰比 減衰比
Z	剰余剛性
$+$	Moore-Penrose の擬似逆行列を表す記号

主な略語

FRF	Frequency Response Function	周波数応答関数
FEM	Finite Element Method	有限要素法
MAC	Modal Assurance Criterion	モード信頼性評価基準
FB	Feedback	フィードバック

第1章 緒論

1.1 実験モード解析の歴史と現在の役割

機械構造物が稼働状態にあるときには、その機械が稼働することによって構造物の各部で振動や騒音が生じる。機械構造物の例としては、自動車や航空機などの輸送用機械や、建設機械、工作機械などが挙げられる。これらの振動や騒音は、機械の使用者や周辺の人に対して不快感や障害を与える[1-8]。また、振動は場合によっては繰返し応力を誘発して機械構造物に疲労を与え[9-13]、製品に対しては品質の低下[14-19]などの悪影響を与える。

このように、人やモノにとって好ましくない振動や騒音を低減するためには、その対象物の振動特性を把握することが有効になる。その技術として、対象物の振動試験および実験モード解析[20-22]が開発された。

実験モード解析の歴史は、航空機の振動特性を実験により把握することを目的として、1947年に Kennedy らが発表した振動モードの同定方法[23]までさかのぼる。この方法は、周波数掃引加振実験で得られた周波数応答関数 (Frequency Response Function ; 以下, FRF) を複素平面にプロットし、これに円を適合して上述のモード特性を同定するものである。その後、計算機を応用した計測とデータ解析が一般的になり、この方法は何年にもわたって振動計測の第一線で使用されている。今日では計算機の著しい性能向上に伴い、実験モード解析の技術は航空・宇宙・自動車・電機をはじめとする製造分野に広く普及している。

現在の実験モード解析の最も代表的な役割としては、有限要素法 (Finite Element Method ; 以下, FEM) による構造解析モデルの妥当性の検証があげられる[24-28]。FEM による振動解析は、着目する振動現象を詳細に把握することができ、図 1.1 に示すように構造モデルの変更シミュレーションに基づく詳細な設計検討が可能になる。そのため、設計開発段階では積極的に FEM によるシミュレーションを活用している。FEM を用いた設計手法は、製品開発に伴う設計・試作・検証試験の繰返し回数を減少させ、製品化までの時間短縮と開発費用の低減に大きな効果をもたらしている。そのため、製品全体の設計開発レベルから、製品を構成する部品の設計開発レベルまで幅広く用いられている。

しかしながら、製品形状が複雑、かつ大型になるほど多くの締結部を有するため、その境界条件をすべて構造解析モデルに反映させることが難しい。また、減衰特性という未知

の因子の影響を机上の検討で予測することも非常に難しい[29]. このような理由から, FEM による振動解析だけでは着目する振動現象を正確に把握することができないため, 実際に機械構造物を打撃加振や定常加振してモード特性を同定し, これをシミュレーションに組み込むことによって, 実用的な周波数応答解析・時刻歴応答解析が可能になる[30-33].

以上に述べたように, 実験モード解析は, 機械構造物の動的挙動を把握し, 振動や騒音の問題を解決するために不可欠な技術として運用されている. 今後, FEM による振動解析技術がますます発展すると思われるが, その技術が高精度化するほど実験モード解析の重要度も高まっていくと考えられる.

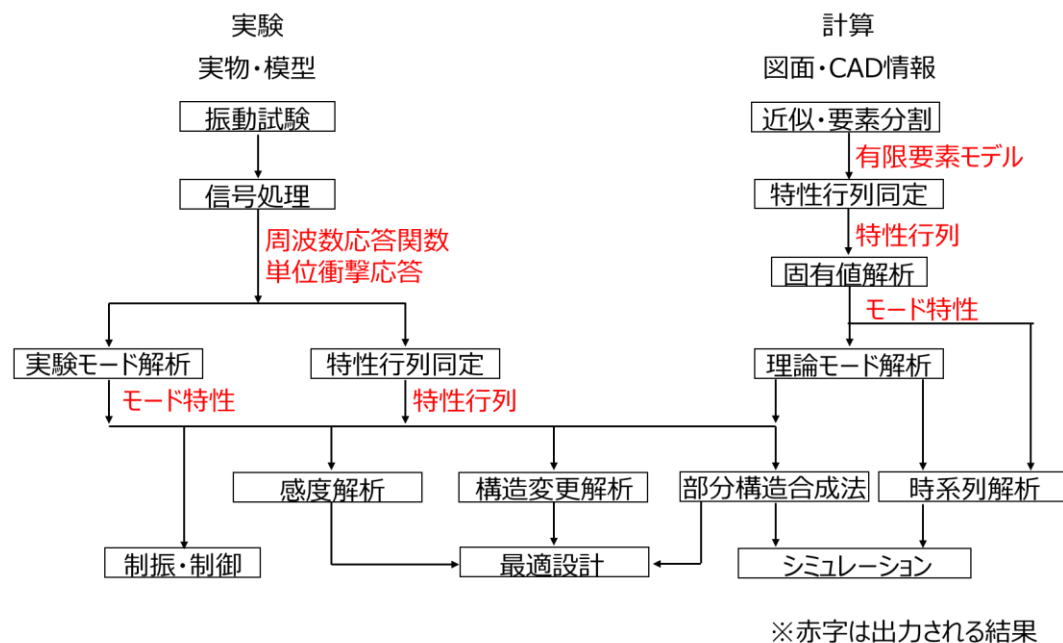


図 1.1 実験モード解析を組み込んだ計算機援用による振動解析

1.2 現在の実験モード解析の課題

実験モード解析の方法としては, 周波数領域法や時間領域法, 自己回帰モデルによる同定法など多くの方法があり, 現在も多くの研究が進められている. 中でも周波数領域法は最も一般的に利用される方法であり, 同定プログラムが実装された市販ソフトも数多くある[34]. 同定法としては, 図 1.2 に示すように 1 自由度法と多自由度法に大別される. 例えば, 1 自由度法としてはハーフパワー法やモード円適合法[35], 直線フィット法があり[36], 多自由度法としては 偏分反復法[37], Least square complex frequency 法[38], Poly-reference least squares complex frequency domain 法[39], 部分空間同定法[40]がある. 近年では Sitarz ら

により蟻コロニー最適化を利用した方法[41]が提案され、齋藤らにより動的モード分解を機械システムのモード同定に適用した方法[42]も提案された。このように、実験モード解析が開発されてから 70 年を超えた今日では、その技術は十分に確立されている。

しかしながら、機械構造物の特性の変化、要求の多様性ととともに、その技術も成長していく必要があると考えられる。気候変動に関する国際連合枠組条約の京都議定書が 1997 年に採択され、地球環境への負荷を低減するための取り組みが急加速し[43,44]、その対策として自動車をはじめとする機械構造物の設計・開発においては軽量化やエネルギー効率向上が進められてきた[45-51]。その結果、機械構造物の製品は比較的軽くなり、剛性が低下したことに伴い、振動や騒音を発生しやすくなってきた。一方で機械構造物の安全性がより一層追求されるようになり、振動や騒音を抑えるために機械構造物を構成する部品には減衰性能の高いものが求められ[52,53]、それらを積極的に採用するなどの対策が施されてきた。このような動きにより、振動現象は複雑化し、減衰の大小を問わず多くの振動モードが広い周波数領域にわたって励起されるような新たな振動騒音問題が現れてきた[54,55]。

実際に機械構造物のモード特性を同定する場合は、対象物の振動モードが近接していたり、高減衰特性を有していたりすることが多く、モード同定が困難なことが多くなってきている。モノづくりにおける設計開発の現場では、図 1.2 に示す 1 自由度法が用いられることがあるが[56,57]、ハーフパワー法やモード円適合法は周波数分解能に依存して同定値が変化する問題がある[27,40]。また、これらの方法は同定対象に対象外の振動モードが近接する場合に適用できないか、適用できたとしても対象外のモード成分を無視して同定するため良い結果が得られないという問題もある[35,56]。直線フィット法では、同定対象と対象外の振動モードが十分に離れている場合に対象外のモード成分を剰余項[20,32]として近似してモード同定することが提案されているが[36]、同定対象に対象外の振動モードが近接する場合はその近似が妥当であるか不明であり、良い結果を得られないことも考え得る。さらに高度な実験モード解析法として図 1.2 に示す種々の多自由度法があるが、対象物が高減衰特性および高モード密度を有する場合は、共振峰を明確に捉えることができず[27]、モード同定に必要な適当な採用モード数を決定できないため、どの同定法でも良い結果を得ることが難しいという問題がある。

このような背景から、実験モード解析技術の適用範囲拡大と同定精度向上が求められており、今もなお同定法の改良や新規提案に関する研究が進められている。

本研究では、特に同定結果が周波数分解能に依存する問題と、近接モードおよび高減衰特性を有する構造物を対象にした場合に生じる問題を解決する。具体的な問題点を以下にまとめる。

周波数領域の実験モード解析法

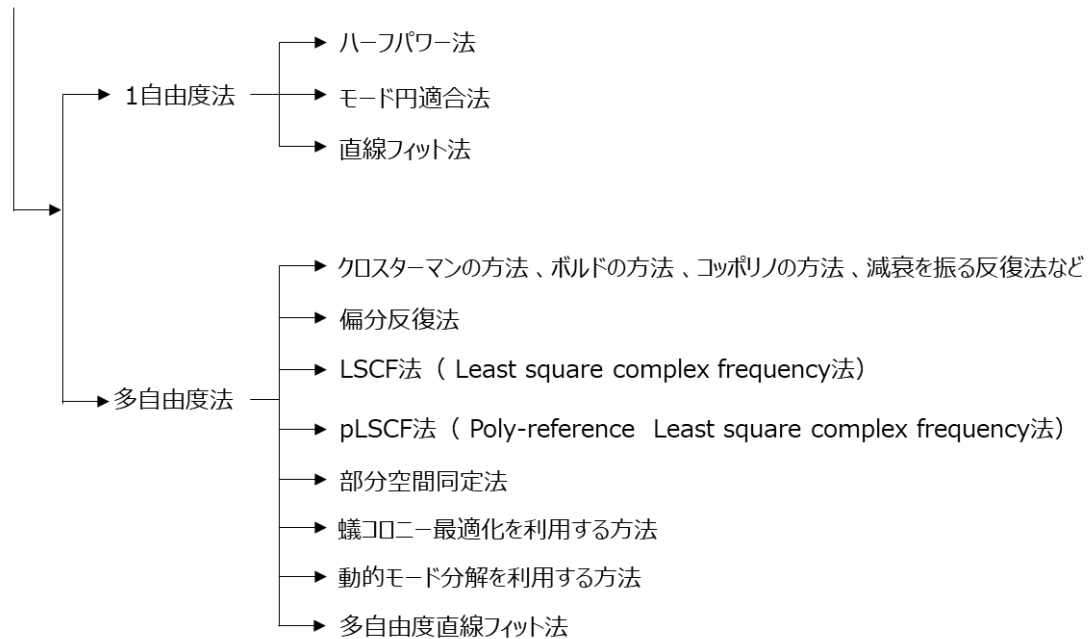


図 1.2 周波数領域の実験モード解析法

1.2.1 従来法におけるモード特性同定の問題点

対象物が比較的小型であり、小さい加振力でも十分に固有振動モードを励起できる場合には、対象物に加速度計を貼付け、インパクトハンマで打撃加振して FRF を取得する。そして各共振峰近傍を抽出して 1 自由度系と見なし、ハーフパワー法やモード円適合法でモード特性を同定する[35,56]。近年では Kader らにより、これら従来の同定法の同定精度を比較した報告もあり、必要に応じて利用されていることが説明されている[57]。しかしながら、従来の同定法では同定値が周波数分解能に依存して変化し[40]、特に低減衰系を対象とする場合には減衰特性の同定値がばらつくことが知られている[27]。

以下にハーフパワー法とモード円適合法におけるモード特性の同定法をまとめ、それぞれの同定法において誤差を生じる要因について簡単に説明する。

■ ハーフパワー法

固有振動数はボード線図上で FRF の大きさの最大値の周波数とする。構造減衰係数はボード線図上で FRF の大きさの最大値の $1/\sqrt{2}$ 倍になる 2 点の周波数の差を求め、それを固有振動数で除して同定する。ピーク値を読み取れない場合の同定法もある。

■ モード円適合法

固有振動数はナイキスト線図上で隣接するプロット間の距離が最大となる 2 点の中点とする。構造減衰係数はナイキスト線図上で固有振動数を挟んで隣接する 2 点が円の中心点からなす角を求め、それと周波数分解能、固有振動数の関係から同定する。

このように、ハーフパワー法とモード円適合法では、モード特性の同定において固有振動数が周波数分解能のどの位置にあるかが重要になる。周波数分解能は実験モード解析における振動試験の条件として、周波数レンジとサンプリング点数の関係により決定される。したがってモード特性は、図 1.3 に示すように限られた周波数分解能で取得された FRF の離散データから同定される。対象物そのものの減衰が小さい場合は、ボード線図における共振点近傍は非常に先鋭化しており、周波数分解能の範囲でしかピーク値を読み取ることができない。そのためハーフパワー法では、FRF の最大値を読み取るときに誤差を生じ、その値を利用して算出する減衰特性もまた誤差を生じる。またモード円適合法では、実用

的な周波数分解能で描けるナイキスト線図上で円を構成するためのデータが原点付近に集まることから、円適合の精度が低下する．そのため、モード円から得られるパラメータには誤差が生じ、結果として減衰特性の同定誤差となる．

以上のように従来の同定法では、周波数分解能に依存するパラメータを用いてモード特性を同定するため、振動試験の条件によって同定値がばらつく．このことが問題となる場面としては、例えば、ある構造物を対象にするとときに周波数レンジあるいはサンプリング点数を変更する場面が挙げられる．周波数レンジやサンプリング点数を変更するだけにもかかわらず、試験条件の変更前後で異なるモード特性が同定されてしまい、同定値の信頼性が損なわれる問題が生じる．

一方、河村らが提案した直線フィット法の同定式には、周波数分解能に関するパラメータが含まれておらず、FRF の実部と虚部の離散データを直線の式に当てはめてモード同定する[36]．そのため、周波数分解能に依存することなくモード同定できると考えられるが、その有効性を検証した例はない．ハーフパワー法やモード円適合法および直線フィット法の同定値を比較し、その精度を把握する必要がある．

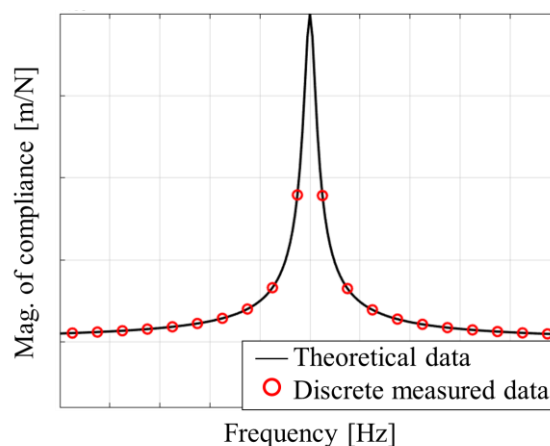


図 1.3 FRF の離散データ

1.2.2 対象物が近接モードを有する場合の問題点

対象物の振動モードが近接する場合、振動試験から取得した FRF 上では共振峰が近接し、高精度にモード特性を同定することは難しい。モードが近接しやすい構造としては、板や円環など、形状が左右対称である構造や[58]、動吸振器が取り付けられたような形態をとる構造などが挙げられ[59]、例えば自動車一つを取り上げてもそのような構造を有する部分が多数見られる[60-62]。モード特性の同定法としては種々の方法が存在するが、1 自由度法は周波数領域で行われることが多く、FRF の各共振峰を 1 自由度系とみなして解析区間を設け、その他のモードの影響を無視して同定する方法である[35,56]。多自由度法を容易に利用できる環境であれば、あえて 1 自由度法を用いる場面は少ないと考えられるが、多自由度曲線適合プログラムが FFT アナライザーに標準装備されているものは少ない。そのため、多自由度法に比べて同定精度は劣るが、実際の現場では近年においてもハーフパワー法やモード円適合法でモード特性を同定している場合も少なからずある。例えば、Antunes らは可変剛性複合積層板のモード特性をハーフパワー法とモード円適合法により同定した[58]。他にも、Chandra らはローターベアリングシステムのモード特性をハーフパワー法で同定し[63]、Victor らは航空機の翼のモード特性をモード円適合法により同定した[64]。さらに、近年では高速度カメラで撮影したデジタル画像から FRF を取得してモード特性を同定する一連の流れの妥当性を検証するために、1 自由度法が用いられている[65,66]。このように 1 自由度法は解析手法の簡便性や低コストで導入できることから必要に応じて利用されている[67-70]。

また、従来の 1 自由度法の改良が行われている。例えば、Xu らはハーフパワー法に反復計算を適用し[71]、Sun らは共振峰が左右対称ではない FRF に適用できるハーフパワー法へ改良した[72]。その他、Ahn らは打撃試験時に用いる指数窓の影響を補正できるモード円適合法へ[73]、Grosso らは新たな減衰のモデル化とそれに応じたモード円適合法へと改良した[74]。さらに、従来の 1 自由度法に代わる新たな同定法の開発も行われている。Gu らは比例ヒステリシス減衰を仮定した 1 自由度系の FRF 理論式に基づく非線形最小二乗法を提案した[75]。河村らは、比例ヒステリシス減衰および比例粘性減衰を仮定した 1 自由度系の FRF の実部と虚部を連立することで、固有振動数と減衰特性を未知数とする線形方程式を導出し、線形最小二乗法によって未知数を同定する方法を提案した[36]。以上の

ように、モード解析の技術が十分に確立された近年でも、1 自由度法の改良や新規開発が進められている。

しかしながら、これら従来の 1 自由度法は図 1.4 に示すように同定対象のモードが卓越しており、モードの連成を無視できる場合にのみ適用できるものである。1 自由度法を適用する解析区間に同定対象としないモード成分の影響がある場合、その成分を剰余項 [20,32,76]としてモデル化する方法はあるが、同定対象とするモードの固有振動数に近接して存在する対象外のモード成分を適切に近似したものではない。そのため、近接モードが存在する解析区間において高精度にモード特性を同定できる 1 自由度法はいまのところない。

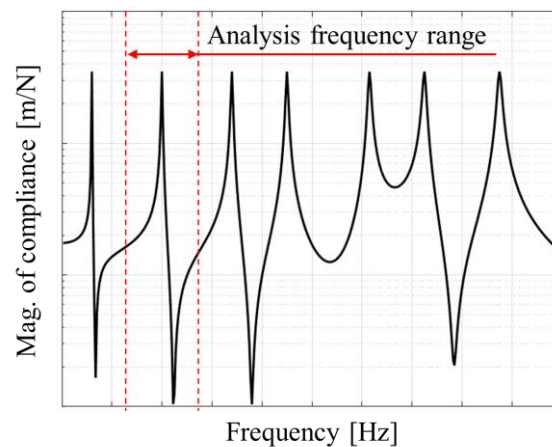


図 1.4 各モードが卓越する FRF と解析区間の例

1.2.3 対象物が高減衰特性と高モード密度を有する場合の問題点

対象物が高減衰特性を有する場合、振動試験から取得した FRF 上では共振峰が明確に現れず、振動モードが存在する周波数を特定できないため、モード特性を同定することは難しい。高減衰特性を有する構造物としては、例えば制振材料を適所に貼り付けた制振鋼板や、ゴム材料を主な母材とする構造物が挙げられる。さらに、高減衰特性を有することに加えてモード密度が高い構造物では、連なる共振峰がそれぞれ滑らかに重なり合うため、振動モードが存在する周波数を特定できない。モード密度が高い構造物の例としては、円筒シェルなどの周期構造物が挙げられ、比較的高周波数領域で半径方向と軸方向の振動モードが連成することに伴い、図 1.5 に示すようにモード密度が高くなることが知られている[77,78]。以上のように材料や形状が持つ特性により、モード特性の同定が難しい構造物がいくつかある。その一つに自動車用タイヤおよび二輪車用タイヤが挙げられる。タイヤは高減衰であり、かつ周期構造物であるためにモード密度が高く[79]、特に中周波数領域では共振峰を捉えることができない。振動騒音対策のためにより高周波数領域まで動特性を把握することが重要であるが[80]、通常の実験モード解析ではモード特性の同定が難しいという問題がある。

このような問題に対して、対象物の特徴に合わせた手法を構築することが有効であると考えられる。周期構造物の代表例である円筒構造物の変形形状については、その固有関数を三角関数で近似できることが古くから知られている[81-85]。また、自動車用タイヤにおいても、モデル化に関する研究や実験検証により、低周波数領域ではトレッド部の振動形状を三角関数で近似できることが示されている[86-89]。このように円筒構造物の固有関数を三角関数で近似できるという仮定に基づき、松岡らは FRF の理論式の線形項を三角関数で表現し、自動車用タイヤを対象に低周波数領域のモード特性を同定した[90]。また、北原らは FRF を周方向にフーリエ級数展開して特定のモード成分を抽出する方法（以下、周方向縮約法）を提案し、低周波数領域から中周波数領域のモード特性を同定した[27]。この周方向縮約法は FRF 上のモード密度を低下させ、対象とする振動モードを明確に捉えるための方法である。しかしながら、北原らが自動車用タイヤに適用した実験モード解析では、縮約した FRF とモード同定後に再構築した FRF に乖離が生じるという問題が生じた。その原因として、実際のタイヤは厚さ方向の影響で理想的なシェルとは見なせないことや、タイヤ断面が軸方向に曲率を持たないトレッド部（一重曲率部）のみではなく、軸方向に

も曲率を持つサイドウォール部（二重曲率部）の FRF を縮約に用いたことの可能性がある」と述べられている。つまり、シェルモデルの適用範囲の限界や、サイドウォール部のように二重曲率を有する周期構造物の固有関数が三角関数で近似できるかは不明である[27]。

また、上述の周方向縮約法は振動モードが十分に励起できていることを前提としているが、高減衰特性を有するので全体に振動が行き渡りにくく、高周波数領域になるほど振動モードが励起されない。そのため、振動試験では複数の加振器を用いる多点加振により行われる場合もある。

多点加振の方法の一つとして、複数の自励振動子を用いる自励駆動法が栗田らにより提案された[91-95]。この加振法では速度に比例した成分を持つ力をフィードバック制御により対象物に与える。この影響により対象物の減衰特性を疑似的に低減でき、FRF 上の共振峰は鋭く明確に現れることが実験的に報告されている[96]。しかしながら自励駆動法では、対象物の振動モードが近接する場合には、ゲインが大きい方の振動モードの振動数に引き込まれて自励発振してしまうという報告もある[97,98]。したがって、FRF の取得に困難を伴うためモード特性を同定することができない問題がある。また、フィードバックされる力は単純な速度比例の力ではないため、そのように低減衰化して取得した FRF から減衰特性を評価することができない。制御系の設計においては、制振要素や飽和要素を追加してそれらの特性を細かく調査してゲインを試行錯誤的に設定されている。さらに複数の応答点のデータを用いるクロスフィードバック制御を追加する工夫もなされ、所望の振動数で自励発振させることが可能になった報告もあるが、依然として減衰特性を評価することができない問題は残る。

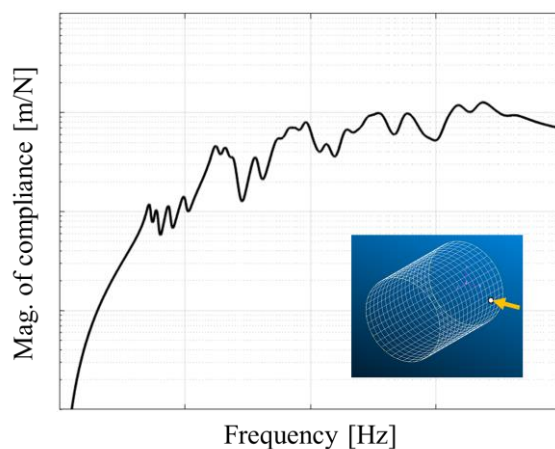


図 1.5 近接モードおよび高減衰特性を有する構造物の FRF の例

1.3 本研究の目的

本研究では、研究の背景および現在の実験モード解析の課題を踏まえ、近接モードおよび高減衰特性を有する構造物を対象にする場合には現在の実験モード解析法ではモード特性の同定が難しいという問題を解決することを目的とする。具体的には前節で述べた主要課題を取り上げ、以下に示す3つの検討を行う。

1.3.1 周波数分解能が異なる場合の実験モード解析法の有効性検証

ハーフパワー法やモード円適合法とは対照的に、直線フィット法は同定式に周波数分解能に関するパラメータが含まれておらず、FRFの実部と虚部の離散データを直線の式に当てはめてモード同定する。そのため、周波数分解能に依存することなくモード同定できると考えられる。

そこで、周波数分解能のみが異なる条件で作成したFRFに対して、ハーフパワー法とモード円適合法、直線フィット法でモード特性を同定し、その同定値を比較する。具体的には、鋼製のはりのように減衰が小さい対象物の打撃試験において、サンプリング時間を短くする場面を想定し、周波数分解能が異なる条件下でも同定値が大きく変わらないことを確認し、直線フィット法の有効性を示す。

1.3.2 対象物が近接モードを有する場合の実験モード解析法の検討

近接モードが存在する解析区間において高精度にモード特性を同定できる1自由度法はいまのところない。そのような場合には多自由度法を用いて対象のモード特性を同定することになるが、簡便な1自由度法により同定できれば有用であると考えられる。

そこで、ハーフパワー法やモード円適合法を適用する場合と同様の測定データで、より適用範囲の広い1自由度法を提案する。具体的には、比較的振動モードが近接するFRFを対象とする場合にも、モード特性を精度よく同定できる1自由度法について検討する。その方法は、FRFの実部と虚部の両方において、対象外のモード成分を振動数に関する多項式で近似して、直線フィット法の同定理論に導入するものである。そしてその多項式の適切な次数を理論的なアプローチで定める。以上のようにして構築した同定手法を、数値例によって検証する。そのため比較的高減衰でモードが近接する検証モデルを取り上げ、FRFの真値を用いてモード特性の同定を行い、提案手法の妥当性を検証する。さらに、実際の

同定を模擬するため、ノイズを含んだ FRF データを用いてモード特性を同定し、提案手法の適用性を検証する。

1.3.3 対象物が高減衰特性と高モード密度を有する場合の実験モード解析法の検討

高減衰特性を有し、かつ二重曲率を有する周期構造物を対象にする場合、周方向縮約法の適用性が不明であるので、固有関数を三角関数で近似できることを明らかにする必要がある。しかしながら、二重曲率を有する構造物の固有関数を理論解析により導くことが非常に難しいことは、古典力学の研究成果からも窺える[99-102]。

そこで、二重曲率を持つ周期構造物を対象とした数値解析により、固有関数を三角関数で近似できることを明らかにする。具体的には、周方向縮約法を適用した FRF に曲線適合して得られたモード形状と、固有値解析で得られたモード形状を比較することで明らかにする。実験では、現在のところ振動挙動に関わる研究事例のない二輪車用タイヤを対象にしたモード特性同定を試みる。

また、高減衰特性を有し、振動モードが近接する対象物では、FRF 上で共振峰を明確に捉えることができないので、加振方法を工夫する必要がある。

そこで、対象とする振動モードの減衰を小さくするような速度フィードバック（以下、速度 FB）加振の方法とモード特性同定法を提案する。具体的には、共振峰が明確に現れないほどの高減衰特性を有する多自由度系を対象に、速度 FB 加振を施すことで減衰の影響のみ小さくし、低減衰化された FRF に対してモード特性を同定する。さらに、速度 FB 加振の影響を補正することで、構造物本来のモード特性を同定できることを示す。

1.4 本論文の構成

本研究は前節で取り上げた 3 つの主要課題を解決するものであり、本論文は本章を含めた 6 つの章で構成する。1.3.1 項の課題は第 2 章、1.3.2 項の課題は第 3 章、1.3.3 項の課題は第 4 章と第 5 章において、それぞれ課題の詳細を説明した後に課題解決の方法を提案し、数値例と実験により提案法の妥当性や適用性を検証する。以下に第 2 章以降の概要と構成を示す。

第 2 章では、振動系の運動方程式および FRF の定式化を行い、従来法であるハーフパワー法およびモード円適合法の課題を述べる。また、本研究における実験モード解析法の基

礎となる直線フィット法の同定理論を説明する。さらに、従来法の課題を直線フィット法により解決できることを数値例により示す。その数値例では、周波数分解能が異なる条件のもとでモード特性を同定し、ハーフパワー法およびモード円適合法と直線フィット法で同定精度を比較し、直線フィット法の有効性を示す。

第3章では、対象物が近接モードを有し、対象外のモード成分がモード同定に悪影響を及ぼす課題を取り上げる。そしてハーフパワー法およびモード円適合法を適用する場合と同様の測定データで、より適用範囲の広い1自由度法を提案する。その方法は、比較的モードが近接するFRFを対象とする場合にも、モード特性を精度よく同定できる1自由度法である。具体的には、FRFの実部と虚部の両方において、対象外のモード成分を振動数に関する多項式で近似して、直線フィット法の同定理論に導入する。そしてその多項式の適切な次数を理論的なアプローチで定める。以上のようにして構築した同定法の妥当性と適用性を数値例により検証する。

第4章では、二重曲率を有する周期構造物への周方向縮約法の適用性の課題を取り上げる。初めに、対象物が円筒構造物である場合に有効な周方向縮約法を説明する。次に、その手法が二重曲率を持つ構造物に対しても適用できるか否かを数値解析により検証し、固有関数を三角関数で近似できることを明らかにする。また実験では、現在のところ振動挙動に関わる研究事例のない二輪車用タイヤを対象にモード特性を同定する。加えて、二輪車用タイヤと自動車用タイヤのモード特性を比較し、二重曲率を持つことに起因するモード特性の特徴を考察する。

第5章では、高減衰特性を有する構造物を対象に減衰の影響のみを小さくする加振法およびモード特性の同定法を提案する。具体的には、対象とする振動モードの減衰を小さくするような速度FB加振の方法とゲインの決定方法を提案する。また、そのように決定したゲインを用いた速度FB加振により、FRFを低減衰化してモード特性を同定できることを説明する。さらに、速度FB加振の影響を補正することで、構造物本来の減衰特性も把握できることを示す。数値例では、高減衰特性を有する多自由度系に対して、提案法を適用し、構造物本来のモード特性を同定できることを示す。

第6章では、第2章から第5章で得られた成果を総括し、今後の研究の展望を示す。

第2章 直線フィット法の同定理論および 周波数分解能が異なる場合の有効性検証

2.1 緒言

本章では、本研究におけるモード特性同定の基礎理論となる直線フィット法[36]を説明するとともに、従来の同定法の課題を示す。また、直線フィット法の利点を最大限に活かすことができる場面を想定した数値例により、その有効性を示す。

直線フィット法は周波数領域の1自由度法に該当する実験モード解析法である。この方法は、対象物の減衰特性が非常に低い場合にも高精度にモード特性を同定できる方法として提案された。具体的には、FRFの実部と虚部を連立させ、固有振動数と減衰特性を未知数とする方程式を導出し、最小二乗法により未知数を同定するものである。

実験モード解析の技術は十分に確立されており、周波数領域の1自由度法ではハーフパワー法やモード円適合法が有名であるが、同定値が周波数分解能に依存して変化し[40]、特に低減衰系を対象とする場合には減衰特性の同定値がばらつくことが知られている[27]。これは、モード特性の同定式に周波数分解能に関係するパラメータが含まれることが原因である。周波数分解能は周波数レンジとサンプリング点数の関係により一意的に決定されるものであるため、モード特性は限られた周波数分解能で取得されたFRFの離散データから同定されることとなる。このことが問題となる場面としては、例えば、ある構造物を対象にするときに周波数レンジあるいはサンプリング点数を変更する場面が挙げられる。周波数レンジやサンプリング点数を変更するだけにもかかわらず、試験条件の変更前後で異なるモード特性が同定されてしまい、同定値の信頼性が損なわれる問題が生じる。

一方、直線フィット法の同定式には周波数分解能に関係するパラメータが含まれておらず、FRFの実部と虚部の離散データを直線の式に当てはめてモード同定することから、周波数分解能に依存することなくモード同定できると考えられる。

そこで以下では、直線フィット法の同定理論を説明した後に、数値例により周波数分解能が異なる条件のもとでモード特性を同定し、ハーフパワー法およびモード円適合法と同定精度を比較することで、その有効性を示す。また、実際の実験モード解析において、直線フィット法の利点を最大限に活かすことのできる場面を想定した数値例を示す。

2.2 周波数応答関数の定式化とモード特性

本節では、対象とする振動系の運動方程式と FRF の定式化を行う。はじめに、有限要素解析により N 自由度の対象物の質量マトリックス \mathbf{M} 、減衰マトリックス \mathbf{C} 、剛性マトリックス \mathbf{K} が得られているとすると、運動方程式は式(2.1)で表される。 \mathbf{x} は変位ベクトル、 \mathbf{f} は外力ベクトルである。本研究で扱う減衰マトリックス \mathbf{C} は質量マトリックス \mathbf{M} と剛性マトリックス \mathbf{K} の線形結合で表されるクラスを対象とするが、本節では対象物の減衰特性を構造減衰と仮定し、式(2.2)のようにモデル化する。なお、式(2.2)における α と β は未知の係数である。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\omega}(\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}) \quad (2.2)$$

式(2.1)の左辺第2項を無視した不減衰系において、固有角振動数 ω_p と固有振動モード ϕ を求め、固有振動モードをまとめてモードマトリックス Φ とする。このとき、質量マトリックスとモード質量マトリックスおよび剛性マトリックスとモード剛性マトリックスには、式(2.3)の関係が成立する。

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{m} \quad , \quad \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \mathbf{k} \quad (2.3)$$

\mathbf{m} はモード質量を対角成分に持つマトリックス、 \mathbf{k} はモード剛性を対角成分に持つマトリックスである。いま、式(2.4)のように振幅の大きさ \mathbf{F} 、角振動数 ω の調和外力が作用する場合を考えると、式(2.1)の運動方程式は式(2.5)のように表される。

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}e^{j\omega t} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \frac{1}{\omega}(\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}e^{j\omega t} \quad (2.5)$$

式(2.5)の応答 \mathbf{x} を振幅の大きさ \mathbf{X} と角振動数 ω を用いて式(2.6)のように仮定し、さらに式(2.7)のようにモードマトリックス Φ を用いて \mathbf{X} を表現すると、式(2.8)のようにモード座標における運動方程式が得られる。

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}e^{j\omega t} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{X} = \Phi \mathbf{q} \quad (2.7)$$

$$\left\{ -\omega^2 \mathbf{m} + j(\alpha \mathbf{m} + \beta \mathbf{k}) + \mathbf{k} \right\} \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{F} \quad (2.8)$$

式(2.8)における \mathbf{q} は、モード座標における応答である。いま、 p 次モードに着目すると、その応答は式(2.9)のように表される。なお、 m_p 、 k_p はそれぞれ p 次モードのモード質量、モード剛性である。

$$q_p = \frac{\phi_p^T \mathbf{F}}{k_p - m_p \omega^2 + j(\alpha m_p + \beta k_p)} \quad (2.9)$$

入力点を e 番目の自由度、参照点を r 番目の自由度とした場合に、それぞれの自由度に対応する p 次モード成分を $\phi_{e,p}$ 、 $\phi_{r,p}$ とし、 N 次モードまで採用したときのコンプライアンス $H_{r,e}$ ($=X_r/F_e$) は式(2.10)のように表現される。

$$H_{r,e} = \frac{X_r}{F_e} = \sum_{p=1}^N \frac{\phi_{r,p} \phi_{e,p}}{k_p - m_p \omega^2 + j(\alpha m_p + \beta k_p)} = \sum_{p=1}^N \frac{\frac{\phi_{r,p} \phi_{e,p}}{k_p}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} + j \left(\frac{\alpha}{\omega_p^2} + \beta \right)} = \sum_{p=1}^N \frac{\frac{\phi_{r,p} \phi_{e,p}}{k_p}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} + j g_p} \quad (2.10)$$

$$\text{ただし、} \quad g_p = \frac{\alpha}{\omega_p^2} + \beta$$

任意の振動数 f ($=\omega/2\pi$) に対するコンプライアンスは式(2.11)のように表される。

$$H_{r,e}(f) = \sum_{p=1}^N \frac{\frac{\phi_{r,p}\phi_{e,p}}{k_p}}{\left(1 - \frac{f^2}{f_{np}^2}\right) + jg_p} \quad (2.11)$$

モード特性のパラメータは、 p 次モードの固有振動数 f_{np} 、構造減衰係数 g_p 、固有モードのパラメータを含む項 $(\phi_{r,p}\phi_{e,p})/k_p$ である。文献[32]では固有モードのパラメータを含む項を留数と称しているので、本論文では、 $(\phi_{r,p}\phi_{e,p})/k_p$ を留数と呼ぶこととする。

2.3 従来法におけるモード特性同定の課題

機械構造物の振動を低減する設計のために、対象物のモード特性の評価は重要である。そのため、対象物を打撃加振、あるいは定常加振して得られる応答から、対象物の動特性を把握する有効な方法として実験モード解析があり、その技術は十分に確立されている。

一般的に、対象物が比較的小型で小さい加振力でも十分に固有振動モードを励起できる場合には、対象物に加速度計を貼付け、インパクトハンマで打撃加振して FRF を取得する。そして各共振峰近傍を抽出して 1 自由度系と見なし、ハーフパワー法やモード円適合法でモード特性を同定する。以下にハーフパワー法とモード円適合法におけるモード特性の同定法をまとめ、それぞれの同定法そのものが誤差を生じると考え得る要因について簡単に説明する。

■ ハーフパワー法[20-22]

固有振動数はボード線図上で FRF の大きさ $|H|$ の最大値 $|H|_{\max}$ の振動数とする。ピーク値を読み取れない場合は、共振峰近傍のある大きさ $|H_a|$ になる 2 点の振動数 f_{l_a} , f_{h_a} の中央値 $f_{np} = (f_{l_a} + f_{h_a})/2$ とする。

構造減衰係数はボード線図上で FRF の大きさの最大値 $|H|_{\max}$ の $1/\sqrt{2}$ 倍になる 2 点の振動数 $f_{l_{half}}$ と $f_{h_{half}}$ の差 $f_{w_{half}}$ を求め、 $g_p = f_{w_{half}}/f_{np}$ の関係から同定する。ピーク値を読み取れない場合は $g_p = \sqrt{f_{w_{half}}^2 - 2(f_{h_a} - f_{l_a})^2}/f_{np}$ の関係から同定する。

■ モード円適合法[20-22]

固有振動数はナイキスト線図上で隣接するプロット間の距離が最大となる 2 点の中点とする。

構造減衰係数はナイキスト線図上で固有振動数を挟んで隣接する 2 点が円の中心点からなす角 $\Delta\varphi$ を求め、 $g_p = 4\Delta f / (f_{np}\Delta\varphi)$ の関係から同定する。なお、 Δf は周波数分解能である。

ハーフパワー法とモード円適合法では、モード特性の同定において固有振動数が周波数分解能のどの位置にあるかが重要になる。この位置関係が原因となり、モード特性の同定で困難を伴う場面について説明する。周波数分解能は実験モード解析における振動試験の条

件として、周波数レンジとサンプリング点数の関係により決定される。したがってモード特性は、限られた周波数分解能で取得された FRF の離散データから同定される。対象物そのものの減衰が小さい場合は、ボード線図における共振点近傍は非常に先鋭化しており、周波数分解能の範囲でしかピーク値を読み取ることができない。そのためハーフパワー法では、FRF の最大値を読み取るときに誤差を生じ、その値を利用して算出する減衰特性もまた誤差を生じる。またモード円適合法では、実用的な周波数分解能で描けるナイキスト線図上で円を構成するためのデータが原点付近に集まることから、円適合の精度が低下する。そのため、モード円から得られるパラメータには誤差が生じ、結果として減衰特性の同定誤差となる。以上の理由から、これらの同定法を実際に適用する際には、同定値が周波数分解能に依存して変化し[40]、特に対象物の減衰が非常に小さい場合には、減衰特性の同定値がばらつくことが知られている[27]。

以上のように従来の同定法では、周波数分解能に依存するパラメータを用いてモード特性を同定するため、振動試験の条件によって同定値がばらつくという課題があった。

2.4 直線フィット法の同定理論

2.3 節で説明した課題を解決する方法として、河村らは直線フィット法[36]を開発した。この方法では FRF の実部と虚部を連立させ、固有振動数と減衰特性を未知数とする方程式を導出し、複数の測定周波数から方程式をまとめて最小二乗法により未知数を同定する。以下に直線フィット法の同定理論を説明する。

N 自由度系のコンプライアンス $H_{r,e}$ のうち p 次モードに着目した式(2.11)を、実部と虚部の和で表現すると次式のようになる。

$$H_{r,e}^{(p)}(f) = \frac{\frac{\phi_{r,p}\phi_{e,p}}{k_p}}{\left(1 - \frac{f^2}{f_{np}^2}\right) + jg_p} = \frac{\left(1 - \frac{f^2}{f_{np}^2}\right) \frac{\phi_{r,p}\phi_{e,p}}{k_p}}{\left(1 - \frac{f^2}{f_{np}^2}\right)^2 + g_p^2} + j \frac{(-g_p) \frac{\phi_{r,p}\phi_{e,p}}{k_p}}{\left(1 - \frac{f^2}{f_{np}^2}\right)^2 + g_p^2} \quad (2.12)$$

実部 $\text{Re}\{H_{r,e}^{(p)}(f)\}$ と虚部 $\text{Im}\{H_{r,e}^{(p)}(f)\}$ に分離すると次式のように表すことができる。

$$\text{Re}\{H_{r,e}^{(p)}(f)\} = \frac{\left(1 - \frac{f^2}{f_{np}^2}\right) \frac{\phi_{r,p}\phi_{e,p}}{k_p}}{\left(1 - \frac{f^2}{f_{np}^2}\right)^2 + g_p^2}, \quad \text{Im}\{H_{r,e}^{(p)}(f)\} = \frac{(-g_p) \frac{\phi_{r,p}\phi_{e,p}}{k_p}}{\left(1 - \frac{f^2}{f_{np}^2}\right)^2 + g_p^2} \quad (2.13)$$

留数 $(\phi_{r,p}\phi_{e,p})/k_p$ を消去して整理すると、任意の振動数 f について次式の基礎方程式が成立する。

$$\text{Im}\{H_{r,e}^{(p)}(f)\} \frac{f^2}{f_{np}^2} - \text{Re}\{H_{r,e}^{(p)}(f)\} g_p = \text{Im}\{H_{r,e}^{(p)}(f)\} \quad (2.14)$$

FRF 上に設定した解析区間に含まれるデータ点数を l とし、その区間の振動数を $f_1 \sim f_l$ とすると、式(2.14)より次式のような l 個の方程式が成立する。なお、 \mathbf{A} は $l \times 2$ 、 \mathbf{x} は 2×1 、 \mathbf{b} は $l \times 1$ の行列である。

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\text{ただし, } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \text{Im}\{H_{r,e}^{(p)}(f_1)\}f_1^2 & -\text{Re}\{H_{r,e}^{(p)}(f_1)\} \\ \text{Im}\{H_{r,e}^{(p)}(f_2)\}f_2^2 & -\text{Re}\{H_{r,e}^{(p)}(f_2)\} \\ \vdots & \vdots \\ \text{Im}\{H_{r,e}^{(p)}(f_l)\}f_l^2 & -\text{Re}\{H_{r,e}^{(p)}(f_l)\} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_{np}^2} \\ g_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \text{Im}\{H_{r,e}^{(p)}(f_1)\} \\ \text{Im}\{H_{r,e}^{(p)}(f_2)\} \\ \vdots \\ \text{Im}\{H_{r,e}^{(p)}(f_l)\} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

そして, Moore-Penrose の疑似逆行列 \mathbf{A}^+ を用いた線形最小二乗法により, 次式のように固有振動数 f_{np} と構造減衰係数 g_p を同定できる.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} \quad (2.16)$$

ただし, データ点数 l が 2 個の場合には逆行列 \mathbf{A}^{-1} を用いる. さらに, 留数は式(2.15)で同定した固有振動数 f_{np} と構造減衰係数 g_p を用いて, 次式により同定できる.

$$\frac{\phi_{r,p}\phi_{e,p}}{k_p} = [\text{Re}\{H_{r,e}^p(f)\} + \text{Im}\{H_{r,e}^p(f)\}] \frac{\{1 - (f/f_{np})^2\}^2 + g_p^2}{\{1 - (f/f_{np})^2\}^2 - g_p^2} \quad (2.17)$$

以上に説明した直線フィット法は, 周波数分解能が異なる場合にも, FRF データを直線近似する関係上, 従来の同定法に比べて高精度にモード特性を同定できることが特徴である. なお, ここではヒステリシス減衰系のコンプライアンスを対象に式(2.14)を導出したが, モビリティとアクセラランスにおいても成立する. また, 比例粘性減衰を仮定した FRF においても同様に導出できる.

2.5 周波数分解能が異なる場合のモード特性同定の有効性

本節では、周波数分解能が異なる条件のもとでモード特性を同定し、ハーフパワー法およびモード円適合法と直線フィット法の同定精度を比較することで、その有効性を示す。また、実際の実験モード解析において、直線フィット法の利点を最大限に活かすことのできる場面を想定した数値例を示す。具体的には、鋼製のはりのように減衰が小さい対象物の打撃試験において、測定ノイズの影響を低減するためにサンプリング時間を短くする場面を想定し、周波数分解能が異なる条件下でも同定値が大きく変わらないことを示す。

2.5.1 1 自由度系の FRF を用いたモード特性同定の数値例

実際の振動試験から取得される FRF は複数個の振動モードを伴う多自由度系であるが、1 自由度法による同定では振動モードごとに共振峰近傍の離散データを抽出して 1 自由度系として扱う。そのため、本項の数値例では 1 自由度系の FRF を対象とする。なお、対象物の減衰が小さい場合には、固有振動数が周波数分解能のどの位置にあるかが非常に問題となるため、その位置も変化させる。また、同定法の違いによる同定値の比較をするので、ここでは FRF にノイズは考慮せず、正しい FRF を対象とする。検証モデルのモード特性を以下のように設定してコンプライアンスを算出した。

- 固有振動数 $f_{np} = 50 \text{ Hz}$
- 構造減衰係数 $g_p = 5 \times 10^{-3}$ ($\alpha = 0.0$, $\beta = 5 \times 10^{-3}$)
- 留数 $1/k_p = 1 \times 10^{-4} \text{ m/N}$
- 周波数分解能 $\Delta f = 0.15625 \text{ Hz}$
- 周波数分解能と固有振動数の位置関係 パターン(a), パターン(b) (図 2.1 参照)

図 2.1 は周波数分解能と固有振動数の位置関係を示している。検証モデルで算出した FRF のコクアド線図、ボード線図、ナイキスト線図を図 2.2 に示す。

表 2.1 はハーフパワー法とモード円適合法、直線フィット法によるモード特性の同定結果を示している。なお、同定では共振峰の最大値を含む 20 点の FRF データを使用した。固有振動数はいずれの同定方法であっても十分精度よく同定できている。しかしながら構造減衰係数は、ハーフパワー法およびモード円適合法では同定値が真値と大きく異なり、

同定精度が悪いことが確認できる. 上述したとおり, ここではノイズを含まない正しい FRF を対象にしているため, これらの構造減衰係数の誤差は同定法による誤差である. ハーフパワー法では, ボード線図上でコンプライアンスの最大値をとる振動数を固有振動数とみなすことに起因する誤差, またコンプライアンスの最大値の $1/\sqrt{2}$ 倍の大きさとなる振動数を, 離散的な測定データから近似的に求めることによる誤差が生じる. モード円適合では, 比較的減衰が小さいことに起因して円を構成するデータ点数が少なく, 円の適合精度が低下する. そのため, 固有振動数を二つの周波数の中点としたこと, そしてそのようにして求めた固有振動数を用いて同定したことに起因する. 一方で直線フィット法では, FRF の離散データが式(2.14)の基礎方程式を満足するため, 固有振動数と構造減衰係数を精度よく同定できている.

以上より, 直線フィット法では周波数分解能が異なる条件のもとでモード特性を同定した場合でも, 高精度に同定できることを確認し, 同定法そのものの有効性を示した.

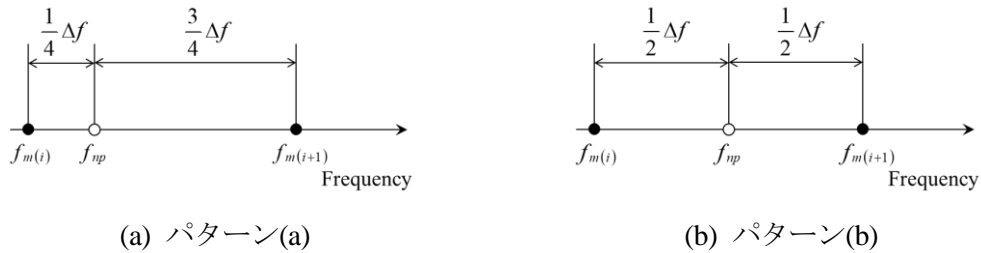


図 2.1 周波数分解能と固有振動数の位置関係

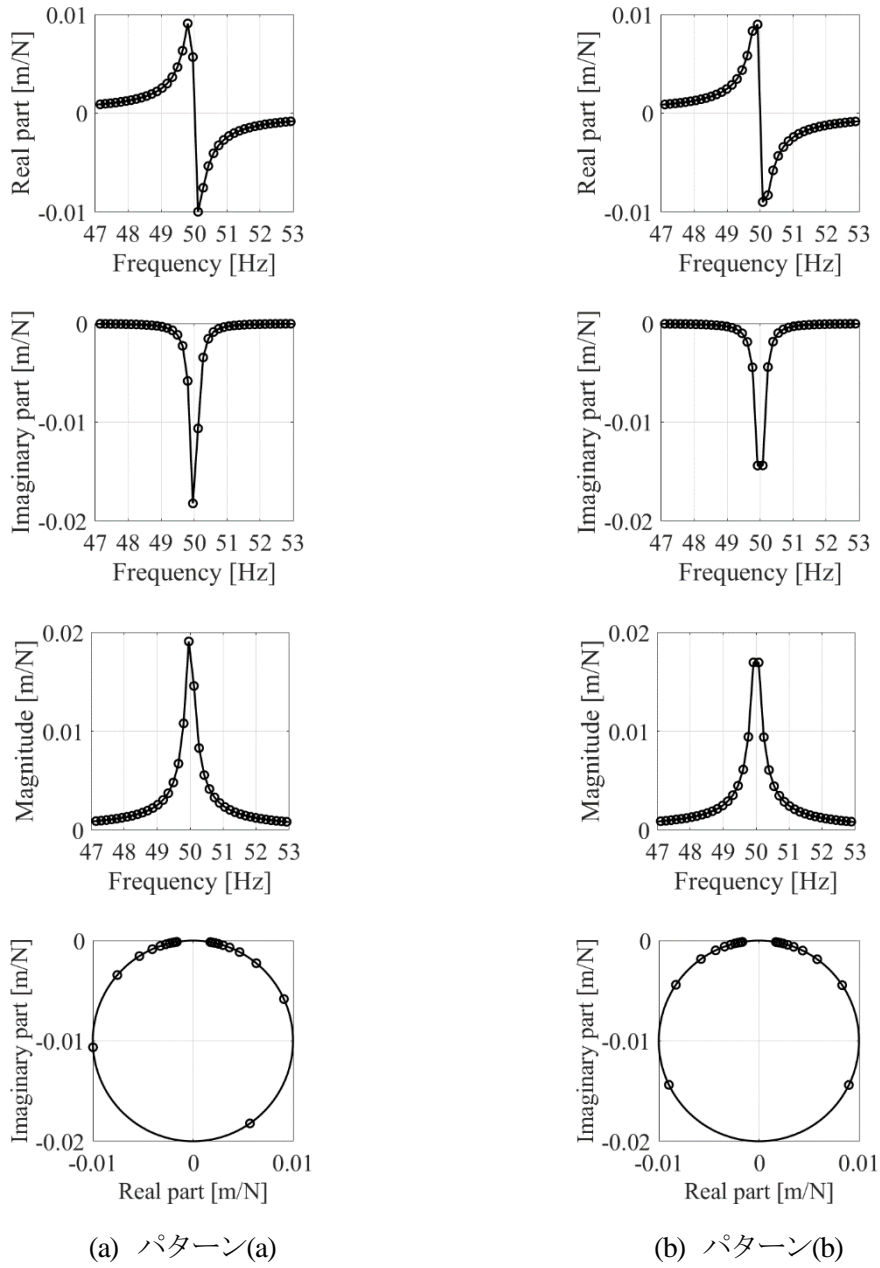


図 2.2 検証モデルの FRF

表 2.1 モード特性の同定結果

Pattern	half power method		circle fit method		linear fit method	
	f_{np} [Hz]	g_p [-]	f_{np} [Hz]	g_p [-]	f_{np} [Hz]	g_p [-]
(a)	50.04	5.911×10^{-3}	49.96	5.775×10^{-3}	50.00	5.000×10^{-3}
(b)	50.00	5.594×10^{-3}	50.00	5.730×10^{-3}	50.00	5.000×10^{-3}

2.5.2 打撃試験を想定したモード特性同定の数値例

実際の実験モード解析において、対象物の減衰が小さい場合は、加振による接触部の減衰力が FRF の推定に悪影響を与えやすいため、インパクトハンマを用いた打撃試験が有利である。例えば、鋼製のはりを対象とする場合には、小型の加速度計を貼付け、インパクトハンマで打撃加振して FRF を取得するが、減衰が非常に小さいため標準的なサンプリング時間内で加速度応答が十分に減衰しない。そのため、フーリエ変換により FRF を推定する段階で、漏れ誤差を生じる。一方、サンプリング点数を増やして長いサンプリング時間を設定することは可能であるが、時間がたつにつれて加速度応答は小さくなるのに対し、相対的に測定ノイズの割合が大きくなる。そのため、サンプリング時間を長くすると測定ノイズの影響により FRF の推定精度が低下する問題が生じる。

このような問題を回避するために、加速度応答に指数窓をかけて FRF を推定し、モード同定後に指数窓の影響を補正する方法が一般的に使用される。指数窓の指数の大きさは、サンプリング時間内で応答が減衰するように、適当に与えることができるため、例えば大きな指数を設定して強制的に応答を減衰させ、サンプリング時間を短くすることも可能である。サンプリング時間を短くする場合は、周波数分解能が粗くなるため、従来の同定法ではモード特性同定の信頼性が低下する問題があったが、直線フィット法ではその問題が生じないと考えられる。

そこで、低減衰系を対象とした打撃試験でサンプリング時間を短くする場面を想定し、モード特性を同定する数値例を示す。この場面は周波数分解能が異なる条件下でも同定精度が大きく変わらないという直線フィット法の利点を最大限に活かすことのできる場面といえる。

以下では具体的な数値例について説明する。検証モデルのモード特性は、表 2.2 のように低減衰特性を持つように構造減衰係数を設定した。また、計測条件を表 2.3 に示す。表 2.3 のように周波数レンジを 1000 Hz と固定し、サンプリング点数を 16384 点と 8192 点のように変更することで周波数分解能が 0.15625 Hz と 0.31250 Hz のように異なる条件を設定した。この数値例においては、表 2.2 で設定した構造減衰係数が非常に小さい値であることから、表 2.3(a), (b), (c) に示すサンプリング時間内では応答が十分に減衰しない条件となる。このままでは FRF に漏れ誤差が生じるため、加速度応答に指数窓をかけたデータから FRF を算出する。以下に、この数値例で確認する点をまとめる。

- 表 2.3(a), (b)に示すように、サンプリング時間が 6.4 秒である場合に、指数 α の大きさが $\alpha=0.4$ と $\alpha=0.9$ のように設定し、指数 α の大きさが異なることによりモード特性の同定値が変化するかどうかを確認する。
- 表 2.3(b), (c)に示すように、サンプリング時間を 6.4 秒と 3.2 秒のように設定し、指数の大きさを $\alpha=0.9$ とした場合に、周波数分解能が異なることによりモード特性の同定値が変化するかどうかを確認する。

この 2 点の項目で、どちらの場合でも同定値が変化しないことを示すことができれば、実際の実験モード解析で指数窓の指数の大きさと計測条件をある程度自由に設定しても、モード特性の同定精度が変わらないので有効であるといえる。

表 2(a), (b)に対応する加速度応答を図 2.3 に、FRF を図 2.4 に示す。図 2.3 および図 2.4 において、黒線は検証モデルで指数窓をかけない場合の結果、図 2.3(a)と図 2.4(a)の赤線は $\alpha=0.4$ の指数窓をかけた場合の結果、図 2.3(b)と図 2.4(b)の青線は $\alpha=0.9$ の指数窓をかけた場合の結果である。これらの図から、指数窓をかけることにより、強制的に減衰が付加されることがわかる。図 2.4(a)と図 2.4(b)を比較して指数窓の影響を確認すると、例えばパターン(a)では 1 次モードの大きさが $207.85 \text{ m/s}^2/\text{N}$ であるのに対し、パターン(b)では 1 次モードの大きさが $129.16 \text{ m/s}^2/\text{N}$ となっており、指数 α が大きい方が共振峰は小さくなる。ただし、この減衰の影響はモード同定後に補正することができる。したがって、図 2.4 の各 FRF からそれぞれモード特性が正しく同定され、それぞれの指数の大きさに補正されたとすると、同定されるモード特性は表 2.2 に示す真値と同一の値を示すことになる。ただし、この数値例では多自由度系の FRF を使用するため、1 自由度系を抽出しても対象外モード成分が含まれることから完全な 1 自由度系とならないため、同定値が表 2.2 に示す真値と一致しないことを断っておく。

表 2.4(a), (b), (c)に計測パターンごとのモード特性の同定結果を示し、ハーフパワー法とモード円適合法, 直線フィット法で同定精度を比較する。固有振動数については表 2.4(a), (b), (c)より、各同定法において高精度に同定できているといえる。一方、構造減衰係数については、ハーフパワー法とモード円適合法ではパターンごとに同定値が変動し、表 2.2 の真値とは大きく異なることがわかる。まず、表 2.4(a), (b)に着目すると、指数窓の指数

の大きさが大きいほど同定値が真値に近くなり、同定精度が向上している。指数窓により強制的に付加される減衰が大きいほど、ボード線図上で共振峰近傍の離散データの大きさの差が小さくなるため、ピーク値の $1/\sqrt{2}$ 倍となる2点の振動数の近似精度が向上したことによりハーフパワー法の同定精度が向上したと考えられる。また、付加される減衰が大きいほどモード円を構成するプロットの数が増え、円の適合精度が向上したことにより、モード円適合法の同定精度が向上したものと考えられる。次に、表 2.4(b), (c)に着目すると、周波数分解能が粗いパターン(c)の同定精度が高い結果となった。この原因は周波数分解能が粗くなったことで本来はピークの $1/\sqrt{2}$ 倍になる2点の振動数の差を読み取る誤差が大きくなるが、この数値例ではその差が偶然に小さくなり、パターン(b)よりも構造減衰係数の値が真値に近くなったことを確認した。また、モード円適合法については、パターン(b), (c)で円の適合精度にはさほど差がなかったが、同定式からもわかるように、周波数分解能が粗いパターン(c)の同定値が大きくなり、パターン(b)より誤差が大きくなった。対照的に直線フィット法ではすべてのパターンで同定値の差が小さかった。この数値例では多自由度系の FRF を扱ったが、共振峰同士が離れているため、FRF の離散データが式 (2.14) の基礎方程式を満足しやすく、固有振動数と構造減衰係数を精度よく同定できたと考えられる。

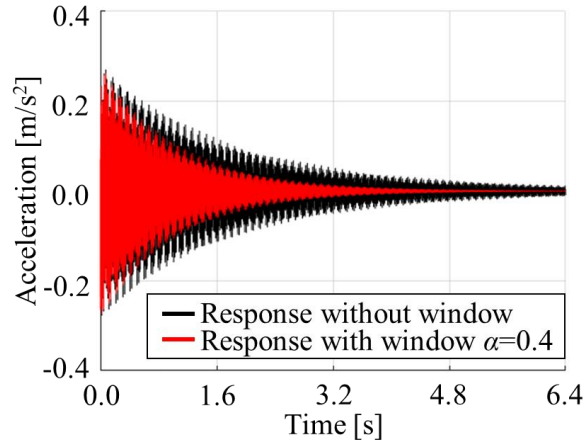
以上のように、指数窓による強制的な減衰の付加があり、かつ周波数分解能が異なる条件でも、直線フィット法ではモード特性の同定値のばらつきが小さいことを示した。鋼製のはりのように、減衰が小さい構造物を対象に打撃試験を実施してモード特性を同定する場面で、指数窓の指数の大きさと計測条件をある程度自由に設定しても同定値がばらつかず、有効であることを把握した。

表 2.2 検証モデルのモード特性

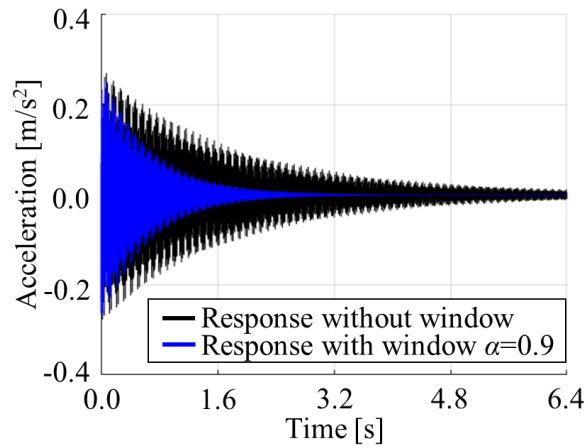
Mode order	f_{np} [Hz]	g_p [-]	$(\phi_{r,p}\phi_{e,p})/k_p$ [m/N]
1	51.9218	2.000×10^{-3}	9.3959×10^{-6}
2	145.0391	9.000×10^{-4}	1.2041×10^{-6}
3	279.9609	8.000×10^{-4}	3.2318×10^{-6}

表 2.3 計測条件

Pattern	Sampling points N [-]	Frequency range F_s [Hz]	Sampling time T [sec]	Frequency resolution Δf [Hz]	Exponent α [-]
(a)	16384	1000	6.4	0.15625	0.4
(b)	16384	1000	6.4	0.15625	0.9
(c)	8192	1000	3.2	0.31250	0.9

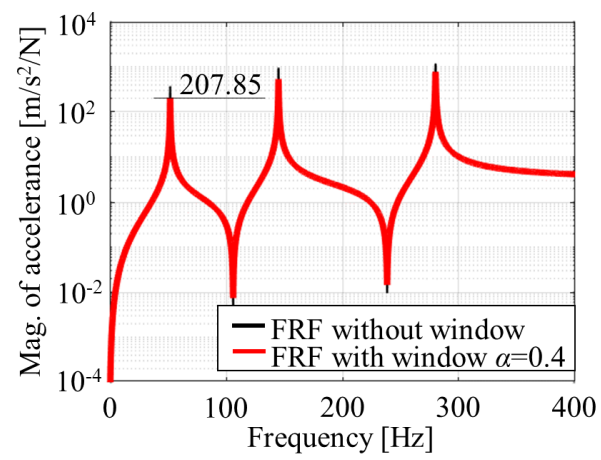


(a) パターン(a)

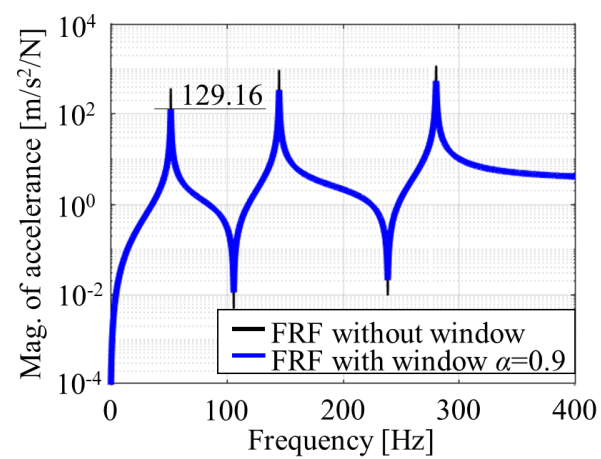


(b) パターン(b)

図 2.3 検証モデルの加速度応答



(a) パターン(a)



(b) パターン(b)

図 2.4 検証モデルの FRF

表 2.4(a) パターン(a)におけるモード特性の同定結果

Mode	half power method		circle fit method		linear fit method	
order	f_{np} [Hz]	g_p [-]	f_{np} [Hz]	g_p [-]	f_{np} [Hz]	g_p [-]
1	51.8750	3.1248×10^{-3}	51.9531	2.8096×10^{-3}	51.9221	2.0011×10^{-3}
2	145.0000	1.1668×10^{-3}	145.0781	1.2094×10^{-3}	145.0387	8.9972×10^{-4}
3	280.0000	8.7750×10^{-4}	279.9219	9.2833×10^{-4}	279.9600	7.9958×10^{-4}

表 2.4(b) パターン(b)におけるモード特性の同定結果

Mode	half power method		circle fit method		linear fit method	
order	f_{np} [Hz]	g_p [-]	f_{np} [Hz]	g_p [-]	f_{np} [Hz]	g_p [-]
1	51.8750	2.5723×10^{-3}	51.9531	2.5392×10^{-3}	51.9223	2.0017×10^{-3}
2	145.0000	1.0706×10^{-3}	145.0781	1.1141×10^{-3}	145.0382	8.9986×10^{-4}
3	280.0000	8.4742×10^{-4}	279.9219	8.9394×10^{-4}	279.9589	7.9896×10^{-4}

表 2.4(c) パターン(c)におけるモード特性の同定結果

Mode	half power method		circle fit method		linear fit method	
order	f_{np} [Hz]	g_p [-]	f_{np} [Hz]	g_p [-]	f_{np} [Hz]	g_p [-]
1	51.8750	2.4884×10^{-3}	52.0312	4.7258×10^{-3}	51.9223	2.0048×10^{-3}
2	145.0000	9.9377×10^{-4}	145.1563	1.9231×10^{-3}	145.0383	8.9840×10^{-4}
3	280.0000	8.2971×10^{-4}	279.8438	1.2752×10^{-3}	279.9590	7.9887×10^{-4}

2.6 結言

本章では、モード特性同定の基礎理論となる直線フィット法を説明するとともに、従来のモード特性同定法の課題を示した。また、直線フィット法の利点を最大限に活かすことができる場面を想定した数値例により、その有効性を示した。得られた知見は以下のとおりである。

- 直線フィット法は FRF の実部と虚部を連立させ、固有振動数と減衰特性を未知数とする方程式を導出し、最小二乗法により未知数を同定するものである。
- 1 自由度系の FRF を用いた数値例では、直線フィット法の同定値が周波数分解能に依存して変化せず、特に低減衰系を対象とする場合に減衰特性の同定値がばらつくという従来の同定法の課題を解決できることを示した。
- 同定値が周波数分解能に依存して変化しないという利点を活かす場面の数値例として、減衰が小さい対象物の打撃試験を想定した実験モード解析を実施した。ここでは、測定ノイズの影響を低減するためにサンプリング時間を短くする場面を設定し、周波数分解能が異なる条件下でモード特性を同定した。直線フィット法の同定値は、従来法よりばらつかず、高精度に同定できることを確認した。

以上の検討により、直線フィット法の有効性を示すことができたので、次章以降ではこの同定理論をさらに改良するとともに、新しい実験モード解析法の展開を考える。

第3章 近接モードの成分を考慮した一般構造物のモード特性同定

3.1 緒言

実験モード解析の方法は1自由度法と多自由度法に大別され、それぞれ数多くの研究からそれらの技術は十分に確立されており[20-22]、広く運用されている[103]。例えば、1自由度法としてはハーフパワー法やモード円適合法があり[35,56]、多自由度法としては偏分反復法[37]、Least square complex frequency 法[38]、Poly-reference least squares complex frequency domain 法[39]、部分空間同定法[40]がある。近年では蟻コロニー最適化を利用した方法[41]や、動的モード分解を機械システムのモード同定に適用した方法[42]が提案された。1自由度法は周波数領域で行われることが多く、FRFの各共振峰を1自由度系とみなしてモード特性を同定する方法である。多自由度法を容易に利用できる環境であれば、あえて1自由度法を用いる場面は少ないと考えられるが、把握している限りでは多自由度曲線適合プログラムがFFTアナライザーに標準装備されているものは少なく、実際にモノづくりの設計開発の現場ではハーフパワー法やモード円適合法でモード特性を同定している場合も少なからずある[58,63,64]。通常、1自由度法は多自由度法に比べて同定精度は劣るが、解析手法の簡便性や低コストで導入できることから近年でも必要に応じて利用されている[67-70]。さらに、従来の1自由度法に代わる新たな同定法の開発も行われている。Guらは比例ヒステリシス減衰を仮定した1自由度系のFRF理論式に基づく非線形最小二乗法を提案した[75]。河村らは、比例ヒステリシス減衰および比例粘性減衰を仮定した1自由度系のFRFの実部と虚部を連立することで、固有振動数と減衰特性を未知数とする線形方程式を導出し、線形最小二乗法によって未知数を同定する方法を提案した[36]。前章では、対象とする振動モードが卓越する振動系のモード同定において、周波数分解能に起因する従来の1自由度法の問題を直線フィット法により解決できることを示した。これにより同定法そのものの有効性を確認したが、各振動モードが近接する場合にも良い同定結果を得ることができるように適用範囲を拡大し、その有効性を示すことができれば有用であると考えられる。従来の1自由度法は、解析区間に同定対象としないモード成分の影響がある場合でもその成分を無視して同定するのに対して、直線フィット法では、同定対象としないモード成分を剰余質量・剰余剛性として近似して同定する方法が提案されている[36]。しかしながら、本来剰余質量・剰余剛性は同定対象としないモードが対象モードの固

有振動数から十分に離れていることを仮定してモデル化されており、対象モードの固有振動数に近接して存在する対象外のモード成分を適切に近似したものではない。その他、対象外モード成分を級数展開して剰余項をモデル化する方法も提案されているが、その検証では比較的モード同士が卓越した振動系を対象としており[76]、近接モードが存在する場合の有効性は不明である。このような背景から、近接モードが存在する解析区間において高精度にモード特性を同定できる 1 自由度法はいまのところないといえる。

そこで本章では、従来の 1 自由度法を適用する場合と同様の測定データで、より適用範囲の広い 1 自由度法を提案することを目的に、比較的モードが近接する FRF を対象とする場合にも、モード特性を精度よく同定できる 1 自由度法について検討する。ただし、モード指示関数[104]により共振峰を判定できる範囲とする。具体的には、FRF の実部と虚部の両方において、対象外のモード成分を振動数に関する多項式で近似して、直線フィット法の同定理論に導入する。そしてその多項式の適切な次数を理論的なアプローチで定める。以上のようにして構築した同定手法を、数値例によって検証する。そのため比較的高減衰でモードが近接する検証モデルを取り上げ、FRF の真値を用いてモード特性の同定を行い、提案手法の妥当性を検証する。次に、実際の同定を模擬するため、ノイズを含んだ FRF データを用いてモード特性を同定し、提案手法の適用性を検証する。

3.2 近接モード成分に起因する同定の問題点

提案されている直線フィット法の基礎方程式は、同定対象モードの成分のみから構成されているので、FRF に同定対象外のモード成分が含まれる場合、それらの成分を対象モード成分と分離して同定することはできない。そこで、対象外モード成分の挙動を把握し、対象モード成分から構成される基礎方程式に付加する剰余項を振動数に関する多項式により近似することで、線形最小二乗法の適用を可能にする方法を検討する。1 自由度法を適用する解析区間における対象外モード成分の挙動を具体的に説明するため、数値例として図 3.1 のようにモードが近接した 3 自由度系の FRF を取り上げる。この数値例は、これまでに実測した FRF を参考に、固有振動数と留数のパラメータを適当に与えたものである。同定対象モードを固有振動数 f_{np} が 80 Hz の 2 次モードとし、その FRF を青色実線で示す。また解析区間を縦破線で示す。図 3.1 のように対象外のモードが近接している場合

は、赤色実線の対象外モード成分が解析区間に有意に含まれ、完全な 1 自由度系にならないことから従来の 1 自由度法では同定精度が悪くなる。

ここで、同定対象の p 次モード（この数値例では $p=2$ ）の FRF $H_{re}^{(2)}(f)$ の実部 $\text{Re}\{H_{re}^{(2)}(f)\}$ ，虚部 $\text{Im}\{H_{re}^{(2)}(f)\}$ を図 3.2(a)，全体の FRF $H_{re}(f)$ の実部 $\text{Re}\{H_{re}(f)\}$ ，虚部 $\text{Im}\{H_{re}(f)\}$ を図 3.2(b)，対象外モード成分の実部を $A(f)$ ，虚部を $B(f)$ として図 3.2(c) に示す。図 3.2(a)，(c) の大きさを比較すると，解析区間において実部と虚部のそれぞれに含まれる対象外モード成分は無視できず，対象モードのモード同定に悪影響を及ぼすことが予想される。

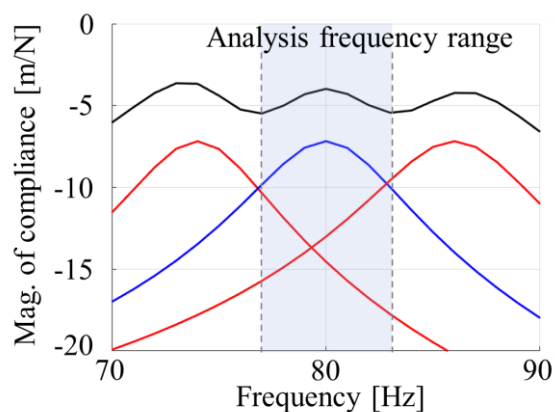
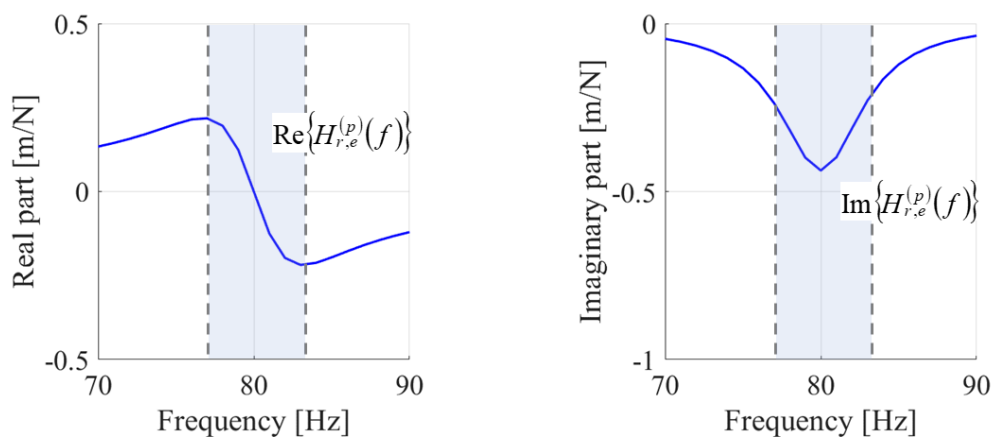
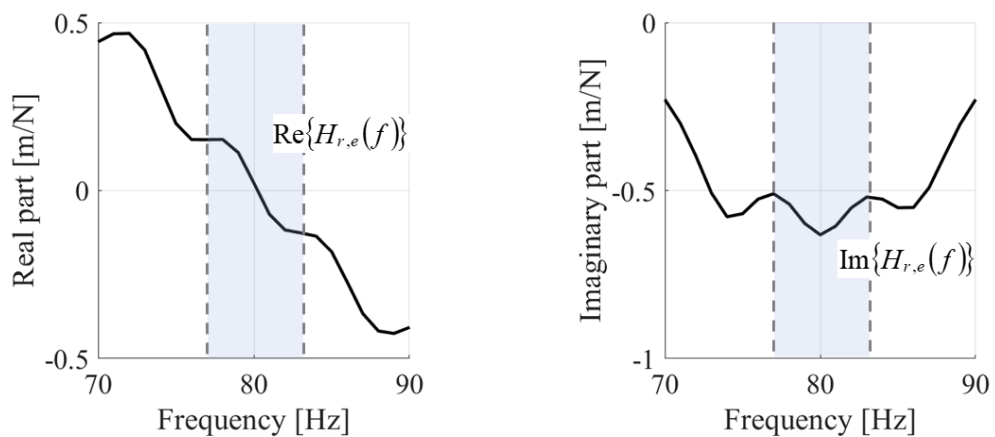


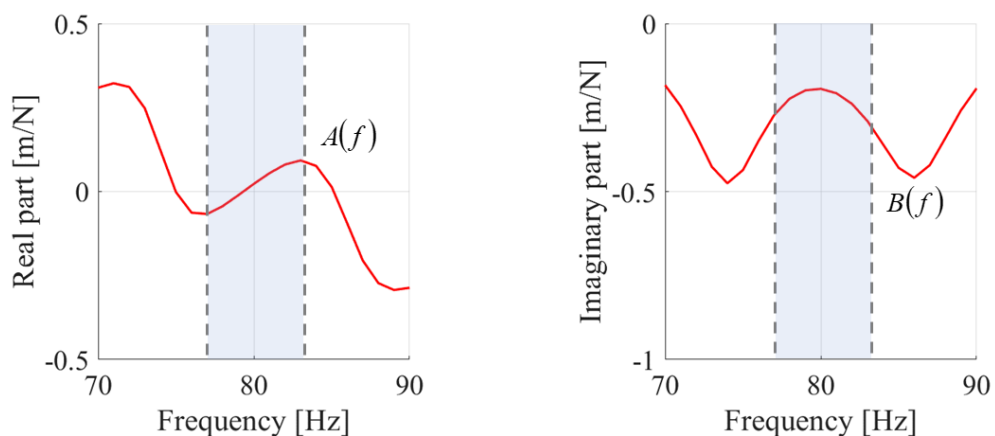
図 3.1 モードが近接する 3 自由度系の FRF と解析区間



(a) 同定対象モードの FRF の実部と虚部



(b) 全体の FRF の実部と虚部



(c) 対象外モード成分の実部と虚部

図 3.2 モードが近接する 3 自由度系の FRF の例

3.3 近接モード成分を考慮した同定法

前節では解析区間において実部と虚部のそれぞれに含まれる対象外モード成分は無視できないことを説明した。そこで本節では、同定対象の p 次モードの FRF $H_{re}^{(p)}(f)$ と全体の FRF $H_{r,e}(f)$ 、対象外モード成分の実部 $A(f)$ と虚部 $B(f)$ の関係から、 p 次モードのモード特性を同定する方法を提案する。

3.3.1 対象外モード成分を考慮した従来の直線フィット法

本項では、図 3.1 と図 3.2 のようにモードが近接する場合にも高精度にモード特性を同定できる方法を提案するため、実部と虚部の対象外モード成分を振動数 f に関する多項式により近似し、これを直線フィット法の基礎方程式に導入する。まず図 3.2(c) のような対象外モード成分の実部、虚部をそれぞれ $A(f)$ 、 $B(f)$ とする。

次に図 3.2(b) のような全体の FRF $H_{r,e}(f)$ の実部 $\text{Re}\{H_{r,e}(f)\}$ 、虚部 $\text{Im}\{H_{r,e}(f)\}$ から対象外モード成分の実部 $A(f)$ 、虚部 $B(f)$ をそれぞれ差し引き、同定対象の p 次モードのみの 1 自由度系の FRF を考えると次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \text{Re}\{H_{r,e}^{(p)}(f)\} &= \frac{\left(1 - \frac{f^2}{f_{np}^2}\right) \frac{\phi_{r,p} \phi_{e,p}}{k_p}}{\left(1 - \frac{f^2}{f_{np}^2}\right)^2 + g_p^2} = \text{Re}\{H_{r,e}(f)\} - A(f) \\ \text{Im}\{H_{r,e}^{(p)}(f)\} &= \frac{(-g_p) \frac{\phi_{r,p} \phi_{e,p}}{k_p}}{\left(1 - \frac{f^2}{f_{np}^2}\right)^2 + g_p^2} = \text{Im}\{H_{r,e}(f)\} - B(f) \end{aligned} \quad (3.1)$$

留数 $(\phi_{r,p} \phi_{e,p})/k_p$ を消去して整理すると、提案法の基礎方程式は次式のようにになる。

$$\text{Im}\{H_{r,e}(f)\} \frac{f^2}{f_{np}^2} - \text{Re}\{H_{r,e}(f)\} g_p + A(f) g_p + B(f) \left(1 - \frac{f^2}{f_{np}^2}\right) = \text{Im}\{H_{r,e}(f)\} \quad (3.2)$$

式(3.2)の左辺第 3 項 $A(f) g_p$ と第 4 項 $B(f)(1 - f^2/f_{np}^2)$ が提案法における剰余項となる。本研究では、 $A(f)$ 、 $B(f)$ を振動数 f に関する多項式で表現するときに、妥当な多項式の次数

を一般的な振動系に対して定める方法を提案する。その詳細は次節以降で説明する。なお、同定対象のモードが存在する周波数範囲から隣のモードが十分に離れている場合には、剰余質量 S と剰余剛性 Z を用いて剰余項を表す方法が一般的に使用されており[20,32]、この場合は式(3.2)において $A(f)$ を $-1/(f^2S)+1/Z$ とし、 $B(f)$ を無視することで基礎方程式が次式のように導かれる。

$$\text{Im}\{H_{r,e}(f)\}\frac{f^2}{f_{np}^2} - \text{Re}\{H_{r,e}(f)\}g_p - \frac{g_p}{f^2S} + \frac{g_p}{Z} = \text{Im}\{H_{r,e}(f)\} \quad (3.3)$$

3.3.2 対象外モード成分の厳密な表現

図 3.3 のように同定対象の p 次モードと、その低次側（添え字 L ）、高次側（添え字 H ）の振動モードを考え、解析区間における剰余項の挙動を把握し、妥当な多項式の次数を定める方法について検討する。本節ではモデルの概要をまとめる。

- 低次側の固有モード；固有振動数 f_{nL} 、留数 R_L 、構造減衰係数 g_L
- 高次側の固有モード；固有振動数 $f_{nH} = \beta f_{nL}$ 、留数 $R_H = \gamma R_L$ 、構造減衰係数 $g_H = \mu g_L$
- 低次側と高次側の固有振動数の比； β ($\beta > 1$)
- 低次側と高次側の留数の比； γ
- 低次側と高次側の構造減衰係数の比； μ
- 解析区間； $f_{nL} \sim f_{nH}$
- 解析区間内の任意の振動数； $f = \{\alpha(\beta-1)+1\}f_{nL}$ ($0 \leq \alpha \leq 1$)

以上の関係を式(2.12)に代入すると、低次側と高次側の振動モードの FRF $H_{re}^{(L)}(f)$ と $H_{re}^{(H)}(f)$ は、それぞれ次式のように α に関する式で表現できる。

$$H_{r,e}^{(L)}(f) = \frac{R_L}{\left(1 - \frac{f^2}{f_{nL}^2}\right) + jg_L} = \frac{R_L}{1 - \{\alpha(\beta-1)+1\}^2 + jg_L} \quad (3.4)$$

$$H_{r,e}^{(L)}(\alpha) = \frac{\left[1 - \{\alpha(\beta-1)+1\}^2\right]R_L}{\left[1 - \{\alpha(\beta-1)+1\}^2\right] + g_L^2} + j \frac{(-g_L)R_L}{\left[1 - \{\alpha(\beta-1)+1\}^2\right] + g_L^2}$$

$$\begin{aligned}
H_{r,e}^{(H)}(f) &= \frac{R_H}{\left(1 - \frac{f^2}{f_{nH}^2}\right) + jg_H} = \frac{\gamma R_L}{1 - \frac{\{\alpha(\beta-1)+1\}^2}{\beta^2} + j(\mu g_L)} \\
H_{r,e}^{(H)}(\alpha) &= \frac{\left[1 - \frac{\{\alpha(\beta-1)+1\}^2}{\beta^2}\right] \gamma R_L}{\left[1 - \frac{\{\alpha(\beta-1)+1\}^2}{\beta^2}\right]^2 + (\mu g_L)^2} + j \frac{(-\mu g_L) \gamma R_L}{\left[1 - \frac{\{\alpha(\beta-1)+1\}^2}{\beta^2}\right]^2 + (\mu g_L)^2}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

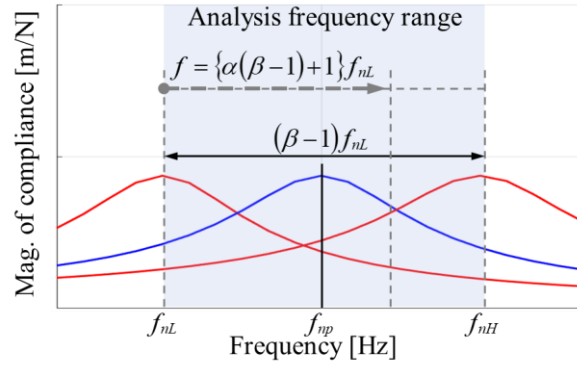


図 3.3 対象外モード成分を表現する 3 自由度系モデル

式(3.4)および(3.5)の実部と虚部を用いて、対象外モード成分の実部 $A(f)$ と虚部 $B(f)$ は、それぞれ次式のように α に関する式で表現できる。

$$\begin{aligned}
A(f) &= \text{Re}\{H_{r,e}^{(L)}(f)\} + \text{Re}\{H_{r,e}^{(H)}(f)\} = \frac{\left(1 - \frac{f^2}{f_{nL}^2}\right) R_L}{\left(1 - \frac{f^2}{f_{nL}^2}\right)^2 + g_L^2} + \frac{\left(1 - \frac{f^2}{f_{nH}^2}\right) R_H}{\left(1 - \frac{f^2}{f_{nH}^2}\right)^2 + g_H^2} \\
A(\alpha) &= \frac{\left[1 - \frac{\{\alpha(\beta-1)+1\}^2}{\beta^2}\right] R_L}{\left[1 - \frac{\{\alpha(\beta-1)+1\}^2}{\beta^2}\right]^2 + g_L^2} + \frac{\left[1 - \frac{\{\alpha(\beta-1)+1\}^2}{\beta^2}\right] \gamma R_L}{\left[1 - \frac{\{\alpha(\beta-1)+1\}^2}{\beta^2}\right]^2 + (\mu g_L)^2}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
B(f) &= \text{Im}\{H_{r,e}^{(L)}(f)\} + \text{Im}\{H_{r,e}^{(H)}(f)\} = \frac{(-g_L)R_L}{\left(1 - \frac{f^2}{f_{nL}^2}\right)^2 + g_L^2} + \frac{(-g_H)R_H}{\left(1 - \frac{f^2}{f_{nH}^2}\right)^2 + g_H^2} \\
B(\alpha) &= \frac{(-g_L)R_L}{\left[1 - \{\alpha(\beta - 1) + 1\}^2\right]^2 + g_L^2} + \frac{(-\mu g_L)\gamma R_L}{\left[1 - \frac{\{\alpha(\beta - 1) + 1\}^2}{\beta^2}\right]^2 + (\mu g_L)^2}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

式(3.6)と(3.7)から解析区間における対象外モード成分は、解析区間内の任意の振動数を表す α 、低次側の振動モードと高次側の振動モードの固有振動数の比を表す β 、留数の比を表す γ 、構造減衰係数の比を表す μ の、4つの変数によって表現できる。

ここでは、この $A(f)$ と $B(f)$ を次式のように振動数 f に関する多項式で表現することとし、最適な多項式の次数を一般的な振動系に対して定める方法を提案する。

$$\begin{aligned}
A(f) &= \sum_{i=0}^m a_i f^i \\
B(f) &= \sum_{i=0}^m b_i f^i
\end{aligned} \tag{3.8}$$

ただし、 i は多項式の次数であり、 m は最大次数である。

3.3.3 直線フィット法の基礎方程式における近接モードの挙動把握と近似多項式の次数決定

式(3.2)において剰余項は左辺第3項 $A(f)g_p$ と第4項 $B(f)(1-f^2/f_{np}^2)$ である。第3項は $A(f)$ と g_p の積となるため $A(f)$ と挙動は同じであり、大きさが変わるのみである。一方で、第4項は $B(f)$ と $(1-f^2/f_{np}^2)$ の積となるため単純に $B(f)$ の大きさが変わるだけではなく、 f^2 がかけられた挙動になる。以下では $(1-f^2/f_{np}^2)$ を $C(f)$ とする。図 3.4 に $C(f)$ の挙動を示す。

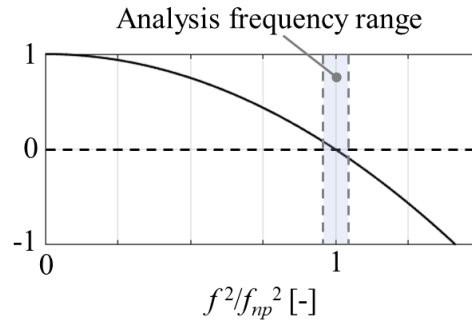


図 3.4 $C(f)$ の挙動

図 3.4 のように $C(f)$ は $f=0$ のときに頂点となり、同定対象モードの固有振動数 f_{np} によってその傾きが変化する 2 次関数である。また直線フィット法の基礎方程式では、採用データ点数と周波数分解能により解析区間が決定されるため、この関数上で使用される周波数領域は一部分となる。よって解析区間において $C(f)$ は単純な 2 次関数として扱うことができない場合がある。そこで、式(3.2)の第4項の挙動を把握するために同定対象モードの固有振動数を、新たに $f_{np} = \eta f_{nL}$ (ただし、 $1 < \eta < \beta$) と定義して図 3.3 のモデルの関係を考慮すると、第4項は次式のように表現される。

$$B(f)C(f) = B(f) \left(1 - \frac{f^2}{f_{np}^2} \right)$$

$$B(\alpha)C(\alpha) = \left[\frac{(-g_L)R_L}{[1 - \{\alpha(\beta-1)+1\}^2] + g_L^2} + \frac{(-\mu g_L)\eta R_L}{\left[1 - \frac{\{\alpha(\beta-1)+1\}^2}{\beta^2} \right] + (\mu g_L)^2} \right] \left[1 - \frac{\{\alpha(\beta-1)+1\}^2}{\eta^2} \right] \quad (3.9)$$

ここで $\beta=2, \gamma=1, \mu=1$ のときの、実部に関する対象外モード成分 $A(\alpha)g_p$ の挙動を図 3.5, 虚部に関する対象外モード成分 $B(\alpha)C(\alpha)$ の挙動を図 3.6 に示す. また $\beta=2, \gamma=-1, \mu=1$ のときの $A(\alpha)g_p$ の挙動を図 3.7, $B(\alpha)C(\alpha)$ の挙動を図 3.8 に示す. このように値を設定した理由は, 同定対象のモードに対して両脇に存在する対象外モード成分の挙動を把握しやすくするためである. 図 3.6 と図 3.8 については同定対象モードの固有振動数 ηf_{nl} の変化により, $B(\alpha)C(\alpha)$ の挙動が異なることが予想されるため, $\eta=1.2, 1.4, 1.6, 1.8$ のときの結果を示す. 図 3.5 (a)と図 3.7(a)は $A(\alpha)g_p$ の挙動, 図 3.5 (b)と図 3.7(b)は $A(\alpha)g_p$ の 1 階微分, 図 3.5 (c)と図 3.7(c)は 2 階微分の挙動を表す. また, 図 3.6 (a)と図 3.8(a)は $B(\alpha)C(\alpha)$ の挙動, 図 3.6 (b)と図 3.8(b)は $B(\alpha)C(\alpha)$ の 1 階微分, 図 3.6 (c)と図 3.8(c)は 2 階微分の挙動を表す. さらに図 3.5~3.8 の (d)の上段は図 3.5~3.8 の(b)における極値, 下段は図 3.5~3.8 の(c)における変曲点の有無を 1 と 0 で表現したもので, 図 3.5~3.8(b), (c)において値の符号が変わるときに 1 をカウントするものである.

また, 図 3.5~3.8 においては $\alpha=0$ のとき低次側の振動モードの固有振動数, $\alpha=1$ のとき高次側の振動モードの固有振動数となる. そのため, $0 \leq \alpha < 0.2$ の範囲は低次側のモードが卓越し, $0.8 < \alpha \leq 1$ は高次側のモードが卓越すると考えられる. 必ずしもモードが近接している場合ではないが, 対象外モード成分が含まれる FRF を対象として同定する場合に, 対象モードの同定精度をある程度保証できる解析区間は谷の間の区間であるという考察をしている[105]. そこで本研究でも, 同定対象モードの低次側と高次側の谷の間がそのモードが卓越する区間と考える. 一般的に FRF の式上で谷を表すことができないため, ここでは同定対象のモードが卓越する区間を $0.2 \leq \alpha \leq 0.8$ と考え, その区間の挙動を確認する. 区間をこのように考えることは, 図 3.5(a)および図 3.7(a)において $\alpha=0$ と $\alpha=1$ 近傍に現れる $A(\alpha)g_p$ の極値を考慮しないことになるが, $\alpha=0$ と $\alpha=1$ 近傍は両隣のモードが卓越する区間であるため, 実際に同定する場合の解析区間を谷の間の区間とすると, 剰余項を 2 次関数や 3 次関数で近似できない範囲は必然的に除外されることを意味している. 以下に $A(\alpha)g_p$ と $B(\alpha)C(\alpha)$ の両者から確認した挙動をまとめる.

■ 留数の比 γ が正である場合 (図 3.5, 図 3.6)

$A(\alpha)g_p$ と $B(\alpha)C(\alpha)$ の両者ともに, 解析区間に極値を持たず, 変曲点が 1 つ存在する. この条件を満たすような α に関する多項式は 3 次関数以上である. したがって, 式(3.2)の基

礎方程式における $A(f)g_p + B(f)C(f)$ は、振動数 f に関する 3 次関数以上の多項式で近似できるといえる。

■ 留数の比 γ が負である場合 (図 3.7, 図 3.8)

$A(\alpha)g_p$ と $B(\alpha)C(\alpha)$ の両者ともに、解析区間に極値を 1 つ持ち、変曲点が存在しない。この条件を満たすような α に関する多項式は 2 次関数以上である。したがって、式(3.2)の基礎方程式における $A(f)g_p + B(f)C(f)$ は、振動数 f に関する 2 次関数以上の多項式で近似できるといえる。

■ $B(\alpha)C(\alpha)$ の挙動と γ および η の関係

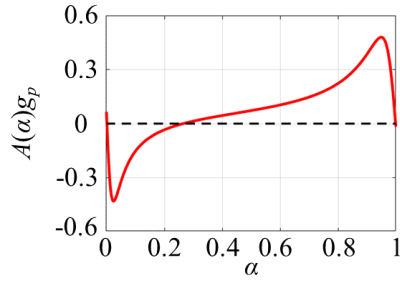
低次側と高次側のモードの留数の比である γ について、図 3.6 では $\gamma=1$ とし、図 3.8 では $\gamma=-1$ とし、 $B(\alpha)C(\alpha)$ の挙動が η の値によって変化しないことを把握した。また、 γ のとりうる範囲を広げて $-1000 \leq \gamma \leq 1000$ とした場合においても成立することを確認した。

■ $A(\alpha)g_p$ および $B(\alpha)C(\alpha)$ の挙動と μ の関係

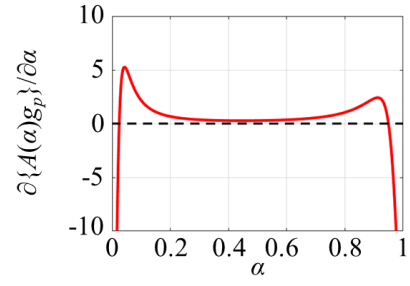
低次側と高次側のモードの構造減衰係数の比である μ を適当に設定した場合の $A(\alpha)g_p$ および $B(\alpha)C(\alpha)$ の挙動は、図 3.5~3.8 と同様の挙動を示すことを確認した。

以上より、式(3.2)の基礎方程式における第 3 項 $A(f)g_p$ と第 4 項 $B(f)C(f)$ の挙動を理論モデルから把握した。ここで $A(f)$ と $B(f)$ は式(7)に示すようにそれぞれ実部と虚部における対象外モード成分を意味するが、式(3.2)の基礎方程式において固有振動数と構造減衰係数を同定するうえでは、剰余項としてまとめることができる。そのため $A(f)g_p + B(f)C(f)$ は、剰余項を近似できる最小次数の多項式として 3 次関数を考慮するべきであると考えられる。したがって $A(f)g_p + B(f)C(f)$ を新たに $X(f)$ と定義して式(3.2)を次式のように書き換えて提案法の基礎方程式とする。

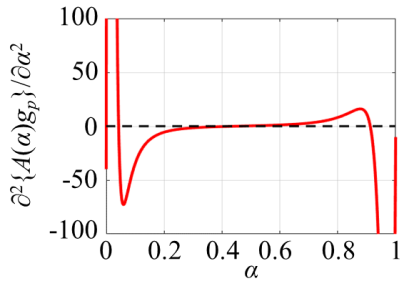
$$\begin{aligned} X(f) &= A(f)g_p + B(f)C(f) = x_0 + x_1 f + x_2 f^2 + x_3 f^3 \\ \text{Im}\left\{H_{r,e}(f)\right\} \frac{f^2}{f_{np}^2} - \text{Re}\left\{H_{r,e}(f)\right\} g_p + X(f) &= \text{Im}\left\{H_{r,e}(f)\right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$



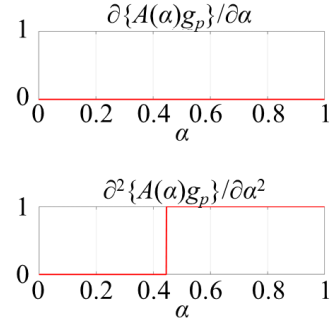
(a) $A(\alpha)g_p$



(b) $\partial\{A(\alpha)g_p\}/\partial\alpha$

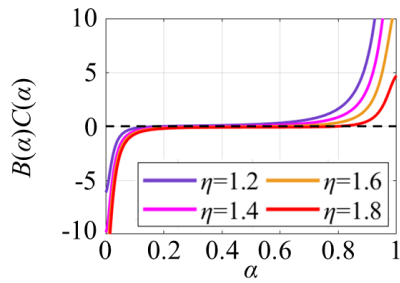


(c) $\partial^2\{A(\alpha)g_p\}/\partial\alpha^2$

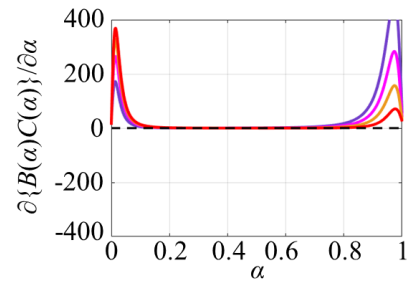


(d) 極値と変曲点のカウント

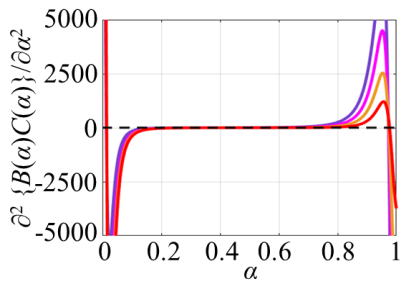
図 3.5 $A(\alpha)g_p$ の挙動 ($\beta = 2, \gamma = 1$ and $\mu=1$)



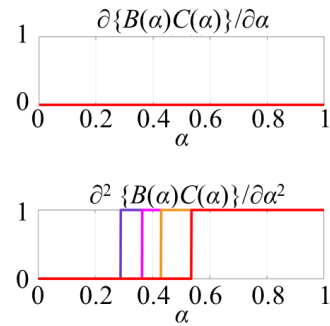
(a) $B(\alpha)C(\alpha)$



(b) $\partial\{B(\alpha)C(\alpha)\}/\partial\alpha$

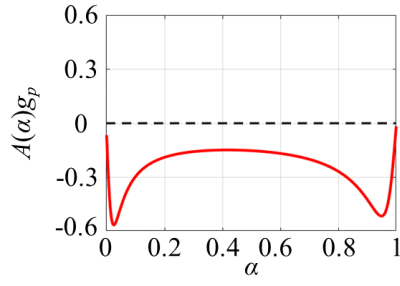


(c) $\partial^2\{B(\alpha)C(\alpha)\}/\partial\alpha^2$

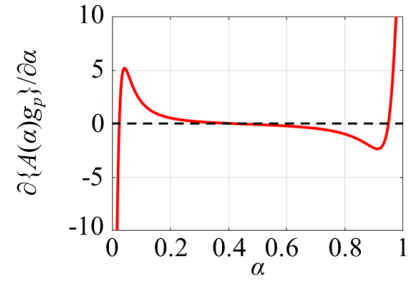


(d) 極値と変曲点のカウント

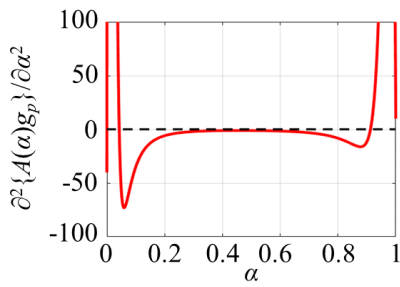
図 3.6 $B(\alpha)C(\alpha)$ の挙動 ($\beta = 2, \gamma = 1$ and $\mu=1$)



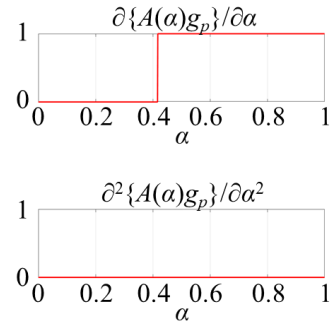
(a) $A(\alpha)g_p$



(b) $\partial\{A(\alpha)g_p\}/\partial\alpha$

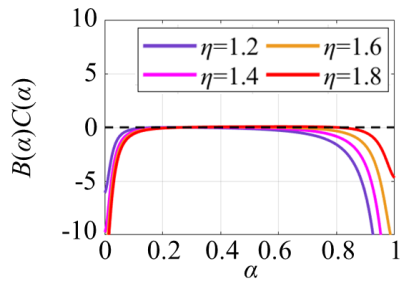


(c) $\partial^2\{A(\alpha)g_p\}/\partial\alpha^2$

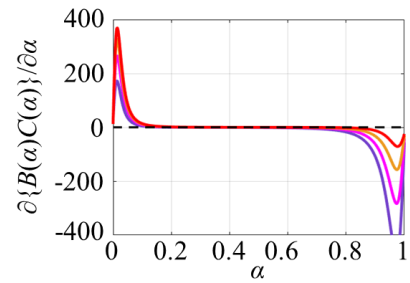


(d) 極値と変曲点のカウント

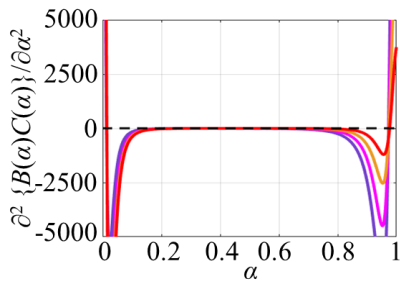
図 3.7 $A(\alpha)g_p$ の挙動 ($\beta = 2, \gamma = -1$ and $\mu = 1$)



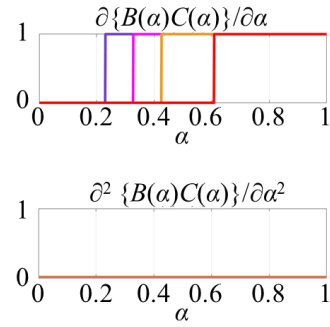
(a) $B(\alpha)C(\alpha)$



(b) $\partial\{B(\alpha)C(\alpha)\}/\partial\alpha$



(c) $\partial^2\{B(\alpha)C(\alpha)\}/\partial\alpha^2$



(d) 極値と変曲点のカウント

図 3.8 $B(\alpha)C(\alpha)$ の挙動 ($\beta = 2, \gamma = -1$ and $\mu = 1$)

3.4 数値例による提案法の適用性検証

前節において、提案法の剰余項 $X(f)=A(f)g_p+B(f)C(f)$ を近似できる最小次数の f に関する多項式は、3 次関数であることが示された。本節では、数値例によってその妥当性と適用性を検証する。なお、以下の 3.4.2 項ではノイズを考慮しない場合、3.4.3 項ではノイズを考慮する場合の数値例とし、それぞれ留数の比が正負の場合の検証モデルを扱う。これに伴い、それぞれのモデルにおいて目安とする最適な解析区間が異なるため、それぞれの項で提案法の有用性について考察することは難しい。そこで、これらの結果をもとに 3.4.4 項にて提案法の有用性について総合的に考察し、実際の同定指針を提示する。

3.4.1 検証モデル

はじめに具体的な検証モデルを定義する。このモデルは単点入力単点参照の 10 自由度系であり、FRF としてコンプライアンスを採用する。各モードのパラメータは、これまでに実測した FRF を参考に、表 3.1 に示すように適当な値を設定した。そのため本研究では、これを標準的な検証モデルとし、本モデルに対して得られた同定のための指針を、実際に同定を行う際の指針として提示する。ここで、同定の対象を 5 次モードとし、その低次側と高次側の留数の比が正と負の場合における提案法のモード同定の妥当性と適用性を検証するため、一例として 6 次モードの留数を $\pm 3.5000 \times 10^{-4}$ m/N と設定する。なお、構造減衰係数 g_p は全てのモードで一律に 4.00×10^{-2} と比較的大きな値とする。また、周波数分解能は 0.25 Hz とする。

提案法の妥当性を検証するため、測定ノイズを考慮しない真値の FRF $H_{the}(f)$ と、実際の適用性を検証するため、測定ノイズを考慮する FRF $H_{exp}(f)$ を作成する。測定ノイズを考慮する FRF $H_{exp}(f)$ は、真値の FRF $H_{the}(f)$ の実部と虚部それぞれの最大値に対して平均値 0、標準偏差をある一定値とする乱数を掛け算したものとし、真値の FRF $H_{the}(f)$ の実部と虚部にそれぞれ加算することで作成する。FRF $H_{exp}(f)$ は次式により算出する。

$$H_{exp}(f) = [\text{Re}\{H_{the}(f)\} + \max(\text{Re}\{H_{the}(f)\}) \times SD \times rand] + j[\text{Im}\{H_{the}(f)\} + \max(\text{Im}\{H_{the}(f)\}) \times SD \times rand] \quad (3.11)$$

表 3.1 検証モデルのパラメータ

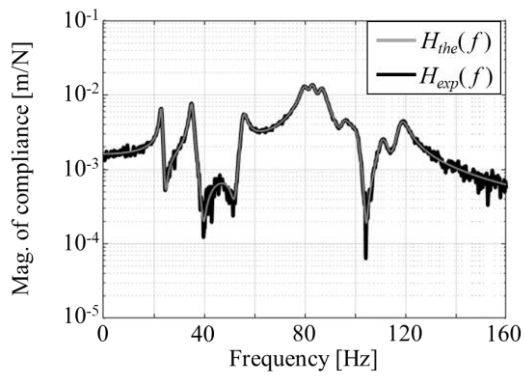
Mode order p	Natural frequency f_{np} [Hz]	Residue $(\phi_{r,p}\phi_{e,p})/k_p$ [m/N]
1	23.0000	-2.5000×10^{-4}
2	35.0625	-3.0000×10^{-4}
3	55.5000	-2.0000×10^{-4}
4	80.2500	-3.0000×10^{-4}
5	83.1250	-4.0000×10^{-4}
6	86.5000	$\pm 3.5000 \times 10^{-4}$
7	95.1875	-8.0000×10^{-5}
8	101.0000	-1.0000×10^{-4}
9	111.0000	-8.5000×10^{-5}
10	118.2500	-1.5000×10^{-4}

ここで、 $rand$ は $[-1,1]$ の範囲の一様な乱数、 SD は標準偏差を表す。この付与形式は応答の時系列データの最大値に標準偏差の乱数を掛け算したものに相当する。なお、本論文では実測した FRF を再現するために SD を 0.03 に設定した。この SD の大きさは実測した FRF を参考に設定したものであり、標準的なノイズレベルと考えることができるため、本研究で示す同定指針は実際に提案法を使用する場合の同定指針として提示できると考える。

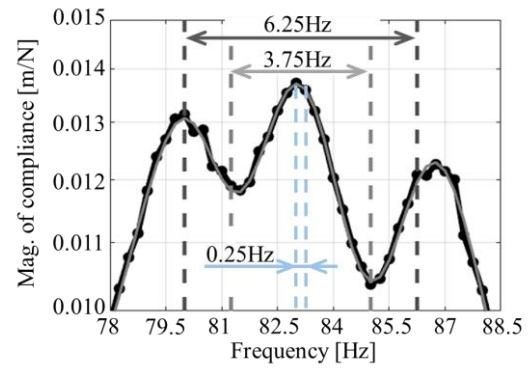
同定対象モードの低次側と高次側の留数の比が正の場合の FRF を図 3.9、負の場合を図 3.10 に示す。図 3.9 (a)および図 3.10(a)は全体の FRF であり、真値の FRF $H_{hc}(f)$ を灰色で、測定ノイズを考慮する FRF $H_{exp}(f)$ を黒色で示す。図 3.9 (b)および図 3.10(b)は解析対象である 5 次モード付近の FRF であり、それぞれ図 3.9(a)と図 3.10(a)を拡大したものである。図 3.9 および図 3.10 の(c), (d)はそれぞれ実部と虚部であり、同定対象のモードを青色の実線、対象外モード成分を赤色の実線で示す。また(e)は剰余項 $X(f)$ である。留数の比が正の場合は、図 3.9(e)より剰余項が 3 次関数のような挙動を示すことがわかる。一方、留数の比が負の場合は、図 3.10(e)より 2 次関数のような挙動を示すことがわかる。

モード特性の同定の際には、解析区間を変えながら未知数を同定する。図 3.9 および図 3.10 の(b)～(e)において、解析区間の例として、最も狭い区間である 0.25 Hz を水色の破線、

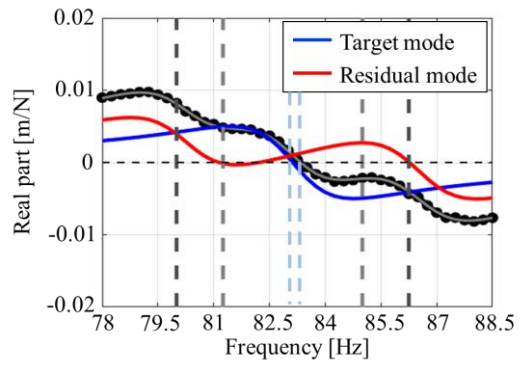
同定対象モードの共振周波数から最も近接するモードとの間に形成される谷まで左右対称に設けた区間を灰色の破線、低次側あるいは高次側のモードの最大値までの区間を最大解析区間として黒色の破線で示す。灰色の破線で示した範囲は、既に 3.3.3 項で述べたように最適な解析区間の目安であり、図 3.9 の場合は 3.75 Hz、図 3.10 の場合は 2.75 Hz である。なお、本研究ではモード指示関数に FRF の虚部の絶対値を採用し、共振周波数と谷の周波数を特定する。



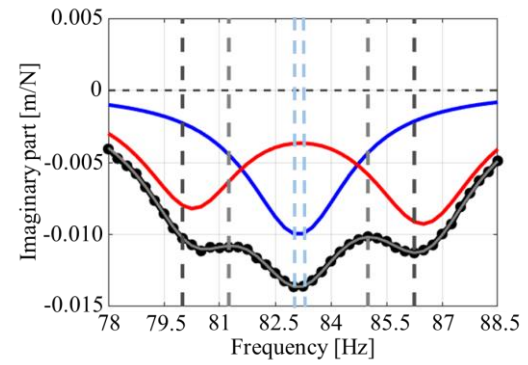
(a) ゲイン



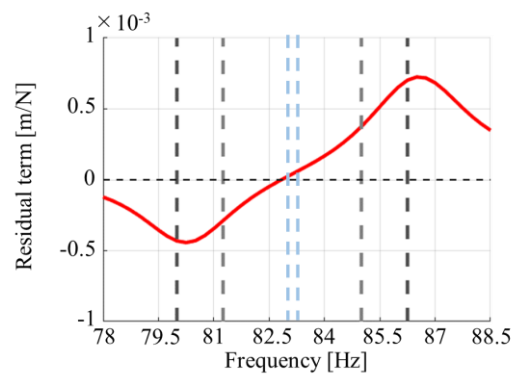
(b) ゲイン (5次モード付近の拡大図)



(c) 実部 (5次モード付近の拡大図)

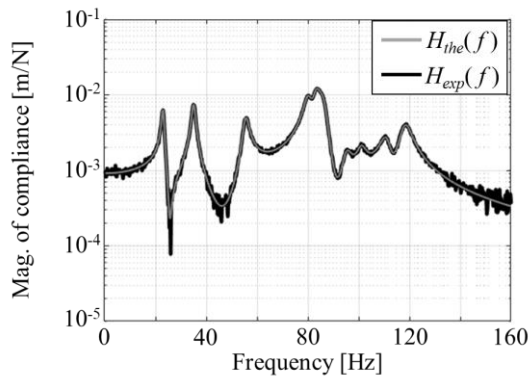


(d) 虚部 (5次モード付近の拡大図)

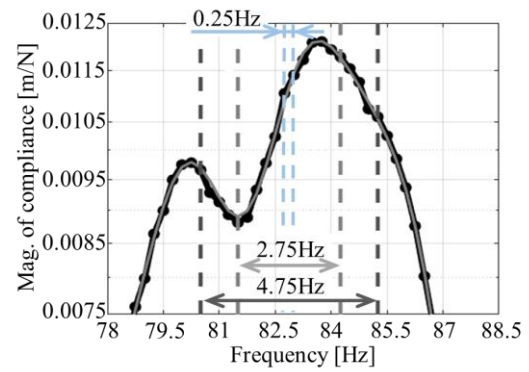


(e) 剰余項 (5次モード付近の拡大図)

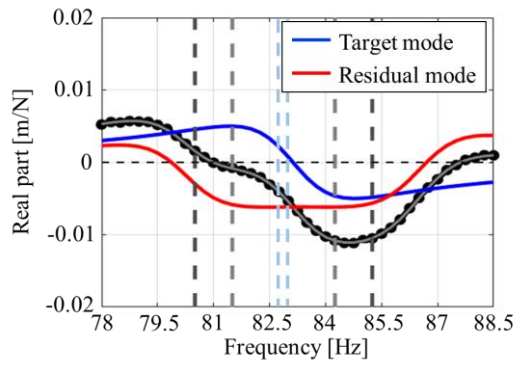
図 3.9 留数の比が正の場合の FRF



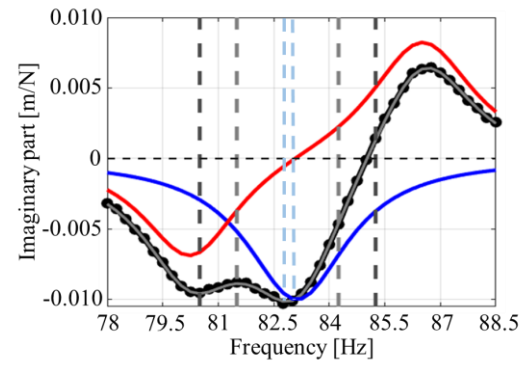
(a) ゲイン



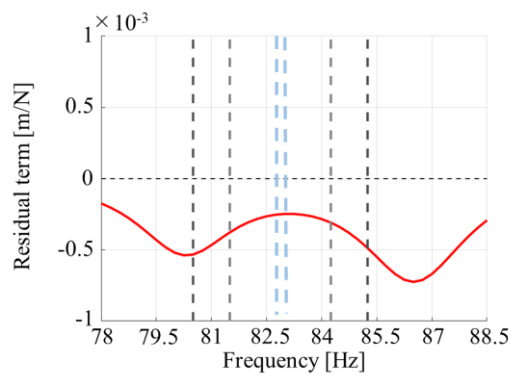
(b) ゲイン (5次モード付近の拡大図)



(c) 実部 (5次モード付近の拡大図)



(d) 虚部 (5次モード付近の拡大図)



(e) 剰余項 (5次モード付近の拡大図)

図 3.10 留数の比が負の場合の FRF

3.4.2 提案法の妥当性検証

本項では、測定ノイズを考慮しない FRF の真値を用いて、提案法の妥当性を検証する。具体的には、剰余項を考慮しない方法 (Original)、剰余剛性と剰余質量を用いて表現する方法 (Conventional)、振動数 f に関する 2 次関数で表現する方法 (X2) および 3 次関数で表現する方法 (X3) によりモード特性を同定する。なお、FRF の真値を用いても、同定の過程で近似が入るので、同定結果が真値に一致することはないが、剰余項を適切に近似することで妥当な同定結果が得られることを示す。

■ 対象モードの低次側と高次側の留数の比が正の場合

留数の比が正である図 3.9 の FRF の 5 次モードを対象にモード特性を同定する。ここで、解析区間の広さが異なる場合の固有振動数と構造減衰係数の同定値の変化を図 3.11 に示す。なお、図 3.9(b)と同様に、解析区間の広さを破線で示す。本研究における解析区間の設け方は、FRF の虚部の絶対値から把握した同定対象モードの共振周波数から、低周波数側と高周波数側に対称に採用データ点数を増やしていくため、2 点ずつ解析区間が広がっていく。そのため、図 3.11 の横軸は 0.25 Hz (採用データ点数 2 点) に始まり、0.5 Hz ずつ増加していく。

図 3.11(a), (b)より、解析区間の広さが異なる場合において、剰余項を 3 次関数で表現する方法の固有振動数と構造減衰係数の同定値は、解析区間が 3.75 Hz 以下では真値に近くなるが、解析区間が広くなるに伴って真値から離れていくことがわかる。これは、解析区間が広くなるに伴って剰余項の近似が難しくなることを意味している。比較的精度良く同定できる解析区間は、図 3.9(b)より同定対象の 5 次モードとその低次側および高次側のモード間に形成される谷の間の区間の 3.75 Hz であることが確認でき、3.3.3 項で述べたように最適な解析区間の目安とした区間である。また、このとき剰余項が 3 次関数のような挙動を示していることが図 3.9(e)より確認できる。解析区間が 3.75 Hz のときの固有振動数と構造減衰係数の同定値を表 3.2 に示す。黄色で色付けしている部分が提案法の同定結果である。表 3.2 より、固有振動数の同定精度は、剰余項を 2 次関数で表現する方法が最も良いことがわかる。ただし、剰余項を 3 次関数で表現する提案法においても十分な精度で同定できている。

また、構造減衰係数については、3 次関数で表現する方法が最も精度良く同定できることがわかる。

以上より、解析区間を同定対象モードの共振周波数から最も近接するモードとの間に形成される谷まで左右対称に設けた区間とした場合に、剰余項を振動数に関する 3 次関数で表現する提案法により、固有振動数と構造減衰係数の両方を比較的精度良く同定できるため、提案法の妥当性が示された。

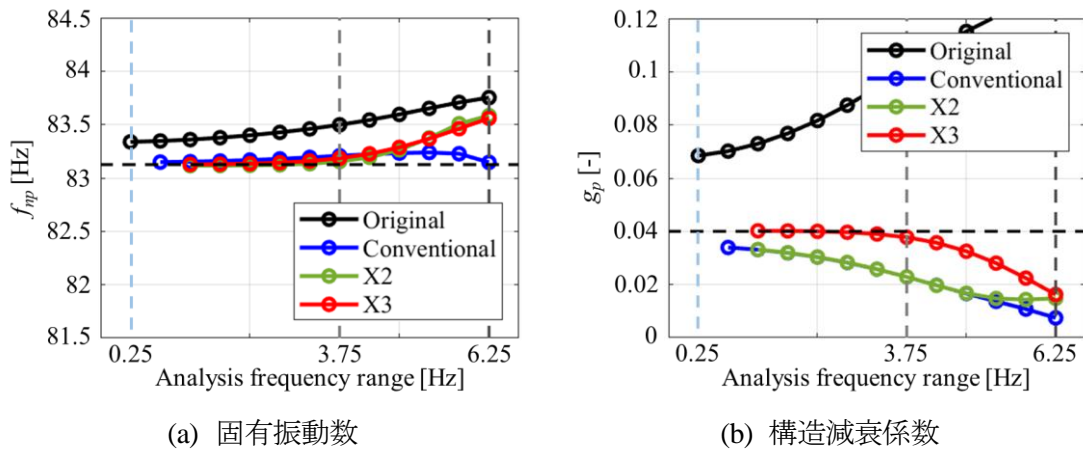


図 3.11 モード特性の同定結果

表 3.2 同定値 (解析区間 ; 3.75 Hz)

	f_{np} [Hz]	g_p [-]
Exact value	83.1250	4.0000×10^{-2}
$X(f)=0$ (Original)	83.4973	1.0099×10^{-1}
$X(f)=x_0+x_2f^2$ (Conventional)	83.2074	2.2845×10^{-2}
$X(f)=x_0+x_1f+x_2f^2$ (X2)	83.1533	2.2839×10^{-2}
$X(f)=x_0+x_1f+x_2f^2+x_3f^3$ (X3)	83.1843	3.7767×10^{-2}

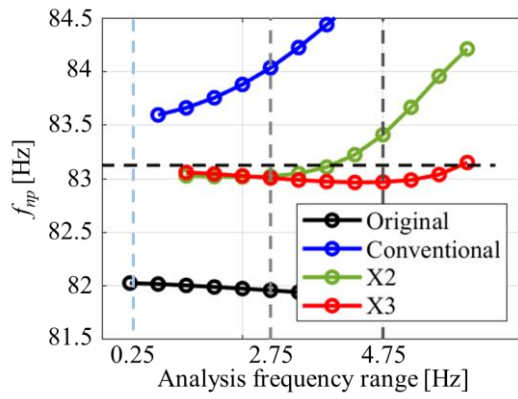
■ 対象モードの低次側と高次側の留数の比が負の場合

留数の比が負である図 3.10 の FRF の 5 次モードを対象にモード特性を同定する。ここで、解析区間の広さが異なる場合の固有振動数と構造減衰係数の同定値の変化を図 3.12 に示す。なお、図 3.10(b)と同様に、解析区間の広さを破線で示す。

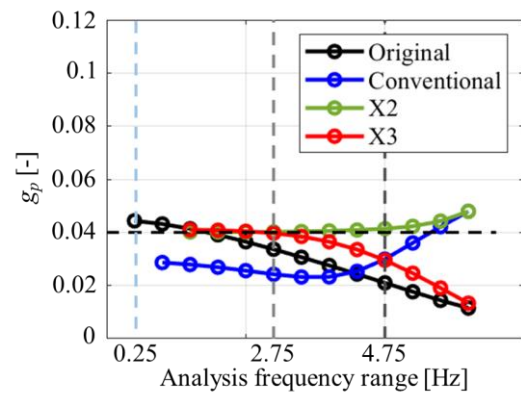
図 3.12(a), (b)より、解析区間の広さが異なる場合において、剰余項を 3 次関数で表現する方法の固有振動数と構造減衰係数の同定値は、解析区間が 2.75 Hz 以下では真値に近くなるが、解析区間が広くなるに伴って真値から離れていくことがわかる。比較的精度良く同定できる解析区間は、図 3.10(b)より同定対象の 5 次モードとその低次側のモード間に形成される谷まで区間を左右対称に設けた場合の 2.75 Hz であることが確認でき、3.3.3 項で述べたように最適な解析区間の目安とした区間である。また、このとき剰余項が 2 次関数のような挙動を示していることが図 3.10(e)より確認できる。解析区間が 2.75 Hz のときの固有振動数と構造減衰係数の同定値を表 3 に示す。黄色で色付けしている部分が提案法の同定結果である。

表 3.3 より、固有振動数と構造減衰係数の同定精度は、剰余項を 2 次関数で表現する方法が最も良いことがわかる。これは、剰余項が 2 次関数のような挙動を示していることが図 3.10(e)より確認できるため妥当な結果であると考えられる。一方、3 次関数として表現する提案法の同定精度は若干劣るが、2 次関数で表現する場合との差は非常に小さく、十分な精度であることがわかる。

以上より、解析区間を同定対象モードの共振周波数から最も近接するモードとの間に形成される谷まで左右対称に設けた区間とした場合に、剰余項を振動数に関する 3 次関数で表現する提案法によっても、固有振動数と構造減衰係数の両方を比較的精度良く同定できるため、提案法の妥当性が示された。



(a) 固有振動数



(b) 構造減衰係数

図 3.12 モード特性の同定結果

表 3.3 同定値 (解析区間 ; 2.75 Hz)

	f_{np} [Hz]	g_p [-]
Exact value	83.1250	4.0000×10^{-2}
$X(f)=0$ (Original)	81.9590	3.3647×10^{-1}
$X(f)=x_0+x_2f^2$ (Conventional)	84.0342	2.4240×10^{-2}
$X(f)=x_0+x_1f+x_2f^2$ (X2)	83.0223	4.0192×10^{-2}
$X(f)=x_0+x_1f+x_2f^2+x_3f^3$ (X3)	83.0064	3.9707×10^{-2}

3.4.3 提案法の適用性検証

本項では、実験を想定して測定ノイズを考慮した FRF を用いて、提案法の適用性を検証する。なお、測定ノイズの大きさは 3.4.1 項で示したように、式(3.11)において $SD=0.03$ の乱数を利用する。

■ 対象モードの低次側と高次側の留数の比が正の場合

図 3.13(a), (b)から、剰余項を 3 次関数で表現する方法は、解析区間を狭く設定する場合には真値と差が大きく、解析区間が広くなるに伴って徐々に真値に近づき、再び真値から離れていくことがわかる。図 3.13(a)より、固有振動数については同定値が真値から最も離れている場合にも、その差は 0.5 Hz 程度であるため問題はないと考えられる。一方、特に同定の難しい構造減衰係数の同定値については図 3.13(b)より、解析区間が 3.75 Hz の場合に真値に最も近いことがわかる。

測定ノイズを考慮しない場合の図 3.11(a), (b)と比較すると、剰余項を考慮しない Original の同定値はなめらかな変化をしており、ノイズの付与前後で同定値の傾向が変わらないが、同定値は真値からずれている。一方、剰余項を多項式で表現するその他の方法は同定値が若干変動しているが、解析区間 3.75 Hz 以上では測定ノイズを考慮しない場合と同様の傾向を示しており、構造減衰係数の同定値は 3 次関数で表現する場合は最も真値に近いことがわかる。このような挙動を示す点は、測定ノイズが同定値に及ぼす影響と剰余項の近似が同定値に及ぼす影響にトレードオフの関係があるものと考えられる。解析区間を狭く設定する場合、採用データ点数が少なく剰余項がほぼ直線的な挙動を示すことに対してノイズ成分の悪影響が大きくなることから、多項式の次数が最も大きい 3 次関数では過剰適合してしまい、同定値は真値との差が大きくなる。一方で解析区間を広く設定する場合は、剰余項を適切に近似することが難しくなるが、同定値に対するノイズ成分の悪影響を低減させることができる。このトレードオフの関係により、解析区間を広くしていく場合に同定値が最も真値に近くなるような挙動を示しており、このときにノイズを含んだ剰余項に対して最も適した近似ができていると考えられる。なお、固有振動数と構造減衰係数の両方の同定値が真値に近くなる解析区間は、ノイズを考慮しない場合と同じく最適な解析区間の目安とした 3.75 Hz の区間である。このときの固有振動数と構造減衰係数の同定値を表 3.4 に示す。

表 3.4 より，固有振動数の同定精度は，剰余項を 2 次関数で表現する方法が最も良いことがわかる．ただし，剰余項を 3 次関数で表現する提案法においても十分な精度で同定できている．また，構造減衰係数については，3 次関数で表現する提案法が最も精度良く同定できている．

さらに，ノイズの大きさが異なる場合の妥当性検証として，式(3.11)における標準偏差を 5% ($SD=0.05$) として同様のモード同定を実施した．その結果，図 3.13(a), (b)と比較して同定精度が若干悪くなるが，全体的に傾向が一致し，解析区間を 3.75 Hz とする場合の固有振動数の同定精度は剰余項を 2 次関数で近似する方法と提案法は僅差であり，構造減衰係数の同定精度は提案法が最も良くなることを確認した．また，構造減衰係数を適当に設定した場合でも，同様の結果が得られることも確認した．

以上より，測定ノイズを考慮した標準的なデータを扱った場合にも，解析区間を同定対象モードの共振周波数から最も近接するモードとの間に形成される谷まで左右対称に設けた区間とすることで，提案法により固有振動数と構造減衰係数の両方を比較的精度良く同定できるため，提案法の適用性が示された．この解析区間と近似次数の設定は，実際の同定における最適な設定と考える．

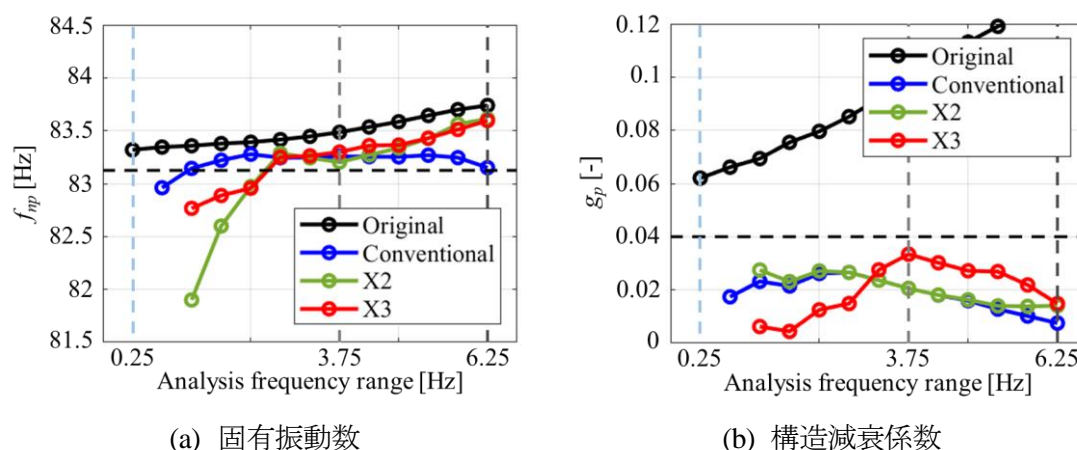


図 3.13 モード特性の同定結果

表 3.4 同定値（解析区間；3.75 Hz）

	f_{np} [Hz]	g_p [-]
Exact value	83.1250	4.0000×10^{-2}
$X(f)=0$ (Original)	83.4855	9.9199×10^{-2}
$X(f)=x_0+x_2f^2$ (Conventional)	83.2568	2.0574×10^{-2}
$X(f)=x_0+x_1f+x_2f^2$ (X2)	83.2030	2.0549×10^{-2}
$X(f)=x_0+x_1f+x_2f^2+x_3f^3$ (X3)	83.2986	3.3404×10^{-2}

■ 対象モードの低次側と高次側の留数の比が負の場合

留数の比が負である図 3.10 の FRF の 5 次モードを対象にモード特性を同定する．前項と同様に，解析区間の広さが異なる場合の固有振動数と構造減衰係数の同定値の変化を図 3.14 に示す．

図 3.14(a), (b)から，剰余項を 3 次関数で表現する方法は，解析区間が 2.75 Hz のときに固有振動数と構造減衰係数の両方の同定値が真値と近くなることがわかる．

測定ノイズを考慮しない場合の図 3.12(a), (b)と比較すると，剰余項を考慮しない Original の同定値はなめらかな変化をしており，ノイズの付与前後で同定値の傾向が変わらないが，固有振動数の同定値は真値からずれている．一方，剰余項を多項式で表現するその他の方法は同定値が若干変動しているが，解析区間 2.75 Hz 以上では測定ノイズを考慮しない場合と同様の傾向を示している．この結果も前項の考察で述べたとおり，測定ノイズが同定値に及ぼす影響と剰余項の近似が同定値に及ぼす影響にトレードオフの関係があると考えられる．ここで，ノイズを考慮しない場合と同じく最適な解析区間の目安とした区間である 2.75 Hz のときの固有振動数と構造減衰係数の同定値を表 3.5 に示す．

表 3.5 より，固有振動数の同定精度は，剰余項を 3 次関数で表現する提案法が最も良いことがわかる．また，構造減衰係数の同定精度は 2 次関数で表現する方法が最も良いが，3 次関数で表現する提案法でも十分に精度が良いといえる．

さらに，ノイズの大きさが異なる場合の妥当性検証として，式(3.11)における標準偏差を 5% ($SD=0.05$) として同様のモード同定を実施した．その結果，図 3.14(a), (b)と比較して同定精度が若干悪くなるが，全体的に傾向が一致し，最適な解析区間として述べた 2.75 Hz とする場合の固有振動数の同定精度は提案法が最も良く，構造減衰係数は 2 次関数で近似する方が比較的良いが，提案法も同程度の精度で同定できることを確認した．また，構造減衰係数を適当に設定した場合でも，同様の結果が得られることも確認した．

以上より、測定ノイズを考慮した標準的なデータを扱った場合にも、解析区間を同定対象モードの共振周波数から最も近接するモードとの間に形成される谷まで左右対称に設けた区間とすることで、剰余項を2次関数で近似する方法より同定精度が若干悪くなるが、提案法でも固有振動数と構造減衰係数の両方を比較的精度良く同定できるため、提案法の適用性が示された。この解析区間と近似次数の設定は、実際の同定における最適な設定と考える。

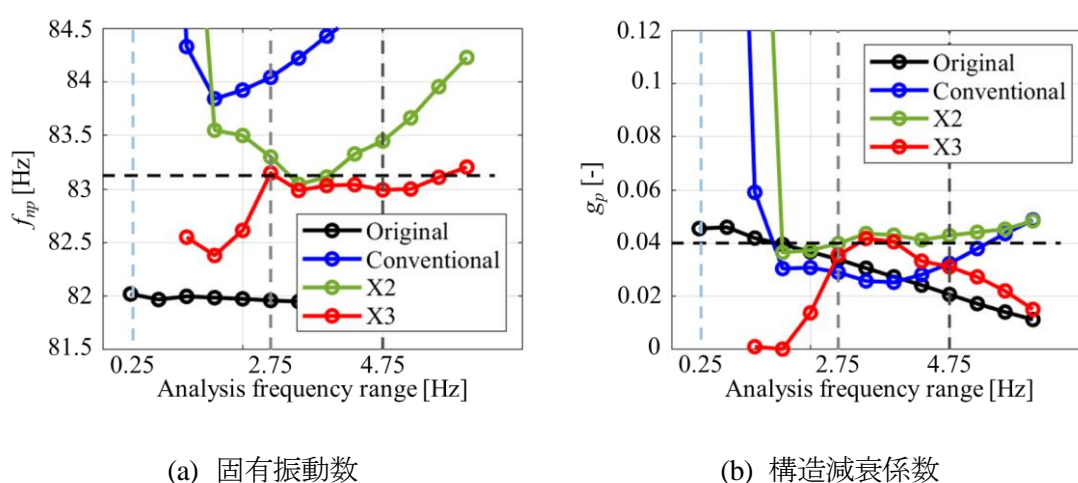


図 3.14 モード特性の同定結果

表 3.5 同定値（解析区間；2.75 Hz）

	f_{np} [Hz]	g_p [-]
Exact value	83.1250	4.0000×10^{-2}
$X(f)=0$ (Original)	81.9597	3.3920×10^{-2}
$X(f)=x_0+x_2f^2$ (Conventional)	84.0407	2.9039×10^{-2}
$X(f)=x_0+x_1f+x_2f^2$ (X2)	83.2983	3.9842×10^{-2}
$X(f)=x_0+x_1f+x_2f^2+x_3f^3$ (X3)	83.1483	3.5408×10^{-2}

3.4.4 検証結果のまとめと同定指針の提示

本項では、3.4.2 項と 3.4.3 項におけるノイズの有無と留数の比が正負の場合の結果をもとに、提案法の有用性について総合的に考察し、実際の同定指針を提示する。

表 3.6 は表 3.2 から表 3.5 の X2 および X3 の結果を抜粋し、固有振動数と構造減衰係数の同定値と相対誤差をまとめたものである。なお、最適な解析区間の目安は留数の比が正の場合は 3.75 Hz、負の場合は 2.75 Hz である。

表 3.6 より、固有振動数については、留数の比が正負にかかわらずノイズを考慮しない場合に、剰余項を 2 次関数で近似する方法の同定精度が良いが、剰余項を 3 次関数で近似する提案法においても相対誤差が 1%以下であるため、同定精度は常に僅差であるといえる。このことは、ノイズを考慮する場合にも同様のことがいえる。

一方、構造減衰係数については、剰余項を 2 次関数で近似する方法は留数の比が正の場合にノイズの有無にかかわらず相対誤差が 40%を超えるほど同定精度が極端に悪いが、剰余項を 3 次関数で近似する提案法は相対誤差が 20%以下で同定できており、比較的精度が良いといえる。また、留数の比が負の場合には、ノイズの有無にかかわらず剰余項を 2 次関数で近似する方法の精度が良いが、それらの相対誤差からわかるようにノイズを考慮する場合の方が精度良く同定できることは必然ではないと考えられ、すべてのノイズパターンに対して常にそのような結果が得られないことを確認している。これとは対照的に、剰余項を 3 次関数で近似する提案法は、ノイズを考慮しない場合に 2 次関数で近似する方法と同定精度が僅差であり、ノイズを考慮することでおおよそ-12%の誤差となるが、十分な精度であるといえる。

以上より、剰余項を 3 次関数で近似する提案法は、標準的なモデルに対して本研究で最適な区間の目安とした解析区間を設ける場合に、固有振動数と構造減衰係数の両方をバランスよく同定できることを把握し、その有用性を示すことができた。このように解析区間を設定することで得られる同定値は、1 自由度法で得られる結果としては差し支えないと考える。一方、実験モード解析を実施する技術者の経験から同定値が適切でないと判断される場合も想定される。今後は、解析区間に依存することなく高精度な同定値を安定して得るために、例えば重み付き最小二乗法を導入することを検討している。また、同定に最小二乗法を用いることから、ノイズを含む FRF から構成される係数行列の誤差解析や、提案法に適した FRF のデータ処理方法についても検討する必要があると考えている。なお、

3 次関数以上の多項式では、次数が高い方が精度良く同定できる場合もあるが、3 次関数を用いる場合の同定値とほとんど差がないことを確認している。

これらの結果を踏まえ、モードが近接する振動系を対象に実際に同定する場合の最適な多項式は 3 次関数とする。また、最適な解析区間は、同定対象モードの共振周波数から最も近接するモードとの間に形成される谷まで左右対称に設けた区間とする。一方、モード指示関数から共振周波数と谷の周波数を特定できないほどモードが近接する FRF を扱う場合は、同定精度が低下するため、そのような場合は多自由度法を使用する方がよい。この場合に同定精度が低下する原因の調査は今後の検討課題とする。

表 3.6 同定値と相対誤差

Ratio of residue (Analysis frequency range)	Noise	$X(f)=x_0+x_1f+x_2f^2$ (X2)		$X(f)=x_0+x_1f+x_2f^2+x_3f^3$ (X3)	
		f_{np} [Hz] (Relative error [%])	g_p [-] (Relative error [%])	f_{np} [Hz] (Relative error [%])	g_p [-] (Relative error [%])
plus(+) (3.75 Hz)	without	83.1533 (0.034)	2.2839×10^{-2} (-42.903)	83.1843 (0.071)	3.7767×10^{-2} (-5.583)
	with	83.2030 (0.094)	2.0549×10^{-2} (-48.628)	83.2986 (0.209)	3.3404×10^{-2} (-16.490)
minus(-) (2.75 Hz)	without	83.0223 (-0.124)	4.0192×10^{-2} (0.480)	83.0064 (-0.143)	3.9707×10^{-2} (-0.733)
	with	83.2983 (0.208)	3.9842×10^{-2} (-0.395)	83.1483 (0.028)	3.5408×10^{-2} (-11.480)

3.5 多自由度法への適用

本節では多自由度法への適用を考える．具体的には，前節で示した同定値を多自由度法の初期値とした場合のモード特性の誤差と，収束するまでの反復計算の回数を比較する．なお，前節で示した1自由度法では留数を同定していないが，全モードの固有振動数と構造減衰係数を用いて次式のように最小二乗法により留数を同定できる．ただし，解析対象周波数範囲に含まれるデータ点数を y とする．また，多自由度法には松原らが提案した多自由度直線フィット法を用いる[105-107]．

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

ただし，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\left\{1 - \left(\frac{f_1}{f_{n1}}\right)^2\right\} - g_1^2}{\left\{1 - \left(\frac{f_1}{f_{n1}}\right)^2\right\}^2 + g_1^2} & \frac{\left\{1 - \left(\frac{f_1}{f_{n2}}\right)^2\right\} - g_2^2}{\left\{1 - \left(\frac{f_1}{f_{n2}}\right)^2\right\}^2 + g_2^2} & \cdots & \frac{\left\{1 - \left(\frac{f_1}{f_{nN}}\right)^2\right\} - g_N^2}{\left\{1 - \left(\frac{f_1}{f_{nN}}\right)^2\right\}^2 + g_N^2} \\ \frac{\left\{1 - \left(\frac{f_2}{f_{n1}}\right)^2\right\} - g_1^2}{\left\{1 - \left(\frac{f_2}{f_{n1}}\right)^2\right\}^2 + g_1^2} & \frac{\left\{1 - \left(\frac{f_2}{f_{n2}}\right)^2\right\} - g_2^2}{\left\{1 - \left(\frac{f_2}{f_{n2}}\right)^2\right\}^2 + g_2^2} & \cdots & \frac{\left\{1 - \left(\frac{f_2}{f_{nN}}\right)^2\right\} - g_N^2}{\left\{1 - \left(\frac{f_2}{f_{nN}}\right)^2\right\}^2 + g_N^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\left\{1 - \left(\frac{f_y}{f_{n1}}\right)^2\right\} - g_1^2}{\left\{1 - \left(\frac{f_y}{f_{n1}}\right)^2\right\}^2 + g_1^2} & \frac{\left\{1 - \left(\frac{f_y}{f_{n2}}\right)^2\right\} - g_2^2}{\left\{1 - \left(\frac{f_y}{f_{n2}}\right)^2\right\}^2 + g_2^2} & \cdots & \frac{\left\{1 - \left(\frac{f_y}{f_{nN}}\right)^2\right\} - g_N^2}{\left\{1 - \left(\frac{f_y}{f_{nN}}\right)^2\right\}^2 + g_N^2} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

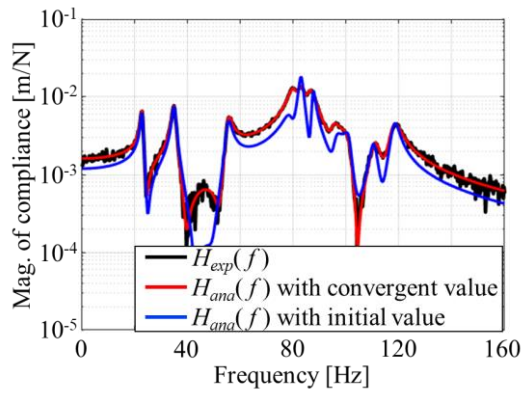
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\phi_{r,1}\phi_{e,1}}{k_1} \\ \frac{\phi_{r,2}\phi_{e,2}}{k_2} \\ \vdots \\ \frac{\phi_{r,N}\phi_{e,N}}{k_N} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\{H_{r,e}(f_1)\} + \operatorname{Im}\{H_{r,e}(f_1)\} \\ \operatorname{Re}\{H_{r,e}(f_2)\} + \operatorname{Im}\{H_{r,e}(f_2)\} \\ \vdots \\ \operatorname{Re}\{H_{r,e}(f_y)\} + \operatorname{Im}\{H_{r,e}(f_y)\} \end{bmatrix}$$

また、数値例では真値がわかるので、各モード特性の相対誤差の二乗平均平方根を用いて次式のように全体の同定誤差 E を評価する。

$$E = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^n \left\{ \frac{f_{np} - f_{np}^{ana}}{f_{np}} \times 100 \right\}^2 + \sum_{p=1}^n \left\{ \frac{g_p - g_p^{ana}}{g_p} \times 100 \right\}^2 + \sum_{p=1}^n \left\{ \frac{\left(\frac{\phi_{r,p} \phi_{e,p}}{k_p} \right) - \left(\frac{\phi_{r,p} \phi_{e,p}}{k_p} \right)^{ana}}{\left(\frac{\phi_{r,p} \phi_{e,p}}{k_p} \right)} \times 100 \right\}^2}{3n}} \quad (3.13)$$

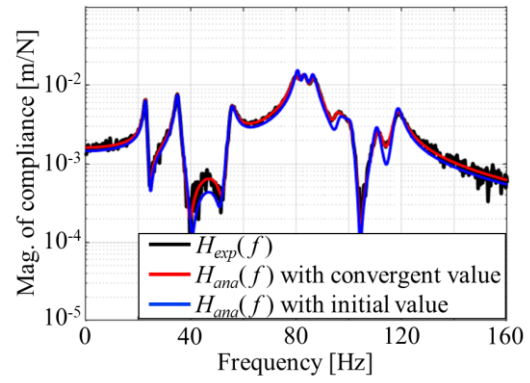
ここでは従来の剰余項を用いて同定した値と、提案法を用いて同定した値を対象にする。図 3.15(a)は従来の剰余項を用いて同定した値を多自由度法の初期値とした場合、図 3.15(b)は提案法を用いて同定した値を初期値とした場合の結果を表す。なお、赤色実線が収束した FRF、青色実線が初期値を用いて構築した FRF である。また、それぞれの図の下部に記載する i は反復計算回数、 E_{initial} および E_{fin} はそれぞれモード特性の初期値と収束値を用いて式(3.12)により算出した誤差である。なお、ここではノイズを含んだ FRF に対してモード同定するため、 E_{fin} は 0 にならないことを断っておく。

図 3.15 より、提案法を用いて同定した場合の方が初期値から構築した FRF と対象の FRF の乖離が小さく、初期値の誤差も小さいことがわかる。また、収束するまでの反復計算回数も提案法の方が少なく済むが、それぞれの反復計算回数に大差はなく、収束値の誤差 E_{fin} も同じ値となった。しかしながら、本章でまとめる提案法は 1 自由度法として扱う場面を想定しているため、その精度は十分であると考えられる。以上のことから、従来の 1 自由度法の問題を解決し、多自由度法と同じくらいの精度でモード特性を同定できることを把握した。



$i=107, E_{\text{initial}}=152.0, E_{\text{fin}}=21.1$

(a) 従来の剰余項を用いて同定した値を
初期値とした場合



$i=99, E_{\text{initial}}=52.3, E_{\text{fin}}=21.1$

(b) 提案法を用いて同定した値を
初期値とした場合

図 3.15 提案法の同定値を多自由度法の初期値に用いた場合のカーブフィットの結果

3.6 結言

本章では比較的モードが近接する FRF を対象とする場合にも、モード指示関数によりピークを判定できる範囲でモード特性を精度よく同定できる 1 自由度法を提案した。また、数値例により提案法の妥当性と適用性を検証した。得られた知見は以下のとおりである。

- 提案法は FRF の実部と虚部の両方において、対象外のモード成分を振動数に関する多項式で近似し、それを剰余項として直線フィット法の同定理論に導入するものである。
- 理論モデルを用いて表現される対象外モード成分の実部と虚部に関する項の挙動の考察から、剰余項は振動数に関する 3 次以上の多項式による近似が適切であることを示した。
- 測定ノイズを考慮しない真値の FRF を用いて提案法の妥当性を検証した。本論文では、同定対象モードと対象外のモードが比較的近接する周波数帯域を有する 10 自由度系のコンプライアンスを取り上げた。このモデルは実測された FRF に基づいて構築された標準的なものである。同定の過程で近似が入るため、同定結果が真値に一致することはないが、解析区間の広さを比較的狭く設定する場合に、3 次関数で表現する方法は剰余項を適切に近似できており、妥当な同定結果が得られることを示した。
- 測定ノイズを考慮する FRF を用いて提案法の適用性を検証した。その結果、対象モードの共振周波数から最も近接するモードとの間に形成される谷まで左右対称に設けた区間で同定した場合に、最も良好な結果が得られることを確認した。本論文で扱った区間の設定方法においては、この区間が最適な解析区間であり、実際の同定の際の指針として提示できると考えられる。

以上より、剰余項を 3 次関数で近似して直線フィット法に導入する提案手法は、同定対象のモードと最も近接するモードの間に形成される谷まで左右対称に解析区間を設定することで、対象モードのモード特性を高精度に同定できることを示した。

第4章 高減衰特性および高モード密度を有する 周期構造物のモード特性同定

4.1 緒言

前章では比較的モードが近接する FRF を対象とする場合にも，モード指示関数[104]により共振峰を捉えることができる範囲でモード特性を精度よく同定できる方法を提案した．しかしながら，対象物が高減衰特性を有する場合，振動試験から取得した FRF 上では共振峰が明確に現れず，振動モードが存在する周波数を特定できないため，モード特性を同定することは難しい．高減衰特性を有する構造物としては，例えば制振材料を適所に貼り付けた制振鋼板や，ゴム材料を主な母材とする構造物が挙げられる．さらに，高減衰特性を有することに加えてモード密度が高い構造物では，連なる共振峰がそれぞれ滑らかに重なり合うため，振動モードが存在する周波数を特定できない．モード密度が高い構造物の例としては，円筒シェルなどの周期構造物が挙げられ，比較的高周波数領域で半径方向と軸方向の振動モードが連成することに伴い，モード密度が高くなることが知られている[77,78]．以上のように材料や形状が持つ特性により，モード特性の同定が難しい構造物がいくつかある．その一つに自動車用タイヤおよび二輪車用タイヤが挙げられる．タイヤは高減衰であり，かつ周期構造物であるためにモード密度が高く[79]，特に中周波数領域では共振峰を捉えることができない．振動騒音対策のためにはより高周波数領域まで動特性を把握することが重要であるが[80]，通常の実験モード解析ではモード特性の同定が難しいという問題がある．

このような問題に対して，対象物の特徴に合わせた手法を構築することが有効であると考えられる．周期構造物の代表例である円筒構造物の変形形状については，その固有関数を三角関数で近似できることが古くから知られている[81-85]．また，自動車用タイヤにおいても，モデル化に関する研究や実験検証により，低周波数領域ではトレッド部の振動形状を三角関数で近似できることが示されている[86-89]．このように振動形状の固有関数を三角関数で近似できるという仮定に基づき，松岡らは FRF の理論式の線形項を三角関数で表現し，自動車用タイヤを対象に低周波数領域のモード特性を同定した[90]．また，北原らは FRF を周方向にフーリエ級数展開して特定のモード成分を抽出する周方向縮約法を提案し，低周波数領域から中周波数領域のモード特性を同定した[27]．しかしながら，抽出した FRF とモード同定後に再構築した FRF に乖離が生じるという問題が生じた．その原因

として、実際のタイヤは厚さ方向の影響で理想的なシェルとは見なせないことや、二重曲率となるサイドウォール部の FRF を縮約に用いたことの可能性がある」と述べられている。つまり、シェルモデルの適用範囲の限界や、サイドウォール部のように二重曲率を有する周期構造物の固有関数が三角関数で近似できるかについては不明なままである[27]。本章では後者の課題を取り上げるが、二重曲率を有する構造物の固有関数を理論解析により導くことが非常に難しいことは、古典力学の研究成果からも視える[99-102]。

そこで本章では、二重曲率を有する周期構造物への周方向縮約法の適用性の問題を数値解析により解決する。具体的には、周方向縮約法を適用した FRF に曲線適合して得られたモード形状と、固有値解析で得られたモード形状を比較することで、固有関数を三角関数で近似できることを明らかにする。また、実験では、現在のところ振動挙動に関わる研究事例がない二輪車用タイヤを対象に、非接地-非転動状態におけるモード特性の同定を試みる。加えて、二輪車用タイヤと自動車用タイヤのモード特性を比較し、二重曲率を持つことに起因するモード特性の特徴を考察する。

4.2 周期構造物を対象とした一般的な実験モード解析の課題

対象物が円筒シェルなどの周期構造物である場合、比較的高周波数領域で半径方向と軸方向の振動モードが連成することに伴い、モード密度が高くなることが知られている[77,78]。半径方向のモード形状を図 4.1 に示す。図 4.1 のように、周期構造物における曲げ振動は半径方向に励起され、モード次数と波数が一致することが知られている。なお、 i をモード次数とし、周方向に波数を持つことから本論文では周方向モードと呼称する。ここで図 4.2 に示す円筒シェルで固有値解析を実施した場合、例えば周方向 3 次モードに関するモード形状および固有振動数は図 4.3 のようになる。半径方向と軸方向に振動モードが連成し、軸方向の次数が大きいほど固有振動数が高くなることがわかる。他の周方向モードについても同様の現象が起きる。

また、周波数応答解析により FRF を算出すると、図 4.4 のように中周波数領域から高周波数領域にかけて共振峰が密集することが確認できる。

以上のように、周期構造物では FRF 上で共振峰を明確に把握できず、振動モードが存在する周波数を特定できない。そのため、一般的な実験モード解析によりモード特性を同定することは難しい。

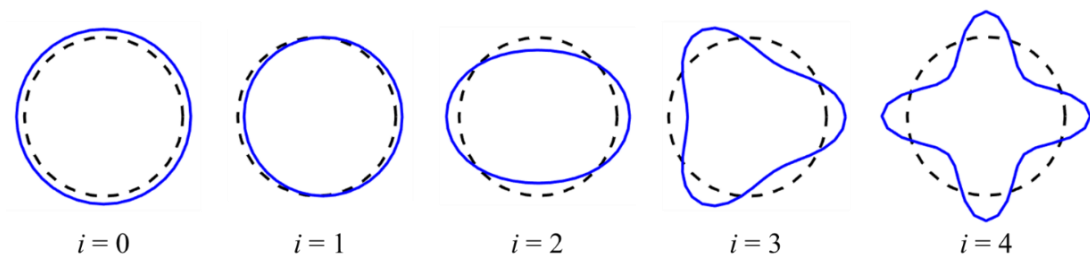


図4.1 周期構造物における半径方向の曲げ振動モードとモード次数の関係

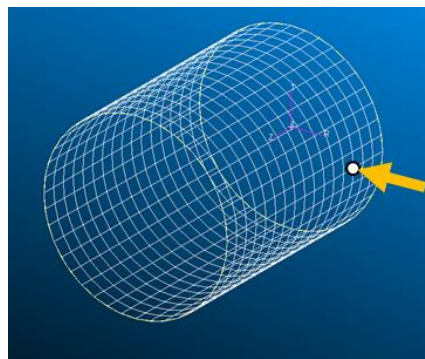


図 4.2 円筒シェルの例（黄色矢印は入力点と応答点を意味する）

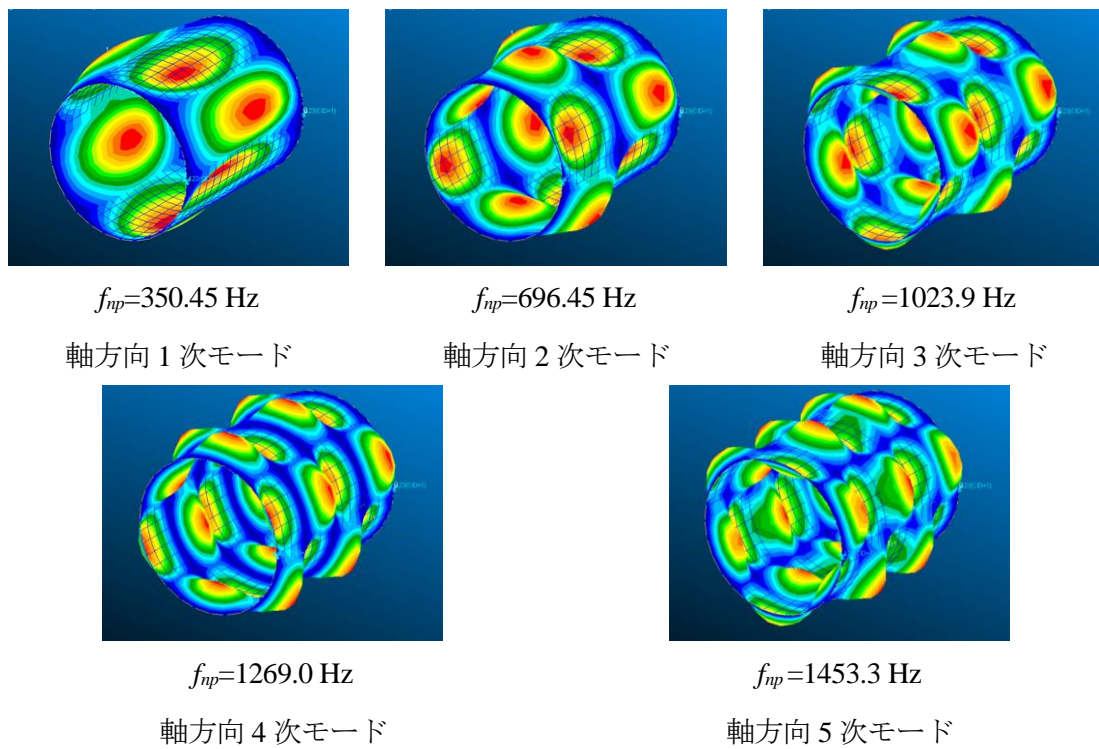


図 4.3 円筒シェルの周方向 3 次モードに関するモード形状の例

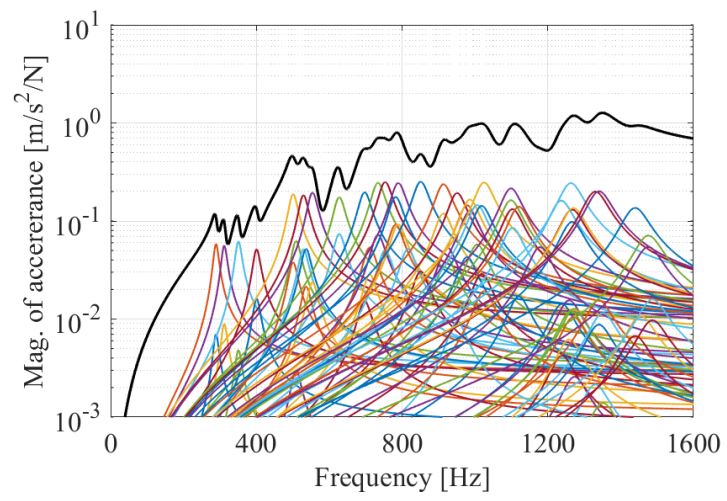


図 4.4 円筒シェルの FRF の例

4.2.1 高減衰特性を有する場合の問題点と周方向縮約法による改善

対象物とする周期構造物が高減衰特性を有する場合は、FRF の共振峰が滑らかになるため、振動モードが存在する周波数をさらに特定しにくくなる．そのため、一般的な実験モード解析によりモード特性を同定することは非常に難しい．

このような問題に対して、対象物の特徴に合わせた手法を構築することが有効であると考えられる．北原らは自動車用タイヤを対象に、振動モードが存在する周波数を特定することを目的として、周方向縮約法を提案した[27]．この方法は、自動車用タイヤのモデル化に関する研究や実験検証により、低周波数領域でトレッド部の振動形状を三角関数で近似できる[86-89]という仮定に基づいた方法である．以下に周方向縮約法によるモード抽出の理論を示す．

加振点は円筒シェル上に任意に置かれた P 個の点とする．また応答点は、図4.5に示すように軸方向等間隔に M 本の仮想リングを設定して、各リングの周方向等間隔に N 点配置し、合計 $M \times N$ 点とする．仮想リング上の応答点間隔は周方向角度で $2\pi/N$ である．ある振動数 f における全FRFは次のような行列で表される．

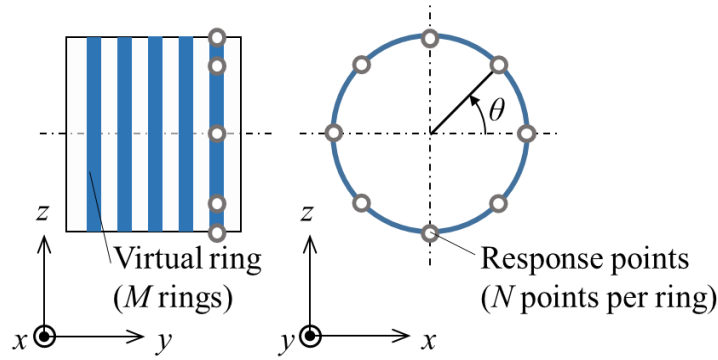


図 4.5 仮想リング上に設定された入力点と応答点

$$\mathbf{H}(f) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(f) \\ \mathbf{H}_2(f) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_M(f) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{H}_{m,p}(f) = \begin{bmatrix} H_1(f) \\ \vdots \\ H_N(f) \end{bmatrix} \quad (m=1, \dots, M), (p=1, \dots, P) \quad (4.2)$$

ただし、式(4.1)の $\mathbf{H}(f)$ は $M \times N \times P$ 個の全FRF行列、式(4.2)の $\mathbf{H}_{m,p}(f)$ は第 m 本目の仮想リング上の応答点と第 p 番目の入力点の間で構成される N 個のFRF行列である。

ここで仮想リングの曲げ振動は、前述したとおり三角関数を用いた基底関数として表される。周期構造物の曲げ振動は半径方向に励起され、周方向に1波数毎、軸方向には半波数毎に励起されるので、周方向の波数 i を周方向 i 次モード、軸方向の半波数 j を軸方向 j 次モードと定義する。

いま、式(4.2)における周方向第 n 番目のFRFを $H_n(f)$ とし、周方向に対してフーリエ級数展開を考えると、第 m 本目の仮想リング上の応答点と第 p 番目の入力点の間のFRF $H_n(f)$ が次式のように得られる。なお、 $A_i(f)$ および $B_i(f)$ は第 m 本目の仮想リングの周方向モード形状を表す振幅を意味する。

$$H_n(f) = \frac{A_0(f)}{2} + \sum_{i=1}^{N/2-1} \left[A_i(f) \cos\left(i \frac{2\pi n}{N}\right) + B_i(f) \sin\left(i \frac{2\pi n}{N}\right) \right] + \frac{A_{N/2}(f)}{2} \cos(\pi n) \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} A_i(f) &= \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N H_n(f) \cos\left(i \frac{2\pi n}{N}\right) \\ B_i(f) &= \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N H_n(f) \sin\left(i \frac{2\pi n}{N}\right) \end{aligned} \quad (i=0, \dots, N/2) \quad (4.4)$$

式(4.3)および(4.4)は、周方向 $0 \sim N/2$ 次モード成分を重ね合せた形となっているため、周方向 i 次モード成分を次式のように抽出できる。

$$H_n^{(i)}(f) = A_i(f) \cos\left(i \frac{2\pi n}{N}\right) + B_i(f) \sin\left(i \frac{2\pi n}{N}\right) \quad (4.5)$$

以上より、第 m 本目の仮想リング上の応答点と第 p 番目の入力点の間で構成される N 個のFRF行列 $\mathbf{H}_{m,p}(f)$ から、次式のように特定の周方向 i 次モード成分のFRF行列を抽出できる。

$$\mathbf{H}_{m,p}^{(i)}(f) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i(f) \\ \mathbf{B}_i(f) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

したがって、 $M \times N \times P$ 個の自由度を有していた全FRF行列 $\mathbf{H}(f)$ は、周方向モード次数ごとに $2 \times P \times M$ 個の自由度を有するFRF行列に縮約され、自由度数は $2/N$ 倍になる。また、周方向 i 次モード成分のみが抽出されることにより、軸方向次数の異なるモードが各固有モードとして存在している状態であるため、モード密度は大幅に低減される。

以上の理論に基づき、複数個の共振峰が連なる FRF から、着目する特定の振動モードのみの成分を持つ FRF を抽出できる。

4.2.2 二重曲率を有する場合の周方向縮約法の適用性に関する問題点

前項で説明した周方向縮約法は、FRF 上のモード密度を低下させ、対象とする振動モードを明確に捉えるための方法である。北原らによる自動車用タイヤを対象とした実験モード解析では、低周波数領域において抽出した FRF とモード同定後に再構築した FRF が比較的一致し、モード特性の妥当性が示された。しかしながら、中周波数領域から高周波数領域にかけては、縮約した FRF とモード同定後に再構築した FRF に乖離が大きいという問題が生じたことを報告している。その原因の一つとして、二重曲率となるサイドウォール部の固有関数が三角関数で近似できるか不明なまま、FRF の縮約に用いたことの可能性が述べられている[27]。このように、周期構造物でも二重曲率を有する場合には、振動形状を表す固有関数を三角関数で近似して良いか明確にはわかっていない。二重曲率を有する周期構造物は、航空機の機体をはじめ身の回りの機械構造物に多く見受けられる。それらの構造物を対象に実験モード解析を行う場合は、必ず上述の問題が現れるため、周方向縮約法の適用性を検証する必要があると考えられる。

4.3 数値例による周方向縮約法の二重曲率構造物への適用性検証

前節では、一般的な実験モード解析において対象物を周期構造物とする場合に、形状が持つ特有の問題、かつ高減衰特性を有する場合の問題、および二重曲率を有する場合の問題を説明した。二重曲率を有する場合に周方向縮約法を適用できるか否かを判断するためには、振動形状を表す固有関数を三角関数で近似して良いか厳密に把握する必要がある。二重曲率を有する構造物の固有関数を理論解析により導くことが非常に難しいことは、古典力学の研究成果からも視える[99-102]。

そこで、本節では二重曲率を持つ周期構造物を対象とした数値解析により、固有関数を三角関数で近似できることを明らかにする。具体的には、周方向縮約法を適用した FRF に曲線適合して得られたモード形状と、固有値解析で得られたモード形状を比較することで明らかにする。また、周方向縮約法を適用した FRF を対象に実験モード解析を実施し、問題なくモード特性を同定できることを示す。

4.3.1 有限要素モデル

本章では二輪車用タイヤのような二重曲率を持つシェル構造物を対象に、有限要素モデルを用いた検証を行う。二重曲率を持つシェルモデルを図4.6に示す。材質は炭素鋼とし、ヤング率200 GPa、ポアソン比0.3、密度7800 kg/m³とする。モデルの寸法は、半径1.0 m、軸方向長さ0.6 m、厚さ0.01 mとする。また、4 節点シェル要素で要素を分割し、節点数840個として、要素長さを0.0471 m とする。境界条件は両端単純支持とし、図4.6の端部（○で示した節点）を両側面からy方向に挟み込むように支持する。本モデルの減衰特性は、ヒステリシス減衰を仮定し、構造減衰係数は5.0 %とする。入力点は1点（○印）、仮想リングは11本とし、応答点は全節点のうち等間隔に分布した220点を用いる。入力および応答方向はシェル表面の法線方向とし、解析対象周波数は0~2500 Hzで、周波数分解能は0.5 Hzとする。なお、有限要素解析ソルバーにはMSC. Nastran Version2018.1を利用した。

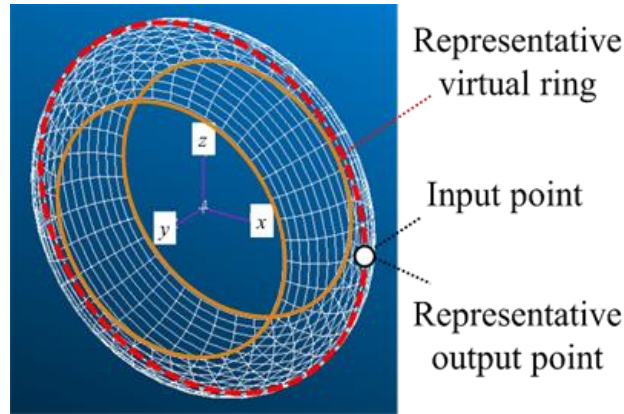


図4.6 二重曲率を持つシェルモデル

4.3.2 周方向縮約の効果

有限要素モデルの固有値解析から得た質量マトリクス，剛性マトリクス，モードベクトルより算出した応答点（○印）の FRF $H_{the}(f)$ と，縮約により抽出した周方向 1 次～10 モード成分の FRF $H_{red}^i(f)$ ($i=1\sim10$) を図 4.7 に示す．図 4.7 より， $H_{the}(f)$ では確認できなかった共振峰を抽出でき，モードを明確に判別できることがわかる．

また，周方向縮約法の適用性を検証するために，固有値解析の結果から周方向各次モード成分のみを用いて別途算出した FRF $H_{cr}^i(f)$ を，抽出した FRF $H_{red}^i(f)$ と比較した．その結果を図 4.8 に示す．図 4.8 より，全ての周方向各次モード成分において，一致することを確認した．

これらの結果から，二重曲率を有する周期構造物でも周方向縮約法を適用でき，正しく機能することを確認した．つまり，固有モードを三角関数で近似できることを確認した．

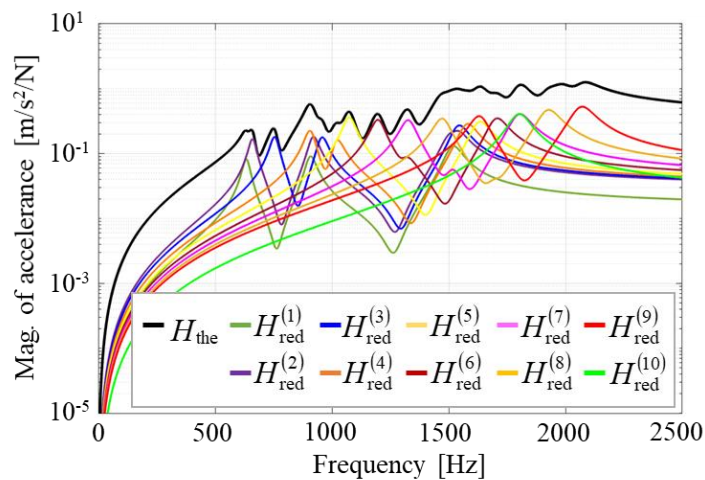


図4.7 周方向自由度数縮約前後の試験データのFRF

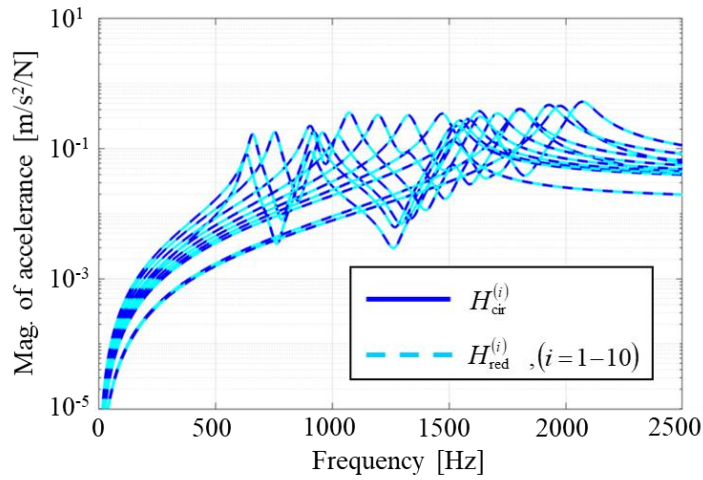


図4.8 縮約によって抽出したFRFと再現したFRFの比較

4.3.3 モード特性同定の妥当性検証

実際の実験モード解析を想定し、縮約前のFRFに対してランダムノイズを付与し、周方向モード縮約と直線フィット法[107]によるモード特性同定を行う。ノイズの付与形式は、第3章の式(3.11)と同じものとする。なお、randは[-1,1]の範囲の様な乱数、標準偏差SDは0.03とした。

図4.9にノイズを付与したFRF $H_{exp}(f)$ と、縮約により抽出した周方向1次～10次モード成分のFRF $H_{red}^i(f)$ を示す。図4.9より、ノイズが含まれる場合にも縮約により周方向各次モードが分離されることがわかる。

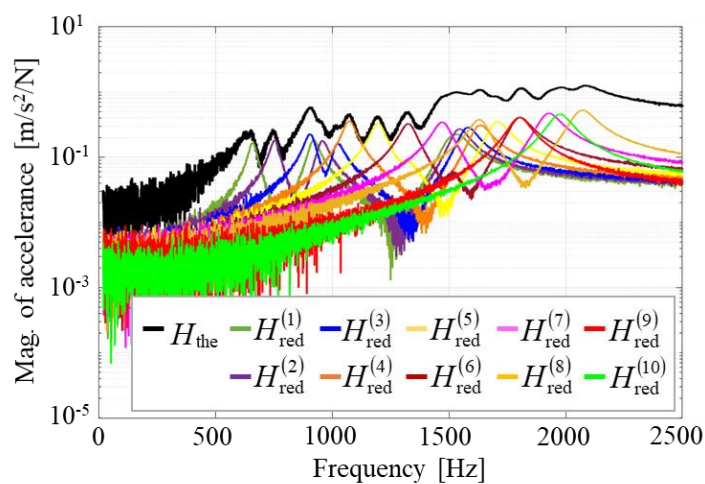


図4.9 周方向自由度縮約前後の試験データのFRF

抽出した周方向3次モード成分のFRF $H_{red}^{(3)}(f)$ を例として多自由度直線フィット法によりモード特性を同定する．なお，ここではヒステリシス減衰系を仮定し，全応答点のFRFから算出したモード指示関数を用いて，モードとして考えられるピークを全て採用して曲線適合を行う．モード指示関数とは固有モードの存在とその固有振動数を判断する指標値であり，本研究では多点参照に対応したモード指示関数[108]を使用する．

表 4.1 では，同定した周方向 3 次モードの固有振動数 f_{np} および構造減衰係数 g_p を真値と比較する．ここで，表 4.1 において空欄となっているモードは，入力点を軸方向の中心位置としたことによって励起されなかったモードである．励起された軸方向 1 次，4 次，6 次モードにおいては，同定した固有振動数と構造減衰係数が真値に近い値を示していることが確認できる．

また図 4.10 に，縮約によって抽出した周方向 3 次モード成分の FRF を青線，同定したモード特性によって再構築した FRF を赤破線で示す．なお，抽出した FRF はそれぞれ 3 つの共振峰を有するが，これらは低周波数側から順に軸方向 1, 4, 6 次モードとなっており，留数の同定値から再現した振動形状を併せて図示する．図 4.10 より，同定したモード特性によって再現した FRF が，周方向 3 次モード成分の FRF と共振峰付近で一致していることがわかる．さらに再現したモード形状と，固有値解析によって取得したモード形状を図 4.11 に示す．また，周方向 3 次 - 軸方向 1 次，4 次，6 次モードの振動形状から式(4.7)を用いてモード信頼性評価基準 (Modal Assurance Criterion ; 以下, MAC) 値を算出し，図 4.12 に示す．MAC 値とは，対象とする 2 つのモード間の相関を表す評価基準であり，通常は実験モード解析と理論解との比較検討で用いられる評価手法の 1 つである[21,109]．ここでは式(4.7)における ϕ_a は同定値から再構築したモードベクトル， ϕ_b は固有値解析から得られたモードベクトルとする．

$$MAC = \frac{|\phi_a^T \phi_b|^2}{(\phi_a^T \phi_a)(\phi_b^T \phi_b)} \quad (4.7)$$

例えば対象とする 2 つのモード形状が完全に一致している場合は「1」，直交している場合は「0」となるものである．対応するモード次数において MAC 値が 1 になったことから，振動形状を正確に再現できていることを確認した．一方，軸方向 2 次，3 次，5 次および 7 次モードは，モードが励起されていないため，MAC 値が 0 となることも確認した．

以上のように、二重曲率を有するシェルモデルにおいて、周方向縮約法を適用した FRF に対して、問題なくモード特性を同定できることを確認した。

表 4.1 モード特性の真値と同定値

Axial order	Exact value		Identification value	
	f_{np} [Hz]	g_p [-]	f_{np} [Hz]	g_p [-]
1	907.41	5.00×10^{-2}	907.41	5.00×10^{-2}
2	910.73	5.00×10^{-2}	-	-
3	1005.2	5.00×10^{-2}	-	-
4	1019.4	5.00×10^{-2}	1019.4	5.00×10^{-2}
5	1255.0	5.00×10^{-2}	-	-
6	1576.5	5.00×10^{-2}	1576.5	5.00×10^{-2}
7	2030.9	5.00×10^{-2}	-	-

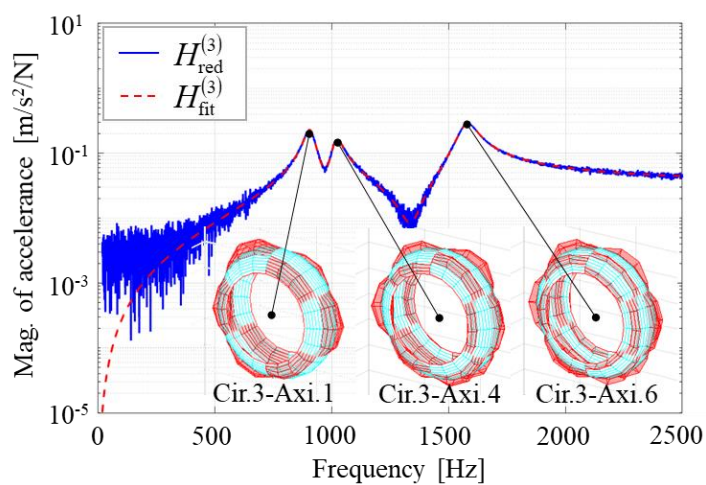
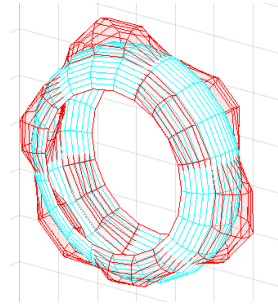
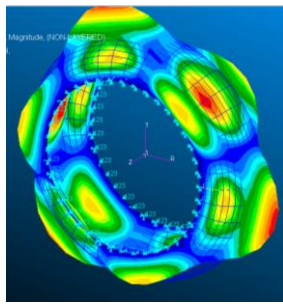
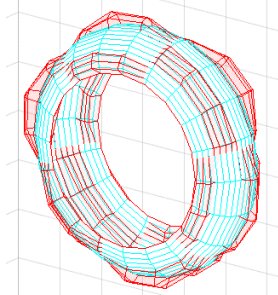
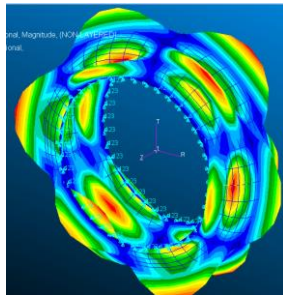


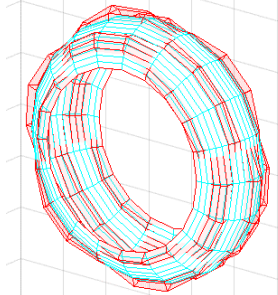
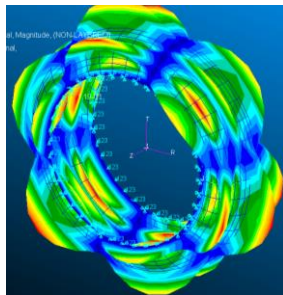
図 4.10 抽出した周方向 3 次モードとモード特性から再構築した FRF の比較



(a) 軸方向1次モード ($f_{np}=907.41$ Hz)



(b) 軸方向4次モード ($f_{np}=1019.4$ Hz)



(c) 軸方向6次モード ($f_{np}=1576.5$ Hz)

図4.11 モード形状の比較

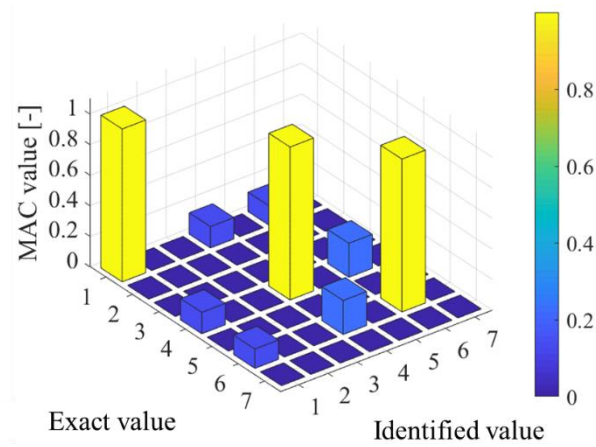


図 4.12 再現したモード形状と固有値解析結果間の MAC 値

4.4 二輪車用タイヤの実験モード解析

前節では、二重曲率を有する周期構造物のモード形状を三角関数で表現でき、周方向縮約法を適用することで FRF の自由度数が低下することを確認した。また、そのようにして得られた FRF に対して、問題なくモード特性を同定できることを示した。

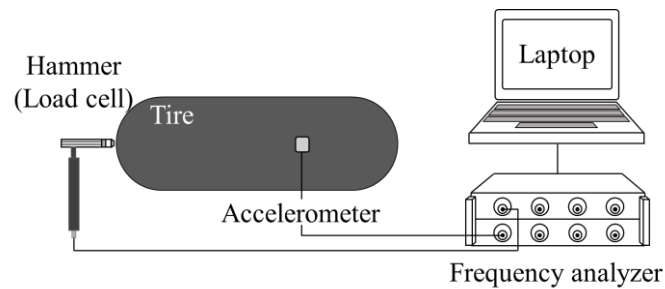
本節では、二重曲率を有する周期構造物である二輪車用タイヤを対象とする場合でも同様に周方向縮約法を適用できると考え、モード特性の同定を試みる。なお、二輪車用タイヤの振動特性に関する研究はこれまでに見当たらない。その理由は二輪車用タイヤが非常に高減衰であるために、振動モードの存在する周波数を特定できなかったことにあると考えられる。しかしながら、近年では自動二輪車において鼓動感と称される乗り心地が付加価値となっており[110-112]、車体設計時の重要な評価項目の一つとなっている[113]。また、加速走行時の放射音も各自動二輪車の特徴を決定づける因子であるため、音の感性評価に関する研究も進められている[114]。そのため、低周波数領域から高周波数領域に至る広い周波数範囲の自動二輪車に関する振動解析[115-119]はますます重要になり、同時に自動二輪車用タイヤの動特性の把握は重要であると考えられる[120,121]。このような背景から、以下にまとめる二輪車用タイヤの実験モード解析で得られた知見は価値のあるものとする。

4.4.1 実験条件

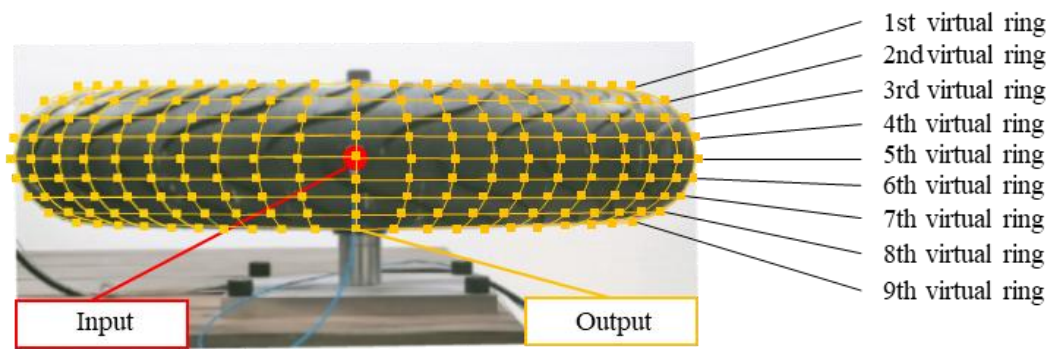
振動試験に用いる二輪車用タイヤはサイズ 195/65/R17、空気圧 250kPa のラジアルタイヤ（市販品）とした。ホイールを軸に固定し、非接地-非転動状態で加振試験を行う。

入力インパクトハンマ（PCB 086C03）を用いて打撃加振し、応答は加速度ピックアップ（PCB 372A73）により計測する。また、それらの計測データをデータ解析装置（小野測器 DataStation3000）に取り込み、FRF を取得する。試験時の装置概略と、試験タイヤの入力点と 1 リング分の応答点を図 4.13 に示す。図 4.13(b)において、入力点はタイヤのトレッド部に設定した 9 本の仮想リングのうちの第 5 本目の 1 点（●）であり、応答点は周方向等間隔に 40 点（■）を設定した。他の仮想リングの応答を計測する場合も入力点は変更せず、応答点のみ変更する。なお、全応答点数は 360 点である。

また、入力および応答の計測方向はタイヤ表面の法線方向とし、周波数レンジは 1000 Hz、周波数分解能は 0.625 Hz で計測を行う。



(a) 試験装置概略



(b) 試験タイヤと入力-応答の位置関係 (第5本目のリング)

図 4.13 振動試験の外観

4.4.2 周方向縮約の効果

振動試験によって取得した FRF に対して周方向縮約法を適用した結果について述べる．図 4.14 に駆動点 FRF H_{exp} と，縮約により抽出した周方向各次モード成分の FRF $H_{red}^i(f)$ ($i=1\sim10$) を示す．図 4.14 の FRF H_{exp} は，200 Hz 以下の周波数領域では二つの共振峰を確認することができるが，これらはホイールの並進モードと固定軸の曲げ 1 次モードであることを確認している．このことからタイヤ単体の振動モードについては 300 Hz 以上の周波数領域に存在する共振峰であると考えられるが，600 Hz 以上では共振峰を明確に確認できず，モードの判別が難しいことがわかる．一方，周方向縮約を行った FRF $H_{red}^i(f)$ は，特に 600 Hz 以上の周波数領域において，周方向各次モードに分離されていることがわかる．しかしながら，500 Hz~1000 Hz の中周波数から高周波数領域にかけて共振峰が非常になめらかであり，周方向 0~10 次一軸方向高次モードを捉えることが難しいことがわかる．

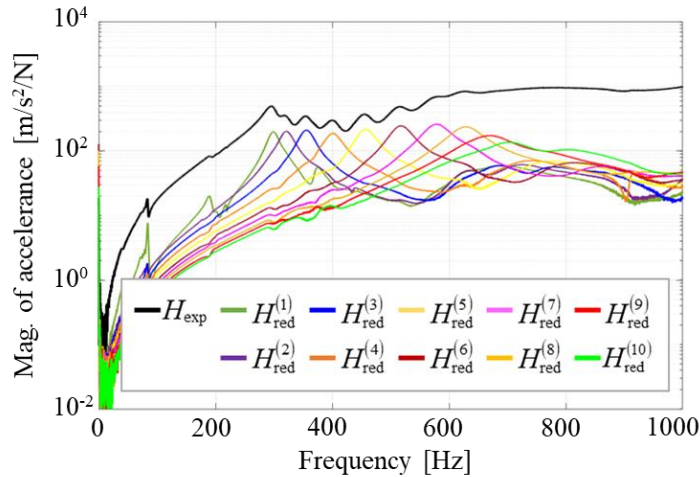


図 4.14 実験より取得した FRF を縮約した結果（周方向 1～10 次モード）

4.4.3 モード特性の同定

周方向 1 次モードを例として、100 Hz～1000 Hz の周波数領域に着目して同定したモード特性についてまとめる．なお、打撃試験から FRF を取得することと、減衰特性がモードによって異なることを想定し、同定では比例粘性減衰系を仮定するが、モード抽出と同定の考え方は第 3 章と同じである．

表 4.2 に、各ピークに対応する固有振動数 f_{np} と減衰比 ζ_p を示す．表 4.2 より、3 つ目の共振峰から得られた減衰比はその他のモードと比較して 1/10 程度となっている．これはタイヤ内部の空洞共鳴[122-126]と考えられ、タイヤ周長と音速から簡易的に算出した第 2 次空洞共鳴周波数にほぼ一致することを確認している．また、第 1 次空洞共鳴周波数は図 4.14 の二つ目の共振峰の周波数とほぼ一致することも確認している．

ここで、表 4.2 の同定値を用いて再構築した FRF と、同定値から再現した振動形状を図 4.15 に示す．図 4.15 の再構築した FRF は 100 Hz～500 Hz の周波数領域では概ね良好に一致しているといえる．しかしながら、500 Hz 以上の周波数領域では抽出した FRF と再構築した FRF に乖離が生じている．このような結果となる原因を以下に 3 点挙げる．

- タイヤの厚みの影響で理想的なシェルと見なせないこと
- 入力点がトレッド部中央の 1 点であるため、十分にモードを励起できていない可能性があること

- 実際のタイヤでは断面形状の曲率が一定ではなく、固有モードが三角関数と完全には対応していない可能性があること

このような結果となるのは、入力点がトレッド部中央の1点であるため、十分にモードを励起できていない可能性があることが原因の一つと考えられ、今後は、多点加振による FRF 取得などで解決を図る予定である。

一方、振動形状に着目すると、図 4.15 において 200 Hz 付近に存在する振動モードはタイヤが傾いたような形状となっており、前述した固定軸の曲げ 1 次モードであることが確認できる。したがって、タイヤ単体の振動モードは、二つ目と四つ目の共振峰であると考えられ、これらのモードについては、MAC 値を算出し、モードが直交していることを確認している。また、図 4.16 に周方向 1~10 次モードのカーブフィットの結果とモード形状および固有振動数、減衰比を示す。図 4.16 より、その他の周方向次数については、固定軸の曲げ 1 次モードと空洞共鳴の影響は非常に小さいことがわかる。なお、振動形状の下部に同定した固有振動数と減衰比を記載する。

表 4.2 モード特性の同定結果

Peak number	Modal characteristics	
	f_{np} [Hz]	ζ_p [%]
1	193.2	6.9
2	297.5	3.6
3	368.9	0.8
4	636.7	6.2

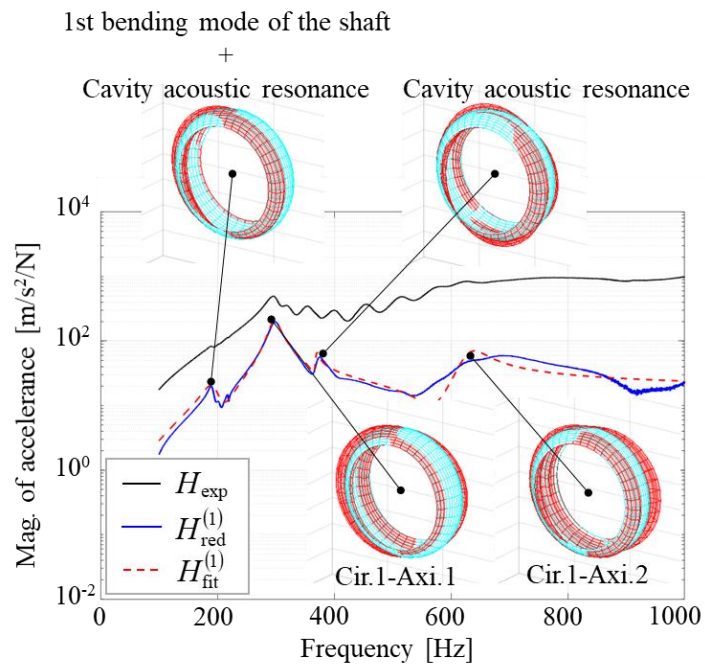


図 4.15 周方向 1 次モードのカーブフィットの結果とモード特性

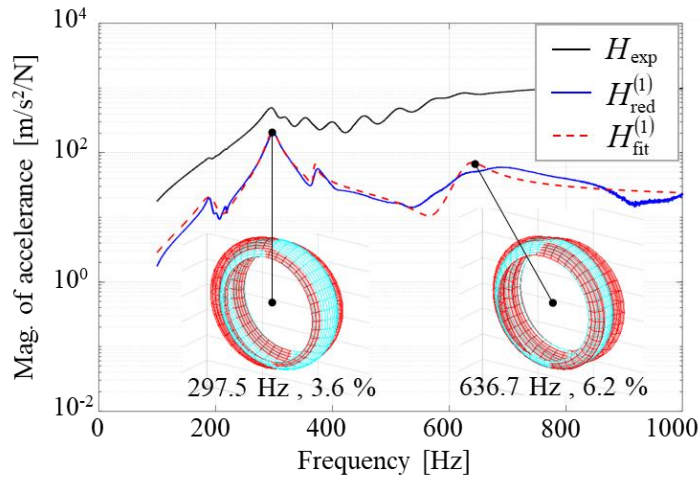


図 4.16 (a) 周方向 1 次モードのカーブフィットの結果とモード特性

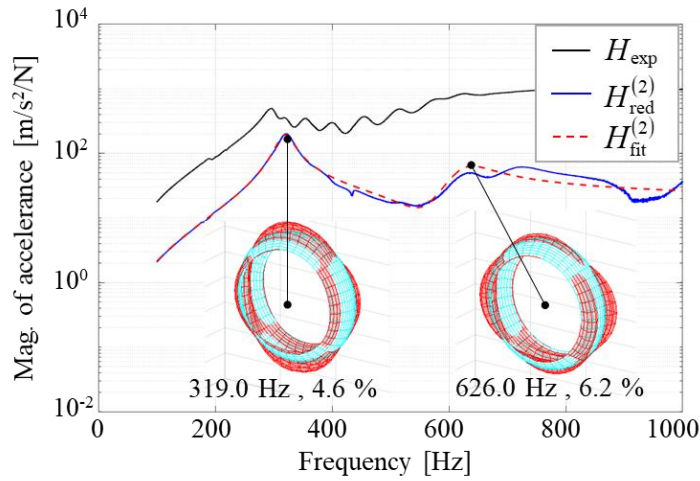


図 4.16 (b) 周方向 2 次モードのカーブフィットの結果とモード特性

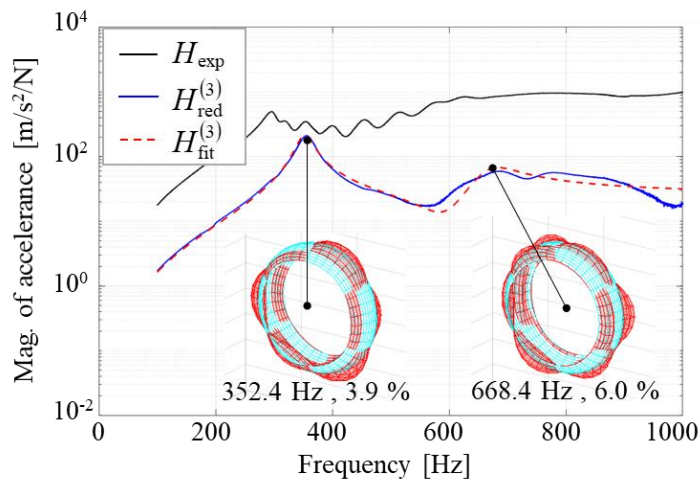


図 4.16 (c) 周方向 3 次モードのカーブフィットの結果とモード特性

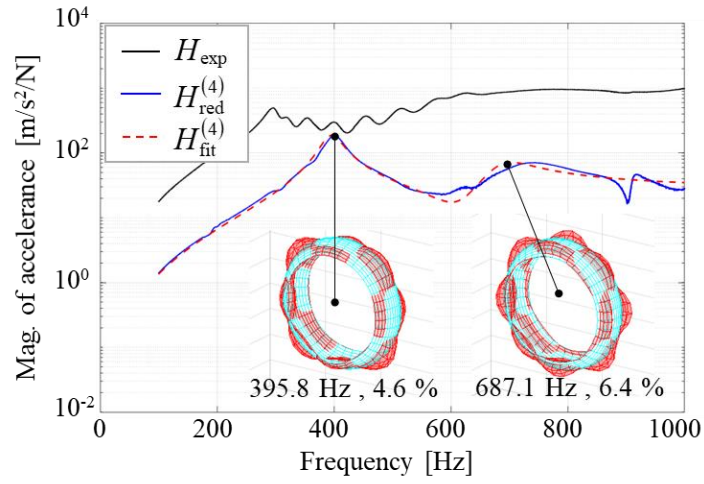


図 4.16 (d) 周方向 4 次モードのカーブフィットの結果とモード特性

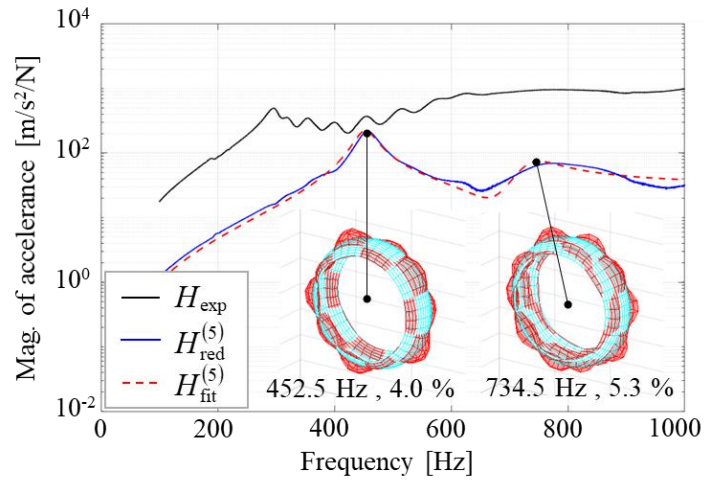


図 4.16 (e) 周方向 5 次モードのカーブフィットの結果とモード特性

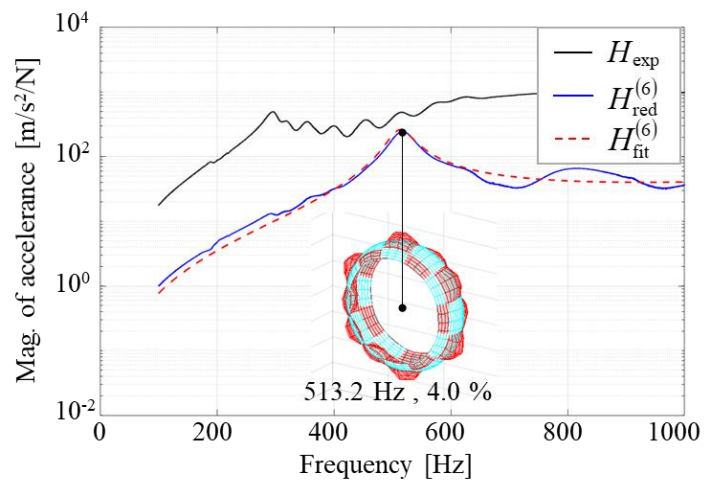


図 4.16 (f) 周方向 6 次モードのカーブフィットの結果とモード特性

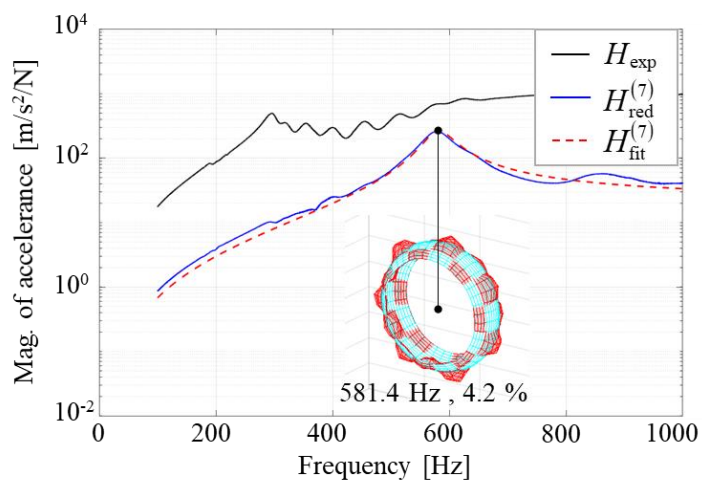


図 4.16 (g) 周方向 7 次モードのカーブフィットの結果とモード特性

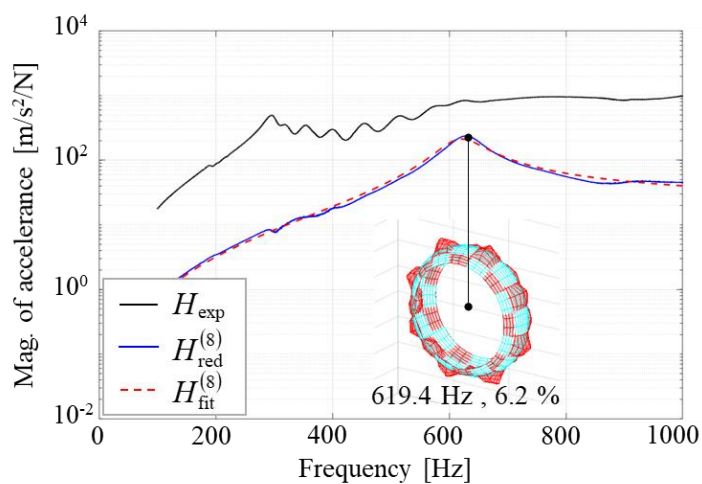


図 4.16 (h) 周方向 8 次モードのカーブフィットの結果とモード特性

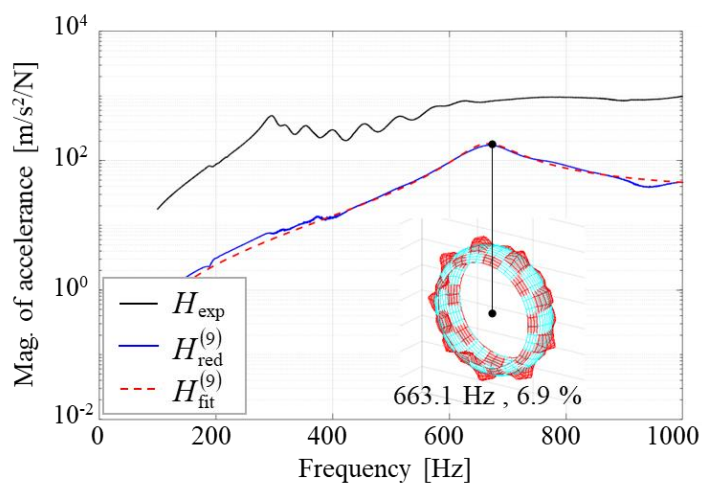


図 4.16 (i) 周方向 9 次モードのカーブフィットの結果とモード特性

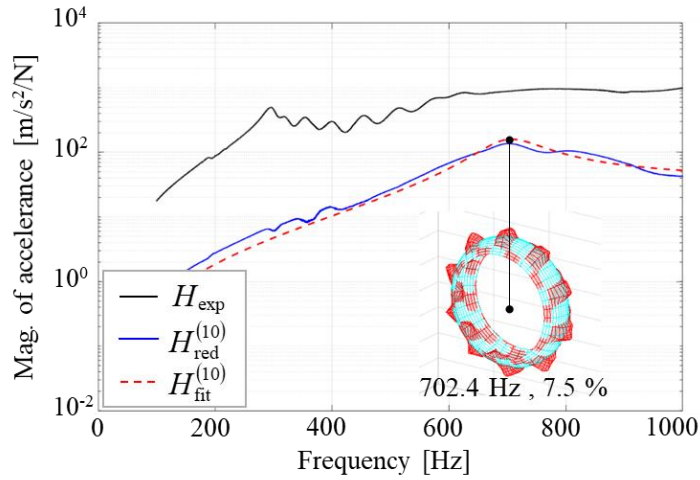


図 4.16 (j) 周方向 10 次モードのカーブフィットの結果とモード特性

4.5 周方向縮約法の必要性と二輪車用タイヤのモード特性の考察

本節では周方向縮約法の必要性と、前節で把握した二輪車用タイヤの振動モードについて考察する。

まず、周方向縮約法の必要性についてまとめる。周方向縮約法を適用せずに、一般的な実験モード解析を適用した結果を図 4.17 に示す。実験から取得した FRF は H_{exp} 、同定結果から再構築した FRF は H_{cal} である。図 4.17 における 500 Hz 以上の周波数領域では、共振峰を捉えることができないので、適当にモード数を決定して同定した。そのため同定されたモード形状は歪んでおり、再構築した FRF H_{cal} は実験から取得した FRF H_{exp} との乖離が大きい。また、同定したモード形状同士の直交性を確認するため、図 4.18 に MAC 値を示す。図 4.18(a)は周方向縮約法を適用しない場合、図 4.18(b)は適用した場合の結果である。周方向縮約法を適用しない場合、それぞれのモード形状が歪んで表されたため、例えば 9 番目から 11 番目の振動モードの相関が高くなっている。これは正確にモード同定できなかったことを意味している。一方、周方向縮約法を適用した場合、全体的に振動モード同士の相関が低く、比較的正確にモード同定できていることがわかる。したがって、一般的な実験モード解析からモーダル特性を同定することは難しく、周方向縮約法の適用が必要であることを示した。

次に、前節で把握した二輪車用タイヤの振動モードについて、自動車用タイヤの振動モードと比較することその特徴を考察する。二輪車用タイヤの固有振動数については、最低次モードである周方向 1 次-軸方向 1 次モードが約 300 Hz に現れることを把握した。一方、

同程度の空気圧を保持した一般的なサイズの自動車用タイヤでは最低次モードが約 100 Hz に現れる. ここで自動車用タイヤの FRF および曲線適合の結果を図 4.19 に示す. 図 4.15 と図 4.19 を比較すると, 二輪車用タイヤの方が最低次モードの固有振動数が 100 Hz 以上高く, 高次モードも全体的に固有振動数が高いことがわかる. この理由としては, 二輪車用タイヤは断面に曲率を有するため, 断面二次モーメントが自動車用タイヤよりも大きくなるので, 振動数が高くなるものと考えられる. また, モード形状については, 二輪車用タイヤでは最低次モードでも軸方向に波数を持ち, 軸方向次数が高くなるにつれて, 波数が 1.5, 2.5 となることが図 4.20 より確認できる. 一方, 自動車用タイヤの軸方向 1 次モードでは波数を持たないことが図 4.21 より確認できる. このように二輪車用タイヤの軸方向波数の方が多いのは, トレッド部がフラットな自動車用タイヤと断面形状が異なることや, 自動車用タイヤに比べてサイドウォール部がばねとして働きにくいことに起因するものと考えられる. また, その他の周方向次数の FRF から同定したモード特性からも同様のことがいえる.

以上, 二輪車用タイヤの実験モード解析において周方向縮約法の適用が必要であることと, 二重曲率を有することに起因するモード特性の特徴について考察した.

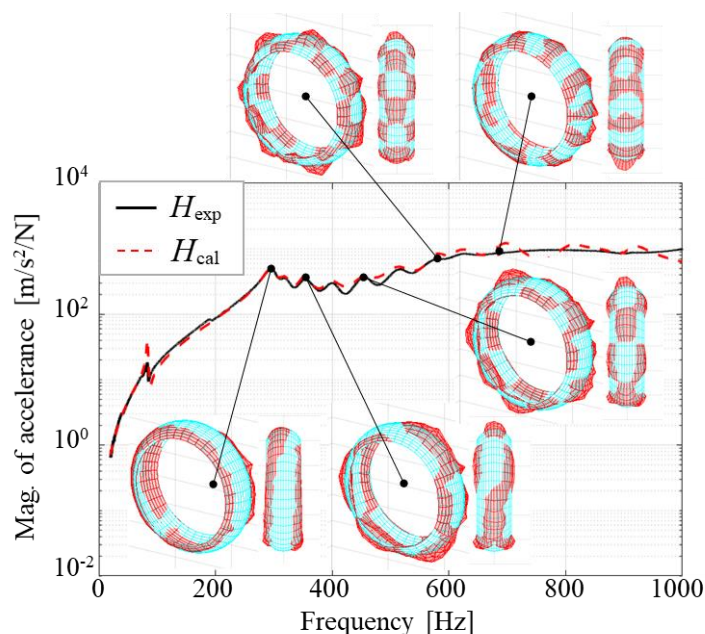
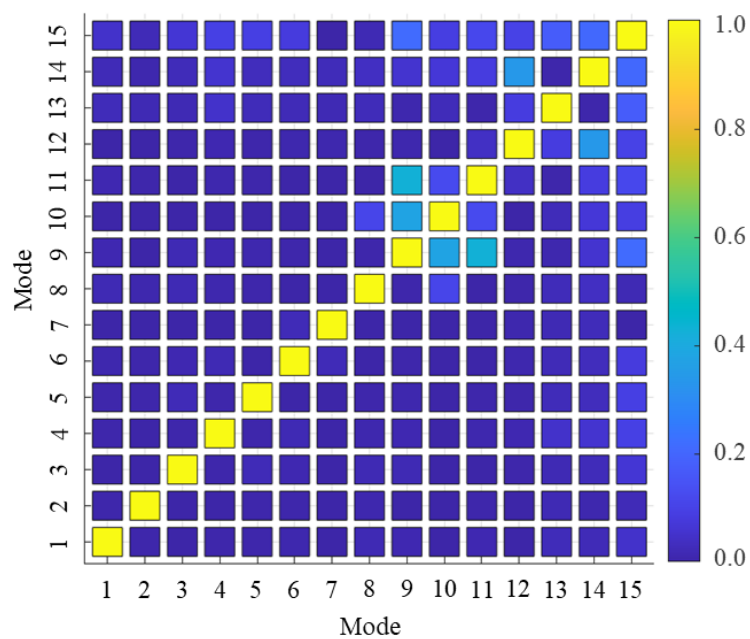
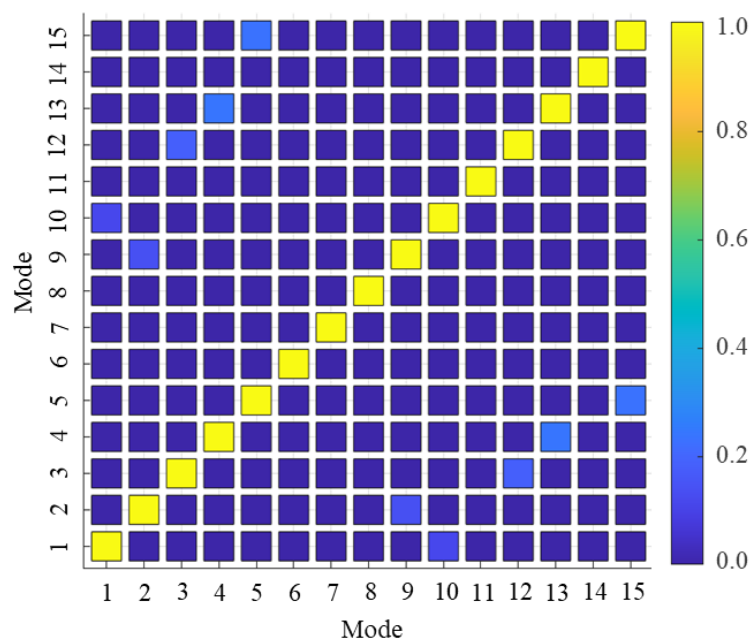


図 4.17 一般的な実験モード解析を適用した結果



(a) 周方向縮約法を適用しない場合



(b) 周方向縮約法を適用した場合

図 4.18 MAC 値の比較

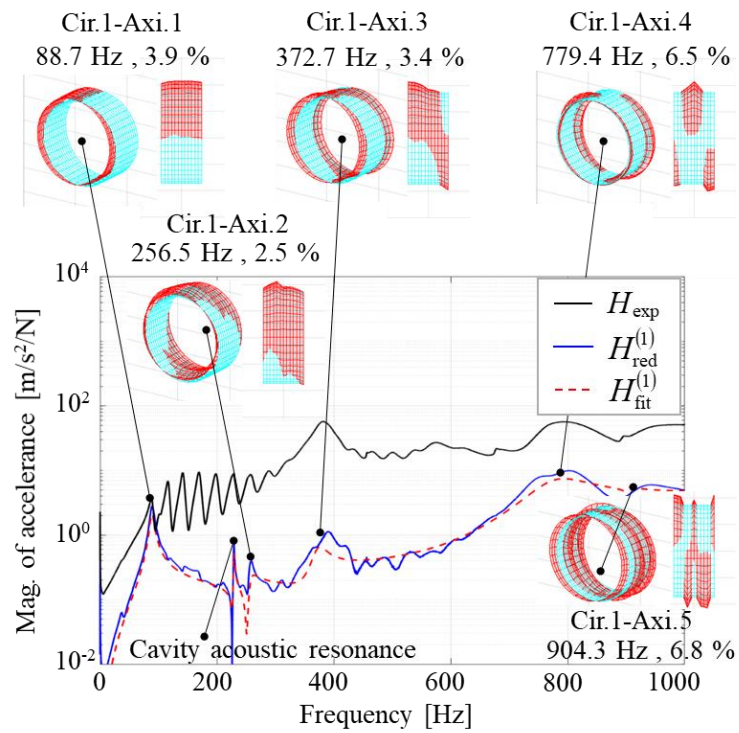


図 4.19 自動車用タイヤの実験モード解析の結果

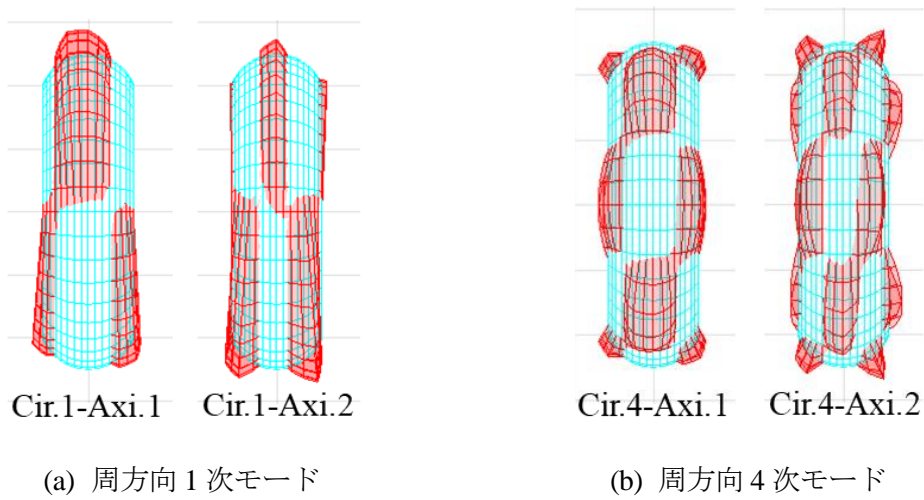


図 4.20 軸方向波数の確認

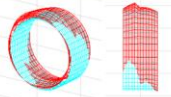
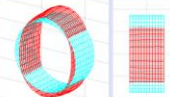
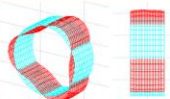
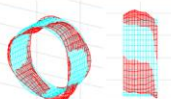
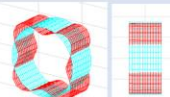
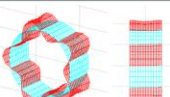
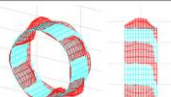
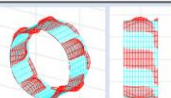
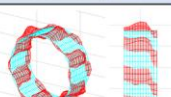
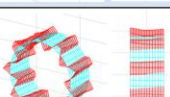
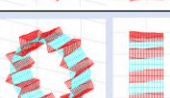
Mode order	f_{np} [Hz]	ζ [%]	Mode shape	Mode order	f_{np} [Hz]	ζ [%]	Mode shape
Cir.1-Axi.1	88.7	3.9		Cir.1-Axi.2	256.5	2.5	
Cir.2-Axi.1	116.2	3.1		Cir.2-Axi.2	395.4	3.0	
Cir.3-Axi.1	141.5	2.3		Cir.3-Axi.2	386.6	3.1	
Cir.4-Axi.1	169.2	2.3		Cir.4-Axi.2	393.1	2.7	
Cir.5-Axi.1	197.9	2.2		Cir.5-Axi.2	383.0	2.5	
Cir.6-Axi.1	227.4	2.4		Cir.6-Axi.2	372.4	3.7	
Cir.7-Axi.1	258.4	2.7		Cir.7-Axi.2	373.1	4.5	
Cir.8-Axi.1	288.5	2.6		Cir.8-Axi.2	384.5	2.8	
Cir.9-Axi.1	323.7	4.1		Cir.9-Axi.2	399.8	1.8	
Cir.10-Axi.1	360.0	3.1		Cir.10-Axi.2	424.3	2.9	

図 4.21 自動車用タイヤのモード特性の例

4.6 結言

本章では、高減衰特性を有し、かつ二重曲率の周期構造物の実験モード解析の問題を解決した。具体的には、二重曲率を有する周期構造物の固有関数を三角関数で近似できることを明らかにし、周方向縮約法の適用性を検証した。また、実験では現在のところ振動挙動に関わる研究事例のない二輪車用タイヤを対象にしたモード特性同定を試みた。得られた知見は以下のとおりである。

- 二重曲率を有する周期構造物を対象にした数値解析では、周方向縮約法を適用した FRF に曲線適合して得られたモード形状と、固有値解析で得られたモード形状を比較することで、固有関数を三角関数で近似できることを明らかにした。
- 二重曲率を有する場合でも固有関数を三角関数で近似できるので周方向縮約法により FRF の自由度を低減でき、問題なくモード特性を同定できることを示した。
- 数値解析により適用性を示せたので、二輪車用タイヤの実験モード解析にも周方向縮約法を適用できると考え、検証の一連の流れに沿ってモード特性を同定した。さらに周方向縮約法を適用しない一般的な実験モード解析も実施し、得られた結果を比較することで、周方向縮約法の必要性を確認した。
- 二輪車用タイヤのモード特性については、自動車用タイヤのモード特性と比較することで、その特徴を考察した。そこでは、二輪車用タイヤの方が最低次モードの固有振動数が 100Hz 以上高く、高次モードも全体的に固有振動数が高いことを把握した。この理由は、二輪車用タイヤは断面に曲率を有するため、断面二次モーメントが自動車用タイヤよりも大きくなるので、振動数が高くなるものと考えられる。
- モード形状については、二輪車用タイヤでは最低次モードでも軸方向に波数を持ち、軸方向次数が高くなるにつれて、波数が 1.5, 2.5 となることを把握した。一方、自動車用タイヤの最低次モードでは波数を持たないことを確認した。二輪車用タイヤの軸方向波数の方が多いのは、トレッド部がフラットな自動車用タイヤと断面形状が異なることや、自動

車用タイヤに比べてサイドウォール部がばねとして働きにくいことに起因するものと考えられる。

以上，高減衰特性を有し，かつ二重曲率の周期構造物に対する周方向縮約法の適用性を検証し，実際に二輪車用タイヤの振動特性を把握することができた．本章で把握できなかった 500 Hz 以上の中周波数から高周波数領域における周方向 0~10 次一軸方向高次モードおよび周方向 11 次以上のモードについては，多点加振を実施するなどの対策を行うことにより振動モードを十分に励起し，正確なモード同定を行う必要がある．

第5章 高減衰特性を有する構造物に対する 低減衰化実験モード解析法の検討

5.1 緒言

比較的低減衰特性を有する構造物では、十分に振動モードを励起できるため、実用上問題なくモード特性を同定できる。一方、例えば母材にゴム材料が使用されるような高減衰特性を有する構造物では、インパクトハンマによる打撃加振や一つの加振器による定常加振では構造物全体に振動が行き渡りにくく、振動モードが励起されない。そのため、FRF上で共振峰が明確に現れないモードがあり、モード特性の同定が難しい。実際に前章では、高減衰特性を有する構造物として二輪車用タイヤを取り上げて実験モード解析を実施したが、インパクトハンマによる打撃加振では 500 Hz 以上の中周波数から高周波数領域の振動モードを十分に励起できず、その結果、良いモード同定の結果を得ることができなかった。このような場合、複数個の加振器を用いる多点加振で振動試験が実施され、より明確な共振峰が得られた FRF からモード特性が同定される。

多点加振の方法は、一般的に入力信号同士が無相関となるように、複数個の加振器それぞれに加振力の大きさなどのパラメータを設定する[127,128]。ランダム信号を与える多点加振が相当するが、入力点数が多くなるほど、実験者が意図しないところで入力信号同士が相関を持つ場合がある。また、加振器それぞれに加振周波数や位相、加振力のパラメータを設定し、対象とする振動モードを励起する共振点駆動多点加振も実施される。これは共振現象を利用した加振法であり、小さな力で必要な大きさの振動を得ることができるため、効率のよい加振法である。あらかじめ対象物の固有振動数やモード形状がある程度の精度で把握できている場合に、実構造物の固有振動数とモード形状を同定する方法として使用されている。しかしながら、振動モードに応じてすべての加振パラメータを構造物固有の特性である固有振動数と減衰比とは独立に決定し、綿密に調整して与える必要があり、加振指令のパターンが急激に増加する問題がある。このように実際の多点加振による実験モード解析は難しい。

以上のような多点加振の問題を解決するために、栗田らは速度 FB 制御により発生する自励振動を利用した自励駆動法を提案した[91-95]。この加振法では自励振動子を利用するため、パラメータを綿密に調整する必要がなく、構造物固有の特性を反映させた加振が実現できる。また、速度に比例する成分を持つ力をフィードバックすることにより、対象物

の減衰の影響を小さくできるため、FRF 上の共振峰は鋭く明確に現れることが実験的に報告されている[96]. つまり、これまでに提案された自励駆動法は、1 点加振と同様の手順で多点加振でき、対象物の減衰の影響を疑似的に小さくする効果を持つ。しかしながら自励駆動法では、必ずしも強制外力の振動数と自励振動子の振動数が一致するとは限らず、対象物の振動モードが近接する場合には、ゲインが大きい方の振動モードの振動数に引き込まれて自励発振してしまうという報告もある[97,98]. したがって、FRF の取得に困難を伴うためモード特性を同定することができないという課題がある。また、フィードバックされる力は単純な速度比例の力ではないため、そのように低減衰化して取得した FRF から減衰特性を評価することは不可能である。制御系の設計においては、制振要素や飽和要素を追加してそれらの特性を細かく調査してゲインを試行錯誤的に設定し、さらに複数の応答点のデータを用いるクロスフィードバック制御を追加する工夫がなされ、所望の振動数で自励発振させて FRF を低減衰化した例も報告されているが[97,98], 依然として減衰特性を評価することはできない。

そこで、本研究では高減衰特性を有する構造物を低減衰化したうえで、減衰特性の評価が可能な低減衰化実験モード解析法を提案する。具体的には、対象とする振動モードの減衰を小さくするような速度 FB 加振の方法とゲインの決定方法を提案する。また、そのように決定したゲインを用いた速度 FB 加振により、FRF を低減衰化してモード特性を同定する。さらに、速度 FB 加振の影響を補正することで、構造物本来の減衰特性も把握できることを示す。以下では、共振峰が明確に現れない FRF を例示した後に、FRF を低減衰化できることを説明するために 1 自由度系を用いた速度 FB 加振の数値例を示す。また、低減衰化実験モード解析の方法をまとめ、最後に高減衰特性を有する多自由度系へ適用し、構造物本来のモード特性を同定できることを示す。

5.2 高減衰特性を有する構造物の実験モード解析の問題

本節では、高減衰特性を有する構造物の実験モード解析の問題点を挙げる。具体的には、FRF において共振峰を捉えることができないために適当なモード数を判定できず、モード特性の同定が難しいことを示す。その後、構造物の減衰の大きさのみが異なる FRF を例示し、減衰が小さい方がモード数を判定し易く、比較的モード特性の同定が簡単になることについて説明する。

5.2.1 共振峰が明確に現れない周波数応答関数の例示

実験モード解析では、振動試験から FRF を取得して、FRF の理論式に適合するようにモード特性を同定する。しかしながら、共振峰が明確に現れない場合には、はじめにモード数の判定が難しく、その後のカーブフィットの信頼性が著しく低下する。共振峰が明確に現れないほどの高減衰特性を有する構造物として、例えば母材にゴム材料が使用されるタイヤなどがある。図 5.1 の黒色実線は二輪車用タイヤの FRF であり、約 300 Hz から高周波数側にモードが連なるが、減衰が大きいためそれらの共振峰が明確に現れていないことがわかる。実際にモード特性の同定を試みたが、共振峰を捉えることができず、適当なモード数を設定できないため、図 5.1 の赤色破線のようにカーブフィットが非常に難しいことを把握した。

5.2.2 減衰の大きさがモード特性同定の精度に与える影響

構造物が高減衰特性を有する場合、FRF 上の共振峰は明確に現れないためモード特性の同定が難しい。図 5.2 はモード特性のうち、減衰の大きさのみが異なる条件で算出した FRF の例を示す。ここでは比例粘性減衰を仮定し、A から C の 3 つの減衰を設定した。減衰が比較的大きい条件 A では、2 次モードの共振峰を捉えることができない。このような場合、一般的な実験モード解析では、本来の 2 次モードを剰余項として扱い、1 次モードのみのモード特性を同定する方法がとられる。一方、減衰が比較的小さい条件 B および C では、2 次モードの共振峰を捉えることができる。そのため、実験モード解析により 1 次モードと 2 次モードのモード特性をそれぞれ同定できる。

以上のように減衰が小さい方が、実験モード解析を実施し易く、高精度にモード特性を同定できる。したがって、高減衰特性を有する場合でも、振動試験の方法を工夫して疑似的に減衰の影響を小さくすることが可能であれば、高精度にモード特性を同定できると考えられる。

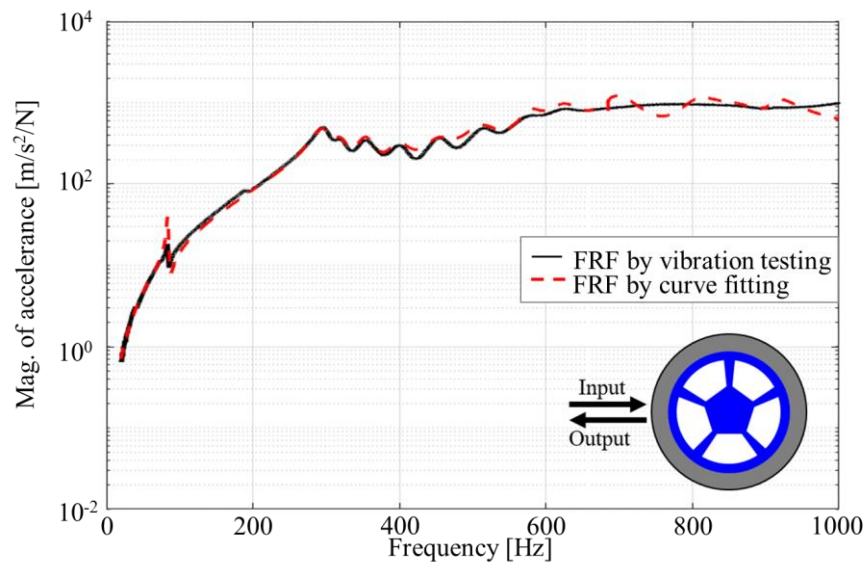


図 5.1 二輪車用タイヤの FRF にカーブフィットした結果

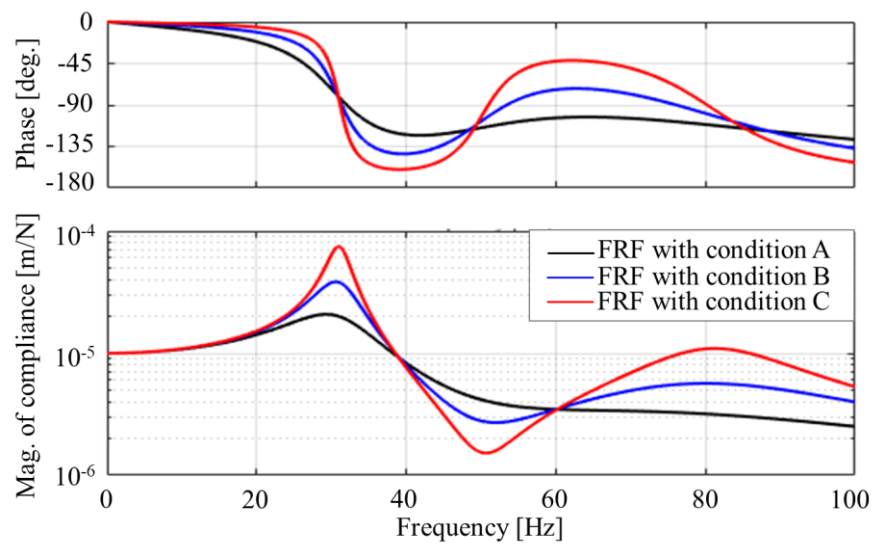


図 5.2 減衰の大きさのみが異なる条件の FRF の例

5.3 速度フィードバック制御をベースとした従来の加振法の課題

前節では実験モード解析の適用が難しい高減衰特性を有する構造物の FRF を例示するとともに、減衰の小さい方がモード同定の信頼性が比較的高くなることを説明した。栗田らが提案した自励駆動法[91-95,97,98]を用いる場合、対象物の減衰の影響を疑似的に小さくし、振幅を増大させることが可能であるため、モード形状を把握する際には有用であるが、FRF の取得に困難を伴うことや、減衰特性を評価できない課題がある。

そこで本節では、この課題について 1 自由度系の運動方程式を用いて説明する。構造物に正弦波強制外力が作用するときに、速度 FB 制御によって自励振動を発生させる自励駆動法は構造物の固有特性に加えて、位相特性とゲイン特性をコントロールする加振法である。実際の構造物に適用する場合は、局所的なフィードバックループを持つコントローラで複数のアクチュエータを自励発振させることで、より簡単に構造物全体を振動させることができる[94,95]。

構造物から取得されるコンプライアンスの特性として、加振点と計測点を同一配置にすると、加振点から計測点までの伝達特性は、すべての固有振動数で位相が 90° 遅れることが知られている。この特性を利用して、局所的なフィードバック制御のコントローラで位相をさらに 90° 遅らせると、一巡伝達関数の位相が固有振動数で 180° 遅れる。このとき、一巡伝達関数のゲインが 0dB よりも大きくなるように局所的な FB 制御のゲインを与えると、不安定な制御系となるため各アクチュエータが固有振動数で自励発振する。この局所的な FB 制御は固有振動数で位相が -90° となることを利用した制御のため、駆動中に固有振動数が変化しても、その固有振動数の変化を追尾して駆動することができる[97,98]。さらに自励振動子の同期現象により、各アクチュエータが固有振動を介して同期するため、構造物全体に振動が行き渡り、FRF 上では共振峰を捉えることが可能になる。

いま、図 5.3 に示すような質量 m 、粘性減衰係数 c 、ばね定数 k とした 1 自由度系に、大きさ F の正弦波強制外力が質点に作用する場合、運動方程式は次式のようにになる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F\sin\omega t \quad (5.1)$$

一方，ゲインを K_v とした速度 FB 加振を行う場合，ブロック線図は図 5.4 のように表される．栗田らは全周波数領域で位相を 90° 遅らせる変位の積分制御（I 制御）と速度負帰還制御（(-D)制御）を組み合わせた制御（I(-D)制御）を用いた[94,95]．なお， T_I は I 制御， T_D は (-D)制御の時定数である．このとき運動方程式は次式のように表され，右辺第 2 項 u が減衰の影響を小さくする成分を持つ FB 制御力である．

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F\sin\omega t + u \quad (5.2)$$

自励駆動法では不安定領域の振動系となるようにゲイン K_v が調整される．以上のように，これまでに検討された自励駆動法では，コントローラに発振要素として変位の積分要素や微分要素が組み込まれている．このコントローラを用いる場合には，必ずしも強制外力の振動数と自励振動子の振動数が一致するとは限らず，設計者の意図とは異なる振動数で自励振動子が自励発振してしまう課題がある．また，フィードバックされる力は単純な速度比例の力ではないため，そのように低減衰化して取得した FRF から減衰特性を評価することは不可能である．制御系においては制振要素や飽和要素が追加され，さらに隣接する応答点のデータを用いるクロスフィードバック要素が組み込まれたコントローラが開発され[97,98]，所望の振動数で自励発振させることができた報告もあるが，フィードバックされる力が速度比例の力以外の成分を持つため，減衰特性を評価することができないという課題が残る．

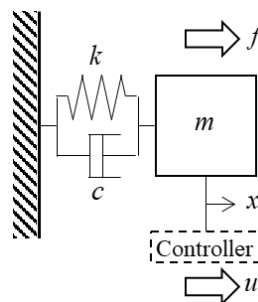


図 5.3 速度 FB 制御を適用した 1 自由度系

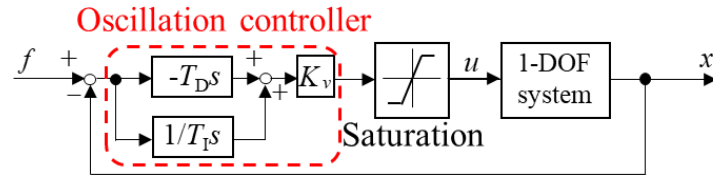


図 5.4 1 自由度系を対象とした I(-D)制御のブロック線図

5.4 速度フィードバック加振による低減衰化の効果

前節では，速度 FB 制御をベースとした自励駆動法で，対象物の減衰の影響を小さくできるが，FRF を取得することが困難であり，モード特性を同定できないことについて説明した．

本節では，純粋な速度 FB 加振により対象物の減衰の影響のみを小さくし，モード特性の同定まで可能とする方法を検討する．そこで速度 FB 加振の本質を把握するために，対象物が高減衰特性を有する 1 自由度系に単純な速度 FB 加振を適用し，疑似的に減衰の影響を小さくできることを数値例により説明する．

ここで，速度のみをフィードバックすることを考え，図 5.5 のブロック線図の制御系を扱う．このとき式(5.2)の運動方程式の右辺第 2 項 u は，純粋な速度にゲイン K_v をかけた量となる．つまり，運動方程式は式(5.3)のように表され，速度 FB による加振力は速度項にのみ作用することがわかる．本研究では，対象物のモード特性を同定するため， $c-K_v > 0$ となる安定領域内で振動系を低減衰化する．いま，比例粘性減衰を仮定し，図 5.3 の振動系のパラメータを質量 $m=1$ kg，粘性減衰係数 $c=200$ N/m/s，ばね定数 $k=10000$ N/m として FRF を算出する．また，図 5.5 のブロック線図に基づき速度 FB 加振を行う．速度 FB 加振を行う場合と行わない場合の時刻歴応答波形の比較を図 5.6 に，FRF の比較を図 5.7 に示す．速度 FB 加振を行う場合は粘性減衰力が小さくなるため，変位の振幅が大きくなることが図 5.6 で確認できる．また，その効果により得られた FRF は，元の振動系の FRF より共振峰が先鋭化することが図 5.7 で確認できる．このようにして低減衰化された FRF は，減衰の影響のみ小さくなっている．そのため，低減衰化後の FRF に対してモード同定し，その結果にゲインの影響を考慮することで，低減衰化前のモード特性を把握することが可能になると考えられる．

以上，粘性減衰力を低減させる速度比例の制御力を振動系に与えることで，減衰の影響のみ小さくなり，FRF 上では共振峰が先鋭化することを確認した．

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F\sin\omega t + K_v\dot{x} \quad (5.3)$$

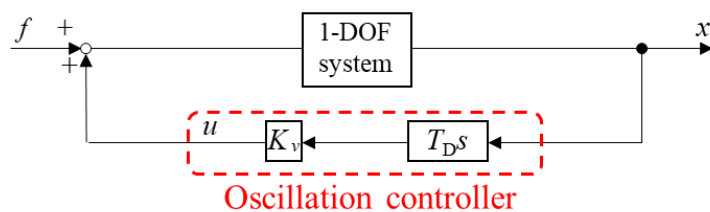


図 5.5 1 自由度系を対象とした速度 FB 制御のブロック線図

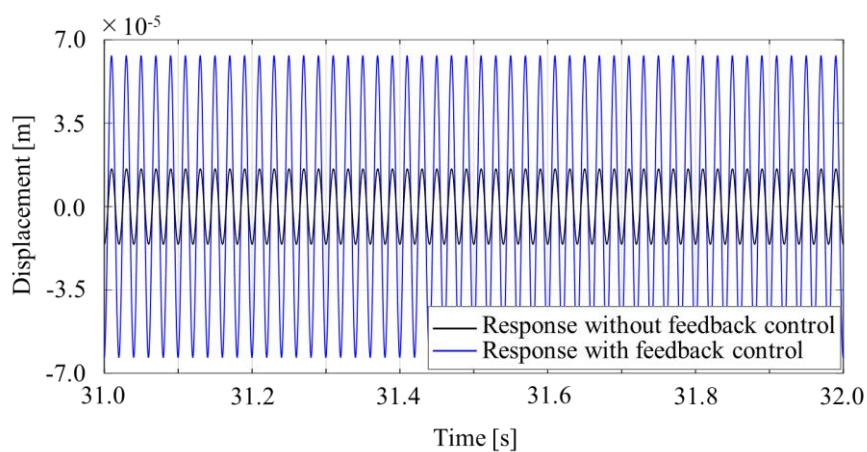


図 5.6 速度 FB 加振を行う場合と行わない場合の時刻歴応答の比較

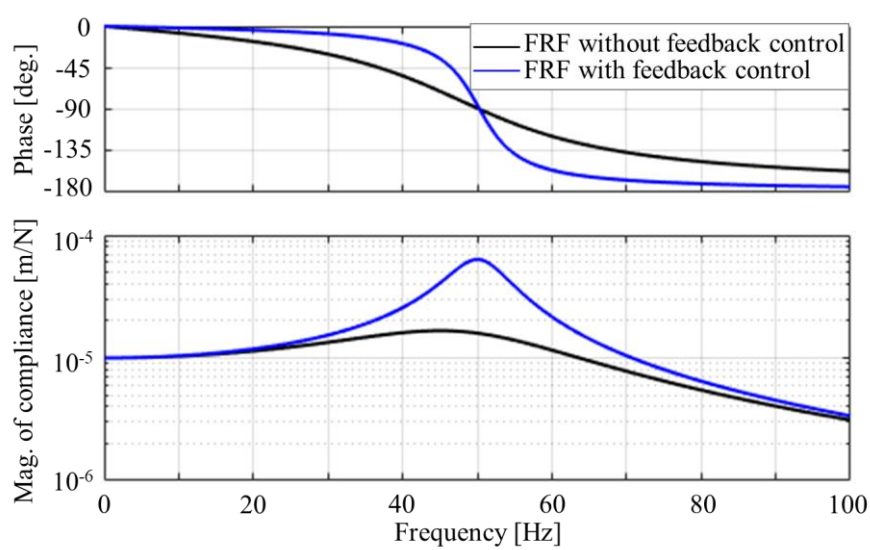


図 5.7 速度 FB 加振を行う場合と行わない場合の FRF の比較

5.5 低減衰化実験モード解析法の提案

従来の速度 FB 制御をベースとした自励駆動法では、フィードバックされる力が速度比例の力以外の成分を持つため、減衰特性を評価することができないという課題があった。一方、前節において 1 自由度系の数値例で示したように、純粋な速度 FB 加振を施す場合は、対象物の減衰の影響のみ小さくできるため、低減衰化後の FRF に対してモード同定が可能になり、さらにその結果にゲインの影響を考慮することで、低減衰化前のモード特性を把握することが可能になると考えられる。

そこで本研究では、純粋な速度 FB 加振を施す場合は減衰の影響のみ小さくなるという考えに基づいた低減衰化実験モード解析法を提案する。具体的には、対象とする振動モードの減衰を小さくする速度 FB 加振法とゲインの決定方法を提案する。また、そのように決定したゲインを用いた速度 FB 加振により、FRF を低減衰化してモード特性を同定したうえで、速度 FB 加振の影響を補正して構造物本来の減衰特性を把握する。ここでは一般的な多自由度系を用いて提案法を説明する。

5.5.1 問題設定

モード特性を同定する際は、あらかじめ対象とする振動モードと解析区間を決定する必要がある。そのため通常は、FRF 上で共振峰の周波数を把握して、各モードの解析区間を決定する。しかしながら、図 5.2 の条件 A の FRF で示したように、高次モードの共振峰を把握できない場合にはそのモードは同定対象とはなり得ない。そのようにしてモード同定しても、同定結果に誤差が含まれるため、実験値とカーブフィットの結果は乖離してしまう。この問題を低減衰化実験モード解析により解決する。問題設定の要点を以下にまとめる。

- 低次側の振動モードは、比較的モード減衰比が比較的小さく、共振峰を捉えることができるため、モード特性を同定できる。
- 高次側の振動モードは、モード減衰比が非常に大きく、共振峰を捉えることができず、モード特性を同定することができない。

- 物理座標系で、各自由度の絶対速度に比例した速度 FB 制御力を与えることで、高次側の振動モードのモード減衰比を小さくする。速度 FB 加振で得られる効果を $(\zeta_r - \Delta\zeta_r)$ とする。 r はモード次数を意味する。
- ただし、振動系全体が不安定化しないように速度 FB 制御のゲイン（減衰係数）を定める。

実際の構造物への適用時は、対象物の一点に加振器を設置し、正弦波外力を与える。低減衰化する場合は、同時に外力の作用点と同一点を含めた複数点で変位を計測し、上記の速度 FB 制御力を各アクチュエータに出力する。このような振動試験を実施し、加振器の外力と各変位センサで取得した変位を周波数解析装置に取り込み、コンプライアンスを算出する。なお、変位の代わりに速度または加速度を計測し、同様の手順でモビリティまたはアクセランスを算出することも可能である。

5.5.2 多自由度系を用いた低減衰化実験モード解析の説明

一般的な多自由度系を用いて低減衰化実験モード解析の方法を説明する。低減衰化する前の対象物の運動方程式を式(5.4)で表現する。ただし、自由度数を N とする。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f \quad (5.4)$$

高減衰特性を有するが、形状や物性値から有限要素解析により、固有角振動数 ω_p ($p=1,2,\dots,N$)、固有振動モード ϕ_p ($p=1,2,\dots,N$) がほぼ正しく得られたとする。固有振動モードは式(5.5)のように正規化しておくものとする。ただし、 Φ は式(5.6)に示すモーダルマトリックスである。また、 I は単位マトリックス、 Ω^2 は固有角振動数 ω_p^2 を対角成分に持つマトリックスである。

$$\Phi^T M \Phi = I \quad , \quad \Phi^T K \Phi = \Omega^2 \quad (5.5)$$

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_N] \quad (5.6)$$

元の振動系をモード座標系で表現するために、 \mathbf{x} を式(5.7)のようにおく。

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{q} \quad (5.7)$$

式(5.7)を式(5.4)の運動方程式へ代入して、前から Φ^T を乗じてモード座標系と変換する。減衰項を対角化できるとすれば、式(5.8)のように非連成化できる。ただし、 $\mathbf{C}_{\text{modal}}$ は $2\Delta\zeta_p\omega_p$ を対角成分に持つマトリックスである。

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{\text{modal}}\dot{\mathbf{q}} + \Omega^2\mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{f} \quad (5.8)$$

絶対速度に比例した速度 FB 制御力のゲイン d_1, d_2, \dots, d_N を物理座標系で各自由度に追加すると、モード座標系では式(5.9)の方程式が成立する。

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{\text{modal}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_{\text{modal}}\dot{\mathbf{q}} + \Omega^2\mathbf{q} &= \Phi^T \mathbf{f} \\ \text{ただし,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\text{modal}} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & \cdots & D_{1N} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & \cdots & D_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_{N1} & D_{N2} & \cdots & \cdots & D_{NN} \end{bmatrix} \\ &= [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_{N-1} \ \phi_N]^T \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & d_{N-1} & 0 \\ \text{Symm.} & & & & d_N \end{bmatrix} [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_{N-1} \ \phi_N] \end{aligned} \quad (5.9)$$

ここで p 次モードの減衰を小さくする場合は式(5.9)の D_{pp} が $-2\Delta\zeta_p\omega_p$ となってほしいので、式(5.10)を考える。ただし、 $\Delta\zeta_p$ は設計者が適当に定めるパラメータとする。また、 D_{pp} には速度 FB 制御力のゲイン d_1, d_2, \dots, d_N のパラメータが含まれる。これらのパラメータは、振動系全体が不安定にならないように、例えば最適化アルゴリズムを利用して決定する。

$$D_{rr} = -2\Delta\zeta_r\omega_r \quad (5.10)$$

以上，減衰を小さくするモードの減衰特性の変化量に関するパラメータを設計者が定め，絶対速度に比例した速度 FB 制御力のゲインを決定して速度 FB 加振を施す方法を提案した。

5.6 多自由度系を対象とした低減衰化実験モード解析の妥当性検証

前節で説明した低減衰化実験モード解析の方法の妥当性を検証するために，ここでは多自由度系を用いた数値解析を行う．ここでは2自由度系と5自由度系を扱い，それぞれの振動系において速度 FB 加振のゲイン決定に関する指針を示す。

5.6.1 2 自由度系を用いた検証

図 5.8 に示す 2 自由度系に対して速度 FB 加振を行い，低減衰化の効果とモード同定の妥当性を確認する．正弦波強制外力 f は質点 1 に作用しており，各質点に設けたアクチュエータにより速度 FB 制御力が作用する．この検証モデルの振動系について固有値解析して得られた固有振動数とモード減衰比，モードベクトルは表 5.1 のようになる．また，応答を質点 1 で取得した場合の FRF を図 5.9 に黒色実線で示す．図 5.9 における桃色破線は，低周波数側が 1 次モードの固有振動数，高周波数側が 2 次モードの固有振動数の位置を表す．なお，モード同定の結果から再構築した FRF を灰色破線で併記する．表 5.1 および図 5.9 からわかるように，2 次モードのモード減衰比が 50%を超えるので，高減衰特性を有する振動系であり，2 次モードの共振峰を捉えることはできない．そのため，多自由度モード同定法を使用しても，2 次モードを無視して 1 次モードのみモード同定することになるため，その同定値は誤差を生じる．その結果，図 5.9 の灰色破線のように再構築した FRF は乖離してしまう．

そこで提案法に基づき，2 次モードの共振峰を捉えることができるように速度 FB 加振による低減衰化実験モード解析を実施する．いま，絶対速度に比例した速度 FB 制御力のゲイン d_1 , d_2 を物理座標系で各自由度に追加すると，モード座標系では式(5.11)の方程式が成立する．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & 0 \\ 0 & 2\zeta_2\omega_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \Phi^T f$$

ただし,

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{12} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1\phi_{11}^2 + d_2\phi_{21}^2 & d_1\phi_{11}\phi_{12} + d_2\phi_{21}\phi_{22} \\ d_1\phi_{11}\phi_{12} + d_2\phi_{21}\phi_{22} & d_1\phi_{12}^2 + d_2\phi_{22}^2 \end{bmatrix}$$

($D_{12} = D_{21}$)

提案法では共振峰を捉えることができないモードの減衰特性を速度 FB 加振により小さくするために、設計者がその変化量に関するパラメータを決定する。この検証モデルでは、2 次モードのモード減衰比の変化量 $\Delta\zeta_2$ を定め、式(5.12)を考える。なお、2 次モードの共振峰を捉えることができるようになる最低限の変化量として、適当に $\Delta\zeta_2=0.06$ と設定した。

$$D_{22} = d_1\phi_{12}^2 + d_2\phi_{22}^2 = -2\Delta\zeta_2\omega_2 \quad (5.12)$$

ここで、二つの変数 d_1, d_2 は一つの変数 d_1 に縮小され、式(5.13)を得る。

$$d_2 = -\frac{2\Delta\zeta_2\omega_2 + d_1\phi_{12}^2}{\phi_{22}^2} \quad (5.13)$$

次に式(5.11)において振動系全体の固有値を調べる。外力 $f=0$ とし、 $q=Qe^{\lambda t}$ とすると、式(5.14)が得られる。

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + (2\zeta_1\omega_1 + D_{11})\lambda + \omega_1^2 & D_{12}\lambda \\ D_{21}\lambda & \lambda^2 + (2\zeta_2\omega_2 + D_{22})\lambda + \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

式(5.14)の係数マトリックスを \mathbf{D} とし、 $\det \mathbf{D}$ を計算して複素固有値を求め、安定な範囲のゲイン d_1 を採用する。

■ 速度フィードバック制御のゲイン決定の指針

式(5.14)における ζ_2 は低減衰化前に把握できないので、一般的にモード減衰比が 20%ほどになると共振峰を捉えることができないことを考慮し、 $\det \mathbf{D}$ の計算時は $\zeta_2=0.3$ と設定

した．この条件下で $\det \mathbf{D}$ の解が安定となる d_1 を探索し， $d_1 = -61.40 \text{ N/m/s}$ を採用することにした．このときの d_2 も式(5.13)から一義的に決定され， $d_2 = -61.43 \text{ N/m/s}$ となった．これから d_1, d_2 が速度 FB 加振のゲインである．なお， $\det \mathbf{D}$ の計算では複数の解が得られる場合があるが，低減衰化後のモード座標系で低減対象以外の振動モードに対してできるだけ悪影響を及ぼさないように，式(5.11)の D_{12} ($=D_{21}$) が 0 に近い値を採用する．

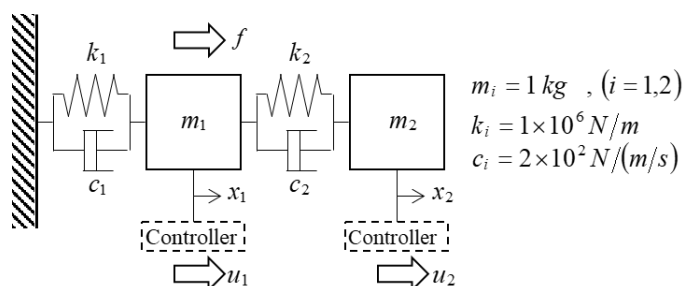


図 5.8 高減衰特性を有する 2 自由度の検証モデル

表 5.1 2 自由度の検証モデルのモード特性

Mode order p	1	2
Natural frequency f_{np} [Hz]	31.11	81.43
Damping ratio ζ_p [%]	19.54	51.17
Modal matrix Φ [-]	-0.53	-0.85
	-0.85	-0.53

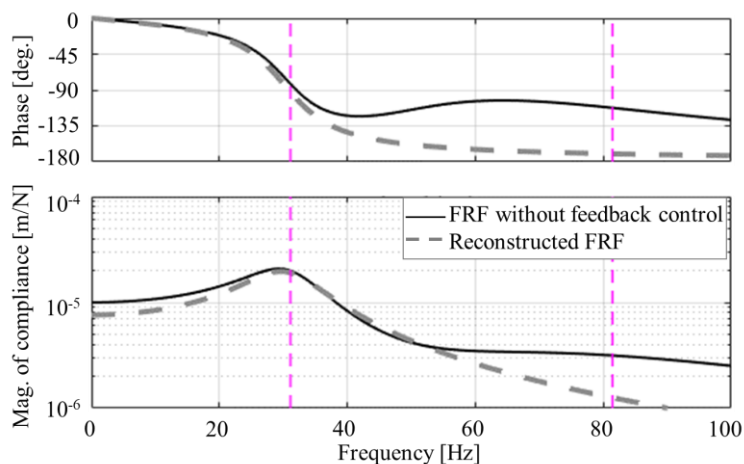


図 5.9 検証モデルの FRF と 1 次モードのみ同定した場合の FRF

■ 低減衰化の効果とモード特性同定

低減衰化した FRF を図 5.10 に赤色実線で示す．図 5.9 の FRF と比較して，わずかではあるが 2 次モードの共振峰を捉えることができるほどに低減衰化された．この数値例では，2 次モードの共振峰を捉えることができるようになる最低限の変化量として，適当に $\Delta\zeta_2=0.06$ と設定したが，モード特性を同定するための低減衰化の効果は十分であるといえる．なお，この FRF は直接速度 FB 加振が施された系であり，通常の固有振動モードでモード分離できないので，一般粘性減衰系として扱う．モード同定では偏分反復法[37]を使用した．モード同定の結果を青色破線で示す．赤色実線と青色破線が一致していることが確認でき，低減衰化後のモード特性を正しく同定できている．

次に同定したモード特性のうち，減衰特性を補正する．この数値例ではあらかじめ $\Delta\zeta_2=0.06$ を設定したうえで解析しているので，同定された 2 次モードの減衰特性は 6% 差し引かれた値として同定されている．これを考慮して同定したパラメータを表 5.2 に示す．これらのパラメータは一般粘性減衰系の特性として同定されているため固有振動数 f_{np}' ，減衰比 ζ_p' と表記するが，比例粘性減衰系の固有振動数とモード減衰比に相当するものである．厳密には表 5.1 のパラメータと一致することはないが，本来共振峰を捉えることができなかった振動モードを十分に把握できている．このパラメータを用いて再構築した FRF を図 5.11 に灰色破線で示す．低減衰化前は 2 次モードの共振峰を捉えることができなかったために，図 5.9 の FRF は乖離が大きかったが，図 5.11 では再構築した FRF が黒色実線にフィットしているといえる．

以上より，高減衰特性を有する 2 自由度系に低減衰化実験モード解析を適用することで，本来は共振峰を捉えることができない振動モードのモード特性を同定できることを確認した．なお，この数値例では速度 FB 加振のゲイン決定にあたり，パラメータを離散的に振って適当に決定したが，最適化アルゴリズムを使用すると，より低減衰化の効果が顕著に現れるゲインを得ることができると考えられる．

表 5.2 固有振動数と減衰比の同定結果

Mode order p	1	2
Natural frequency f_{np}' [Hz]	31.71	85.12
Damping ratio ζ_p' [%]	19.81	58.15

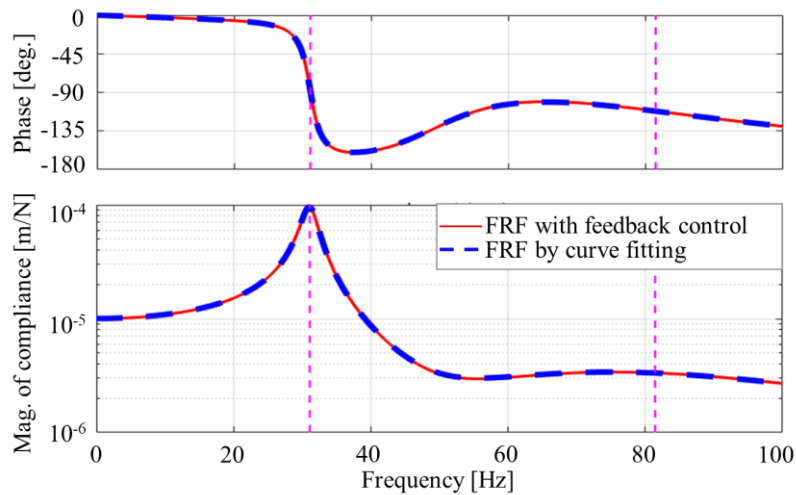


図 5.10 低減衰化された FRF とカーブフィットした結果

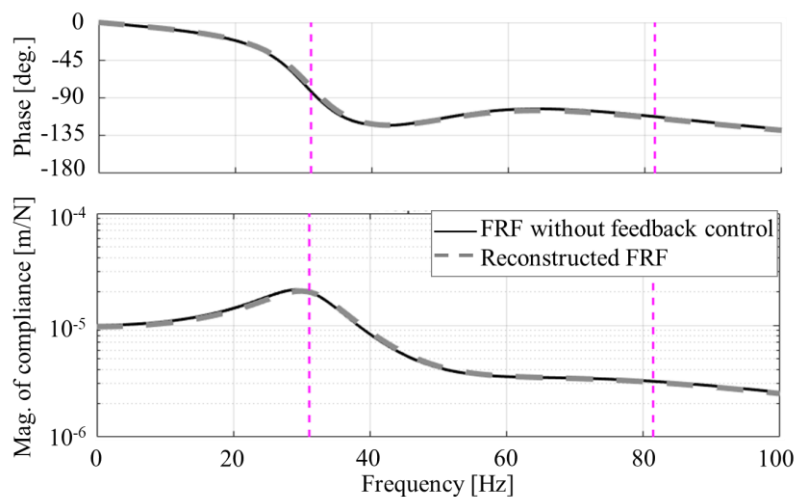


図 5.11 検証モデルの FRF と減衰特性を補正して再構築した FRF

5.6.2 5 自由度系を用いた検証

図 5.12 に示す 5 自由度系に対して速度 FB 加振を行い，自由度数が比較的多い場合にも低減衰化が可能であり，モード特性を同定できることを確認する．正弦波強制外力 f は質点 3 に作用しており，各質点に設けたアクチュエータにより速度 FB 制御力が作用する．この検証モデルの振動系について固有値解析して得られた固有振動数とモード減衰比，モードベクトルは表 5.3 のようになる．また，この検証モデルの振動モードを図 5.13 に，応答を質点 3 で取得した場合の FRF を図 5.14 に黒色実線で示す．図 5.14 における桃色破線は，各振動モードの固有振動数の位置を表す．なお，モード同定の結果から再構築した FRF

を灰色破線で併記する．表 5.3 および図 5.14 からわかるように，5 次モードのモード減衰比が 20%に近いので，高減衰特性を有する振動系であり，5 次モードの共振峰を捉えることはできない．また，応答点の位置と振動モードの節の位置の関係から，4 次モードは振幅が小さく，共振峰が現れない．このままでは 4 次モードと 5 次モードを無視して 1 次～3 次モードのみモード同定することになるため，その同定値は誤差を生じる．その結果，図 5.14 の灰色破線のように再構築した FRF は高周波数側で乖離してしまう．

そこで提案法に基づき，5 次モードの共振峰を捉えることができるように速度 FB 加振による低減衰化実験モード解析を実施する．いま，設計者が 5 次モードのモード減衰比の変化量 $\Delta\zeta_5$ を定め，絶対速度に比例した速度 FB 制御力のゲイン $d_1 \sim d_5$ を物理座標系で各自由度に追加する場合を考える．式(5.9)における D_{55} 成分と変化量の関係は次式のように表される．

$$D_{55} = d_1\phi_{15}^2 + d_2\phi_{25}^2 + d_3\phi_{35}^2 + d_4\phi_{45}^2 + d_5\phi_{55}^2 = -2\Delta\zeta_5\omega_5 \quad (5.15)$$

ここで，5 次モードの振動モードを調べると，図 5.13 からわかるように 2～4 番目の自由度の振幅が大きいため，その質点の速度 FB 加振を施す．すなわち式(5.15)は式(5.16)に書き換えられ，ゲイン d_2 , d_3 , d_4 が変数となる．

$$D_{55} = d_2\phi_{25}^2 + d_3\phi_{35}^2 + d_4\phi_{45}^2 = -2\Delta\zeta_5\omega_5 \quad (5.16)$$

さらに，モード減衰比が小さい 1 次モードが不安定になりやすいので，1 次モードの減衰比に悪影響を及ぼさないように式(5.17)を考える．

$$D_{11} = d_2\phi_{21}^2 + d_3\phi_{31}^2 + d_4\phi_{41}^2 = 0 \quad (5.17)$$

式(5.16)と式(5.17)の d_4 を消去すると，三つの変数 d_2 , d_3 , d_4 は一つの変数 d_2 に縮小され，式(5.18)を得る．

$$d_3 = - \frac{2\Delta\zeta_5\omega_5 + d_2 \left(\phi_{25}^2 - \frac{\phi_{45}^2}{\phi_{41}^2} \phi_{21}^2 \right)}{\left(\phi_{35}^2 - \frac{\phi_{45}^2}{\phi_{41}^2} \phi_{31}^2 \right)} \quad (5.18)$$

式(5.18)を基に，振動系全体が安定となるゲイン d_2 を探索する．

■ 速度フィードバック制御のゲイン決定の指針

2 自由度系の場合と同様に，振動系全体の固有値を調べる際には，5 次モードのモード減衰比 ζ_5 が必要になる．しかしながら， ζ_5 は低減衰化前に把握できないので，適当なパラメータを設定する．ここでは，低減衰化前に把握できている固有振動数とモード減衰比の関係を図 5.15 のように導き，固有値解析から取得した固有振動数に対応するモード減衰比を求め， $\zeta_5=0.1928$ に決めた．また，5 次モードの共振峰を捉えることができるようになる最低限の変化量として，適当に $\Delta\zeta_5=0.03$ と設定した．

この条件下で $\det \mathbf{D}$ の解が安定となる d_2 を離散的に探索し， $d_2 = -300.00 \text{ N/m/s}$ を採用することにした．このときの d_3 および d_4 は式(5.16)と式(5.18)から一義的に決定され， $d_3 = -220.21 \text{ N/m/s}$ ， $d_4 = 257.98 \text{ N/m/s}$ となった．

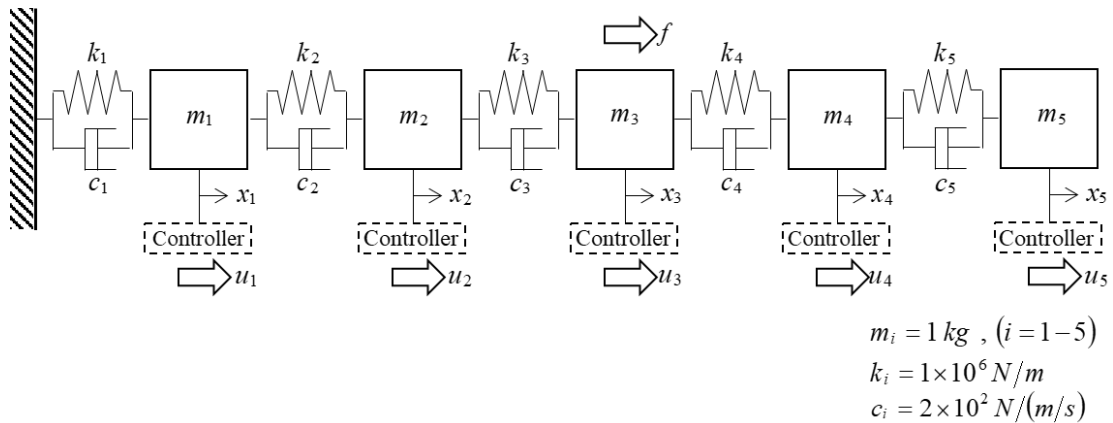


図 5.12 高減衰特性を有する 5 自由度の検証モデル

表 5.3 5 自由度の検証モデルのモード特性

Mode order p	1	2	3	4	5
Natural frequency f_{np} [Hz]	45.30	132.23	208.45	267.78	305.42
Damping ratio ζ_p [%]	2.85	8.31	13.10	16.83	19.19
Modal matrix Φ [-]	0.17	-0.46	0.60	0.55	-0.33
	0.33	-0.60	0.17	-0.46	0.55
	0.46	-0.33	-0.55	-0.17	-0.60
	0.55	0.17	-0.33	0.60	0.46
	0.60	0.55	0.46	-0.33	-0.17

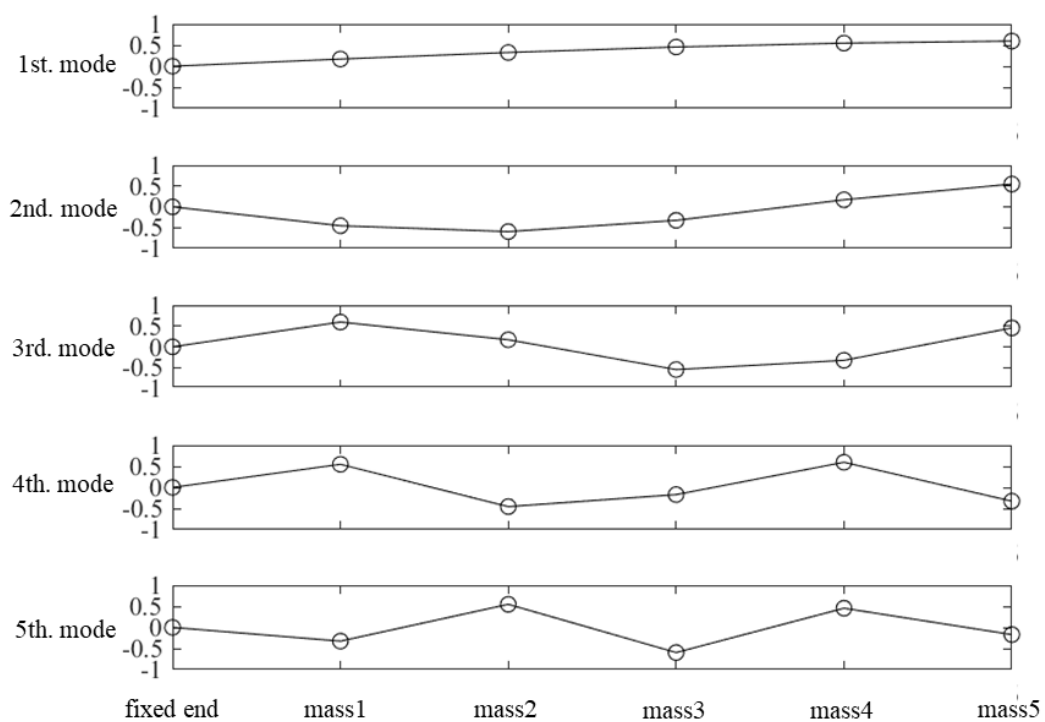


図 5.13 検証モデルの振動モード

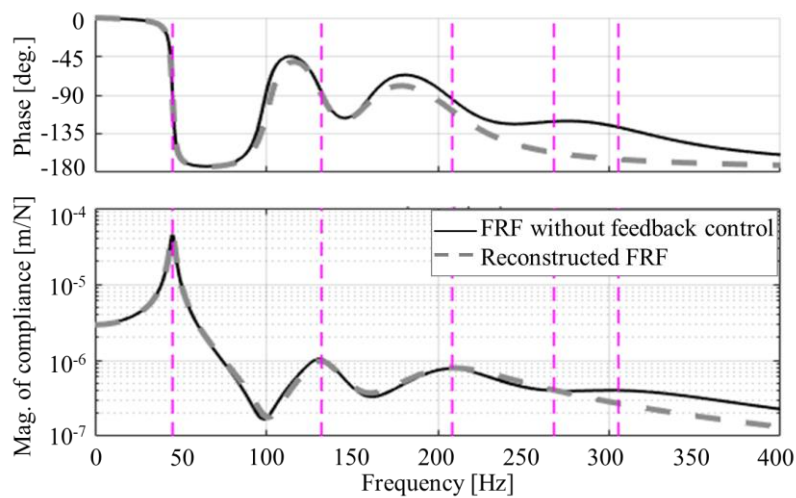


図 5.14 検証モデルの FRF と 1～3 次モードのみ同定した場合の FRF

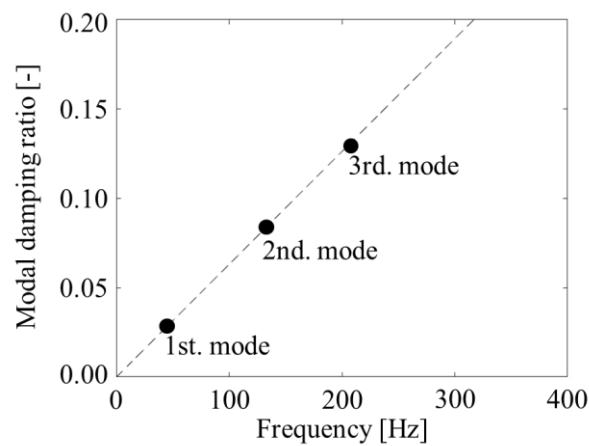


図 5.15 固有振動数とモード減衰比の関係

■ 低減衰化の効果とモード特性同定

低減衰化した FRF を図 5.16 に赤色実線で示す．図 5.14 の FRF と比較して，わずかではあるが 5 次モードの共振峰を捉えることができるように低減衰化された．この FRF を一般粘性減衰系として扱い，偏分反復法によりモード同定した．モード同定の結果を青色破線で示す．赤色実線と青色破線はほぼ一致しており，低減衰化後のモード特性をある程度正しく同定できている．

次に同定したモード特性のうち，減衰特性を補正する．この数値例ではあらかじめ $\Delta\zeta_5=0.03$ を設定したうえで解析しているのので，同定された 5 次モードの減衰特性は 3% 差し引かれた値として同定されている．これを考慮して同定したパラメータを表 5.4 に示す．

これらのパラメータは一般粘性減衰系の特性として同定されている。なお、4 次モードは応答点の位置と振動モードの節の位置の関係から、振幅が小さいため同定できない。同定された値は厳密には表 5.3 のパラメータと一致することはないが、本来共振峰を捉えることができなかった振動モードを十分に把握できている。このパラメータを用いて再構築した FRF を図 5.17 に灰色破線で示す。低減衰化前は 5 次モードの共振峰を捉えることができなかったために、図 5.14 の FRF は高周波数側で乖離が大きかったが、図 5.17 では再構築した FRF が黒色実線にフィットしているといえる。この結果から高減衰特性を有する 5 自由度系においても低減衰化実験モード解析により、本来は共振峰を捉えることができない振動モードのモード特性を同定できることを確認した。

以上、比較的自由度数が多い 5 自由度系でも構造物本来の振動特性を同定できたため、低減衰化実験モード解析法の妥当性を示すことができた。また、低減衰化の対象モードを定め、ゲインを決定する指針を示した。なお、この数値例の速度 FB 加振のゲイン決定においても、パラメータを離散的に振って決定したが、最適化アルゴリズムを使用すると、より低減衰化の効果が顕著に現れるゲインを得ることができると考えられる。

表 5.4 固有振動数と減衰比の同定結果

Mode order p	1	2	3	4	5
Natural frequency f_{np} [Hz]	45.30	132.31	207.12	-	302.95
Damping ratio ζ_p [%]	2.85	8.18	15.70	-	18.44

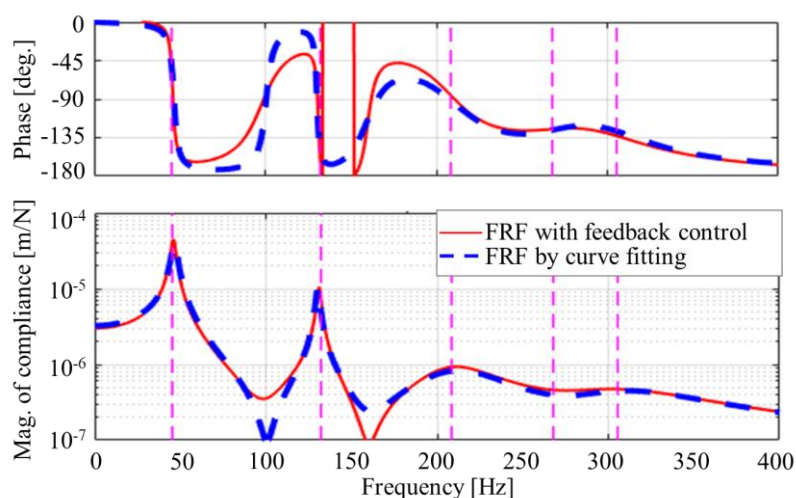


図 5.16 低減衰化された FRF とカーブフィットした結果

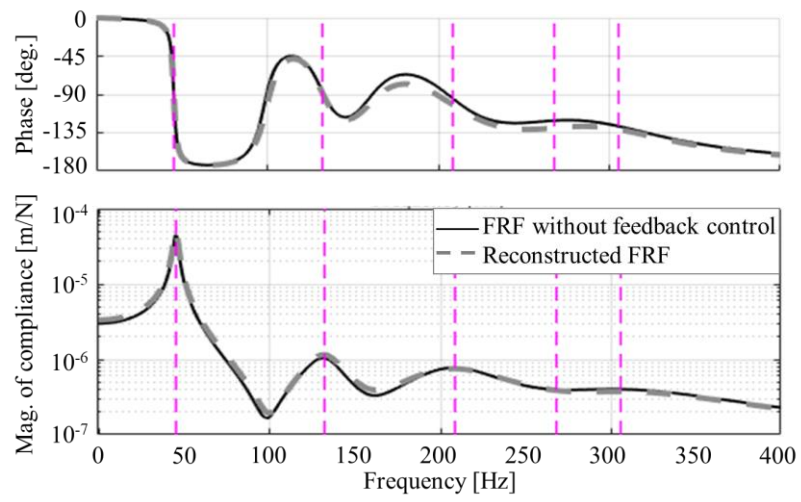


図 5.17 検証モデルの FRF と減衰特性を補正して再構築した FRF

5.7 結言

本研究では、減衰を低減化させる加振法を利用し、振動系が不安定にならない範囲でモード特性を同定する低減衰化実験モード解析法について検討した。具体的には、対象とする振動モードの減衰を小さくする速度 FB 加振法とゲインの決定方法を提案した。また、そのように決定したゲインを用いた速度 FB 加振により、FRF を低減衰化してモード特性を同定したうえで、速度 FB 加振の影響を補正して構造物本来の減衰特性を把握した。以下に本研究で得られた知見をまとめる。

- 安定な振動系でモード特性を同定する低減衰化実験モード解析の方法を提示した。その方法は、共振峰を捉えることができない振動モードに対して、設計者が減衰の影響を低減するためのパラメータを設定し、振動系が不安定にならない範囲で速度 FB 加振のゲインを決定するものである。
- 速度 FB 加振のゲインを決定する際には、低減衰化後のモード座標系で低減対象以外の振動モードにできるだけ悪影響を及ぼさないように最適設計する必要がある。
- 高減衰特性を有する 2 自由度系の数値例では、振動系が不安定にならないように速度 FB 加振を施し、低減衰化された FRF に対して一般粘性減衰を仮定したモード同定を行った。また、得られた減衰特性に対して速度 FB 加振の影響を補正することで、構造物本来のモード特性を把握できることを示した。
- 高減衰特性を有する 5 自由度系の数値例では、固有値解析から得られた振動モードを基に低減衰化の対象モードを定め、振動系が不安定にならないように速度 FB 加振のゲインを決定した。比較的自由度数が多い場合でも、構造物本来のモード特性を把握できることを示した。これにより、高減衰特性を有する多自由度系を対象とする低減衰化実験モード解析の妥当性を示した。

以上より、振動系が安定である範囲でモード特性を同定する低減衰化実験モード解析法を提示し、その方法の妥当性を示した。本研究では、速度 FB 加振のゲイン決定において、

パラメータを離散的に振って適当な値に決定したが，最適化アルゴリズムを使用すると，より低減衰化の効果が顕著に現れるゲインを得ることができると考えられる．今後はさらに多くの自由度を有する振動系で数値解析を実施し，実構造物への適用を目指す．

第6章 結論

実験モード解析が開発されてから 70 年を超えた今日、その技術は十分に確立されているといえる。しかしながら、機械構造物の特性の変化、要求の多様性ととともに、その技術も成長していく必要がある。十分に確立されたとはいえ、現在の実験モード解析技術にはいくつかの解決すべき課題が残されており、実際の機械構造物を対象にする場合、振動モードが近接していたり、高減衰特性を有していたりすることが多く、モード特性の同定が難しいことが多い。このことから、機械構造物のモード特性同定の技術向上を図るために、実験モード解析法に関する残された主要課題を明らかにし、それらを解決することを本研究の目的とした。

本論文では、従来の実験モード解析法を踏まえ、解決が必要な主要課題として以下をとりあげた。

- 周波数分解能が異なる場合の問題点
- 対象物が近接モードを有する場合の問題点
- 対象物が高減衰特性を有する場合の問題点

以上の課題に対して検討を行い、得られた研究成果を以下にまとめる。

6.1 研究成果

本研究の検討で得られた研究成果は以下のとおりである。

第 2 章における研究成果

従来から用いられてきたハーフパワー法やモード円適合法では、周波数分解能に依存するパラメータを用いてモード特性を同定するため、振動試験の条件によって同定値がばらつくという問題があった。この同定法の問題を示すとともに、それを解決する方法として開発された直線フィット法の同定理論を説明した。

また、1 自由度系の FRF を用いた数値例では、周波数分解能と固有振動数の位置を変化させ、同定値がばらつかないことを示した。さらに、その利点を活かす場面の数値例として、減衰が小さい対象物の打撃試験においてサンプリング時間を短くする場面を想定し、

周波数分解能が異なる条件下でモード特性を同定した．ここでも直線フィット法の同定値を従来法と比較し，同定値がばらつかず，高精度に同定できることを確認した．

以上より，直線フィット法の有効性を示すことができた．

第3章における研究成果

比較的モードが近接する FRF を対象とする場合にも，モード特性を精度よく同定できる 1 自由度法を提案した．ただし，モード指示関数によりピークを判定できる範囲で使用方法とした．なお，提案法の基礎には，第2章で有効性を示した直線フィット法を用いた．提案する具体的な手法は，FRF の実部と虚部の両方において，対象外のモード成分を周波数に関する多項式で近似し，それを剰余項として直線フィット法の同定理論に導入するものである．そしてその多項式の適切な次数を理論的なアプローチで定め，適切な多項式を 3 次関数とした．

これを基に，剰余項を 3 次関数で表現する同定手法を，標準的な多自由度の振動系に対して適用した．その結果，対象モードの共振周波数から最も近接するモードとの間に形成される谷まで左右対称に設けた区間で同定した場合に，最も良好な結果が得られることを確認した．本論文で扱った区間の設定方法においては，この区間が最適な解析区間であり，実際の同定の際の指針として提示した．

以上より，剰余項を 3 次関数で近似して直線フィット法に導入する提案手法は，比較的モードが近接する FRF を対象とする場合にも，モード特性を精度よく同定できることを示した．

第4章における研究成果

対象物が高減衰特性を有する場合，振動試験から取得した FRF 上では共振峰が明確に現れず，振動モードが存在する周波数を特定できないことを説明した．これに加えて，対象物が周期構造物である場合には，半径方向と軸方向に振動モードが連成し，FRF 上で共振峰を明確に把握できないことを示した．この問題に対して周方向縮約法が提案されたが，二輪車用タイヤのように二重曲率を有する周期構造物の場合に，新たな問題が生じたことを説明した．具体的には，二重曲率を有する場合にモード形状を三角関数で表現できるか

厳密に把握できていないことであった。実際に自動車用タイヤの FRF に周方向縮約法を適用した際に、縮約の誤差が生じた報告もあった。

そこで、二重曲率を有する周期構造物に対する周方向縮約法の適用性を数値解析により検証した。その結果、二重曲率を有する場合でもモード形状を三角関数で表現できることを確認した。また、FRF の自由度を低減でき、問題なくモード特性を同定できることを示した。

さらに、数値解析により適用性を示せたので、二輪車用タイヤの実験モード解析にも周方向縮約法を適用できると考え、検証の一連の流れに沿ってモード特性を同定した。また、二輪車用タイヤのモード特性については、自動車用タイヤのモード特性と比較することで、その特徴を考察した。そこでは、二輪車用タイヤの方が最低次モードの固有振動数が 100 Hz 以上高く、高次モードも全体的に固有振動数が高いことを把握した。この理由は、二輪車用タイヤは断面に曲率を有するため、断面二次モーメントが自動車用タイヤよりも大きくなるので、振動数が高くなるものと考えられる。また、モード形状については、二輪車用タイヤでは最低次モードでも軸方向に波数を持ち、軸方向次数が高くなるにつれて、波数が 1.5, 2.5 となることを把握した。一方、自動車用タイヤの最低次モードでは波数を持たないことを確認した。二輪車用タイヤの軸方向波数の方が多いのは、トレッド部がフラットな自動車用タイヤと断面形状が異なることや、自動車用タイヤに比べてサイドウォール部がばねとして働きにくいことに起因するものと考えられる。

以上より、高減衰特性を有し、かつ二重曲率の周期構造物に対する周方向縮約法の適用性を検証し、実際に二輪車用タイヤの振動特性を把握することができた。

しかしながら、500 Hz 以上の中周波数から高周波数領域における周方向 0~10 次モードの軸方向高次モードおよび周方向 11 次モード以上の振動モードについては、共振峰を捉えることができなかった。これは、振動試験をインパクトハンマによる単点入力により実施したことで、高次の振動モードを十分に励起できなかったことなどが原因として考えられることを把握した。

第 5 章における研究成果

第 4 章で課題として挙げた振動モードの励起について、多点加振することを検討した。その中で、多点加振法の一つである自励駆動法の特徴と課題を説明した。具体的には、速

度に比例する成分を持つ力をフィードバックすることにより、対象物の減衰の影響を小さくできることを特徴として挙げた。一方、対象物の振動モードが近接する場合には、ゲインが大きい方の振動モードの振動数に引き込まれて自励発振してしまい、FRF の取得に困難を伴うことを課題として挙げた。さらに、フィードバックされる力が単純な速度比例の力ではないため、低減衰化して取得した FRF から減衰特性を評価することは不可能であることを説明した。

そこで、高減衰特性を有する構造物を低減衰化したうえで、減衰特性の評価が可能な低減衰化実験モード解析法を提案した。具体的には、対象とする振動モードの減衰を小さくするような速度 FB 加振の方法とゲインの決定方法を提案した。また、そのように決定したゲインを用いた速度 FB 加振により、FRF を低減衰化してモード特性を同定する方法を説明した。

また、高減衰特性を有する多自由度系の数値例では、固有値解析から得られた振動モードを基に低減衰化の対象モードを定め、振動系が不安定にならないように速度 FB 加振を施した。そして低減衰化された FRF に対して一般粘性減衰を仮定したモード同定を行った。さらに得られた減衰特性に対して速度 FB 加振の影響を補正することで、構造物本来のモード特性を把握できることを示した。

以上より、振動系が安定である範囲でモード特性を同定する低減衰化実験モード解析法を提示し、その方法の妥当性を示すことができた。

これらの検討により、本研究では実際の機械構造物を対象に実験モード解析を行う場合に、モード特性の同定結果が周波数分解能に依存する問題と、近接モードおよび高減衰特性を有する場合にモード特性の同定が難しいという問題を解決した。

6.2 今後の研究課題と方針

本研究で得られた成果を踏まえて、今後の研究課題と課題解決に向けた方針をまとめる。本研究では、特に第3章で近接モードを有する場合にも高精度な同定を可能とする同定法を提案し、第4章で二重曲率を有する周期構造物として二輪車用タイヤを取り上げて実験モード解析を実施した。また、第5章では対象物が高減衰特性を有する場合に疑似的に減衰の影響を小さくする加振法とモード特性の同定法を提案した。これらの検討で出現した新たな課題を以下に整理する。

第3章で提案した同定法は、対象物のある1点に入力を与え、ある1点で応答を計測した場合のFRFを対象とするものであり、剰余項を3次関数で近似して固有振動数と減衰特性を同定するものである。一方、提案法の基礎とした直線フィット法は、FRFの理論式の留数を消去することにより基礎方程式を構築するため、基礎方程式は入力点応答点によって変化することなく、多点入力多点参照に対応できるものである。つまり、多点入力多点参照に適用した際には、各入力点応答点間のFRFデータを一括して取り扱うことができ、固有振動数と減衰特性を同定できる。

このように複数個のFRFを用いる場合でも、剰余項を何らかの関数で近似することが可能であれば、第3章で提案した同定法を拡張することができると考える。実際には、対象とする振動モードに対して、低次側と高次側の振動モードの共振峰は各入力点応答点間のFRFで異なるため、剰余項の近似関数が複雑になるか、剰余項が相殺されるか不明であるが、その剰余項の挙動を把握する必要があると考える。以上の検討を実施し、多点入力多点参照に対応した同定法が完成した暁には、対象物全体の振動特性を極短時間で同定できると推測でき、有用であると考えられる。

第4章で把握した二輪車用タイヤのモード特性は、現在のところ全く新しい結果である。本論文でまとめた結果は、ある1点のみに入力を与えただけであり、加振力が小さく、高次の振動モードを十分に励起できなかった。そのため、高次の振動モードまで十分に励起できるような加振法が必要であり、その一つの方法が第5章にまとめた低減衰化実験モード解析法である。この方法は1点加振と同様の手順で実施でき、速度FB制御力を自励振動子が出力するものである。実構造物に適用する場合には、対象物の有限要素モデルがあ

り，ある程度の精度で固有振動数とモード形状がわかっている場合には，実現象としてその振動モードを励起できると考えられる．現在は FB 制御のロバスト性の検討が不十分であるため，加振システムの構築に向けて，その検証と評価を行う必要がある．

以上の検討で今後開発していく実験モード解析法は，あらゆる機械構造物の設計開発段階で，振動特性を把握するために利用できるものである．また，これまでに製造された機械構造物においても，把握できていない振動特性を求めることができるものであり，有用であると考えられる．

参考文献

1. M. Leduc, T. Eger, A. Godwin, J. P. Dickey and R. House, “Examination of vibration characteristics, and reported musculoskeletal discomfort for workers exposed to vibration via the feet”, *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, Vol. 30, No. 2(2011), pp.197–206.
2. Y. Huang, and M. J. Griffin, “The effects of sound level and vibration magnitude on the relative discomfort of noise and vibration”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol.131, No.6 (2012), pp.4558–4569., DOI: 10.1121/1.4705285.
3. 井上保雄, “騒音・低周波音問題防止の基礎と対応”, *紙パルプ技術協会誌*, Vol.66, No.12 (2012), pp.1317–1332.
4. M. Vallone, F. Bono, E. Quendler, P. Febo and P. Catania, “Risk exposure to vibration and noise in the use of agricultural track-laying tractors”, *Annals of Agricultural and Environmental Medicine* 2016, Vol.23, No.4 (2016) pp.591–597.
5. D. Li and Y. Huang, “The discomfort model of the micro commercial vehicles interior noise based on the sound quality analyses”, *Applied Acoustics*, Vol.132 (2018), pp.223–231.
6. 吉田準史, 助川吉行, 櫻本睦貴, “クルーズ走行時の車内音とステアリング振動が乗員の不快感に与える影響について”, *自動車技術会論文集*, Vol.50, No.1 (2019), pp.122–127.
7. A. Calvo, C. Preti, M. Caria and R. Deboli, “Vibration and noise transmitted by agricultural backpack powered machines critically examined using the current standards”, *International Journal of Environmental Research and Public Health*, Vol.16, No.2210 (2019), DOI:10.3390/ijerph16122210.
8. 吉武英隆, 道井聡史, 白坂泰樹, 菅野良介, 安藤肇, 野澤弘樹, 長谷川将之, 池上和範, 大成圭子, 足立弘明, 大神明, “レーザースペックルフローグラフィーを用いた累積振動ばく露による振動工具取扱者の手指末梢循環の評価”, *労働安全衛生研究*, Vol.13, No.2 (2020), pp.157–166.
9. L. Witek, “Crack propagation analysis of mechanically damaged compressor blades subjected to high cycle fatigue”, *Engineering Failure Analysis*, Vol.18 (2011), pp.1223–1232.
10. Y. Du and L. Shi, “Effect of vibration fatigue on modal properties of single lap adhesive joints”, *International Journal of Adhesion & Adhesives*, Vol.53 (2014), pp.72–79, DOI.org/10.1016/j.ijadhadh.2014.01.007.

11. 宮川睦巳, 吉田和将, 志村穰, 中村一史, “疲労き裂先端の応力解析と圧電アクチュエータを用いた破壊制御実験”, 日本交通科学学会誌, Vol.17, No.1 (2017), pp.19–31.
12. 嶋崎信吾, 施勤忠, “非定常ランダム音響負荷下における構造振動の最大荷重と累積疲労を等価とする定常音響環境条件の導出とその応用”, 日本機械学会論文集, Vol.86, No.891 (2020), DOI:10.1299/transjsme.20-00287.
13. S. Huang, J. Zhao, J. Sheng, X. K. Meng, E. Agyenim-Boateng, D. Ma, J. Li and J. Zhou, “Effect of laser peening with different power densities on vibration fatigue resistance of hydrogenated TC4 titanium alloy”, International Journal of Fatigue, Vol.131 (2020), DOI.org/10.1016/j.ijfatigue.2019.105335.
14. 千田治光, 稲垣浩, 上野浩, 浜口顕秀, 山下守, “びびり振動検知/自動回避機能を有する知能化加工システムの開発”, 日本機械学会誌, Vol.114, No.1110 (2011), DOI.org/10.1299/jsmemag.114.1110_324.
15. K. Kolluru, D. Axinte and A. Becker, “A solution for minimising vibrations in milling of thin walled casings by applying dampers to workpiece surface”, CIRP Annals - Manufacturing Technology, Vol.62, No.1 (2013), pp.415–418., DOI:10.1016/j.cirp.2013.03.136.
16. S. J. Zhang, S. To, G.Q. Zhang and Z. W. Zhu, “A review of machine-tool vibration and its influence upon surface generation in ultra-precision machining”, International Journal of Machine Tools and Manufacture, Vol.91 (2015), pp.34–42. DOI.org/10.1016/j.ijmachtools.2015.01.005.
17. 栗田裕, 大浦靖典, 田中昂, 川田昌宏, “薄肉円筒工作物の切削加工時に発生する工作物変形状びびり振動（びびり振動の発生メカニズム）”, 日本機械学会論文集, Vol.86, No.884 (2020), DOI: 10.1299/transjsme.19-00335.
18. M. O. Qadri and H. Namazi, “Fractal-based analysis of the relation between surface finish and machine vibration in milling operation”, Fluctuation and Noise Letters, Vol.19, No.1 (2020), DOI.org/10.1142/S0219477520500066.
19. C. L. Kiew, A. Brahmananda, K. T. Islam, H. N. Lee, S. A. Venier, A. Saraar and H. Namazi, “Aanalysis of the relation between fractal structures of machined surface and machine vibration signal in turning operation”, Fractals, Vol.28, No.1(2020), DOI: 10.1142/S0218348X2050019X.
20. 長松昭男, “モード解析”, (1985), pp.1–6, 培風館.

21. D. J. Ewins, “Modal testing, theory, practice, and application (2nd edition)”, (2000), pp.1–23, Research Studies Press Ltd.
22. Z.-F. Fu and J. He, “Modal analysis”, (2001), pp.1–10, Butterworth Heinemann.
23. C. C. Kennedy and C. D. P. Pancu, “Use of vectors in vibration measurement and analysis”, *Journal of the Aeronautical Sciences*, November, Vol. 14, No. 11 (1947), pp.603–625.
24. 大久保信行, “機械のモーダル・アナリシス”, (1982), pp.1–6, 中央大学出版部.
25. 成田正夫, 小泉孝之, 山本和夫, “モード解析による構造物の動解析”, *日本航空宇宙学会第16期年会講演集*, (1985), pp. 224–225.
26. H.-W. Hu and H. Kao, “Model validation of an ultralight aircraft using experimental modal analysis”, *Journal of Aeronautics, Astronautics and Aviation, Series A*, Vol.41, No.4 (2009), pp.271–282.
27. 北原篤, 吉村卓也, “周方向縮約法を用いた円筒シェル構造物のモード特性同定”, *日本機械学会論文集*, Vol.81, No.822 (2015), DOI: 10.1299/transjsme.14-00461.
28. A. L. Rodriguez, L. Huang, P. Lombard, V. Leconte and I. Villar, “Vibration analysis of a PMSM through FEM multiphysics simulation with experimental validation”, *2020 International Conference on Electrical Machines*, (2020), DOI: 10.1109/ICEM49940.2020.9271070.
29. 成田正夫, “実験モード解析のための新たな周波数応答関数推定方法の研究”, *早稲田大学博士学位論文*, (2008).
30. 三津間秀彦, 山本昌孝, 成田正夫, 谷沢一雄, 小泉孝之, “振動減衰材の基礎的な特性試験”, *第29回宇宙科学技術連合講演会*, (1987), pp. 432–433.
31. 北田義夫, 鈴木浩平, “機器・配管系の減衰同定法の評価に関する研究(第2報, 加振実験データを用いた配管系の減衰比同定)”, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.59, No.566 (1993), pp.3036–3043.
32. 長松昭男, “モード解析入門”, (1993), pp.8–10, 培風館.
33. Y. He, Y. Xiao, Y. Liu, Z. Zhang, “An efficient finite element method for computing modal damping of laminated composites: theory and experiment”, *Composite Structures*, Vol.184, No.15 (2018), pp.728–741., DOI.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.024.
34. モード解析ハンドブック編集委員会, “モード解析ハンドブック”, (2000), pp.68–70, コロナ社.

35. N. M. M. Maia and J. M. M. Silva, “Modal analysis identification techniques”, *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol.359, No.1778 (2001), pp.29–40. Royal Society.
36. S. Kawamura, M. Kita, M. Matsubara, and T. Ise, “Study of the effect of specimen size and frequency on the structural damping property of beam”, *Mechanical Engineering Journal*, Vol.3, No.6 (2016), DOI: 10.1299/mej.16-00446.
37. 吉村卓也, 長松昭男, “モード解析に関する研究 (第9報, 多点加振に対応した最尤法に基づく曲線適合方法の提案-その1)”, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.56, No.523 (1990), pp.527–536.
38. P. Guillaume, P. Verboven and S. Vanlanduit, “Frequency-domain maximum likelihood identification of modal parameters with confidence intervals”, *Proceedings of International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA23* (1998), pp. 359–366.
39. B. Peeters, G. Lowet, H. V. D. Auweraer and J. Leuridan, “A new procedure for modal parameter estimation”, *Sound and Vibration*, Vol.38, No.1 (2004), pp. 24–29.
40. 日野順市, 河本忠幸, 芳村敏夫, “部分空間法を用いたインパルス加振によるモード特性同定に関する研究”, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.73, No.726 (2007), pp.406–413.
41. P. Sitarz and B. Powalka, “Dual ant colony operational modal analysis parameter estimation method”, *Mechanical System and Signal Processing*, Vol.98 (2018), pp.231–267.
42. A. Saito and T. Kuno, “Data-driven experimental modal analysis by dynamic mode decomposition”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.481, No.1 (2020), DOI.org/10.1016/j.jsv.2020.115434.
43. 自動車環境税制研究会, “自動車環境税制研究会報告書 (環境政策からの自動車関係税制の活用について)”, (1999)
44. 社団法人環境情報科学センター, “平成 21 年度環境省請負業務報告書 (ヒートアイランド現象による環境影響等に関する調査業務報告書)”, (2010)
45. L. W. Cheah, “Cars on a diet : the material and energy impacts of passenger vehicle weight reduction in the U.S.”, *Massachusetts Institute of Technology, Engineering Systems Division*, (2010).
46. J. Hirsch, “Aluminium in innovative light-weight car design”, *Materials Transactions*, Vol.52, No.5 (2011), DOI.org/10.2320/matertrans.L-MZ201132.

47. Q. Liu, Y. Lin, Z. Zong, G. Sun and Q. Li, “Lightweight design of carbon twill weave fabric composite body structure for electric vehicle”, *Composite Structures*, Vol.97 (2013), pp.231–238., DOI.org/10.1016/j.compstruct.2012.09.052.
48. 大楠恵美, “自動車構造材の軽量化と多様化”, 三井物産戦略研究所 戦略研レポート, pp.1–11, (2014).
49. 川目信幸, “部品の軽量化・低コストを実現するアルミダイカスト品の塑性流動結合技術の開発”, *金型の総合技術誌*, Vol.34, No.6 (2019), pp.49–53.
50. 細井寛哲, 杉野弘樹, “自動車部材の剛性設計指針に関する考察”, *神戸製鋼技報*, Vol.69, No.1 (2019), pp.55–59.
51. 樋貝和彦, 塩崎毅, 玉井良清, 馬渕直樹, 北村繁明, “マルチマテリアル構造を適用した超ハイテンエネルギー吸収部品の開発”, *自動車技術会論文集*, Vol.52, No.1 (2021), pp.160–164.
52. 火箱義文, 岡本真成, 榊原健人, “多機能化・高機能化する制振デバイス”, *日本機械学会誌*, Vol.116, No.1139 (2013), pp.703–706.
53. 飯田一嘉, “騒音・振動低減技術・材料とその適用性について”, *機械設計*, Vol.63, No.7 (2019), pp.22–24.
54. 振動騒音部門委員会, “自動車の振動騒音問題とうまくつきあう方法：研究開発の現場における事例を通して NVH の基礎を学ぶ”, *JSAE symposium* ; No.6–7, (2007), 自動車技術会.
55. 石濱正男, “70 事例から学ぶ自動車の振動・騒音対策法”, (2018), 日刊工業新聞社.
56. D. K. Anthony and F. Simon, “Accuracy and robustness of four basic single degree of freedom methods for determining the modal parameters of non-lightly damped systems”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.331, No.24 (2012), pp.5191–5208.
57. A. K. Zrayka and E. Mucchi, “A comparison among modal parameter extraction methods”, *SN Applied Sciences*, Vol.1, No.781(2019), DOI:10.1007/s42452-019-0806-8.
58. A. M. Antunes, P. Ribeiro, J. D. Rodrigues and H. Akhavan, “Modal analysis of a variable stiffness composite laminated plate with diverse boundary conditions: experiments and modelling”, *Composite Structures*, Vol.239, No.1 (2020), DOI.org/10.1016/j.compstruct.2020.111974.
59. 飯山かほり, 栗田哲, “近接モードの影響を考慮したスペクトル分解による FDD 法の理論的背景”, *日本建築学会構造系論文集*, Vol.78, No.684 (2013), pp.271–279.

60. 黒沢良夫, 山口誉夫, 松村修二, “制振材・防音材が積層された自動車パネルの振動減衰応答解析”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.77, No.776 (2011), pp.1191–1200., DOI.org/10.1299/kikaic.77.1191.
61. 望月隆史, “主成分モード分析による車体主要振動モードの把握”, 自動車技術会論文集, Vol.47, No.3 (2016), pp.729–735., DOI.org/10.11351/jsaeronbun.47.729.
62. 松原真己, 森川行生, 伊勢智彦, 河村庄造, 古屋耕平, “相互モード運動エネルギー分布に基づく構造変更部位特定と固有振動数の同調による振動低減効果”, 日本機械学会論文集, Vol.85, No.875 (2019), DOI.org/10.1299/transjsme.19-00062.
63. N. H. Chandra and A S. Sekhar, “Swept sine testing of rotor-bearing system for damping estimation”, Journal of Sound and Vibration, Vol.333, No.2 (2014), pp.604–620.
64. V. E. L. Gasparetto, M. R. Machado and S. H.S. Carneiro, “Experimental modal analysis of an aircraft wing prototype for SAE aerodesign competition”, Revista DYNA, Vol.87, No.214 (2020), pp.100–110, DOI.org/10.15446/dyna.v87n214.85833.
65. Á. J. Molina-Viedma, E. López-Alba, L. Felipe-Sesé and F. A. D. Garrido, “Full-field modal analysis during base motion excitation using high-speed 3D digital image correlation”, Journal of Physics Conference Series, Vol.1149, No.1 (2018), DOI:10.1088/1361-6501/aa7d87.
66. L. Felipe-Sesé, Á. J. Molina-Viedma, E. López-Alba and F. A. D. Garrido, “FP+DIC for low-cost 3D full-field experimental modal analysis in industrial components”, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol.128, (2019), pp.329–339., DOI.org/10.1016/j.ymssp.2019.04.004.
67. 荒井政大, 板垣大輔, 西村正臣, 島村佳伸, 小林和幸, “均質化法による CFRP 積層はりの減衰振動特性評価”, 計算数理工学論文集, Vol.14 (2014), Paper No.11–141206.
68. Q. Zhu, X. Fan, M. Cao, Q. Han and J. Ren, “Damping measurement of thin coating plate based on half power method”, Mechanical Engineering and Technology, Vol.6, No.1 (2017), pp.34–38., DOI.org/10.12677/met.2017.61005.
69. J. B. Fahnlne, R. L. Campbell, S. A. Hambric, and M. R. Shepherd, “Modal analysis using the singular value decomposition and rational fraction polynomials”, The Pennsylvania State University Technical Report, (2017).
70. 金子康智, 森一石, 古川達也, “ターボ機械の翼・インペラのモーダルパラメータ同定に関する研究”, 日本機械学会論文集, Vol.86, No.886 (2020), DOI: 10.1299/transjsme.19-00404.

71. C.-X. Qu, T.-H. Yi, H.-N. Li and B. Chen, “Closely spaced modes identification through modified frequency domain decomposition”, *Measurement*, Vol.128 (2018), pp.388–392., DOI.org/10.1016/j.measurement.2018.07.006.
72. W. Sun, Y. Sun, Y. Yu and B. Wu, “A comparison of the improved and classic half-power bandwidth methods in estimating damping for multi-dof systems”, *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, Vol.6, (2018), pp.219–225. DOI.org/10.1007/s42417-018-0034-3.
73. S.J. Ahn, W. B. Jeong and W. S. Yoo, “Unbiased expression of FRF with exponential window function in impact hammer testing”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.277 (2004), pp.931–941., DOI:10.1016/j.jsv.2003.09.022.
74. P. Grosso, A. D. Felice and S. Sorrentino, “A method for the experimental identification of equivalent viscoelastic models from vibration of thin plates”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.153 (2021), DOI.org/10.1016/j.ymssp.2020.107527.
75. J. Gu and M. Sheng, “A method for damping estimation based on least square fit”, *American Journal of Engineering Research (AJER)*, Vol.4, No.7 (2015), pp.205–209.
76. 吉村卓也, 長松昭男, “実験モード解析における級数展開を用いた剰余項設定の提案”, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.56, No.525 (1990), pp.1209–1216.
77. M. Bagheri and A.-A. Jafari, “Analytical and experimental modal analysis of nonuniformly ring-stiffened cylindrical shells”, *Archive of Applied Mechanics*, Vol.75 (2006), pp.177–191., DOI:10.1007/s00419-005-0429-y.
78. F. Fahy and P. Gardonio, “Sound and structural vibration, second edition”, (2007), pp.30–31, Academic Press.
79. S. Vercammen, C. G. Diaz, P. Kindt, C. Thiry, J. Middelberg and J. Leyssens, “Dynamic behavior of rolling tires under different operating conditions”, *Proceedings of the Internoise 2012 / ASME NCAD meeting (2012)*, pp.301–307.
80. Y. Waki, K. Kozuki and H. Heguri, “Estimation of noise radiating parts of a tire using the wave finite element method”, *Proceedings of the Internoise 2011 (2011)*, pp.577–584.
81. K. Forsberg, “Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol.2, No.12 (1964), DOI.org/10.2514/3.55115.

82. 宇治橋貞幸, 伊藤彰英, 松本浩之, 中原一郎, “固定壁の衝撃的な移動をうける両縁固定円筒かく”, 日本機械学会誌, Vol.82, No.731 (1979), pp.1191–1979.
83. N. Alam and N. T. Asnani, “Vibration and damping analysis of a multilayered cylindrical shell, Part I - theoretical analysis”, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Vol.22, No.6 (1984), DOI.org/10.2514/3.8684.
84. 岩附信行, 林巖, 亢恒, “Mindlin の解法を適用した両端自由縁厚肉円筒の振動モード解析”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.60, No.571 (1994), pp.774–780.
85. Y.-S. Lee and K.-D. Lee, “On the dynamic response of laminated circular cylindrical shells under impulse loads”, Computers & Structures, Vol.63, No.1 (1997), pp.149–157.
86. 小泉孝之, 辻内伸好, 松原真己, 松山幸司, 相川将隆, 大島裕子, “回転効果に着目したタイヤ転動時における振動挙動解析”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.77, No.777 (2011), pp.2018–2029.
87. 松原真己, 辻内伸好, 小泉孝之, 平野裕也, “接地拘束に着目したタイヤ半径方向振動挙動解析”, 日本機械学会論文集, Vol.80, No.811 (2014), DOI:10.1299/transjsme.2014dr0049.
88. 松原真己, 辻内伸好, 小泉孝之, 平野裕也, “接地・転動時におけるタイヤ半径方向振動解析”, 日本機械学会論文集, Vol.80, No.811 (2014), DOI: 10.1299/transjsme.2014dr0050.
89. 松原真己, 堀内慎, 伊勢智彦, 河村庄造, “タイヤ-ホイール連成系の簡易モデル化と固有値解析”, 日本機械学会論文集, Vol.82, No.844 (2016), DOI: 10.1299/transjsme.16-00300.
90. 松岡久祥, 大熊政明, 安藤正登, “円筒形構造物に対する定常波離散化による新しい実験的モード特性同定法およびタイヤのモデル化への適用”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 68, No. 675 (2002), pp. 3322–3328.
91. 栗田裕, 村岸恭次, 安田均, “可変フィードバックゲインによる自励振動形振動機械の振幅一定制御”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.62, No.598 (1996), pp.2140–2146.
92. 栗田裕, 北川 康則, 岸根 申尚, 田中 明弥, 松村 雄一, “被搬送物の反作用が無視できない場合の振動機械の共振特性と駆動方法”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.66, No.641 (2000), pp.38–44.
93. 栗田裕, 松村雄一, 田中明弥, 東門太幸, “可変速度フィードバックによる振動搬送機械の自励振動駆動とアクティブ制振”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 68, No. 674 (2002), pp.2859–2864.

94. 栗田裕, 大浦靖典, 松田成勝, 西出基, “分散制御による多自由度振動系の共振点駆動 (制御方式の開発と基本性能の検証)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.76, No.763 (2010), pp.557–564.
95. 栗田裕, 大浦靖典, 松田成勝, “分散制御による多自由度振動系の共振点駆動 (直列結合系ばね連結台車を用いた実験)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.76, No.771 (2010), pp. 2909–2915.
96. 早川英佑, 栗田裕, 大浦靖典, 田中昂, “分散制御型多点加振による大型構造物の振動試験法の検討 (強制引込みによる固有振動計測)”, 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2016 USB 論文集, (2016), Paper-No.111.
97. 田中昂, 栗田裕, 大浦靖典, 中村寛望, “局所フィードバック制御を用いた分散制御による音響空間の固有振動の計測”, 日本機械学会論文集, Vol.85, No.874 (2019), DOI: 10.1299/transjsme.19-00422.
98. 田中昂, 栗田裕, 大浦靖典, 上原大貴, “分散制御による多自由度振動系の共振点駆動 (局所フィードバック制御とクロスフィードバック制御による大自由度・大減衰システムの固有振動励起)”, 日本機械学会論文集, Vol.86, No.887 (2020), DOI: 10.1299/transjsme.19-00422.
99. S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Kreiger, “Theory of plates and shells”, (1964), McGraw-Hill Higher Education.
100. 中原一郎, “材料力学 上下”, (1965), 養賢堂
101. 小林繁夫, 近藤恭平, “弾性力学 (工学基礎講座 7)”, (1987), 培風館.
102. 鈴木勝義, 成田吉弘, 山田元, 斉藤俊, “シェルの振動入門”, (1996), コロナ社
103. 日本機械学会編, “モード解析の基礎と応用”, (1986), 丸善株式会社.
104. G. W. Asher, “A method of normal mode excitation utilizing admittance measurements”, Proceedings National Specialists Meeting, IAS; Dynamics and Aeroelasticity, (1958), pp.69–76.
105. 松原真己, 田尻大樹, 竹原伸輔, 河村庄造, “周波数応答関数の実部と虚部を利用した直線フィットによるモード同定法 (重み付き最小二乗法による同定精度改善)”, 日本機械学会論文集, Vol.85, No.873 (2019), DOI: 10.1299/transjsme.18-00433.
106. 松原真己, 河村庄造, 伊勢智彦, “周波数応答関数の実部と虚部の連立を用いたモード特性同定の多自由度系への適用”, 日本機械学会論文集, Vol.84, No.860 (2018), DOI: : 10.1299/transjsme.17-00540.

107. M. Matsubara, S. Akira and S. Kawamura, “Estimation of modal parameters by using the ratios of imaginary to real parts of frequency response functions,” *Archive of Applied Mechanics*, Vol.91 (2020), pp.1179–1191., DOI.org/10.1007/s00419-020-01817-w.
108. R. Williams, J. Crowley and H. Vold, “The multivariate mode indicator function in modal analysis”, *Proceedings of the 3rd International Modal Analysis Conference (IMAC III)*, (1985).
109. E. Balmes and J.-M. Leclerc, “Structural dynamics, toolbox / FEMlink user’s guide version 5.3”, *SDTools*, (2006), pp.416–417.
110. H. Kuwahara, Y. Fukui, H. Kido, P. Mas and B. Vandenplas, “Virtual assessment of motorcycle vibrations”, *SAE Technical Paper*, Paper No.2001-01-1849, (2001), DOI.org/10.4271/2001-01-1849.
111. 小泉孝之, 辻内伸好, 大西貴久, 武村徹明, “大型自動二輪車の鼓動感に関する感性評価”, *日本機械学会講演論文集*, Vol.84, No.094-1 (2009), DOI.org/10.1299/jsmekansai.2009.84_12-20_.
112. K. Suzuki, H. Uchida, S. Kida, T. Sonehara and K. Namekawa, “The trial to quantify the feeling of sound and vibration (“Kodo-Kan”) for the motorcycle,” *SAE Technical Paper*, Paper No.2013-32-9148, (2013), DOI.org/10.4271/2013-32-9148.
113. 小谷野光江, 君島猛, 中山研吾, “二輪車シートの乗り心地評価手法の確立”, *Honda R&D Technical Review*, Vol.19, No.2 (2007), pp.113–118.
114. 棚瀬廉人, “バイク音の感性モデリング(特集 変化に対応しつづける振動・騒音技術) -- (感性設計)”, *自動車技術*, Vol.74, No.7 (2020), pp.68–73.
115. 桑原博幸, 三木秀峰, “二輪車用エンジンの放射音解析”, *Honda R&D Technical Review*, Vol.18, No.1 (2006), pp.120–126.
116. 中川喜洋, 高橋伸也, 正木幹人, 今尾蘭樹, “二輪車のブレーキ鳴き解析におけるディスク残留応力に関する研究”, *自動車技術会論文集*, Vol.45, No.6 (2014), pp.1081–1086.
117. 片山硬, 田本洋高, 吉野貴彦, 木村哲也, “二輪車の振動モード解析のためのエネルギーフロ一法”, *自動車技術会論文集*, Vol.50, No.5 (2019), pp.1366–1371.
118. P. Fischer, M. Pürscher, S. Huemer-Kals and J. Prezelj, “Characterization of brake creep groan vibrations”, *SAE Technical Paper*, Paper No.2020-01-1505, (2020), <https://DOI.org/10.4271/2020-01-1505>.
119. Y. Feng and X. Jun, “Analysis of motorcycle vibration comfort based on rigid-flexible coupling model”, *Noise & Vibration Worldwide*, Vol.51, No.6 (2020), pp.110–115.

120. 影山一郎, 栗谷川幸代, “二輪車の運動解析用タイヤモデルに関する研究”, 自動車技術会論文集, Vol.52, No.1 (2021), pp.43–50.
121. 二輪車の運動特性部門委員会, “モーターサイクル講座 人間・二輪車系#2”, 自動車技術, Vol.75, No.3 (2021), pp.102–109.
122. 井手秀幸, 坂田哲心, “ロードノイズに及ぼすタイヤの空洞共鳴の影響について”, 日本ゴム協会誌, Vol.65, No.8 (1992), pp.457–462.
123. R. W. Scavuzzo, L. T. Charek, P. M. Sandy and G. D. Shtainhauz, “Influence of wheel resonance on tire acoustic cavity noise”, SAE Technical Paper, Paper No.940533, (1994),
<https://DOI.org/10.4271/940533>.
124. 山内裕司, 秋好靖二, “タイヤ空洞共鳴音に関する理論解析と走行中の改良手法の提案”, 自動車技術会論文集, Vol.32, No.2 (2000), p.79–84.
125. T. Hayashi, “Experimental analysis of acoustic coupling vibration of wheel and suspension vibration on tire cavity resonance”, SAE Technical Paper, Paper No.2007-01-2345, (2007),
<https://DOI.org/10.4271/2007-01-2345>.
126. T. Sams, “The effect of structural damping foam on tire vibration”, SAE International Journal of Vehicle Dynamics, Stability, and NVH, Vol.4, No.2 (2020), pp.83–96., <https://DOI.org/10.4271/10-04-02-0006>.
127. 成田正夫, 山崎芳昭, 小泉孝之, “多点加振機による構造物のモード解析(第1報, 加振幾の駆動信号を用いた周波数応答関数の推定法)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.56, No.523 (1990), pp.537–543.
128. 宇宙航空研究開発機構, “振動試験ハンドブック”, JERG-2-130-HB003B, (2019), pp.17–18.

謝辞

本論文を書き終えるにあたり、本研究の遂行およびまとめに至るまで懇切丁寧なご指導、ご鞭撻を賜りました、本学 機械工学系 河村庄造教授に謹んで深甚なる謝意を表します。また、本研究を遂行するにあたって細部にわたりご指導いただきました、本学 機械工学系 松原真己准教授に重ねて御礼申し上げます。機械ダイナミクス研究室には学部4年次から現在に至るまでの計6年間在籍いたしました。浅学非才である私がこのように博士論文をまとめることが出来たのは、研究に対する姿勢、考え方のみならず、今後技術者・研究者・教育者として一步を踏み出すための心の持ち方について河村庄造教授と松原真己准教授より学べたからに他なりません。心より御礼申し上げます。

また、本論文を執筆するにあたり、有益なご指導を頂きました本学 機械工学系 足立忠晴教授と高木賢太郎教授に深謝申し上げます。

本研究は、学部4年次から博士前期課程で取り組みました、自動車用タイヤのばね特性に関する研究において、実験モード解析によりモード特性を同定する際に、高周波数領域になるほど良好なカーブフィットの結果を得られないことに疑問を抱き、モード特性の同定法に興味を持ったことに端を発しております。博士前期課程修了後に数値計算ソフトウェアを購入し、初めて自ら同定プログラムを作成したときの懐かしさを覚えます。同時期に博士前期課程で取り組んだ研究の論文が学術誌に掲載されたとの吉報を松原真己准教授よりいただいたこと、また当時在籍した平田機工株式会社で実験解析のグループ立ち上げの話題や振動騒音対策の話題が上がったことが重なり、益々実験モード解析の重要性を実感するとともに研究をしたいという想いが強くなり、再び機械ダイナミクス研究室の門を叩くに至りました。その際、研究テーマについて具体的に打ち合わせていただきました河村庄造教授と松原真己准教授には御礼の申し上げようもございません。また、進路について親身になって話を聞いてくださった平田機工株式会社 元第一システム部 前田繁部長、白岩博文次長、元ドキュメントグループの高山圭子様、サザランド亜矢子様、脇坂智子様、林田由紀子様、中原三恵様、新村絵梨子様、藤井健一様、藤川晋之介様、坂本由美子様、人事部 米田穰部長、伊藤嘉章次長、上田恵太郎様、中山勝裕様、井野太智様、伊藤千恵子様、木村美幸様には深く感謝しております。さらに、研究者を目指す私の背中を押してくださった、有明工業高等専門学校 原慎真也教授には感謝の念に堪えません。

本学博士後期課程に再入学してからは、論文の書き方や研究者としての在り方をご教示いただき、さらに私の学生生活を気にかけてくださった元本学 機械工学系 安田好文教授、本学 機械工学系 柴田隆行教授、松岡常吉准教授に厚く御礼申し上げます。

本研究のモード特性同定法の開発、実験結果の考察、論文作成に至るまで河村庄造教授と松原真己准教授には多大なるご指導を賜りました。第2章においては、フランスで開催された国際会議にて、福井大学 鞍谷文保教授、吉田達哉准教授より、直線フィット法の有効性について貴重なご意見を賜りました。また、関連して岐阜大学 古屋耕平准教授のご厚意により実験モード解析ソフトウェアを使用させていただきました。実験および解析では岐阜大学大学院 元博士前期課程 清水大智様、元学部 吉川昇吾様にご協力いただきました。第3章においては、本大学院 元博士前期課程 竹原伸輔様と互いに意見を主張し、深く議論し合ったことで有益な成果を得ることができました。第4章においては、本大学院 元博士前期課程 小代昌輝様、元学部 佐藤瑞樹様に実験や解析で多大なる協力をしていただきました。第5章においては、滋賀県立大学 田中昂講師に速度FB制御について説明いただくとともに実験装置を提供していただきました。

以上のように、この度博士論文をまとめることができたのは、多くの方々の支えとご協力があつてのものと深く感謝しております。

最後に、これまで私の思う道を進むことに対して温かく見守り、何不自由ない学生生活を送らせてくれた両親と祖父母、いつも応援してくれた弟、妹と親族、いつも近くで支えてくれた大切な人に、ここに私の学生生活の集大成である博士論文が完成したことを報告すると共に、心から御礼申し上げます。

2021 年 7 月 5 日

豊橋技術科学大学

機械ダイナミクス研究室

田尻大樹