

非線形汎関数級数モデルの積分核  
同定精度に関する研究

1994年1月

博士(工学)

横田 康成

豊橋技術科学大学



非線形汎関数級数モデルの積分核同定精度に関する研究

論文要旨

# 非線形汎関数級数モデルの積分核 同定精度に関する研究

1994 年 1 月

博士(工学)

横 田 康 成

豊橋技術科学大学



## 非線形汎関数級数モデルの積分核同定精度に関する研究

### 論文要旨

システム同定における精度は、一般に、システムの構造が複雑になるほど悪化し、また、対象に依存して同定精度を最大にする最適な入力クラスが存在する。従来の線形システム同定では、システムの構造が比較的簡単であり、ある程度の同定精度が得られていたため、こうした同定精度の問題は特に意識されなかった。一方、非線形システムでは、線形システムに比べ、一般に、システムの構造が複雑であり、高い同定精度を得ることが困難である。そこで、近年、生体などの非線形システムの解析が頻繁に行われるようになってきたものの、十分な同定精度が得られず、また同定精度の実用的な評価法が整備されていないことから、信頼性の高い有益な結論を得られないことも多く、同定精度の評価法や高い同定精度を得るための最適な入力の決定法の確立が急務とされている。本論文は、こうした要請に基づき、非線形システム同定のための最も一般的な数学モデルである非線形汎関数級数モデルについて、同定精度の評価法から同定精度を最大する最適な入力の決定法に至るまでの一連の方法論を論じたものである。

非線形汎関数級数モデルを用いたシステム同定問題は、モデルパラメータである積分核を決定する問題に帰着される。特に、Wiener 汎関数級数モデルにおいて、積分核は、適当なパワーレベル(分散)を持つ正規白色過程を入力として、システムの入出力の高次相関関数を計算することにより、比較的容易に推定されることから、システムの特徴量としてしばしば用いられる。しかしながら、推定された積分核は、入力である確率過程の高次統計量であり、その推定精度を厳密に定式化することは非常に困難である。そこで、本論文では、近年、主流となっている計算機によるシステム解析を考慮し、対象とするシステムを離散時間、有限記憶長、有限次数の非線形汎関数級数モデルで表現できるシステムのクラスに限定して問題を単純化し、積分核の推定精度を定式化した。これにより、積分核の推定精度を最大にする最適な入力パワーレベルが存在することを明らかにした。

しかしながら、システムを同定する上で最適な入力パワーレベルは、システムそのものに依存するため、システム同定以前にその値を知ることができない。そこで、本論文では、積分核と最適入力パワーレベルを交互に反復推定し、同定精度の改善を目指す入力パワーレベル可変積分核推定法を提案した。この際、自然界に存在する多くのシステムでは、非線形次数が高くなるに従い成分が減少するものと考え、対象とするシステムをこうしたシステムのクラスに限定した。本手法では、入力の統計的性質を一定とした従来のシステム同定法に比べ、同定精度を格段に向上させることが可能になった。

本論文が目指す「対象に応じ、入力を適応的に変化させて同定精度を改善する試み」は、非線形システムの同定技術に対する要求が年々高まるなかで、新世代システム同定法の重要な基礎を築くものであると期待される。



## A Study on Identification Precision of the Integral Kernel of Nonlinear Functional Series Model

### ABSTRACT

In general, system identification tends to become more difficult and the precision of the identification worsen with increasing complexity of the system structure. There exists an optimal input class that maximizes the identification precision of the system and which depends on the system itself. In previous analysis and identification of linear systems, the problems regarding the identification precision were not considered important, because the structure of the linear system was relatively simple and could provide the result precise enough to obtain some conclusion from the results. On the other hand, since the structure of nonlinear systems are generally more complicated than that of linear systems, it is more difficult to acquire precise identification for nonlinear systems. Furthermore, few methods have been proposed to evaluate the precision of nonlinear system identification. Therefore, although many nonlinear systems are recently being analyzed with greater frequency, there have not been many studies which have produced valuable and trustworthy conclusions. Accordingly, the method for evaluating precision of nonlinear system identification, and for determining the optimal input class which gives the most precise identification, must be established immediately. This dissertation deals with a chain of methods, from evaluating precision of a nonlinear system identification, to determining the optimal input class which gives most precise identification, using a nonlinear functional series model which is the most general mathematical model to represent a nonlinear system.

The problem in regard to identifying a system by a nonlinear functional series model is reduced to the problem of determining the integral kernel, or all parameters in the model. In particular, the integral kernel in a Wiener functional series model, which is one example of a nonlinear functional series model, could be relatively easily estimated by cross-correlation method. This method calculates a higher-order cross-correlation function between the system input and corresponding system output. The input used is a Gaussian white stochastic process whose power level (i.e. variance) is arbitrary. The (Wiener) integral kernel is thus often referred to as a characteristic of the system. But, the estimated kernel is higher-order statistics of the input stochastic process. This makes it very difficult to formulate strictly the precision of the estimated kernel. In order to simplify this problem, the systems considered are restricted to a certain class of system which can be represented by discrete time, finite memory length and finite order nonlinear functional series models, because of recent system analysis by computer which has already been indispensable technique. Then, the precision of the estimated integral



kernel is formulated as a function of the integral kernel itself, the input power level, variance of observational noise and the observed input/output data length. Because the formula can describe the relation between system and precision on identifying the system, it can be utilized as a practical method for evaluating the precision of the estimated integral kernel. In the past, the input power level has been determined by the experience of the experimenter with the result that the employed power level was inadequate for the integral kernel estimation. It is shown in this dissertation however that there exists optimal input power levels, i.e. the optimal input class in the system identification, that maximizes the precision of the integral kernel estimation.

Since the optimal input power level depends on the system, there is a mutual dependency between the optimal input power level and the integral kernel of the system, and the level cannot be determined before system identification. A general method to improve the precision of estimation of the multiple variables with mutual dependency by iterative alternating estimation, is the relaxation method, or bootstrap method. Based on this idea, the proposed method aims at improvement of the identification precision by alternately estimating the optimal input power level and integral kernel. The method was named "Integral Kernel Estimation Method with Variable Input Power Level." In proposing the method, the system class considered is restricted to the system whose component of any order is less smaller than that of lower order, because of many systems existing in the natural physical world. The theoretical investigation and results from numerical experiment are presented. It is verified that, even if the estimation of the integral kernel is started with an inadequate input power level, the input power level asymptotically approaches adaptively to the optimal value with the progress of estimation. Furthermore, the precision of the integral kernel estimation can improve to the theoretical limit of the precision obtained by the cross-correlation method. This result suggests a new system identification method, including the stimulus/estimation process.

With increasing demands and applications for nonlinear system identification, it is expected that the theme of this dissertation "Improvement of identification precision by adapting the input class to the optimal for the system itself," will become an important and fundamental method of system identification in the next generation.



# 目次

1 序論	1
1.1 システム解析へのアプローチ	1
1.2 非線形汎関数級数モデル	2
1.3 本論文の背景, 目的	4
1.4 本論文の構成	6
2 非線形汎関数級数モデル概説	10
2.1 はじめに	10
2.2 システム同定	11
2.3 線形インパルス応答モデル	14
2.3.1 線形インパルス応答モデル	14
2.3.2 線形インパルス応答関数の推定	15
2.4 Volterra 汎関数級数モデル	16
2.4.1 Volterra 汎関数級数モデル	16
2.4.2 Volterra 核の推定	20
2.5 バイナリ汎関数級数モデル	20
2.5.1 バイナリ汎関数級数モデル	20
2.5.2 Volterra 汎関数級数とバイナリ汎関数級数の関係	22
2.5.3 バイナリ核の推定	23
2.6 Wiener 汎関数級数モデル	26
2.6.1 確率 Fourier 汎関数級数モデル	26
2.6.2 Fourier 核の表現	29
2.6.3 Wiener 汎関数級数モデル	30
2.6.4 Wiener 核の推定	33
2.6.5 Volterra 汎関数級数と Wiener 汎関数級数の関係	35



2.7	伝達関数カスケードモデル . . . . .	38
2.7.1	カスケードモデル . . . . .	38
2.7.2	パラレルカスケードモデル . . . . .	40
2.7.3	並列乗算和モデル . . . . .	41
3	Wiener 汎関数級数モデルの核推定精度 . . . . .	45
3.1	はじめに . . . . .	45
3.2	Wiener 核推定精度 . . . . .	46
3.2.1	線形システムの1次 Wiener 核推定精度 . . . . .	46
3.2.2	非線形システムの Wiener 核推定精度 . . . . .	48
3.2.3	入力に加わる雑音の影響 . . . . .	51
3.2.4	数値実験 . . . . .	53
3.3	最適入力パワーレベルの高速決定法 . . . . .	57
3.3.1	Wiener 核推定分散の近似式 . . . . .	57
3.3.2	数値実験 . . . . .	60
3.4	まとめ . . . . .	60
4	各汎関数級数モデルの核推定精度の比較 . . . . .	65
4.1	はじめに . . . . .	65
4.2	Volterra 汎関数級数モデル . . . . .	66
4.2.1	Volterra 核推定 . . . . .	66
4.2.2	Volterra 核推定に要する計算量 . . . . .	66
4.2.3	Volterra 核推定精度 . . . . .	67
4.3	バイナリ汎関数級数モデル . . . . .	69
4.3.1	バイナリ核推定 . . . . .	69
4.3.2	バイナリ核推定に要する計算量 . . . . .	69
4.3.3	バイナリ核推定精度 . . . . .	70
4.4	Wiener 汎関数級数モデル . . . . .	71
4.4.1	Wiener 核推定 . . . . .	71
4.4.2	Wiener 核推定に要する計算量 . . . . .	71
4.4.3	Wiener 核推定精度 . . . . .	72
4.5	各汎関数級数モデルの核推定精度, 計算量の比較 . . . . .	72
4.5.1	Wiener 核推定誤差の発生メカニズム . . . . .	72
4.5.2	数値実験 . . . . .	73



4.6	まとめ	75
5	多入力システムの Wiener 核推定精度	79
5.1	はじめに	79
5.2	多入力汎関数級数モデル	80
5.2.1	多入力 Volterra 汎関数級数モデル	80
5.2.2	多入力 Wiener 汎関数級数モデル	81
5.3	多入力汎関数級数モデルの核推定	82
5.4	多入力システムの Wiener 核推定精度	82
5.4.1	静的線形システムの 1 次 Wiener 核推定精度	82
5.4.2	動的非線形システムの Wiener 核推定精度	84
5.4.3	数値実験	87
5.4.4	考察	91
5.5	まとめ	94
6	入力パワーレベル可変 Wiener 核推定法	95
6.1	はじめに	95
6.2	入力パワーレベル可変 Wiener 核推定法のアルゴリズム	95
6.3	重み関数 $\alpha(n)$ の条件	97
6.4	核推定精度変化の理論解析	98
6.5	数値実験	99
6.6	まとめ	103
7	結論	109
	謝 辞	114
	参 考 文 献	115
A	Volterra 核推定の各種アルゴリズム	126
A.1	Cholesky 分解法	126
A.2	入力系列直交化法	128
A.3	Volterra 核直交展開法	130
A.4	Karhunen-Loève 展開法	132



B バイナリ $m$ 系列	133
B.1 線形自己回帰系列	133
B.2 線形自己回帰系列の周期と $m$ 系列	135
B.3 線形自己回帰系列の基底による表現	137
B.4 バイナリ $m$ 系列と Hadamard 行列の関係	140
C 正規確率変数の高次モーメント	144
C.1 確率変数のモーメント, キュムラント	144
C.2 pair-wise rule	146
研究業績目録	149

1.3 システムの構造	7
2.1 システム同定におけるモデルパラメータ推定	13
2.2 非線形関数級数モデルの位置づけ	17
2.3 2次 Wiener 関数級数モデルの概説	23
2.4 Wiener 核の逐次推定法	34
2.5 カスケードモデル	39
2.6 パラレル LN カスケードモデル	40
2.7 核の直交基底から得られる系列乗算和導法	42
2.8 非線形関数級数モデルの発展の歴史	44
3.1 データ長 $N$ に対する Wiener 核推定分散	55
3.2 入力パワーレベル $P$ に対する Wiener 核推定分散	56
3.3 図 3.1, 図 3.2 で示した実験結果の分散における Wiener 核推定分散	62
3.4 異なるパワーレベルを用いて推定された 2 次 Wiener 核の形状の比較	63
3.5 代表値とその他の実験値における核推定精度の比較	64
4.1 各関数級数モデルの核推定時間の比較	77
4.2 各関数級数モデルの核推定精度の比較	78
5.1 Wiener 核推定分散の理論値と実験値の比較	89
5.2 入力パワーレベル $P_1, P_2$ に対する Wiener 核推定分散	90
5.3 異なる入力パワーレベルにより推定された 2 次 Wiener 核の比較	92
6.3 選択した $\alpha(n)$ の関数形	101



## 目 次

1.1 システム解析へのアプローチ . . . . .	2
1.2 本論文の背景, 目的 . . . . .	5
1.3 本論文の構成 . . . . .	7
2.1 システム同定におけるモデルパラメータ推定 . . . . .	13
2.2 非線形汎関数級数モデルの位置づけ . . . . .	17
2.3 2 次 Volterra 汎関数級数モデルの概念図 . . . . .	18
2.4 Wiener 核の直接推定法 . . . . .	34
2.5 カスケードモデル . . . . .	39
2.6 パラレル LN カスケードモデル . . . . .	40
2.7 核の直交展開から得られる並列乗算和構造 . . . . .	42
2.8 非線形汎関数級数モデルの発展の歴史 . . . . .	44
3.1 データ長 $T$ に対する Wiener 核推定分散 . . . . .	55
3.2 入力パワーレベル $P$ に対する Wiener 核推定分散 . . . . .	56
3.3 図 3.1, 図 3.2 で示した変数値以外の変数における Wiener 核推定分散 . . . . .	62
3.4 異なるパワーレベルを用いて推定された 2 次 Wiener 核の形状の比較 . . . . .	63
3.5 代表点とその他の変数値における核推定精度の比較 . . . . .	64
4.1 各汎関数級数モデルの核推定時間の比較 . . . . .	77
4.2 各汎関数級数モデルの核推定精度の比較 . . . . .	78
5.1 Wiener 核推定分散の理論値と実験値の比較 . . . . .	89
5.2 入力パワーレベル $P_1, P_2$ に対する Wiener 核推定分散 . . . . .	90
5.3 異なる入力パワーレベルにより推定された 2 次 Wiener 核の比較 . . . . .	92
6.1 選択した $\alpha(n)$ の関数形 . . . . .	101



6.2	提案法における区間観測時間 $T_0$ の最適入力パワーレベル (A), 核推定精度への影響 (B)	104
6.3	提案法における重み関数 $\alpha(n)$ のパラメータ $T_m$ の最適入力パワーレベル (A), 核推定精度への影響 (B)	105
6.4	提案法における初期入力パワーレベル $P_{(1)}$ の最適入力パワーレベル (A), 核推定精度への影響 (B)	106
6.5	提案法と従来法により推定された2次核の比較	107
6.6	選択した $\alpha(n)$ を最適と仮定した場合の精度変化の理論値	108
6.7	観測雑音に対するロバスト性	108
B.1	線形自己回帰系列	134
B.2	シフトレジスタによる線形自己回帰系列の生成法	134
B.3	$F_2$ 上の特性多項式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ に対するシフトレジスタの状態遷移	136
B.4	$F_2$ 上の特性多項式 $x^4 + x + 1$ を持つシフトレジスタの状態遷移	137
B.5	タプレジスタ	138



# 表 目 次

5.1 システム $S_M$ の各 Wiener 核推定に最適な入力パワーレベル . . . . .	91
B.1 $F_2$ 上の特性多項式 $x^3 + x + 1$ を持つシフトレジスタの $\mathbf{x}_t, \mathbf{w}_t$ . . . . .	139
B.2 $F_2$ 上の特性多項式 $x^3 + x + 1$ を持つシフトレジスタの状態を元とする可換群	140



# 第 1 章

## 序論

### 1.1 システム解析へのアプローチ

我々人類は、いつの頃からか、ありとあらゆる対象に興味を覚え、またそれらの理解を試みてきた。科学は、こうした我々の知的好奇心を満足すべく発展してきたといえる。対象の理解は、まず、対象を模倣したものを作ることから始まる。模倣物としては、頭にあるイメージ、紙に描かれたスケッチ、計算機のプログラム、黒板に書かれた数式など、対象そのもの以外すべてが考えられる。対象は、こうした模倣物の助けを借りて理解される。工学は、対象を理解するために必要な道具を提供する学問であり、工学においては、対象をシステム、システムの模倣物をモデルと呼ぶ。

システムを理解するためのアプローチは、図 1.1 に示すように、ビルドアップアプローチとブラックボックスアプローチに大別される。

ビルドアップアプローチは、例えば、電気系では、抵抗、キャパシタンス、インダクタンス、機械系では、ダンピングファクタ、スプリング、生体では、細胞の特性を記述するための Hodgkin-Huxley 型イオン電流モデル、筋・骨格系を記述するための力学モデルなど、基本的な要素の組み合わせにより、システム内部から表現するアプローチである。こうした基本的な要素の組み合わせによる表現は、システムの物理的な構造を直接反映していることから、物理モデルと呼ばれる。物理モデルは、通常、微分方程式、または差分方程式で記述され、システムの理解が比較的容易である反面、任意の入力に対するシステムの応答を求めることは、微分方程式の境界値問題を解かなければならず、困難な場合も多い。したがって、ビルドアップアプローチでは、システムを各要素毎に調べられるものの、システムの入出力を直接観測することが比較的困難な場合に用いられる。

一方、ブラックボックスアプローチは、システムをブラックボックスとして扱い、その入出力を観測し、それらの関係を表現することにより、システム外部から内部構造を推測



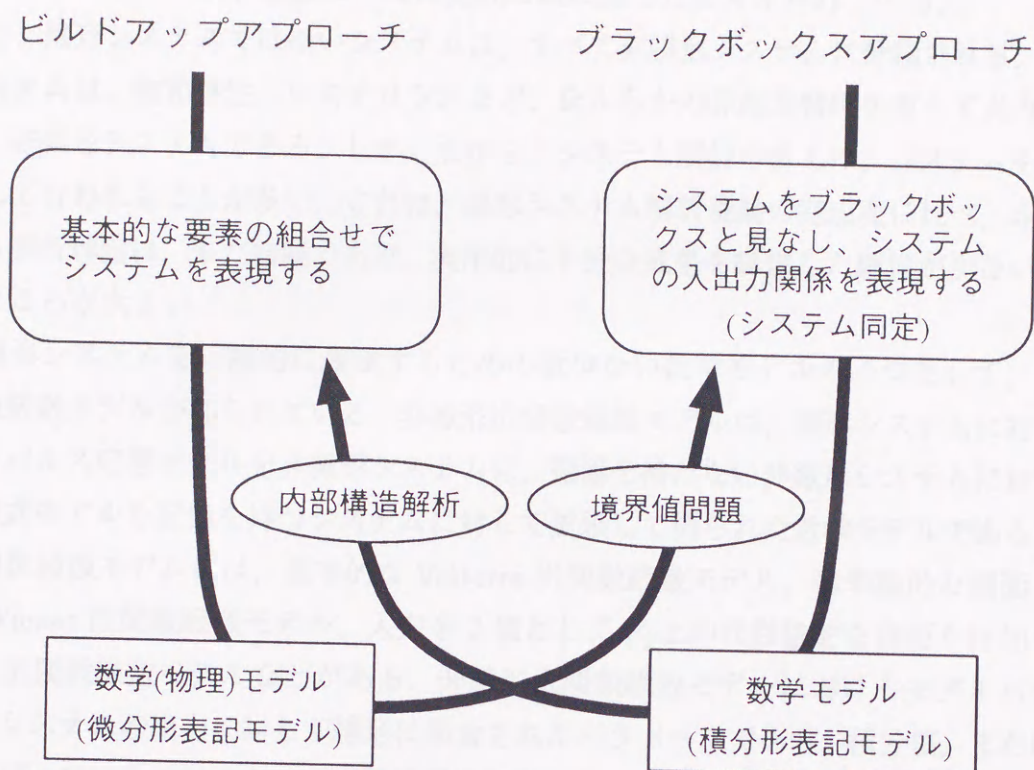


図 1.1 システム解析へのアプローチ

するアプローチである。こうしたシステムの入出力関係の表現は、数学モデルと呼ばれる。数学モデルは、システムの入出力関係を陽に記述したものであり、任意の入力に対するシステムの応答を知りたい場合には有効となるが、多くの場合、得られたモデルから、直接、システムの内部構造を知ることは困難である。したがって、ブラックボックスアプローチは、内部構造に関する知識はないが、入出力の観測が可能なシステムに対し、システムを大きくブラックボックスとして捉え、入出力関係を表現する目的に用いられる。ブラックボックスアプローチにおいて、システムの数学モデルを作ることシステム同定といい、システム同定は、通常、適当なモデルを用意し、そのモデルに含まれるモデルパラメータを推定する問題に置き換えられる。

## 1.2 非線形汎関数級数モデル

システムは、その入出力の関係が線形であれば線形システムと呼ばれる。線形システムに関しては、モデル表現、モデルパラメータの推定法、物理モデルと数学モデルの対応関係など、古くから詳細に研究され、系統的に整備されてきた。こうしたことから、今日で



は、線形システムの解析理論は、ほぼ完成の域に達したと考えられている。

一方、線形システムではないシステムは、すべて非線形システムに分類される。実在するシステムは、飽和特性、ヒステリシスなど、なんらかの非線形特性を有しており、厳密には、非線形システムである。しかしながら、システム解析の多くは、システムを線形と近似して行われることが多い。これは、線形システム解析理論の完成度に比べ、非線形システム解析理論は、未だ錯雑であり、実用的に十分な成果を提供した理論が少ないことによるところが大きい。

非線形システムを一般的に表現するための数少ない数学モデルの一つとして、非線形汎関数級数モデルが知られている。非線形汎関数級数モデルは、線形システムに対する線形インパルス応答モデルを非線形システムに、記憶を持たない非線形システムに対するべき多項式モデルを記憶を持つシステムに対して拡張して得られた数学モデルである。非線形汎関数級数モデルには、基本的な Volterra 汎関数級数モデル、確率論的な側面を付加した Wiener 汎関数級数モデル、入力を2値として  $F_2$  上の代数論的な側面を付加したバイナリ汎関数級数モデルなどがある。非線形汎関数級数モデルにおけるモデルパラメータは、システムの出力に対して線形に結合されたパラメータであり、積分核、または単に核と呼ばれている。したがって、非線形汎関数級数モデルによるシステム同定問題は、積分核を未知関数とし、観測されたシステムの入出力から計算される値を既知関数とする Wiener-Hopf 方程式を解くことに帰着される。

さて、モデルに含まれる時刻を表す変数は、本来、連続時間で定義されるものである。しかし、今日のシステム解析においては、観測されたデータを A/D 変換し、計算機に取り込み処理することが多いため、離散時間で定義しても差し支えなく、むしろその方が便利でもある。そこで、本論文では、以後、すべて離散時間モデルを考えることにする。離散時間モデルでは、Wiener-Hopf 方程式は、正規方程式、または離散 Wiener-Hopf 方程式と呼ばれる連立一次方程式になる。

一般に、正規方程式を解くためには、パラメータ数の3乗のオーダーの計算量が必要である。したがって、正規方程式を解くことに帰着される積分核の推定は、システムが高次成分を持ち、記憶長が長くなるに従い、モデルパラメータ数が飛躍的に増加することから、非常に困難になる。更に、べき多項式モデルにおいて、各次数のべき関数が互いに直交していないのと同様、その拡張である Volterra 汎関数級数もまた、各次数の汎関数は互いに直交していない。したがって、システムの真の次数よりも少ない次数のモデルを用いた場合、Volterra 核の推定は、不偏性を持たなくなる。

バイナリ汎関数級数モデルは、2値 ( $\pm A$ ) 入力クラスに対して定義される非線形汎関数級数モデルである。バイナリ汎関数級数モデルにおいては、シフトレジスタから生成さ



れるバイナリ  $m$  系列を入力とすることにより，正規方程式の計算，すなわちバイナリ核の推定を，高速 Walsh 変換アルゴリズムを用いて高速に行うことが可能である．バイナリ汎関数級数モデルで表現できる入力のクラスは，Volterra 汎関数級数モデルに比べ，非常に狭いものの，入力信号として制御できる物理量が，光，音，電流などの ON と OFF のみである場合には，非常に有効なモデルとなる．

Wiener 汎関数級数モデルは，正規白色過程を入力とした時，各次数の汎関数が確率的に直交するようにして導かれた非線形汎関数級数モデルである．これにより，Wiener 核は，正規白色過程 (系列) を入力とし，確率的な直交性を利用して高速に推定される．しかしながら，こうした直交性は，確率的な性質であるから，観測時間，すなわち入出力のデータ長が有限である限り，近似となり，推定誤差を生ずる．そのため，Wiener 核推定では，近似を用いていない Volterra，バイナリ核推定に比べ，推定精度が悪化することが定性的に知られている．

非線形汎関数級数モデルでは，システムが高次成分を持ち，記憶長が長くなるに従い，モデルパラメータ数が飛躍的に増加し，核の推定のみならず，核の解釈が非常に困難になり，得られた核が第2のブラックボックスとなる問題が指摘されている．この理由の一つに，非線形汎関数級数モデルが，システムの記憶と非線形特性を混在した表現であることが挙げられる．そこで，記憶を持たない (静的) 非線形要素と記憶を持つ (動的) 線形要素を直並列に結合した伝達関数カスケードモデルが提案された．伝達関数カスケードモデルは，非線形汎関数級数モデルへの変換が可能であり，互いに深く関連していることから，非線形汎関数級数モデルの一つとも見なされている．

### 1.3 本論文の背景, 目的

図 1.2 は，本論文の背景から目的までの流れを示したものである．

線形，非線形システムを問わず，一般に，システム同定においては，システムの構造が複雑であるほど，また，システムの入出力を観測できる時間 (観測時間) が短いほど，同定精度は悪化する．また，同定精度は，同定の際に用いる入力のクラスに依存する．したがって，システムを精度良く同定するためには，対象とするシステムに応じた適切な入力を選択する必要がある．

しかし，従来のシステム同定では，システムに関係なく，適当な入力を用いてシステムを同定することが常であった．線形システムを対象とする限りは，システムの構造がそれほど複雑ではなく，ある程度の同定精度が得られていたため，こうした同定精度に関する問題は特に意識されなかった．しかし，非線形システムを対象とする際には，システムの



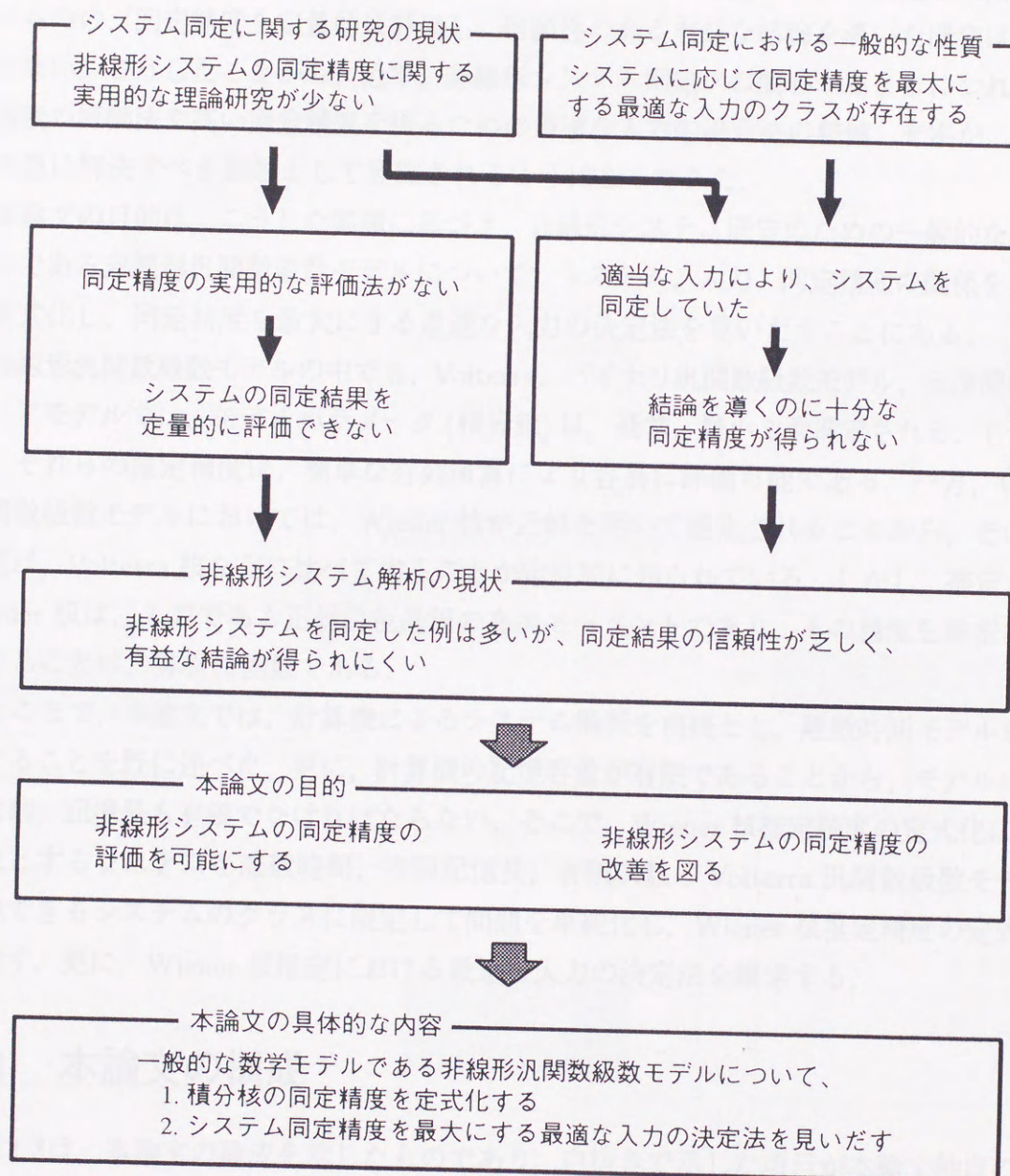


図 1.2 本論文の背景, 目的



構造が複雑である場合が多く、十分な同定精度が得られず、行なわれた実験が無駄になることも多い。また、数学的に非線形汎関数の近似能力を示した Fréchet の定理など、基礎的な理論研究は多いものの、同定精度を定量的に評価するための方法論など、実用的な理論研究は数少ない。したがって、実際に、生体などの非線形システムを同定した研究例は多いものの、同定精度を定量的に評価し、信頼性のある有益な結論を導いた研究は決して多くない。こうしたことから、近年、非線形システム同定への関心が高まるにつれて、同定精度の評価法や高い同定精度を得るための最適な入力決定法の整備、充実が、重要かつ早急に解決すべき課題として認識されるようになってきた。

本論文の目的は、こうした要請に基づき、非線形システム同定のための一般的な数学モデルである非線形汎関数級数モデルについて、システム、入力、同定精度の関係を具体的に定式化し、同定精度を最大にする最適な入力決定法を見いだすことにある。

非線形汎関数級数モデルの中でも、Volterra、バイナリ汎関数級数モデル、伝達関数カスケードモデルでは、モデルパラメータ(積分核)は、通常、最小2乗推定される。したがって、それらの推定精度は、簡単な行列演算により容易に評価可能である。一方、Wiener 汎関数級数モデルにおいては、Wiener 核が近似を用いて推定されることから、その推定精度は、Volterra 核などに比べて劣ることが定性的に知られている。しかし、推定された Wiener 核は、入力である正規白色過程の高次モーメントであり、その精度を厳密に定式化することは、非常に困難である。

ところで、本論文では、計算機によるシステム解析を前提とし、離散時間モデルを対象にすることを既に述べた。更に、計算機の記憶容量が有限であることから、モデルの非線形次数、記憶長も有限でなければならない。そこで、Wiener 核推定精度の定式化に際し、対象とするシステムを離散時間、有限記憶長、有限次数の Volterra 汎関数級数モデルで表現できるシステムのクラスに限定して問題を単純化し、Wiener 核推定精度の定式化を目指す。更に、Wiener 核推定における最適な入力決定法を模索する。

## 1.4 本論文の構成

図 1.3 は、本論文の構成を示したものであり、白抜きで示した項目が本論文独自の成果である。

第2章では、Volterra、バイナリ、Wiener 汎関数級数、伝達関数カスケードモデルなどのモデル表現、モデルパラメータの推定法、各モデルの相互の変換法など、非線形汎関数級数モデル全般を概説し、システム同定精度を議論するための準備とする。

第3章では、離散時間、有限記憶長、有限次数 Volterra 汎関数級数モデルで表現可能な



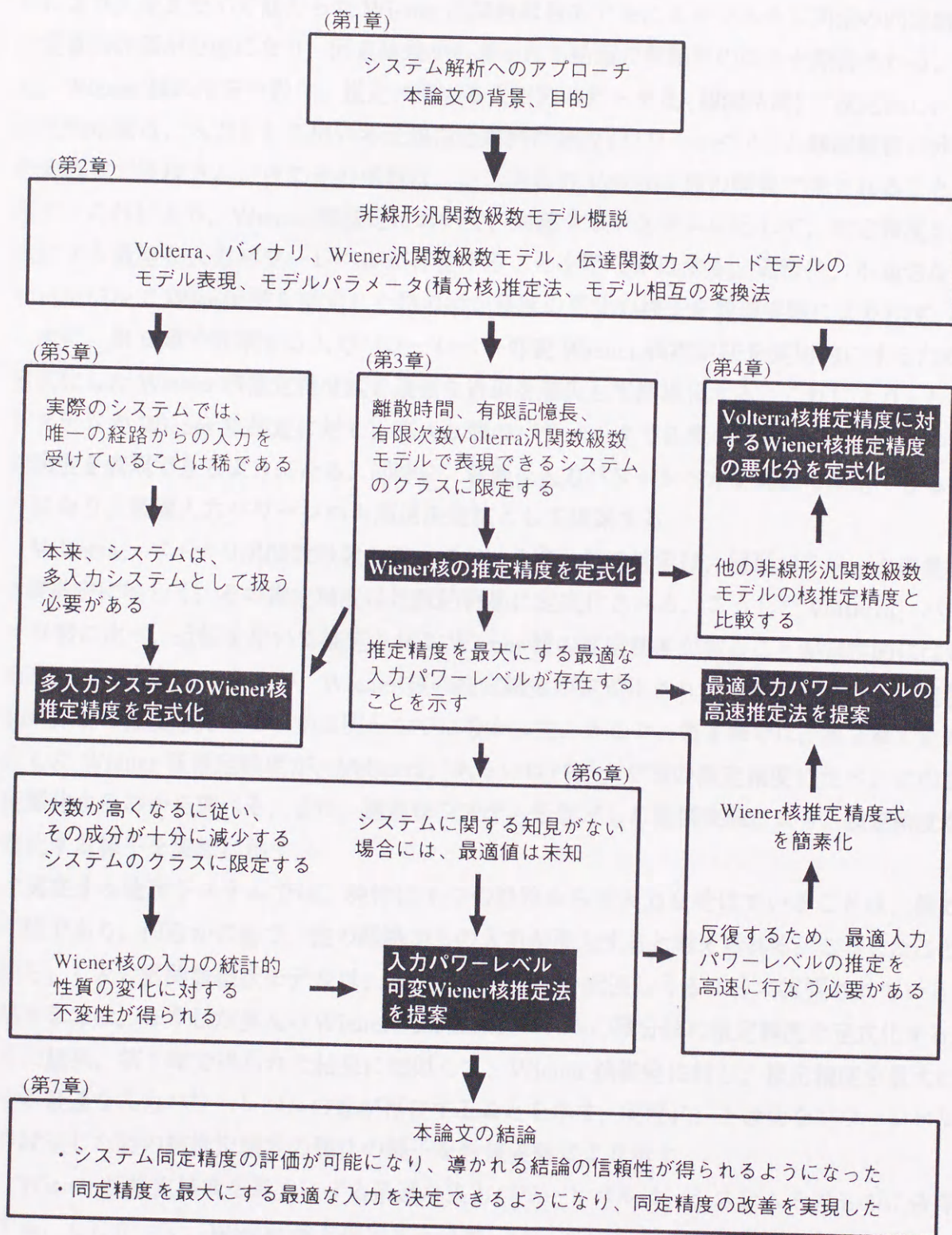


図 1.3 本論文の構成



システムのクラスに対し、Wiener 汎関数級数モデルの積分核推定精度を定式化する。これにより、今まで不可能だった Wiener 汎関数級数モデルによるシステム同定の同定精度の定量的評価が可能になり、同定結果から導かれる結論の信頼性の向上が期待される。また、Wiener 核の推定分散は、推定に用いる入出力のデータ長 (観測時間) に反比例し、その比例定数は、入力として用いる正規白色系列の分散 (パワーレベル) と観測雑音の分散の有理式で表現され、更にその係数は、システムの Volterra 核の関数で表されることを示す。これにより、Wiener 核推定において、対象するシステムに応じて、推定精度を最大にする最適な入力パワーレベルが存在することを明らかにする。実際に、不適切なパワーレベルで Wiener 核を推定した時の推定精度の悪化の様子を数値実験により示す。

次に、第6章で提案する入力パワーレベル可変 Wiener 核推定法を実用的にするため、定式化した Wiener 核推定精度式を適当な近似を導入して簡単化する。これにより、 $L$  次システムの Wiener 核推定に対し、高々  $L$  個のパラメータで任意の次数の Wiener 核の推定精度を表現できるようになる。同時に、最適な入力パワーレベルを高速に決定できるようになり、最適入力パワーレベル高速決定法として提案する。

Volterra, バイナリ汎関数級数モデルにおける積分核の推定は、線形パラメータの最小2乗推定に等しく、その推定精度は比較的容易に定式化される。こうした Volterra, バイナリ核に比べ、近似を用いて推定される Wiener 核の推定精度が劣ることが定性的には知られていたものの、今まで、Wiener 核の推定精度が定式化されていなかったため、定量的に、どの程度悪化するのかは明らかではなかった。そこで、第4章では、第3章で定式化した Wiener 核推定精度が、Volterra, あるいはバイナリ核の推定精度に比べ、どの程度悪化するのかを調べる。また、適当なシステムを仮定した数値実験により、推定精度が悪化する様子を実際に示す。

実在する物理システムでは、純粋に1つの経路からの入力を受けていることは、極めて稀であり、何らかの形で、他の経路からの入力が入り混じると考えられる。こうしたことから、1入力汎関数級数モデルは、多入力システムを記述しうるように拡張されている。第5章では、こうした多入力 Wiener 汎関数級数モデルの積分核の推定精度を定式化する。その結果、第3章で得られた結果に類似して、Wiener 核推定に対し、推定精度を最大にする最適な入力パワーレベルの組が存在することを示す。実際に、不適切なパワーレベルを設定した時の核推定精度の悪化の様子を数値実験により示す。

Wiener 核推定精度を最大にする最適な入力パワーレベルは、システムそのものに依存する。したがって、Wiener 核を推定する以前には、Wiener 核推定に最適な入力パワーレベルを知ることはできない。そこで、何らかの先見情報を基に、最適値を推測する必要がある。ところで、一般に、相互に関係する複数の推定量を交互に反復推定し、推定精度を



向上させる手法として、緩和法 (bootstrap 法) が知られている。第6章では、2つの互いに依存する推定量、すなわち最適入力パワーレベルと Wiener 核の推定に、こうした緩和法を適用した入力パワーレベル可変 Wiener 核推定法を提案する。本手法の概略は以下の通りである。まず、適当に設定した入力パワーレベルにより、Wiener 核を推定し、それを先見情報として、最適入力パワーレベルを推定する。推定された最適入力パワーレベルを用いて、再び Wiener 核を推定する。以下同様に、最適入力パワーレベルと Wiener 核を交互に反復推定することにより、入力パワーレベルを最適値に近づけつつ、Wiener 核推定精度の向上を目指すものである。ところで、一般に、Wiener 核は、入力のパワーレベルに依存して変化する。しかし、自然界に存在する多くのシステムでは、次数が高くなるに従い、非線形成分が次第に減少するものと考えることができる。そこで、対象とするシステムを、非線形次数が高くなるに従い、その成分が十分減少するようなシステムのクラスに限定し、入力の統計的性質に対して、Wiener 核は、ほとんど不変であるものと見なす。また、緩和法においては、それぞれの推定量を反復して推定することから、それらの推定を高速に行う必要がある。本手法では、Wiener 核の推定は相互相関法により、最適入力パワーレベルの推定は、第3章で提案する入力パワーレベル高速決定法により、高速に行うことが可能である。

通常の Wiener 核推定では、推定分散は観測時間に反比例して減少し、決してそれ以上の速度で減少することはない。しかし、こうした入力パワーレベルを可変とする Wiener 核推定では、不適切な入力パワーレベルで核の推定を開始した場合でも、核の推定に伴い入力パワーレベルが適応的に最適値に漸近し、核の推定分散は、観測時間に反比例する以上の速度で減少する。その結果、核の推定精度は、Wiener 核推定精度の理論的限界まで高められる。このことは、実際に、適当なシステムを仮定した数値実験により検証する。以上の結果は、従来、入力の統計的性質を一定として行われていた非線形システム同定に対し、入力の統計的性質をシステムに応じて適応的に変化させる「刺激・測定系を含めた新しいシステム同定法」の可能性を示すものである。

第7章では、本論文の総括を行い、結言とする。



## 第 2 章

# 非線形汎関数級数モデル概説

### 2.1 はじめに

非線形汎関数級数モデルは、非線形システムを一般的に記述するために提案された数学モデルであり、生体などの非線形システムの同定に広く用いられている。非線形汎関数級数モデルにおいて、非線形システムの応答は、入力系列と線形インパルス応答関数の拡張である積分核との多重畳み込み積分により表現され、こうした積分核が決定されれば、システムの入出力関係は一意に定められる。したがって、非線形汎関数級数モデルによるシステム同定問題は、未知システムの入出力データから積分核を決定する問題に帰着される。

非線形汎関数級数モデルとしては、Volterra 汎関数級数モデル [90]、Wiener 汎関数級数モデル [119]、バイナリ汎関数級数モデル [97] などが提案されている。Volterra 汎関数級数モデルは、線形システムを記述するための線形インパルス応答モデルを非線形システムを記述しうるように、また、多項式モデルを記憶を持つようにそれぞれ拡張して得られたモデルである。各次数のべき関数が互いに直交していないのと同様、その拡張である Volterra 汎関数もまた、各次数で直交しておらず、Volterra 核の推定には、正規方程式を解くためのモデルパラメータ数の 3 乗のオーダーの計算量が必要とされる。したがって、システムが高次成分を持ち、記憶長が長くなるにしたがい、推定すべきモデルパラメータ数が多くなり、Volterra 核の推定は、非常に困難になる。

バイナリ汎関数級数モデルは、2 値 ( $\pm A$ ) 入力のクラスに対して定義される汎関数級数モデルである。バイナリ汎関数級数モデルは、Volterra、Wiener 汎関数級数モデルに比べ、システムを表現できる入力のクラスが非常に狭いものの、各次汎関数を厳密に直交させることができ、推定精度を劣化させることなく、高速にバイナリ核を推定することが可能である。



Wiener 汎関数級数モデルは、正規白色系列を入力とする時、各次数の汎関数が漸近的に直交するように設計された汎関数級数モデルである。したがって、Wiener 核は、正規白色系列を入力とする場合、パラメータ数の2乗のオーダーの計算量で推定される。しかしながら、こうした直交性は、漸近的な性質であり、観測時間、すなわち入出力のデータ長が有限である限り、推定誤差を生ずる。

非線形汎関数級数モデルは、非線形ダイナミカルシステムを定量的に表現するための有力なモデルである。しかしながら、モデルの特徴量、すなわちモデルパラメータである積分核からは、システムの定性的な性質を把握することが困難な場合も多い。その理由の一つに、積分核がシステムの2, 3, ... 乗などの非線形特性とダイナミクスを同時に表現しているため、パラメータ数が膨大になることが挙げられる。そこで、非線形ダイナミカルシステムを、記憶を持たない非線形要素(N)と記憶を持つ線形要素(L)の組み合わせで表現する伝達関数カスケードモデルが提案された[36, 37]。伝達関数カスケードモデルは、非線形汎関数級数モデルと深く関係しており、汎関数級数モデルについて議論する際には、考慮しておくべきモデルである。

本章では、まず、2節において、システムの数学的な定義とシステム同定に関する一般的な説明を行う。3節では、非線形汎関数級数モデルについて述べる前の準備として、汎関数級数モデルの1次項(線形項)に相当する線形インパルス応答モデルについて、簡単に述べる。4, 5, 6節では、それぞれ、Volterra, バイナリ, Wiener 汎関数級数モデルの入出力表現、発展の歴史的、積分核の同定法、特徴などについて概説する。7節では、非線形汎関数級数モデルと関連の深い伝達関数カスケードモデルについて、特に、非線形汎関数級数モデルとの関係について述べる。

## 2.2 システム同定

本論文において、システムを0個以上の“入力”と0個以上の“出力”を有するもの全ての総称と定義する。従って、システムの入力、出力としては、電圧、電流、化学物質濃度、光、音圧、数字、命令など、あらゆるものが対象となる。また、全く入力や出力を持たない対象もシステムである。本論文では、議論を簡単にするため、複数の入力と1つの出力を持つシステムを扱う第5章を除き、一対の入出力を持つシステムのみを対象とする。

システムの入出力関係を数学的に表現するため、入力  $x$  を出力  $y$  に一意に変換する作用素(operator)  $T$  を考え、それらの関係を

$$y = T[x]$$



と表すことにする。作用素  $T$  により、入力から出力が一意に定められるが、一般に出力から入力への逆変換は一意的ではなく、作用素  $T$  が可逆であるとは限らない。作用素  $T$  の逆作用素  $T^{-1}$  が存在するためには、作用素  $T$  による変換が 1 対 1 でなければならない。

入出力  $x, y$  がそれぞれ 1 つの数値であるならば、作用素  $T$  は関数 (function)  $f(\cdot)$  となり、

$$y = f(x)$$

と表される。一方、入出力が、それぞれなんらかの変数  $s$  を持つならば、作用素  $T$  は汎関数 (functional)  $F[\cdot]$  となり、次式で表現される。

$$y(s) = F[x(s)]$$

変数  $s$  としては、時間、変位などを取りうるが、本論文では、主に時間  $t$  を考える。この場合、入出力  $x(t), y(t)$  は、過程 (process) と呼ばれる。時間  $t$  の値により作用素  $T$  が変化しないシステムを定常 (stationary) あるいは時不変 (time invariant) システムといい、変化するシステムを非定常システムという。定常システムでは、入力過程  $x(t)$  は、時刻  $t$  に依存することなく、1 つの出力過程  $y(t)$  に変換されることから

$$y(t + \tau) = T[x(t + \tau)], \quad \forall \tau$$

が成り立つ。本論文では、定常システムを対象にする。

システムは、その入出力関係において、重ね合わせの原理が成立するならば、線形システムといわれる。すなわち、任意の定数  $a, b$  と関数  $x_1(t), x_2(t)$  に対して、

$$T[ax_1(t) + bx_2(t)] = aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)]$$

となるならば、作用素  $T$  を持つシステムは、線形システムである。一方、上式を満たさない作用素は、すべて非線形システムに分類される。

システム同定とは、与えられたシステムの作用素  $T$  を決定することであり、作用素  $T$  の数式による記述を数学モデルという。数学モデルは、表記形態において、積分形と微分形に大別される。積分形表記では、モデル出力  $y_M$  は、入力  $x$  の関数とモデルに含まれるパラメータ  $\phi_1, \phi_2, \dots$  の積の積分 (和) として一意に計算できることから、任意の入力に対する出力を知りたい場合に有効である。しかしながら、多くの場合、モデルパラメータから直接、システムの特性を知ることは困難である。従って、積分形表記は、システムの内部構造に関する知見が得られず、入出力データの観測が比較的容易なシステムに対して、システムを大きくブラックボックスとして捉え、入出力関係を表現する目的に用いられる。



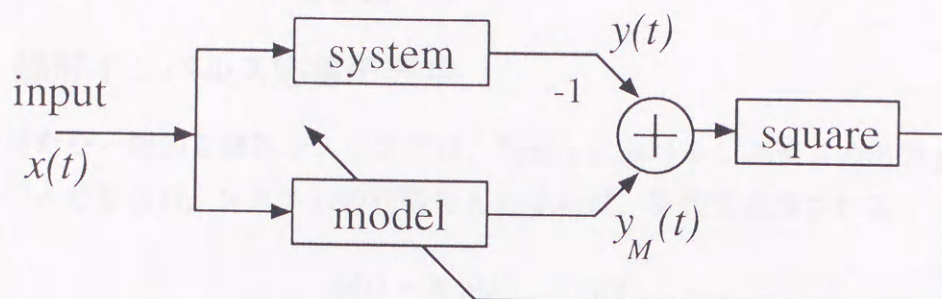


図 2.1 システム同定におけるモデルパラメータ推定

一方、微分形表記では、システムの入出力関係は微分方程式で記述される。例えば、電気、機械系では、それらの構成要素(抵抗、キャパシタンス、インダクタンス、ダンピングファクタ、スプリングなど)の特性の組み合わせにより、全体の特性は、微分方程式により表現される。微分形表記は、システムの内部構造に直結していることから物理モデルとも呼ばれ、システムの解釈が容易である反面、任意の入力に対して出力を計算すること、すなわち微分方程式を解くことは、表現が複雑になれば、解析的にも数値解法でも困難な場合が多い。従って、微分形表記は、システムを各要素毎に調べることができるものの、システムの入出力を観測することが比較的困難な場合に用いられる。

積分形表記、微分形表記ともに、システムを理解することを目的にしているものの、アプローチは大きく異なる。本論文では、システム全体をブラックボックスとして扱い、入出力データから内部構造を推測する立場をとり、全章にわたり積分形表記を対象にする。

数学モデルを用いたシステム同定は、システムの入出力データ  $x(t), y(t)$  を観測し、これらのデータからモデルパラメータ  $\phi_1, \phi_2, \dots$  を推定することに帰着される。一般に、推定されたモデルパラメータは、 $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots$  と表すことが多く、本論文でもこうした表記法を採用する。

通常、モデルパラメータ  $\phi_1, \phi_2, \dots$  の推定は、図 2.1 に示すように、なんらかの入力  $x(t)$  に対するモデル出力  $y_M(t)$  と観測されたシステム出力  $y(t)$  のノルムが最小になるようにモデルパラメータを調整することにより行われる。ノルムとしては、2乗ノルムが用いられることが多く、こうしたノルムを採用したパラメータ推定を最小2乗推定、これによるシステム同定を最小2乗同定という。



## 2.3 線形インパルス応答モデル

### 2.3.1 線形インパルス応答モデル

記憶を持たない静的な線形システムでは、時刻  $t$  におけるシステムの入力  $x(t)$  は、システムへの入力を  $x(t)$ 、システムの利得を  $h$  とすれば、次式で表現される。

$$y(t) = h x(t), \quad \forall t \quad (2.1)$$

しかしながら、実際のシステムでは、多かれ少なかれ、遅れ、無駄時間などを含み、全く記憶を持たないものとは考えにくい。そこで、記憶を持つ線形システムを表現するためには、次式で表わされる線形インパルス応答モデルが用いられる。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau \quad (2.2)$$

線形インパルス応答モデルは、線形システムを記述するために用いられる最も基本的な積分形式の数学モデルであり、本モデルでは、システム出力  $y(t)$  は、モデルパラメータである線形インパルス応答関数  $h(t)$  と入力  $x(t)$  の畳み込み積分により表現される。

式 (2.2) は一般的な表現であるが、本論文では、以下の点を考慮し、次の仮定、制約を導入する。

1. システムは、因果律をみたし、有限の記憶長 ( $R$ ) を持つものとし、式 (2.2) における積分範囲を 0 から  $R$  とする。
2. システムの出力  $y(t)$  には、観測上の雑音が少なからず混入すると考えることが自然であるから、雑音  $e(t)$  を加えて表現する。
3. 近年のシステム同定では、観測された時系列データを A/D 変換し、計算機上で処理することが多いことを考慮し、システムの入出力は、離散化された系列  $x_n, y_n$  とする。ただし、添字による見にくさを避けるため、連続時間系と同じ表記  $x(t), y(t)$  を用いることにする。
4. 実際に観測される出力データ  $y(t)$  は有限長 ( $T$ ) であるから、時刻  $t$  の範囲を  $1, 2, \dots, T$  とする。

以上より、式 (2.2) を修正し、次の表現を得る。

$$y(t) = \sum_{i=0}^R h(i)x(t-i) + e(t), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (2.3)$$



また、線形インパルス応答モデルは、モデルパラメータがモデル出力に対して線形に結合された線形パラメータモデルの一つである。したがって、上式は、行列、ベクトルを用いて

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{h} + \mathbf{e} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(T) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x(1) & \cdots & x(1-R) \\ x(2) & \cdots & x(2-R) \\ \vdots & & \vdots \\ x(T) & \cdots & x(T-R) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(R) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(T) \end{pmatrix}$$

と表現することができる。上式において、 $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{e}$  を、それぞれ、出力ベクトル、入力行列、パラメータベクトル、誤差ベクトルと呼ぶ。

### 2.3.2 線形インパルス応答関数の推定

式 (2.3) で与えられる線形インパルス応答モデルにおいて、線形インパルス応答関数  $h(\tau)$  を最小2乗推定するものとすれば、パラメータベクトルの推定値  $\hat{\mathbf{h}}$  は、 $J = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$  を最小にする。2乗誤差  $J$  は、式 (2.4) より

$$J = (\mathbf{X}\mathbf{h})^T \mathbf{X}\mathbf{h} - 2(\mathbf{X}\mathbf{h})^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{y} \quad (2.5)$$

となり、 $J$  を  $\mathbf{h}$  で偏微分すると

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{h}} = 2\mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{h} - 2\mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

となる。  $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{h}} = 0$  となる  $\mathbf{h}$  が  $\hat{\mathbf{h}}$  であるから、結局、次の正規方程式が得られる。

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X}\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (2.6)$$

上式において、 $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  を入力自己相関行列、 $\mathbf{X}^T \mathbf{y}$  を入出力の相互相関ベクトル、 $\mathbf{e}$  を誤差ベクトルと呼ぶ。また、上式は、入力自己相関行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  が正則行列ならば、

$$\hat{\mathbf{h}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (2.7)$$

と表現することができる。結局、線形パラメータモデルによるシステム同定問題は、入力自己相関行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  が正則行列となるような系列  $x(t)$  を選択し、こうした入力  $x(t)$  に対するシステム出力  $y(t)$  を観測し、正規方程式を解くことに帰着される。



## 2.4 Volterra 汎関数級数モデル

### 2.4.1 Volterra 汎関数級数モデル

線形インパルス応答モデルは、線形ダイナミカルシステムの記憶を表していることから、直感的に理解されやすく、その周波数域の表現である伝達関数モデルと共に広く用いられている。しかし、実在する物理システムでは、たとえ、線形と考えられているシステムでも、飽和、ヒステリシスなどの非線形特性を有しており、純粋な線形システムは存在しないともいえる。したがって、線形インパルス応答モデルなどの線形モデルによるシステム同定では、非線形システムを線形システムと近似して同定していることになる[60, 95]。

しかしながら、特に、生体の神経系などにおいては、その非線形性がシステムの本質的な特徴を与えていると考えられており、線形と近似するシステム同定では、生体の機能の解明には不十分であり、非線形モデルによるシステム同定が必要となる。そこで、こうした非線形システムを解析するための理論的研究として、非線形システムの最小表現が一意に存在することの証明[96]、最大エントロピー原理による非線形システム同定法[107]、また、非線形ダイナミクス解析におけるカオス信号と周期的な確率信号の識別可能性に関する研究[13]、非定常性を含めた解析法[46]などが行われている。

一般に、非線形システムが定常かつ記憶を持たない場合、システムの入出力  $x(t), y(t)$  は、時刻  $t$  には無関係になり、単に  $x, y$  と書くことができる。  $x, y$  の関係  $y = f(x)$  が閉区間  $[a, b]$  で連続ならば、任意の  $\varepsilon > 0$  をとり、  $[a, b]$  において、常に、

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad (2.8)$$

となる多項式  $P(x)$  が存在する (Weierstrass の多項式近似定理)[102]。また、ある区間において、  $f(x)$  が第  $n$  階まで微分可能とすれば、その区間の任意の点  $x$  は、区間内の定点  $a$  を適当に定めて、

$$f(x) = f(a) + (x-a) \frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \cdots + (x-a)^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad (2.9)$$

と表現できる (Taylor 展開)[102]。ただし、  $\xi = a + \theta(x-a)$ ,  $0 < \theta < 1$  とする。こうした定理により、完備性が保証されるシステムの入出力の表現は、べき多項式モデルと呼ばれる。

$$y(t) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t) + \cdots + a_L x^L(t) + e(t), \quad \forall t \quad (2.10)$$

さて、2.3 節で述べたように、実際のシステムでは、記憶を持たないものとは考えにくい。そこで、1880 年、Volterra は、図 2.2 に示すように、線形インパルス応答モデルを非



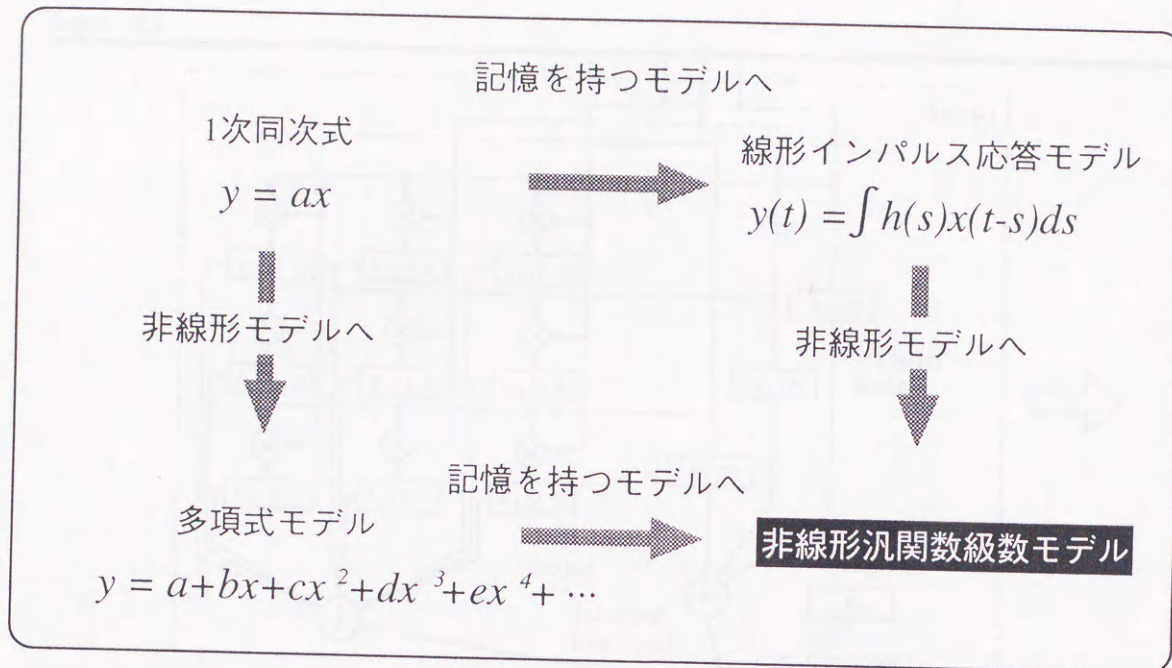


図 2.2 非線形汎関数級数モデルの位置づけ

線形特性を表現できるように、また、べき多項式モデルを記憶を持つように拡張した汎関数級数モデルを提案した [79, 89, 109, 110, 117]。Volterra 汎関数級数モデルにおいては、システムの出力は、次式で表現される。

$$y(t) = \sum_{n=0}^L H_n[h_n; x] + e(t) \quad (2.11)$$

ただし、

$$H_n[h_n; x] = \sum_{\tau_1=0}^R \cdots \sum_{\tau_n=0}^R h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t - \tau_1) \cdots x(t - \tau_n) \quad (2.12)$$

$H_n[h_n; x]$  は、 $n$  次 Volterra 汎関数と呼ばれており、そのべき級数で表現される汎関数級数モデルは、Volterra 汎関数級数モデルと呼ばれている。モデルパラメータ  $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  は、 $n$  次 Volterra(積分)核と呼ばれており、システムの出力は、入力とこうした Volterra 核との多重畳み込み積分として表現される。例えば、記憶長  $R = 2$ , ( $L =$ )2 次の Volterra 汎関数級数モデルを概念的に示すと図 2.3 のようになる。0 次汎関数は入力には依存しない定数項、1 次汎関数は入力の線形重み付き和、2 次汎関数は 2 つの時刻の入力の積の重み付き和であり、それぞれの次数の重みは、0, 1, 2 次 Volterra 核となる。

べき多項式は、Weierstrass の多項式近似定理により、その完備性が保証されている。一方、Fréchet は、1910 年、区間  $[a, b]$  で連続な  $x(s)$  の汎関数  $y = F[x(s)]$  が、 $x(s)$  に関し



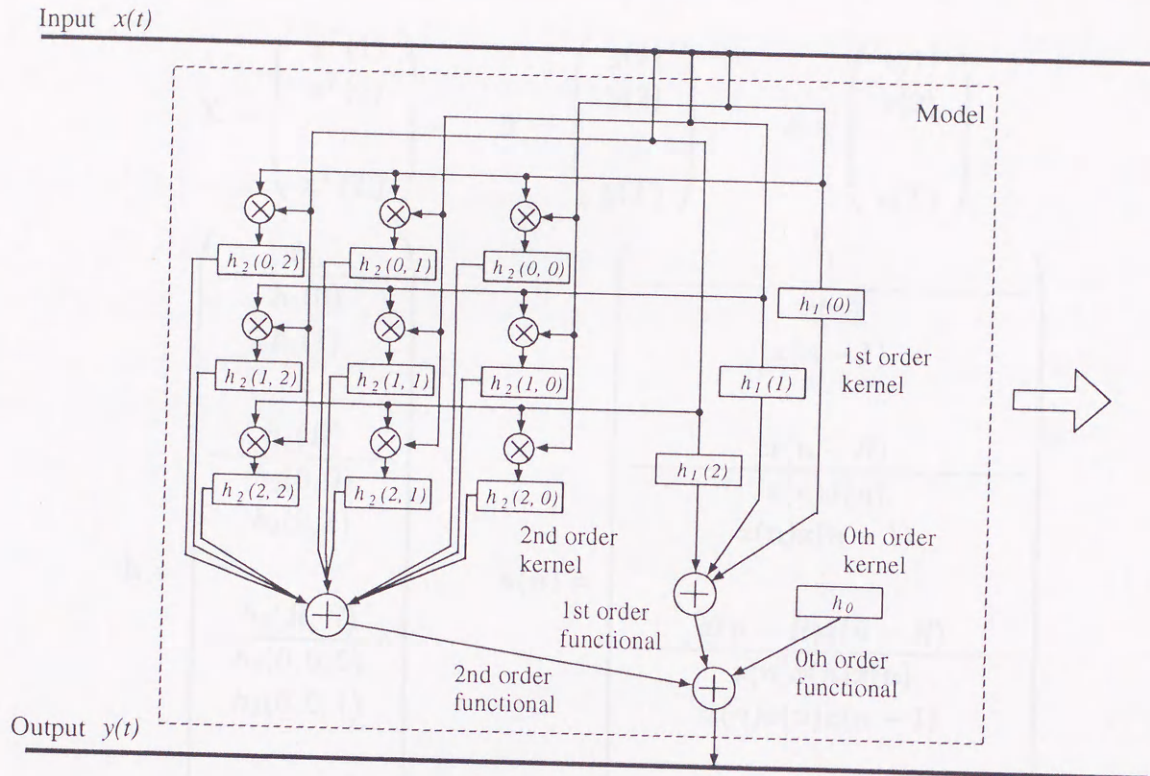


図 2.3 2次 Volterra 汎関数級数モデルの概念図

て連続ならば、次式の汎関数級数展開により、一様に近似できることを示した [20].

$$F[x(s)] = h_0 + \int_a^b h_1(s_1)x(s_1)ds_1 + \int_a^b \int_a^b h_2(s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 \\ + \int_a^b \cdots \int_a^b h_L(s_1, \dots, s_L)x(s_1) \cdots x(s_L)ds_1 \cdots ds_L + e(s) \quad (2.13)$$

この定理は、記憶長が有限な連続なシステムが、Volterra 汎関数級数モデルにより、任意の精度で一様に近似できることを保証するものであり、Frèchet の定理と呼ばれている。その後、Brilliant は、入力関数が有界であり、システムが、その記憶が指数関数的に減衰し、かつ連続ならば、Volterra 汎関数級数モデルにより近似できることを示し、Volterra 汎関数級数モデルを適用できるシステムのクラスを拡張した [4].

さて、式 (2.11), (2.12) は、ベクトル、行列を用い、次のように表現される。

$$y = Xh + e \quad (2.14)$$

ただし、入力行列  $X$ 、パラメータベクトル  $h$ 、出力ベクトル  $y$ 、誤差ベクトル  $e$  は、次式



で定義される.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^T(1) \\ \mathbf{x}^T(2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(T) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(T) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(T) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_0 \\ \hline h_1(0) \\ h_1(1) \\ \vdots \\ h_1(R) \\ \hline h_2(0,0) \\ h_2(0,1) \\ \vdots \\ h_2(R,R) \\ \hline h_3(0,0,0) \\ h_3(0,0,1) \\ \vdots \\ h_3(R,R,R) \\ \hline h_4(0,0,0,0) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-R) \\ \hline x(n)x(n) \\ x(n)x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-R)x(n-R) \\ \hline x(n)x(n)x(n) \\ x(n)x(n)x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-R)x(n-R)x(n-R) \\ \hline x(n)x(n)x(n)x(n) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

以後, 推定するパラメータ数, すなわちパラメータベクトル  $\mathbf{h}$  の要素数を  $N$  で表し, 観測時間 (データ長), すなわち出力ベクトル  $\mathbf{y}$  の要素数を  $T$  とする. こうしたモデルパラメータ数  $N$  の決定に関し, 他の線形パラメータモデルと同様, AIC により最適なパラメータ数を決定する試みがなされている [106].

ところで, Volterra 汎関数級数モデルの入出力関係は, Volterra 核により一意に定められるが, 同じ入出力関係を持つモデルの Volterra 核は一意的ではない. そこで, 本論文では, 非線形システムの Volterra 核推定において, 一意性を持たせるため,  $n$  次 Volterra 核  $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  は, 変数  $\tau_1, \dots, \tau_n$  の順番を並び替えても値が変化しない, すなわち Volterra 核が変数の入れ替えに関して対称 (対称核) であるという条件を付加する. これにより, 一般性を失うことなく, モデルの取扱いが容易になる [56, 90].

こうした Volterra 汎関数級数モデルは, 1 次 Volterra 核  $h_1(\tau_1)$  がシステムの線形成分であり,  $n$  次 Volterra 核  $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  がシステムの  $n$  次成分を表しているように, 線形インパルス応答モデルからの類推により, モデルの解釈が比較的容易である. そこで, Volterra 汎関数級数モデルは, 視覚の空間非線形解析 [50], 聴覚系の解析 [51] などに, しばしば利用される. また, Volterra 汎関数級数モデルをフィルタとして用いた適応 Volterra フィル



タ [62, 14], FFT に類似した高速アルゴリズムを用いた高速 Volterra フィルタリングアルゴリズム [67] などが提案されている. また, Volterra 汎関数級数モデルと記述関数法との関係など, 他の非線形システム表現法との関係も調査されている [28].

### 2.4.2 Volterra 核の推定

式 (2.14) で与えられる Volterra 汎関数級数モデルにおいて, Volterra 核は, 線形インパルス応答関数と同様, モデル出力に対して線形に結合された線形パラメータである. したがって, Volterra 核は, モデル出力とシステム出力の 2 乗誤差を最小にするようにして導かれた正規方程式を解くことにより, 最小 2 乗推定される. すなわち, 2 乗誤差  $J = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$  を最小にするようなパラメータベクトル  $\hat{\mathbf{h}}$  は, 次の正規方程式を満たす.

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\mathbf{h}} = \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (2.15)$$

あるいは,

$$\hat{\mathbf{h}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (2.16)$$

さて, 第4章で詳述するが, 正規方程式を解くために必要な計算量は, パラメータ数の 3 乗のオーダーで増加する. 従って, モデルの次数が増えると, Volterra 核の推定は, 非常に困難になる. そこで, Volterra 核の推定, すなわち, 正規方程式を高速に解く手法が数多く提案された. 中でも, 特に有効と考えられる Cholesky 分解法 [44], 入力系列直交化法 (orthogonal approach) [40, 43], Volterra 核直交展開法 [103, 111], Karhunen-Loève 展開法 [112, 113, 114] のアルゴリズムを付録 A に示す.

Volterra 核の推定は, 結局, 線形パラメータの最小 2 乗推定であることから, その推定精度に関しては, 古くから研究されている. 本論文では, 第4章において, バイナリ, Wiener 核の推定精度との比較を行う.

## 2.5 バイナリ汎関数級数モデル

### 2.5.1 バイナリ汎関数級数モデル

線形パラメータモデルにおけるモデルパラメータの最小 2 乗推定は, 正規方程式を解くことに帰着される. Volterra 汎関数級数モデルもまた線形パラメータモデルであることから, Volterra 核は, 正規方程式を解くことにより推定される. 正規方程式を解くためには, 入力の自己相関行列の逆行列を計算する必要があり, そのための計算量は, パラメー



タ数の3乗に比例して増加する(第4章にて詳述)。したがって、モデルの記憶長、次数が増えるにしたがい、パラメータ数が膨大になり、Volterra核の推定は困難になる。

ところで、実験においては、刺激装置の制約上、システムへの入力として、光、音、電圧などのONとOFFの2種類のレベルしか設定できない場合も多い。こうした場合、刺激のON,OFFに、それぞれモデル上の値 $\pm 1$ を割り当て、Volterra汎関数級数モデルを構成し、Volterra核が推定される[1]。この場合、Volterra汎関数級数モデルは、2値入力のクラスに対して定義される汎関数級数モデルとなる[97]。本論文では、こうした汎関数級数モデルをバイナリ汎関数級数モデルと呼ぶことにする。バイナリ汎関数級数モデルにおいて、システムの入力 $x(t)$ は、次式で表現される。

$$y(t) = \sum_{n=0}^L B_n[b_n; x] + e(t) \quad (2.17)$$

ただし、

$$B_n[b_n; x(t)] = \sum_{\tau_1=0}^R \cdots \sum_{\tau_n=0}^R b_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t - \tau_1) \cdots x(t - \tau_n), \quad \tau_i \neq \tau_j \ (i \neq j) \quad (2.18)$$

2値入力に対して定義されることから、 $B_n[b_n; x(t)]$ を $n$ 次バイナリ汎関数、 $b_0, b_1, \dots, b_n$ をバイナリ核と呼ぶ。バイナリ汎関数級数モデルは、Volterra汎関数級数で表現しうる線形空間を、2値入力系列から生成される直交基底により張られる空間へ射影した部分空間で非線形システムを記述する汎関数級数モデルである。こうしたバイナリ汎関数級数モデルは、2値( $\pm A$ )入力のクラスに対してのみ、システムを表現することが可能である。

また、式(2.18)の代わりに、バイナリ核の変数に対する対称性を仮定せず、

$$B_n[b_n; x(t)] = \sum_{\tau_1=0}^R \sum_{\tau_2=\tau_1+1}^R \cdots \sum_{\tau_n=\tau_{n-1}+1}^R b_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t - \tau_1) \cdots x(t - \tau_n) \quad (2.19)$$

と定義することも可能である。このような定義を用いた場合、式(2.17),(2.19)は、ベクトル、行列を用いて、次式のように表現される。

$$y = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{e} \quad (2.20)$$

ただし、入力行列 $\mathbf{X}$ 、パラメータベクトル $\mathbf{b}$ 、出力ベクトル $\mathbf{y}$ 、誤差ベクトル $\mathbf{e}$ は、次式で与えられる。

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^T(1) \\ \mathbf{x}^T(2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(T) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(T) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(T) \end{pmatrix},$$



$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1(0) \\ b_1(1) \\ \vdots \\ b_1(R) \\ b_2(0,0) \\ b_2(0,1) \\ \vdots \\ b_2(R,R) \\ b_3(0,0,0) \\ b_3(0,0,1) \\ \vdots \\ b_3(R,R,R) \\ b_4(0,0,0,0) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 1 \\ x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-R) \\ x(n)x(n) \\ x(n)x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-R)x(n-R) \\ x(n)x(n)x(n) \\ x(n)x(n)x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-R)x(n-R)x(n-R) \\ x(n)x(n)x(n)x(n) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

### 2.5.2 Volterra 汎関数級数とバイナリ汎関数級数の関係

式(2.11),(2.12) で与えられる Volterra 汎関数級数表現において, 例えば, 2次 Volterra 汎関数  $H_2[h_2; x(t)]$  を核の対角部分と他の部分に分けると,

$$H_2[h_2; x(t)] = \sum_{\tau=0}^R h_2(\tau, \tau) x^2(t - \tau) + \sum_{\tau_1=0}^R \sum_{\substack{\tau_2=0 \\ \tau_2 \neq \tau_1}}^R h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) \quad (2.21)$$

となる. 上式において, 第1項が核の対角部分, 第2項が非対角部分であり, 入力  $x(t)$  が2値( $\pm A$ )をとる場合には, 第1項は, 入力には依存しない定数項

$$A^2 \sum_{\tau=0}^R h_2(\tau, \tau)$$

となり, 0次成分として観測される. したがって, 2次 Volterra 汎関数級数モデルを式(2.17),(2.18)で定義されるバイナリ汎関数級数モデルで表現すれば, 0次バイナリ核  $b_0$  は,

$$b_0 = h_0 + A^2 \sum_{\tau=0}^R h_2(\tau, \tau)$$

となり, 2次バイナリ核  $b_2(\tau_1, \tau_2)$  は,

$$b_2(\tau_1, \tau_2) = h_2(\tau_1, \tau_2), \quad \tau_1 \neq \tau_2$$

となる. また, 1次バイナリ核  $b_1(\tau_1)$  は, 1次 Volterra 核  $h_1(\tau_1)$  に等しくなる. 一般に,  $n$ 次核の対角成分は,  $n-2, n-4, \dots$ 次核に含まれる. こうして, 2値( $\pm A$ )入力に対し,



Volterra 汎関数級数モデルの Volterra 核は、バイナリ汎関数級数モデルのバイナリ核へ、次式により変換できる.

$$\begin{aligned}
 b_0 &= h_0 + A^2 \sum_{\tau_1=0}^R h_2(\tau_1, \tau_1) \\
 &\quad + 3A^4 \sum_{\tau_1=0}^R \sum_{\tau_2=0}^R h_4(\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2) + \cdots \\
 b_1(\sigma_1) &= h_1(\sigma_1) + 3A^3 \sum_{\tau_1=0}^R h_3(\tau_1, \tau_1, \sigma_1) \\
 &\quad + 15A^5 \sum_{\tau_1=0}^R \sum_{\tau_2=0}^R h_5(\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2, \sigma_1) + \cdots \\
 b_2(\sigma_1, \sigma_2) &= h_2(\sigma_1, \sigma_2) + 6A^4 \sum_{\tau_1=0}^R h_4(\tau_1, \tau_1, \sigma_1, \sigma_2) + \cdots \\
 &\quad \vdots \\
 b_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) &= \sum_{m=0}^R \frac{(n+2m)! A^{2m}}{n! m! 2^m} \\
 &\quad \sum_{\tau_1=0}^R \cdots \sum_{\tau_m=0}^{\infty} h_{n+2m}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_m, \tau_m, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (2.22) \\
 &\quad \sigma_i \neq \sigma_j \ (i \neq j)
 \end{aligned}$$

一方、バイナリ汎関数級数モデルの表現しうる入力範囲は、Volterra 汎関数級数モデルに比べ狭いため、バイナリ汎関数級数モデルから Volterra 汎関数級数モデルには、一意に変換することは不可能である.

### 2.5.3 バイナリ核の推定

バイナリ核は、Volterra 核と同様、線形パラメータであることから、正規方程式を解くことにより最小 2 乗推定される. すなわち、2 乗誤差  $J = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$  を最小にするパラメータベクトル  $\hat{\mathbf{b}}$  は、

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

を満たし、

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (2.23)$$

として推定される.

バイナリ核の推定に関して、高速 Walsh 変換 (FWT) アルゴリズム [32, 99] を用いて、線形システム [120]、2 次システム [31]、一般の非線形システム [21, 97, 101] のバイナリ核



を高速に推定する手法が提案されている．簡単のため，次式で表される記憶長  $R = 2$  の3次バイナリ汎関数級数モデルを考える．

$$\begin{aligned}
 y(t) = & b_0 + b_1(0)x(t) + b_1(1)x(t-1) + b_1(2)x(t-2) \\
 & + b_2(0,1)x(t)x(t-1) + b_2(1,2)x(t-1)x(t-2) + b_2(0,2)x(t)x(t-2) \\
 & + b_3(0,1,2)x(t)x(t-1)x(t-2)
 \end{aligned} \quad (2.24)$$

このモデルでは，記憶長  $R = 2$  であることから，出力  $y(t)$  は，入力  $x(t-2), x(t-1), x(t)$  の関数で表現される．そこで，例えば，入力  $(x(t-2), x(t-1), x(t))$  が  $(+1, +1, -1)$  である場合の出力  $y(t)$  を  $y_{++-}$  と表すことにすれば，式 (2.24) より， $y_{+++}, y_{++-}, y_{+-+}, y_{+--}, y_{-++}, y_{-+-}, y_{--+}, y_{---}$  は，それぞれ

$$\begin{aligned}
 y_{+++} &= b_0 + b_1(0) + b_1(1) + b_2(0,1) + b_1(2) + b_2(0,2) + b_2(1,2) + b_3(0,1,2) \\
 y_{++-} &= b_0 - b_1(0) + b_1(1) - b_2(0,1) + b_1(2) - b_2(0,2) + b_2(1,2) - b_3(0,1,2) \\
 y_{+-+} &= b_0 + b_1(0) - b_1(1) - b_2(0,1) + b_1(2) + b_2(0,2) - b_2(1,2) - b_3(0,1,2) \\
 y_{+--} &= b_0 - b_1(0) - b_1(1) + b_2(0,1) + b_1(2) - b_2(0,2) - b_2(1,2) + b_3(0,1,2) \\
 y_{-++} &= b_0 + b_1(0) + b_1(1) + b_2(0,1) - b_1(2) - b_2(0,2) - b_2(1,2) - b_3(0,1,2) \\
 y_{-+-} &= b_0 - b_1(0) + b_1(1) - b_2(0,1) - b_1(2) + b_2(0,2) - b_2(1,2) + b_3(0,1,2) \\
 y_{--+} &= b_0 + b_1(0) - b_1(1) - b_2(0,1) - b_1(2) - b_2(0,2) + b_2(1,2) + b_3(0,1,2) \\
 y_{---} &= b_0 - b_1(0) - b_1(1) + b_2(0,1) - b_1(2) + b_2(0,2) + b_2(1,2) - b_3(0,1,2)
 \end{aligned} \quad (2.25)$$

と表わされる．ここで，一般的ではないが， $y_{++-}, y_{+-+}, y_{+--}, \dots$  などの総称として，記号  $y_{***}$  を用いることにする．式 (2.25) を行列を用いて表せば，バイナリ汎関数級数モデルの行列，ベクトル表現が得られる．

$$y = H_8 b + e \quad (2.26)$$

$$H_8 = \begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_{+++} \\ y_{++-} \\ y_{+-+} \\ y_{+--} \\ y_{-++} \\ y_{-+-} \\ y_{--+} \\ y_{---} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1(0) \\ b_1(1) \\ b_2(0,1) \\ b_1(2) \\ b_2(0,2) \\ b_2(1,2) \\ b_3(0,1,2) \end{pmatrix}$$

上式中， $H_8$  の  $+, -$  は，それぞれ  $+1, -1$  を表すものとする．ここで，行列  $H_8$  は，再帰的に

$$H_{2^n} = \begin{pmatrix} H_{2^{n-1}} & H_{2^{n-1}} \\ H_{2^{n-1}} & -H_{2^{n-1}} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

ただし， $H_1 = (+)$



として定義される自然順 Hadmard 行列 [32] に等しくなる. また, 出力ベクトル  $\mathbf{y}$  の要素の並びは, その添字において,  $+$  を 0,  $-$  を 1 と見なせば, 0 から 7 までを順に 2 進数表示したものと等しい. 一方, パラメータベクトル  $\mathbf{b}$  の要素の並びは, 次のように解釈できる. 例えば,  $b_3(0, 1, 2)$  は, 出力  $y(t)$  と入力  $x(t-2), x(t-1), x(t)$  の関係を表現しているから, それを 111 と表し,  $b_1(0)$  は, 出力  $y(t)$  と入力  $x(t)$  の関係を表現しているから, それを 001 と表現する. また,  $b_0$  は, 出力  $y(t)$  が入力には依存しない成分を表しているから, それを 000 と表現する. このような表現を用いれば, パラメータベクトル  $\mathbf{b}$  の要素の並びは, 0 から 7 までを順に 2 進数表示したものに等しい. こうした性質は, 任意の記憶長  $R$  の  $L(= R+1)$  次バイナリ汎関数級数モデルに対しても成り立つ [101].

式 (2.26) で示されるバイナリ汎関数級数モデルのバイナリ核  $\mathbf{b}$  は, 式 (2.23) と同様に, また,  $\mathbf{H}_N$  が対称直交行列,  $\mathbf{H}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{H}_N$  であることを考慮して,

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{H}_N^T \mathbf{H}_N)^{-1} \mathbf{H}_N^T \mathbf{y} = \frac{1}{N} \mathbf{H}_N \mathbf{y} \quad (2.28)$$

として推定される. 自然順 Hadmard 行列  $\mathbf{H}_N$  による線形変換は, 高速 Fourier 変換に類似した高速 Walsh 変換 [32] を用いて高速に計算することができるから, 高速 Walsh 変換を FWT[ $\cdot$ ] と表わせば, 式 (2.28) は,

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{N} \text{FWT}[\mathbf{y}] \quad (2.29)$$

となる.

さて,  $y_{***}$  を効率的に得る入力系列として, バイナリ  $m$  系列 [63, 64] (付録 B) が知られている. 例えば, 3 段シフトレジスタにより生成される 0, 1 の値を持つ周期  $2^3 - 1 = 7$  のバイナリ  $m$  系列に対し,  $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow -1$  なる変換を施した系列に対する出力は,  $y_{+++}$  を除くすべての  $y_{***}$  を含む. 例えば, 特性多項式  $H(x) = x^3 + x + 1$  により定められる  $m$  系列より入力を生成する場合, 適当な初期値に対して, 入力  $x(t)$  を

$$\begin{array}{cccccccccc} \cdots & x(0) & x(1) & x(2) & x(3) & x(4) & x(5) & x(6) & x(7) & x(8) & \cdots \\ \cdots & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & \cdots \end{array}$$

とするならば,  $y_{***}$  は, それぞれ

$$y_{---} = y(1)$$

$$y_{--+} = y(2)$$

$$y_{-++} = y(3)$$

$$y_{+-+} = y(4)$$

$$y_{+--} = y(5)$$

$$y_{-+-} = y(6)$$

$$y_{+--} = y(7)$$



となる。ただし、 $(+, +, +)$  なる系列は現れないため、 $y_{+++}$  に関しては、これらの系列とは別に観測する必要がある。

こうしたバイナリ汎関数級数モデルは、バイナリ核推定の容易さから、網膜電位図 (ERG) の解析 [98, 100]、 $m$  系列に類似した  $m$ -pulse 系列を用いた聴覚システムの同定 [93] などに用いられている。

また、バイナリ核の推定精度に関しては、Volterra 核の推定精度と同様、第4章において詳述する。

## 2.6 Wiener 汎関数級数モデル

### 2.6.1 確率 Fourier 汎関数級数モデル

2.4 節において述べたように、正規方程式を解くことに帰着される Volterra 核の推定は、システムの次数、記憶長が大きくなるにしたがい、非常に困難になる。さらに、べき多項式が各次数で直交していないのと同様、その拡張である Volterra 汎関数級数モデルもまた直交展開ではない。したがって、システムの真の次数、記憶長よりも少なく展開を打ち切った場合、Volterra 核の推定は不偏性を持たなくなる。2.5 節で述べたバイナリ汎関数級数モデルは、直交展開ではあるものの、設定したモデルの記憶長がシステムの記憶長よりも少ない場合、バイナリ核の推定に不偏性が失われる。

一方、汎関数級数モデルによるシステム同定への別のアプローチとして、システムへの入力を確率過程とし、システムの応答を入力過程の直交汎関数展開の線形結合として表現する手法が提案されている [72]。こうした確率過程の直交汎関数展開モデルを、Yasui [125] に従い、確率 Fourier 汎関数級数 (stochastic functional Fourier series) モデルと呼ぶことにする。

歴史的には、まず、Wiener が Brown 運動の多項式汎関数 [118] を直交化することにより、直交汎関数を導き [119]、Cameron と Martin が Hermite 多項式を用いて、Brown 運動の形式的な微係数である正規過程に対する直交汎関数を導いた [8]。その後、Itô が Wiener の理論を数学的に体系づけ、多重 Wiener 積分 [29]、複素多重 Wiener 積分 [30] を定義し、直交展開を導いた。こうした正規過程に対する直交汎関数展開は、Wiener-Hermite 展開 [72]、Fourier-Hermite 展開 [125]、Wiener 汎関数級数展開 [48, 56, 91] などと呼ばれている。

正規過程に対する直交汎関数展開は、Hida と Ikeda により Brown 運動を含む一般の加法過程 [27]、Poisson 過程 [69]、点過程 [5]、マイチンゲール [92] など、他の確率過程に対しても拡張されている。以下では、こうした確率 Fourier 汎関数級数モデルについて述べる。



強定常確率系列  $x(t)$ ;  $t \in \mathbf{Z}$  において,  $x(t)$  を変数とし,  $E[\Psi_n(x(t))\Psi_m(x(t))] = \delta_{nm}E[\Psi_n^2(x(t))] < \infty$  を満たす 1 変数直交基底  $\Psi_n$ ;  $n = 0, 1, \dots$  を考える. 任意の定常白色系列に対して, 1 変数直交基底  $\Psi_n$ ;  $n = 0, 1, \dots$  を得るための手法は, 数多く提案されている. 例えば, Gram-Schmidt 法では

$$\Psi_n(x) = \frac{M_n(x)}{\sqrt{M_n M_{n-1}}}, \quad \Psi_0(x) = 1 \quad (2.30)$$

$$M_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & E[u(x)] & \cdots & E[u(x)^n] \\ E[u(x)] & E[u^2(x)] & \cdots & E[u(x)^{n+1}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E[u(x)^{n-1}] & E[u(x)^n] & \cdots & E[u(x)^{2n-1}] \\ 1 & u(x) & \cdots & u(x)^n \end{vmatrix} \quad (2.31)$$

$$M_n = \begin{vmatrix} 1 & E[u(x)] & \cdots & E[u(x)^n] \\ E[u(x)] & E[u^2(x)] & \cdots & E[u(x)^{n+1}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E[u(x)^{n-1}] & E[u(x)^n] & \cdots & E[u(x)^{2n-1}] \\ E[u(x)^n] & E[u(x)^{n+1}] & \cdots & E[u(x)^{2n}] \end{vmatrix} \quad (2.32)$$

として求められる [70]. 上式において,  $u(x) = x$  とすれば, 多項式による直交基底が得られる.  $u(x) = x$  として, 式 (2.31), (2.32) を式 (2.30) に代入し, 1 次モーメント, すなわち平均  $m_1 = 0$  とすると, 直交多項式は,

$$\begin{aligned} \Psi_0(x) &= 1 \\ \Psi_1(x) &= x \\ \Psi_2(x) &= x^2 - \frac{m_3}{m_2}x - m_2 \\ \Psi_3(x) &= x^3 - \frac{m_5m_2 - m_4m_3 + m_3m_2^2}{m_4m_2 - m_3^2 - m_2^3} \left( x^2 - \frac{m_3}{m_2}x - m_2 \right) - \frac{m_4}{m_2}x - m_3 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.33)$$

となる. 上式から分かるように, 確率系列  $x(t)$  の直交多項式は, 確率系列  $x(t)$  のモーメントの関数となり,  $x(t)$  の確率密度分布  $f(x)$  に依存する. 一般に,  $n$  次までの直交多項式  $\{\Psi_i(x); i = 0, 1, \dots, n\}$  を得るためには, 系列  $x(t)$  の  $2n$  次モーメントまでの情報を必要とする.

強定常確率系列  $x(t)$ ;  $t \in \mathbf{Z}$  において,  $x(t_1), \dots, x(t_n)$  を変数とし, 次式を満たす対称多変数関数  $\Phi_n$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$  が存在するならば, 確率系列  $x(t)$  は直交化可能であるという [70].

$$E[\Phi_n(x(t_1), \dots, x(t_n))\Phi_m(x(s_1), \dots, x(s_m))] = 0 \quad (2.34)$$



$$\forall t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_m, \quad m, n \quad (m \neq n)$$

この時、 $\Phi_n$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$  を  $x(t)$  の多変数直交基底という。特に、 $\Phi_n$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$  が多項式により表現されているならば、多変数多項式直交基底という。

多変数直交基底は、1変数直交基底  $\{\Psi_n\}$  の適当な外積により構成することが可能である [70]。

$$\Phi_n(\underbrace{x(t_1), \dots, x(t_1)}_{n_1}, \dots, \underbrace{x(t_p), \dots, x(t_p)}_{n_p}) = \Psi_{n_1}(x(t_1)) \cdots \Psi_{n_p}(x(t_p)) \quad (2.35)$$

ただし、 $t_1, \dots, t_p$  は、全て異なる値を持ち、 $n_1 + \dots + n_p = n$  とする。上式は、例えば  $n = 0, 1, 2, 3$  の場合には次式となる。

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \Psi_0 \\ \Phi_1(x(t_1)) &= \Psi_1(x(t_1)) \\ \Phi_2(x(t_1), x(t_2)) &= \begin{cases} \Psi_1(x(t_1))\Psi_1(x(t_2)) & t_1 \neq t_2 \\ \Psi_2(x(t_1)) & t_1 = t_2 \end{cases} \\ &= \Psi_1(x(t_1))\Psi_1(x(t_2)) + \delta_{t_1, t_2}(\Psi_2(x(t_1)) - \Psi_1^2(x(t_1))) \\ \Phi_3(x(t_1), x(t_2), x(t_3)) &= \begin{cases} \Psi_1(x(t_1))\Psi_1(x(t_2))\Psi_1(x(t_3)) & t_1 \neq t_2 \neq t_3 \\ \Psi_1(x(t_1))\Psi_2(x(t_2)) & t_1 \neq t_2 = t_3 \\ \Psi_3(x(t_1)) & t_1 = t_2 = t_3 \end{cases} \\ &= \Psi_1(x(t_1))\Psi_1(x(t_2))\Psi_1(x(t_3)) \\ &\quad + \delta_{t_1, t_2}\Psi_1(x(t_3))(\Psi_2(x(t_1)) - \Psi_1^2(x(t_1))) \\ &\quad + \delta_{t_2, t_3}\Psi_1(x(t_1))(\Psi_2(x(t_2)) - \Psi_1^2(x(t_2))) \\ &\quad + \delta_{t_3, t_1}\Psi_1(x(t_2))(\Psi_2(x(t_3)) - \Psi_1^2(x(t_3))) \\ &\quad + \delta_{t_1, t_2}\delta_{t_2, t_3}(\Psi_3(x(t_1)) - 3\Psi_1(x(t_1))\Psi_2(x(t_1)) + 2\Psi_1^3(x(t_1))) \end{aligned} \quad (2.36)$$

白色確率系列  $x(t)$  を入力とするシステムの出力を  $y(t)$  とする。この時、システム出力を、式 (2.36) で示した多変数直交基底  $\Phi_n(x)$  の線形結合により、

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=0}^L F_n[f_n; x(t)] + e(t) \\ &= \sum_{n=0}^L \sum_{i_1=0}^R \cdots \sum_{i_n=0}^R f_n(i_1, \dots, i_n) \Phi_n(x(t-i_1), \dots, x(t-i_n)) + e(t) \end{aligned} \quad (2.37)$$

と表現するものとする。こうした数学モデルを確率 Fourier 汎関数級数モデル、 $f_n(i_1, \dots, i_n)$  を  $x(t)$ ,  $\Phi_n$  に関するシステムの Fourier 核、 $F_n[f_n; x(t)]$  を  $n$  次確率 Fourier 汎関数という [125]。



## 2.6.2 Fourier 核の表現

Fourier 核は,  $x(t)$  が白色ならば, 三角関数を直交基底関数とした展開係数である Fourier 係数と同様に表現できる.  $y(t)$  と基底関数  $\Phi_n(x(t-i_1), \dots, x(t-i_n))$  の積の期待値は, 式 (2.37),  $\Phi_n$ ;  $n = 0, 1, \dots$  の直交性,  $f_m(j_1, \dots, j_m)$ ;  $m = 0, 1, \dots$  の変数に対する対称性から,

$$\begin{aligned}
 & E[y(t)\Phi_n(x(t-i_1), \dots, x(t-i_n))] \\
 &= E\left[\sum_{m=0}^L \sum_{j_1=0}^R \cdots \sum_{j_m=0}^R f_m(j_1, \dots, j_m) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \Phi_m(x(t-j_1), \dots, x(t-j_m)) \Phi_n(x(t-i_1), \dots, x(t-i_n))\right] \\
 &= \sum_{m=0}^L \sum_{j_1=0}^R \cdots \sum_{j_m=0}^R f_m(j_1, \dots, j_m) \\
 &\quad E[\Phi_m(x(t-j_1), \dots, x(t-j_m)) \Phi_n(x(t-i_1), \dots, x(t-i_n))] \\
 &= n! E[\Phi_n^2] f_n(i_1, \dots, i_n)
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

となる. したがって, Fourier 核  $f_n(i_1, \dots, i_n)$  は, 次式により表される.

$$f_n(i_1, \dots, i_n) = \frac{1}{n! E[\Phi_n^2]} E[y(t)\Phi_n(x(t-i_1), \dots, x(t-i_n))] \tag{2.39}$$

また,  $\Phi_n$  の代わりに,  $\Psi_{n_1}, \dots, \Psi_{n_p}$  を用いた以下の表現も可能である.

$$\begin{aligned}
 f_n(\overbrace{i_1, \dots, i_1}^{n_1}, \dots, \overbrace{i_p, \dots, i_p}^{n_p}) &= \frac{n_1! \cdots n_p!}{n! E[\Psi_{n_1}^2] \cdots E[\Psi_{n_p}^2]} \\
 &\quad E[y(t)\Psi_{n_1}(x(t-i_1)) \cdots \Psi_{n_p}(x(t-i_p))]
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

また, 式 (2.39) を低次核から高次核へ順に表現するようにすれば次式となる.

$$f_n(i_1, \dots, i_n) = \frac{1}{n! E[\Phi_n^2]} E\left[\left\{y(t) - \sum_{\nu=1}^{[n/2]} F_{n-2\nu}[f_{n-2\nu}; x]\right\} \prod_{\mu=1}^n x(t-i_\mu)\right] \tag{2.41}$$

一方, Fourier 核を直交展開し, その係数で確率 Fourier 汎関数級数モデルを表現する手法が提案されている [125]. Fourier 核を直交展開するため, 次式を満たす正規直交関数  $\alpha_n(i)$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$  を導入する.

$$\sum_{i=0}^R \alpha_n(i) \alpha_m(i) = \delta_{nm} \tag{2.42}$$

Fourier 核  $f_n(i_1, \dots, i_n)$  を, 直交関数  $\alpha_n(i)$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$  を用いて

$$f_n(i_1, \dots, i_n) = \sum_{\nu_1=0}^R \cdots \sum_{\nu_n=0}^R c_n(\nu_1, \dots, \nu_n) \alpha_{\nu_1}(i_1) \cdots \alpha_{\nu_n}(i_n) \tag{2.43}$$



と展開する. 展開を  $N_n$  項まで打ち切り, Fourier 核  $f_n(i_1, \dots, i_n)$  を

$$f_n(i_1, \dots, i_n) = \sum_{\nu_1=0}^{N_n} \cdots \sum_{\nu_n=0}^{N_n} c_n(\nu_1, \dots, \nu_n) \alpha_{\nu_1}(i_1) \cdots \alpha_{\nu_n}(i_n) \quad (2.44)$$

と近似すれば, 出力  $y(t)$  は, 式 (2.44) を式 (2.37) に代入し,

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_n=0}^{\infty} c_n(\nu_1, \dots, \nu_n) \tilde{\Phi}_n(\nu_1, \dots, \nu_n) + e(t) \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし, } \tilde{\Phi}_n(\nu_1, \dots, \nu_n) &\equiv \sum_{i_1=0}^{N_n} \cdots \sum_{i_n=0}^{N_n} \alpha_{\nu_1}(i_1) \cdots \alpha_{\nu_n}(i_n) \\ &\quad \cdot \Phi_n(x(t-i_1), \dots, x(t-i_n)) \end{aligned} \quad (2.46)$$

と表現できる.  $\Phi_n$ ;  $n = 0, 1, \dots$ ,  $\alpha_n(i)$ ;  $n = 0, 1, \dots$  は, 互いに直交性を持つから,

$$E[\tilde{\Phi}_n(\nu_1, \dots, \nu_n) \tilde{\Phi}_m(\mu_1, \dots, \mu_m)] = \delta_{n,m} n! E[\Phi_n^2] \quad (2.47)$$

となり,  $\tilde{\Phi}_n(\nu_1, \dots, \nu_n)$ ;  $n = 0, 1, \dots$  もまた直交性を持つ. したがって, 係数  $c_n(\nu_1, \dots, \nu_n)$  は, Fourier 核と同様に

$$c_n(\nu_1, \dots, \nu_n) = \frac{1}{n! E[\Phi_n^2]} E[y(t) \tilde{\Phi}_n(\nu_1, \dots, \nu_n)] \quad (2.48)$$

として表される. また, 式 (2.44) の両辺に  $\alpha_{\mu_1}(i_1) \cdots \alpha_{\mu_n}(i_n)$  をかけ,  $i_1, \dots, i_n$  について  $0, 1, \dots, R$  までの和をとることにより, Fourier 核から係数  $c_n$  への変換公式を導くことができる.

$$c_n(\nu_1, \dots, \nu_n) = \frac{1}{n!} \sum_{i_1=0}^R \cdots \sum_{i_n=0}^R f_n(i_1, \dots, i_n) \alpha_{\nu_1}(i_1) \cdots \alpha_{\nu_n}(i_n) \quad (2.49)$$

直交関数を遅延インパルス関数, すなわち  $\alpha_n(i) = \delta(n)$  とした場合, 係数  $c_n$  は Fourier 核に等しくなる.

### 2.6.3 Wiener 汎関数級数モデル

$x(t)$  を平均 0, 分散 (パワーレベル)  $P$  の正規白色確率系列とした場合の直交多項式  $\Psi_n(x)$  は, Hermite 多項式  $H_n(x)$  と呼ばれる. 正規確率変数のモーメント  $m_1, m_2, \dots$  (付録 C) を式 (2.33) に代入することにより, Hermite 多項式は,

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = x$$

$$H_2(x) = x^2 - P$$



$$H_3(x) = x^3 - 3Px$$

$$H_4(x) = x^4 - 6Px^2 + 3P^2$$

$$H_5(x) = x^5 - 10Px^3 + 15P^2x$$

$$H_6(x) = x^6 - 15Px^4 + 45P^2x^2 - 15P^3$$

$$H_7(x) = x^7 - 21Px^5 + 105P^2x^3 - 105P^3x$$

$$\vdots$$

$$H_n(x) = \sum_{\nu=0}^{[n/2]} b_n(\nu) P^\nu x^{n-2\nu} \quad (2.50)$$

$$\text{where, } b_n(\nu) = \frac{(-1)^\nu n!}{\nu! 2^\nu (n-2\nu)!} \quad (2.51)$$

となる。また、漸化式で表現すれば、

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - P \frac{dH_n(x)}{dx} \quad (2.52)$$

となる。

更に、1変数 Hermite 多項式  $H_n(x)$  を式 (2.36) の  $\Psi_n(x)$  に代入することにより、多変数 Hermite 多項式  $\mathcal{H}_n(x(t_1), \dots, x(t_n))$  が得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= 1 \\ \mathcal{H}_1(x(t_1)) &= x(t_1) \\ \mathcal{H}_2(x(t_1), x(t_2)) &= x(t_1)x(t_2) - \delta_{t_1, t_2} P \\ \mathcal{H}_3(x(t_1), x(t_2), x(t_3)) &= x(t_1)x(t_2)x(t_3) - \delta_{t_1, t_2} Px(t_3) - \delta_{t_2, t_3} Px(t_1) - \delta_{t_3, t_1} Px(t_2) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.53)$$

式 (2.37) で示される確率 Fourier 汎関数級数モデルにおいて、 $\Phi_n$  に多変数 Hermite 多項式  $\mathcal{H}_n$  を代入したものは、Wiener 汎関数級数モデルと呼ばれている [56, 90, 125]。また、Fourier 核  $f_n(i_1, \dots, i_n)$  は Wiener 核  $k_n(i_1, \dots, i_n)$ 、確率 Fourier 汎関数  $F_n[f_n; x]$  は Wiener 汎関数  $G_n[k_n; x]$ 、または G 汎関数と呼ばれる。入力  $x(t)$  を平均 0、分散 (パワーレベル)  $P$  の正規白色系列とした際の Wiener 汎関数級数モデルは次式となる。

$$y(t) = \sum_{n=0}^L G_n[k_n; x] + e(t) \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} G_n[k_n; x] &= \sum_{i_1=0}^R \cdots \sum_{i_n=0}^R k_n(i_1, \dots, i_n) \mathcal{H}_n(x(t-i_1), \dots, x(t-i_n)) \\ &= \sum_{\nu=0}^{[n/2]} b_n(\nu) P^\nu \sum_{i_1, \dots, i_{n-2\nu}=0}^R \sum_{j_1, \dots, j_\nu=0}^R k_n(i_1, \dots, i_{n-2\nu}, j_1, j_1, \dots, j_\nu, j_\nu) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& x(t - i_1) \cdots x(t - i_{n-2\nu}) \\
& = \sum_{\nu=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^\nu n!}{\nu! 2^\nu (n - 2\nu)!} P^\nu \sum_{i_1, \dots, i_{n-2\nu}=0}^R \sum_{j_1, \dots, j_\nu=0}^R k_n(i_1, \dots, i_{n-2\nu}, j_1, j_1, \dots, j_\nu, j_\nu) \\
& \quad x(t - i_1) \cdots x(t - i_{n-2\nu}) \quad (2.55)
\end{aligned}$$

Wiener 汎関数の最初の数項を書き下すと次のようになる.

$$G_0[k_0; x] = k_0 \quad (2.56)$$

$$G_1[k_1; x] = \sum_{i_1=0}^R k_1(i_1) x(i - i_1) \quad (2.57)$$

$$G_2[k_2; x] = \sum_{i_1, i_2=0}^R k_2(i_1, i_2) x(i - i_1) x(i - i_2) + k_{0(2)} \quad (2.58)$$

$$\text{where, } k_{0(2)} = -P \sum_{j_1=0}^R k_2(j_1, j_1)$$

$$\begin{aligned}
G_3[k_3; x] &= \sum_{i_1, \dots, i_3=0}^R k_3(i_1, i_2, i_3) x(i - i_1) x(i - i_2) x(i - i_3) \\
&\quad + \sum_{i_1=0}^R k_{1(3)}(i_1) x(i - i_1) \quad (2.59)
\end{aligned}$$

$$\text{where, } k_{1(3)}(i_1) = -3P \sum_{j_1=0}^R k_3(i_1, j_1, j_1)$$

$$\begin{aligned}
G_4[k_4; x] &= \sum_{i_1, \dots, i_4=0}^R k_4(i_1, \dots, i_4) x(i - i_1) \cdots x(i - i_4) \\
&\quad + \sum_{i_1, i_2=0}^R k_{2(4)}(i_1, i_2) x(i - i_1) x(i - i_2) + k_{0(4)} \quad (2.60)
\end{aligned}$$

$$\text{where, } k_{2(4)}(i_1, i_2) = -6P \sum_{j_1=0}^R k_4(i_1, i_2, j_1, j_1)$$

$$k_{0(4)} = 3P^2 \sum_{j_1, j_2=0}^R k_4(j_1, j_1, j_2, j_2)$$

$$\begin{aligned}
G_5[k_5; x] &= \sum_{i_1, \dots, i_5=0}^R k_5(i_1, \dots, i_5) x(i - i_1) \cdots x(i - i_5) \\
&\quad + \sum_{i_1, \dots, i_3=0}^R k_{3(5)}(i_1, \dots, i_3) x(i - i_1) x(i - i_2) x(i - i_3) \\
&\quad + \sum_{i_1=0}^R k_{1(5)}(i_1) x(i - i_1) \quad (2.61)
\end{aligned}$$

$$\text{where, } k_{3(5)}(i_1, i_2, i_3) = -10P \sum_{j_1=0}^R k_5(i_1, i_2, i_3, j_1, j_1)$$



$$k_{1(5)}(i_1) = 15P^2 \sum_{j_1, j_2=0}^R k_5(i_1, j_1, j_1, j_2, j_2)$$

これらの式において,  $k_{0(2)}, k_{1(3)}, k_{2(4)}, \dots$  は, 誘導 Wiener 核と呼ばれ, Volterra 汎関数を直交化して Wiener 汎関数を得る際の補正項となっている.

確率 Fourier 汎関数級数モデルのなかでは, Wiener 汎関数級数モデルが, 最も始めに提案されたことや入力である正規白色雑音の生成が容易であることにより, 理論的研究, 生体システムなどの同定への適用例が圧倒的に多い. 例えば, 理論的な研究としては, Lee と Schetzen による時間域における Wiener 核推定法 [49, 87, 88], 周波数域における推定法 [22], 確率的近似に基づく準最小 2 乗推定法 [24], sparse-stimulation 時の Wiener 核推定法 [33, 34], 入力の擬似白色性に関する問題 [54, 55], 入力信号のフラクタル次元に関する研究 [108] などがある. 一方, 応用研究としては, ザリガニの筋伸展受容器の解析 [7], ネコ的大脑視覚野の時空間解析 [52, 65, 66, 104, 105], 藻菌類の光一生育応答解析 [76, 77, 78], ナマズの視覚系解析 [23, 81, 82], 視覚系の解析 [17, 41], 神経回路網の解析 [83, 84], 昆虫の感覚器の非線形解析 [23], 脊椎動物の網膜神経細胞の解析 [121], 網膜神経節細胞の時空間解析 [58] などがある.

## 2.6.4 Wiener 核の推定

### 直接推定法

Fourier 核の表現式 (2.39) において,  $\Phi_n$  を式 (2.53) で示される多変数 Hermite 多項式  $\mathcal{H}_n$  に置き換えれば, Wiener 核  $k_n(i_1, \dots, i_n)$  は,

$$k_n(i_1, \dots, i_n) = \frac{1}{n!P^n} E[y(t)\mathcal{H}_n(x(t-i_1), \dots, x(t-i_n))] \quad (2.62)$$

として表される. 上式において, 実際には, 期待値をとることは不可能である. そこで, 期待値は, 入力系列のエルゴード性を仮定して, 有限長 ( $T$ ) の観測データに対する時間平均に置き換えられる. 有限の観測データから推定された  $n$  次 Wiener 核を  $\hat{k}_n(i_1, \dots, i_n)$  と表記するものとすれば,

$$\hat{k}_n(i_1, \dots, i_n) = \frac{1}{n!P^nT} \sum_{t=1}^T y(t)\mathcal{H}_n(x(t-i_1), \dots, x(t-i_n)) \quad (2.63)$$

となる. Wiener 核の推定の模様を図 2.4 に示す.



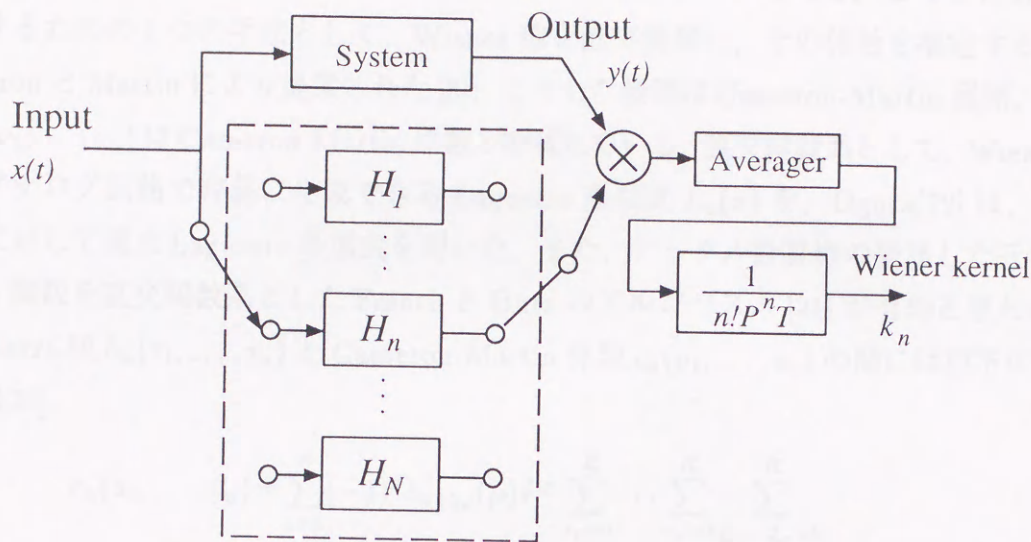


図 2.4 Wiener 核の直接推定法

## 逐次推定法

式 (2.41) で示した Fourier 核の逐次表現において、 $\Phi_n$  を式 (2.53) で示される多変数 Hermite 多項式  $\mathcal{H}_n$  に置き換えれば、Wiener 核の逐次推定法が得られる。

$$\hat{k}_n(i_1, \dots, i_n) = \frac{1}{n!P^nT} \sum_{t=1}^T \left[ \left\{ y(t) - \sum_{\nu=1}^{[n/2]} G_{n-2\nu}[f_{n-2\nu}; x] \right\} \prod_{\mu=1}^n x(t - i_\mu) \right] \quad (2.64)$$

こうした手法は、Lee と Schetzen により提案されたことから、Lee-Schetzen 法と呼ばれている [49]。こうした逐次法では核の対角部分は、低次核から高次核へと順に再帰的に推定を進めるため、核推定誤差が伝搬するなどの問題がある [125]。

また、Wiener 核の非対角要素、すなわち、Wiener 核  $k_n(i_1, \dots, i_n)$  の変数  $i_1, \dots, i_n$  がいずれも互いに等しくならない変数値に対する Wiener 核のみを推定する場合には、単純に、

$$\hat{k}_n(i_1, \dots, i_n) = \frac{1}{n!P^nT} \sum_{t=1}^T y(t) x(t - i_1) \cdots x(t - i_n), \quad i_k \neq i_l, \quad \forall k, l, \quad k \neq l \quad (2.65)$$

として推定することができる。

## Cameron-Martin 展開法

以上の Wiener 核推定法は、すべての変数について Wiener 核を推定する手法である。したがって、システムの記憶長  $R$ 、非線形次数の増加に伴い、推定するパラメータが非



常に多くなり、核推定に要する計算量が飛躍的に増加する、そこで、こうした計算量を削減するための1つの手法として、Wiener核を直交展開し、その係数を推定する手法がCameronとMartinにより提案された[8]。こうした展開はCameron-Martin展開、展開係数 $c_n(\nu_1, \dots, \nu_n)$ はCameron-Martin係数と呼ばれている。直交関数系として、Wiener[119]は、アナログ回路で容易に生成できるLaguerre多項式 $L_n(x)$ を、Ogura[72]は、離散時間系に対して選点Laguerre多項式を用いた。また、デジタル計算機の発展した近年では、Walsh関数を直交関数系としたFrenchとButzのアルゴリズム[21]が有効と思われる。

Volterra核 $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ とCameron-Martin係数 $c_n(\nu_1, \dots, \nu_n)$ の間には以下の関係がある[125]。

$$c_n(\nu_1, \dots, \nu_n) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu b_{n+2\mu}(\mu) P^\mu \sum_{\tau_1=0}^R \dots \sum_{\tau_n=0}^R \sum_{\xi_1, \dots, \xi_\mu=0}^R h_{n+2\mu}(\tau_1, \dots, \tau_n, \xi_1, \xi_1, \dots, \xi_\mu, \xi_\mu) \alpha_{\nu_1}(\tau_1) \dots \alpha_{\nu_n}(\tau_n) \quad (2.66)$$

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{n+2\mu}(\mu) P^\mu \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_n=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_\mu=0}^{\infty} c_{n+2\mu}(\nu_1, \dots, \nu_n, j_1, j_1, \dots, j_\mu, j_\mu) \alpha_{\nu_1}(\tau_1) \dots \alpha_{\nu_n}(\tau_n) \quad (2.67)$$

Wiener核は、本来、式(2.62)で示すように、期待値をとることにより与えられるが、実際には、式(2.63)のように、入力系列のエルゴード性を仮定し、時間平均に置き換えられる。しかしながら、平均時間 $T$ は、実際には有限であるから、Wiener核推定には推定誤差を生ずることになる。こうしたWiener核の推定誤差に関しては、第3章で定式化し、第4章において、Volterra、バイナリ核の推定精度と比較する。

### 2.6.5 Volterra 汎関数級数と Wiener 汎関数級数の関係

Volterra 汎関数級数から Wiener 汎関数級数への変換

まず、 $p$ 次Volterra汎関数をWiener汎関数級数モデルで表現する。システムが $p$ 次成分のみを持つ、すなわち、システム出力 $y(t)$ が $p$ 次Volterra汎関数で表現できるものとする。

$$y(t) = H_p[h_p; x] = \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^R h_p(i_1, \dots, i_p) x(i-i_1) \dots x(i-i_p) \quad (2.68)$$

上式を式(2.62)に代入することにより、 $p$ 次Volterra汎関数をWiener汎関数級数で表現したときのWiener核 $k_p, k_{p-2}, \dots$ が得られる。

$$k_{p-2m}(\sigma_1, \dots, \sigma_{p-2m}) = \frac{p! P^m}{(p-2m)! m! 2^m} \sum_{\tau_1, \dots, \tau_m=0}^R h_p(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_m, \tau_m, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-2m})$$

for  $m = 0, 1, 2, \dots, [p/2]$

(2.69)



次に、上式に対し、変数変換  $p = n + 2m$  を行うことにより

$$k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \frac{(n+2m)!P^m}{n!m!2^m} \sum_{\tau_1, \dots, \tau_m=0}^R h_{n+2m}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_m, \tau_m, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \\ \text{for } m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.70)$$

となる。この式から、 $n$  次 Wiener 核は、システムの  $n, n+2, \dots$  次成分、すなわち  $n, n+2, \dots$  次 Volterra 核に依存することが分かる。したがって、システムが無限次の Volterra 汎関数級数で表現されている場合には、式 (2.70) の右辺の  $m = 0, 1, \dots$  についての総和をとることにより

$$k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+2m)!P^m}{n!m!2^m} \sum_{\tau_1, \dots, \tau_m=0}^R h_{n+2m}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_m, \tau_m, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (2.71)$$

となる。上式が Volterra 汎関数級数から Wiener 汎関数級数への変換公式となる。また、式 (2.71) の最初の数項を示せば、以下のようになる。

$$k_0 = h_0 + P \sum_{\tau_1=0}^R h_2(\tau_1, \tau_1) + 3P^2 \sum_{\tau_1, \tau_2=0}^R h_4(\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2) \\ + 15P^3 \sum_{\tau_1, \dots, \tau_3=0}^R h_6(\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2, \tau_3, \tau_3) + \dots \quad (2.72)$$

$$k_1(\sigma_1) = h_1(\sigma_1) + 3P \sum_{\tau_1=0}^R h_3(\tau_1, \tau_1, \sigma_1) + 15P^2 \sum_{\tau_1, \tau_2=0}^R h_5(\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2, \sigma_1) \\ + 105P^3 \sum_{\tau_1, \dots, \tau_3=0}^R h_7(\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2, \tau_3, \tau_3, \sigma_1) + \dots \quad (2.73)$$

$$k_2(\sigma_1, \sigma_2) = h_2(\sigma_1, \sigma_2) + 6P \sum_{\tau_1, \dots, \tau_4=0}^R h_4(\tau_1, \tau_1, \sigma_1, \sigma_2) \\ + 45P^2 \sum_{\tau_1, \tau_2=0}^R h_6(\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2) \\ + 420P^3 \sum_{\tau_1, \dots, \tau_3=0}^R h_8(\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2, \tau_3, \tau_3, \sigma_1, \sigma_2) + \dots \quad (2.74)$$

$$k_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = h_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + 10P \sum_{\tau_1=0}^R h_5(\tau_1, \tau_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\ + 105P^2 \sum_{\tau_1, \tau_2=0}^R h_7(\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \dots \quad (2.75)$$



## Wiener 汎関数級数から Volterra 汎関数級数への変換

まず,  $p$  次 Wiener 汎関数を Volterra 汎関数級数モデルで表現する. システム出力  $y(t)$  が  $p$  次 Wiener 汎関数で表現できるものとする.

$$y(t) = G_p[k_p; x] \quad (2.76)$$

上式に式 (2.55) を代入し, Volterra 汎関数級数モデル (式 (2.11), (2.12)) と比較することにより,  $p$  次 Wiener 汎関数を Volterra 汎関数級数で表現したときの Volterra 核  $h_p, h_{p-2}, \dots$  が得られる.

$$\begin{aligned} h_{p-2m}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-2m}) \\ = \frac{(-1)^m p! P^m}{(p-2m)! m! 2^m} \sum_{\tau_1, \dots, \tau_m=0}^R k_p(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_m, \tau_m, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-2m}) \\ \text{for } m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.77)$$

これは, 任意の  $p$  次 Wiener 核  $k_p(\tau_1, \dots, \tau_p)$  の誘導 Wiener 核  $k_{p-2(p)}, k_{p-4(p)}, \dots$  を求めることと等価であるから, 誘導 Wiener 核  $k_{p-2m(p)}$  の一般式は,

$$\begin{aligned} k_{p-2m(p)}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-2m}) \\ = \frac{(-1)^m p! P^m}{(p-2m)! m! 2^m} \sum_{\tau_1, \dots, \tau_m=0}^R k_p(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_m, \tau_m, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-2m}) \\ \text{for } m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.78)$$

となる. 次に, 式 (2.77) に対し, 変数変換  $p = n + 2m$  を行うことにより

$$\begin{aligned} h_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \frac{(-1)^m (n+2m)! P^m}{n! m! 2^m} \sum_{\tau_1, \dots, \tau_m=0}^R k_{n+2m}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_m, \tau_m, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \\ \text{for } m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.79)$$

となる. この式から,  $n$  次 Volterra 核は,  $n$  次 Wiener 核と  $n+2, n+4, \dots$  次 Wiener 核のそれぞれの  $n$  次誘導 Wiener 核  $k_{n(n+2)}, k_{n(n+4)}, \dots$  の和で表されることが分かる. したがって, 式 (2.79) の右辺を  $m$  について総和をとると

$$\begin{aligned} h_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) &= \sum_{m=0}^{\infty} k_{n(n+2m)}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n+2m)! P^m}{n! m! 2^m} \\ &\quad \sum_{\tau_1, \dots, \tau_m=0}^R k_{n+2m}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_m, \tau_m, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \end{aligned} \quad (2.80)$$

となる. 上式が Wiener 汎関数級数から Volterra 汎関数級数への変換公式となる.



## 2.7 伝達関数カスケードモデル

汎関数級数モデルは、非線形ダイナミカルシステムを定量的に表現するための有力なモデルである。しかし、汎関数級数モデルの特徴量である Volterra, バイナリ, Wiener 核から、システムの定性的な性質を把握することが困難な場合も多い。その理由の一つは、汎関数の核がシステムの2, 3, ... 乗特性などの非線形性と時間ダイナミクスを同時に表現しているため、モデルパラメータ数が膨大になるからである。

そこで、非線形ダイナミカルシステムを、記憶を持たない非線形要素 (N) と記憶を持つ線形要素 (L) の組み合わせで表現することが有効であると考えられる。本論文では、こうした表現を持つモデルを、伝達関数カスケードモデルと呼ぶことにする。

### 2.7.1 カスケードモデル

記憶を持つ線形要素 (L)、記憶を持たない非線形要素 (N) をいくつか直列に接続した伝達関数カスケードモデルは、ブロック構造モデル、またはカスケードモデルと呼ばれている [25, 26, 36, 37, 86]。さらに、記憶を持つ線形要素 ( $L_1$ )、記憶を持たない非線形要素 (N)、記憶を持つ線形要素 ( $L_2$ ) を直列に接続した、図 2.5(a) に示す構造を持つカスケードモデルは、LNL カスケードモデル、またはサンドイッチモデルなどと呼ばれている [36, 86]。線形要素  $L_1$ ,  $L_2$  の線形インパルス応答関数を、それぞれ  $g(\tau)$ ,  $f(\tau)$ 、非線形要素 (N) を多項式  $\sum_{i=0}^I a_i x^i$  で表すものとすれば、LNL カスケードモデルの出力は、

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^I a_i \sum_{\tau_1=0}^R \cdots \sum_{\tau_i=0}^R \sum_{\sigma=0}^R f(\sigma) g(\tau_1 - \sigma) \cdots g(\tau_i - \sigma) x(t - \tau_1) \cdots x(t - \tau_i) \quad (2.81)$$

と表される。したがって、LNL カスケードモデルを Volterra 汎関数級数モデルに変換した場合、Volterra 核は、

$$h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) \equiv a_i \sum_{\sigma=0}^R f(\sigma) g(\tau_1 - \sigma) \cdots g(\tau_i - \sigma), \quad i = 0, 1, \dots, I \quad (2.82)$$

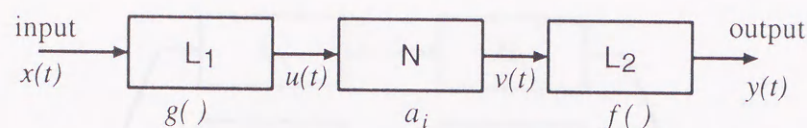
と表される。Volterra 核を変換公式 (2.71) により、Wiener 核へ変換すると

$$k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{A_n}{n! P^n a_n} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \quad (2.83)$$

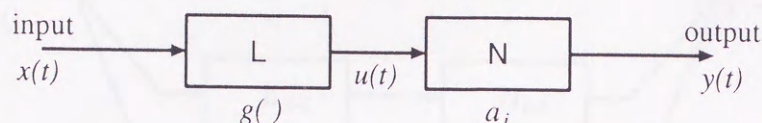
$$\text{where, } A_n \equiv \sum_{m=0}^{[(I-n)/2]} \frac{(n+2m)! P^{m+n} a_{n+2m}}{m! 2^m} \left\{ \sum_{\tau=0}^R g^2(\tau) \right\}^m$$

となり、LNL カスケードモデルの Wiener 核は、同じ次数の Volterra 核の定数倍で表されることが分かる。

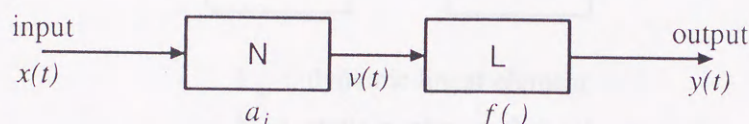




(a) LNL cascade model



(b) Wiener (LN cascade) model



(c) Hammerstein (NL cascade) model

$L, L_1, L_2$  : dynamic linear element

$N$  : static nonlinear element

図 2.5 カスケードモデル

LNL カスケードモデルにおいて、線形要素  $L_2$  が欠落した、図 2.5(b) に示す構造を持つカスケードモデルは、Wiener モデル、または LN カスケードモデルと呼ばれている [37, 119]. Wiener モデルにおいては、 $f(\tau) = \delta(\tau)$  であるから、それを式 (2.82) に代入することにより、Volterra 汎関数級数モデルに変換した際の Volterra 核が得られる.

$$h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) = a_i g(\tau_1) \cdots g(\tau_i), \quad i = 0, 1, \dots, I \quad (2.84)$$

また、LNL カスケードモデルにおいて、線形要素  $L_1$  が無い、図 2.5(c) に示す構造を持つカスケードモデルは、Hammerstein モデル、または NL カスケードモデルと呼ばれている [25, 26, 37]. Hammerstein モデルにおいては、 $g(\tau) = \delta(\tau)$  であるから、それを式 (2.82) に代入することにより、Volterra 汎関数級数モデルに変換した際の Volterra 核が得られる.

$$h_i(\sigma, \dots, \sigma) = a_i f(\sigma), \quad i = 0, 1, \dots, I \quad (2.85)$$

LNL カスケードモデルにおける Wiener 核が同じ次数の Volterra 核の定数倍であるという性質を利用し、正規白色雑音を入力とする相互相関法により、LNL カスケードモデル (Wie-



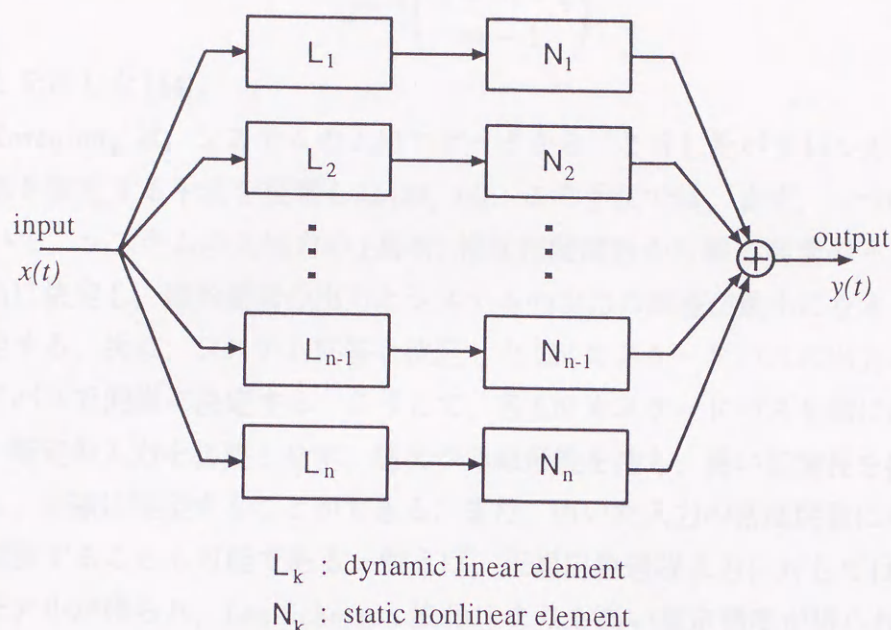


図 2.6 パラレル LN カスケードモデル

ner, Hammerstein モデルを含む) を同定する手法が, Korenberg[36, 37], Fakhouri[18], Brillinger[6], Douce[15], de Boer[2] らにより提案されている。

### 2.7.2 パラレルカスケードモデル

式(2.82),(2.84),(2.85) から分かるように, カスケードモデルで表現可能なシステムのクラスは, 汎関数級数モデルで表現し得るシステムのクラスに対して狭い。そこで, 複数のカスケードパスを並列に接続したパラレルカスケードモデルが考えられた。

Kolmogoroff は, NLNL カスケードの有限個の和により, 相当広いクラスの連続な<sup>1</sup>非線形システムを表現できることを示した [35]。その後, Palm は, 定常・有限記憶長・因果性・離散時間で定義された連続な非線形システムが, 十分な数の LNL カスケードの和により, 任意の精度で一様に近似できることを示した [74]。また, Korenberg は, 任意の離散時間・有限記憶長・有限次数の Volterra 汎関数級数モデルは, 図 2.6 に示すような有限の LN カスケードパスを持つパラレル LN カスケードモデルで表現できることを示した [44]。また, その際に必要な LN カスケードパスの数の上限が,  $m$  次 Volterra 汎関数では,

<sup>1</sup>ここで, 連続なシステムとは, すべての入力の変動は, 対応する出力の変動に変換されることを意味するものとする。



$$2^{m-1} \binom{R+m-1}{m-1} \quad (2.86)$$

となることを示した [44].

また, Korenberg は, システムの入出力データから, こうしたパラレルカスケードモデルの各要素を推定する手法を提案した [38, 44]. この手法では, まず, 一つのカスケードパスについて, システムの入出力の (高次) 相互相関関数から線形要素のインパルス応答関数を適当に決定し, 線形要素の出力とシステムの入出力の誤差が最小になるように非線形要素を決定する. 次に, システム応答と決定した LN カスケードパスの出力の残差を次のカスケードパスで同様に決定する. こうして, 各 LN カスケードパスを順に決定する. 本手法では, 特定の入力が必要とせず, 高次の非線形性を持ち, 長い記憶長を持つ非線形システムでも, 正確に推定することができる. また, 用いた入力の密度関数に対応した汎関数表現へ変換することも可能である. 例えば, 正規白色過程入力に対しては, Wiener 汎関数級数モデルが得られ, Lee-Schetzen 法 [91] よりも高い推定精度が得られる [44].

### 2.7.3 並列乗算和モデル

Korenberg が提案するパラレル LN カスケードモデルによるシステム同定では, LN カスケードパスの線形要素は, 入出力の (高次) 相互相関関数からランダムに決定される. したがって, 得られるモデルには一意性がなく, パラメータ数が最小となるモデルが得られる保証はない. 一方, システムの Volterra 核の形状に応じて最適な線形要素を決定し, システムを表現するための並列乗算和モデルが提案されている.

直交基底  $\{d_m(i), m = 1, \dots, N\}$  を用いて, Volterra 核  $h_n$  を

$$h_n(i_1, \dots, i_n) = \sum_{m_1=1}^N \cdots \sum_{m_n=1}^N c_n(m_1, \dots, m_n) d_{m_1}(i_1) \cdots d_{m_n}(i_n) \quad (2.87)$$

$n = 1, 2, \dots$

と直交展開すると, システム応答  $y(i)$  は,

$$y(i) = h_0 + \sum_{n=1}^L \sum_{m_1=1}^N \cdots \sum_{m_n=1}^N c_n(m_1, \dots, m_n) \left\{ \sum_{i_1=0}^R d_{m_1}(i_1) x(i-i_1) \right\} \cdots \left\{ \sum_{i_n=0}^R d_{m_n}(i_n) x(i-i_n) \right\} + e(i) \quad (2.88)$$

と表される. 上式において, 括弧内は, 直交基底  $\{d_{m_j}\}$  の各要素をインパルス応答の値とする線形フィルタの入力  $x(i)$  に対する出力を表しており, これを

$$\Phi_{m_j}(i) = \sum_{i_j=0}^R d_{m_j}(i_j) x(i-i_j), \quad \text{for } j = 1, \dots, n \quad (2.89)$$



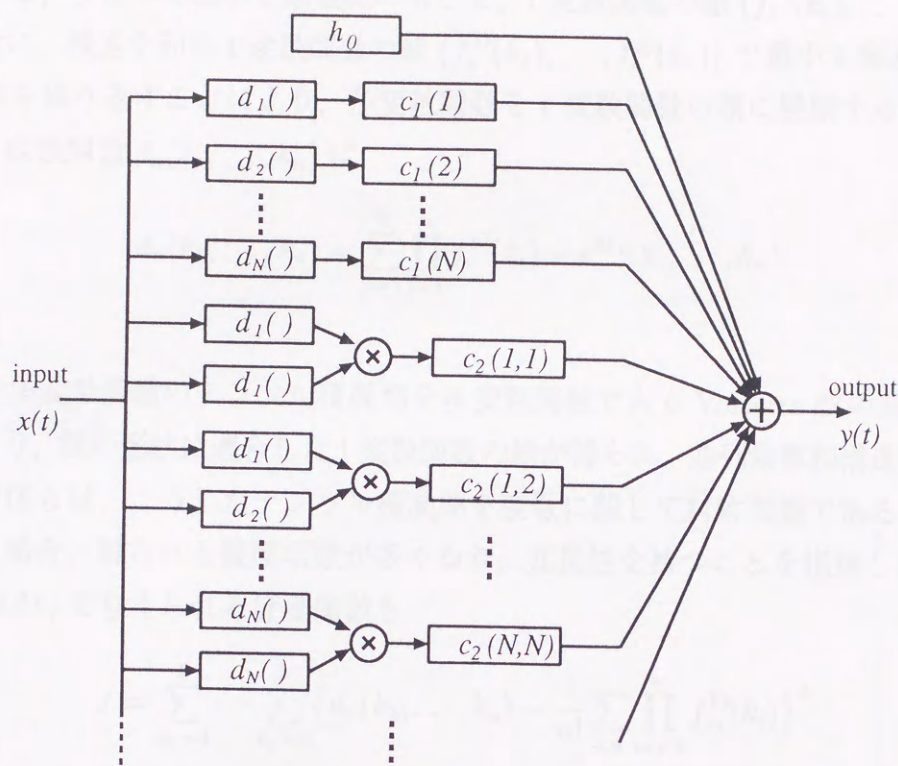


図 2.7 核の直交展開から得られる並列乗算和構造

とおけば、式(2.88)は、

$$y(i) = h_0 + \sum_{n=1}^L \sum_{m_1=1}^N \cdots \sum_{m_n=1}^N c_n(m_1, \dots, m_n) \Phi_{m_1}(i) \cdots \Phi_{m_n}(i) + e(i) \quad (2.90)$$

と表される。これは、図2.7のような並列乗算和構造を持つ。

式(2.87)中に示した直交基底としては、Laguerre多項式など、一般に、任意の直交関数を選択することが可能である。しかしながら、核の形状に合致しない直交関数を設定した場合には、展開項数が多くなり、同定精度が同じならば、モデルパラメータが少ない方を良いとする「けちの原理」からは、効率的とは言えない。そこで、Volterra核の形状を考慮し、最適な基底関数を用いることが有効であると考えられる。

ところで、多変数関数を1変数関数の積に展開する手法として、テンソル積(外積)展開が知られている[73, 80]。テンソル積展開は、与えられた多変数関数  $d_n(k_1, \dots, k_n)$  に対し、まず、評価関数

$$J = \sum_{k_1=0}^L \cdots \sum_{k_n=0}^L \left\{ d_n(k_1, \dots, k_n) - \prod_{i=1}^n f_i^{(1)}(k_i) \right\}^2 \quad (2.91)$$



を最小にする, すなわち最小2乗規範のもとで, 1変数関数の組  $\{f_1^1(k_1), \dots, f_n^1(k_n)\}$  を決定し, 次に, 残差を別の1変数関数の組  $\{f_1^2(k_1), \dots, f_n^2(k_n)\}$  で最小2乗近似する. こうした処理を繰り返すことにより, 多変数関数を1変数関数の積に展開する手法である. この時,  $n$  変数関数  $d_n(k_1, \dots, k_n)$  は,

$$d_n(k_1, \dots, k_n) = \sum_{p=1}^M \prod_{i=1}^n f_i^p(k_i) + e^M(k_1, \dots, k_n) \quad (2.92)$$

と表される.

こうした多変数関数のテンソル積展開を多変数関数である Volterra 核の展開に利用することにより, 核の形状に適合した1変数関数の組が得られ, 並列乗算和構造が得られる. しかし, 戸田らは, こうしたテンソル積展開を変数に関して対称関数である Volterra 核に適用した場合, 得られる展開項数が多くなり, 冗長性を持つことを指摘した [103]. そして, 式 (2.91) で与えられる評価関数を

$$J = \sum_{k_1=0}^L \cdots \sum_{k_n=0}^L \left\{ d_n(k_1, \dots, k_n) - \frac{1}{n!} \sum_{i,n} \prod_{m=1}^n f_m^1(k_i) \right\}^2 \quad (2.93)$$

と変更することにより, この問題を解決した. ただし,  $\sum_{i,n}$  は,  $i = 1, 2, \dots, n$  のすべての順列に関する和を表す. これは,  $\prod_{i=1}^n f_i^1(k_i)$  が変数  $k_1, \dots, k_n$  に関して対称な関数とはならないが,  $\frac{1}{n!} \sum_{i,n} \prod_{m=1}^n f_m^1(k_i)$  とすることにより, 同じ入出力関係を保持しつつ, 対称関数となることに着目したものである. こうした核のテンソル積展開を利用した並列乗算和モデルでは, 核の形状に応じて最適な基底関数を推定するため, 比較的少ない展開項数のモデルが得られる反面, 核そのものが精度良く推定されている必要がある.

最後に, 第2章で述べてきた Volterra, バイナリ, Wiener 汎関数級数モデル, 伝達関数カスケードモデルのそれぞれの発展の歴史を図 2.8 にまとめて示す.



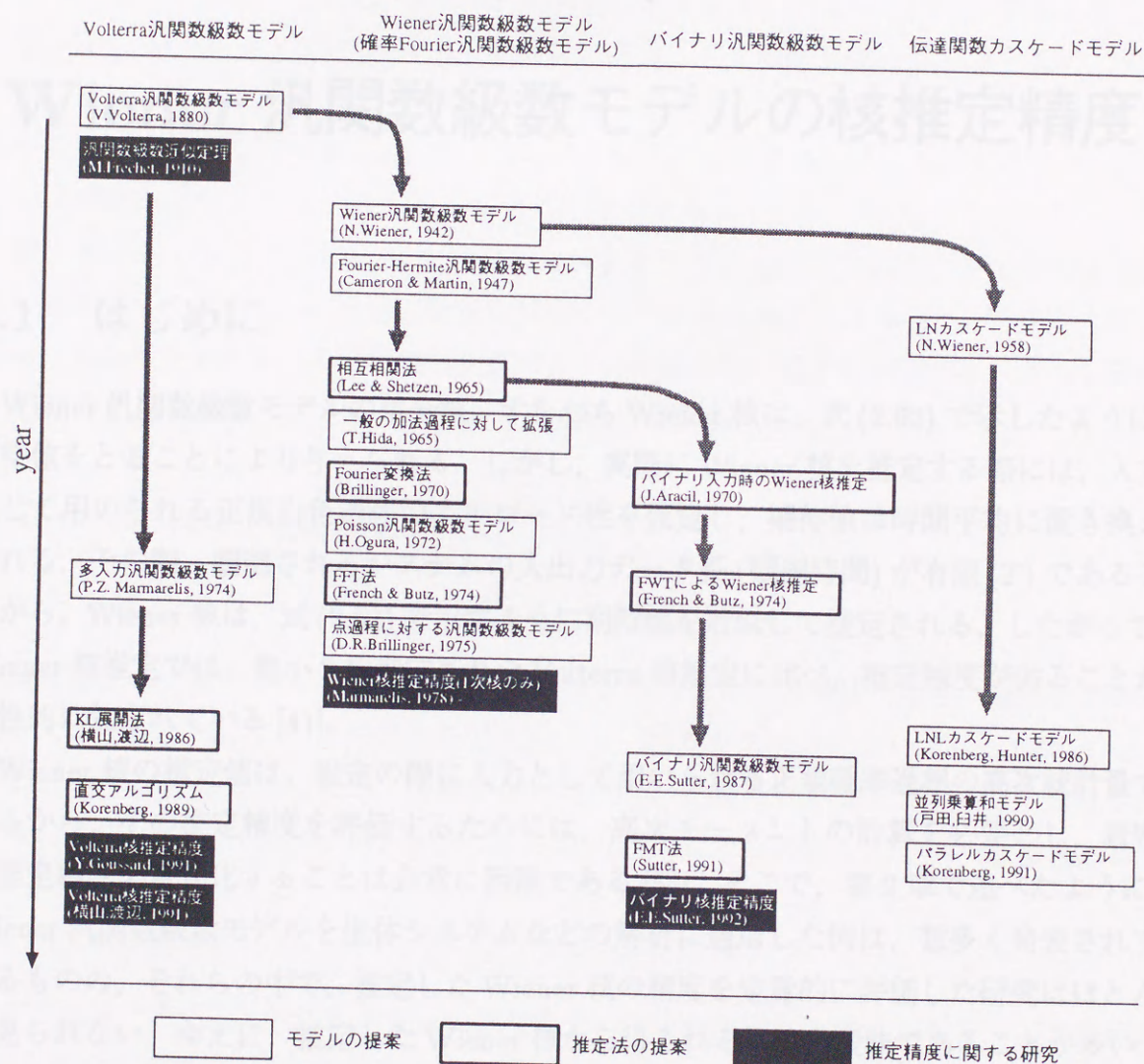


図 2.8 非線形汎関数級数モデルの発展の歴史



## 第 3 章

# Wiener 汎関数級数モデルの核推定精度

### 3.1 はじめに

Wiener 汎関数級数モデルの積分核，すなわち Wiener 核は，式 (2.62) で示したように，期待値をとることにより与えられる．しかし，実際に Wiener 核を推定する際には，入力として用いられる正規白色過程のエルゴード性を仮定し，期待値は時間平均に置き換えられる．その際，観測されるシステムの入出力データ長 (観測時間) が有限 ( $T$ ) であることから，Wiener 核は，式 (2.63) で示すように期待値を近似して推定される．したがって，Wiener 核推定では，最小 2 乗推定された Volterra 核推定に比べ，推定精度が劣ることが定性的に知られている [41]．

Wiener 核の推定値は，推定の際に入力として用いられる正規確率過程の高次統計量であるから，その推定精度を評価するためには，高次モーメントの計算を必要とし，厳密に推定精度を定式化することは非常に困難である [56]．そこで，第 2 章で述べたように，Wiener 汎関数級数モデルを生体システムなどの解析に適用した例は，数多く発表されているものの，それらの中で，推定した Wiener 核の精度を定量的に評価した研究はほとんど見られない．ゆえに，推定した Wiener 核から得られる結論も曖昧であることが多い．

第 2 節では，こうした問題の解決法として，対象とするシステムを離散時間，有限記憶長，有限次数の Volterra 汎関数級数モデルで表現できるシステムのクラスに限定して問題を単純化し，Wiener 核の推定精度を定式化する．Wiener 核の推定精度は，分散として評価され，システムの Volterra 核，入力のパワーレベル (正規白色系列の分散)，データ長，観測雑音の分散の関数として表現される．更に，システムの入力に雑音が加わる際の影響を調べた結果，出力に加わる雑音は推定分散を増加させるだけであるが，入力に混入する雑音は，バイアス誤差を生じ，Wiener 核推定に不偏性を失わせることを定量的に示す．



更に、本定式化が妥当であることを検証するため、数値実験を行う。数値実験では、入力パワーレベル、データ長をそれぞれ様々な値に設定して Wiener 核を推定し、本研究で定式化した式から得られる理論値と比較する。これより、本式が、核推定精度の評価式として実用に供することが可能であることを示す。また、非線形システムの Wiener 核を推定する際、対象とするシステム、推定する核の次数に応じて、最適な入力パワーレベルが存在することを示す。ただし、Wiener 核推定における入力パワーレベルの影響を議論する際、Wiener 核が入力パワーレベルの関数であることを考慮しなければならない。そこで、本論文では、対象とするシステムを非線形次数が高くなるにしたがい、その成分が次第に減少する、すなわち Wiener 核が Volterra 核とほとんど等しくなり、入力パワーレベルには依存しないようなシステムのクラスに限定する。

第3節では、システムに応じた最適入力パワーレベルの決定に際し、更に近似を導入して定式化した Wiener 核推定分散式を簡略化し、 $L$  次システムの Wiener 核推定に対し、高々  $L$  個のパラメータのみで任意の次数の Wiener 核の推定精度を評価できることを示す。これにより、最適な入力パワーレベルの高速決定が可能になる。

## 3.2 Wiener 核推定精度

### 3.2.1 線形システムの1次 Wiener 核推定精度

非線形システムの Wiener 核の推定精度を定式化するための準備として、線形システムの1次 Wiener 核  $k_1(i)$  の推定精度を定式化する。線形システムにおいては、1次 Wiener 核と1次 Volterra 核は等しく、線形インパルス応答関数とも呼ばれるが、ここではシステムの表現として Volterra 核を用いる。入力  $x(t)$  に対する線形システムの応答  $y(t)$  は、

$$y(t) = \sum_{i=0}^R h_1(i)x(t-i) + e(t) \quad (3.1)$$

と表される。ただし、 $R$  はシステムの記憶長、 $e(t)$  は観測雑音とする。さて、入力を平均0、分散  $P$  の定常白色系列とすると、1次 Wiener 核  $h_1(j)$  は、式(2.63)より

$$\hat{k}_1(j) = \frac{1}{PT} \sum_{t=1}^T y(t)x(t-j) \quad (3.2)$$

と推定される。

式(3.1)を式(3.2)に代入すれば、

$$\hat{k}_1(j) = \frac{1}{PT} \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=0}^R h_1(i)x(t-i) + e(t) \right\} x(t-j) \quad (3.3)$$



となり、推定された1次 Wiener 核  $\hat{k}_1(j)$  の統計的性質は、 $x(t), e(t)$  の統計的性質とシステム特性  $h_1(i)$  により定まる。まず、1次 Wiener 核推定の期待値  $E[\hat{k}_1(j)]$  は、式(3.3)の両辺の期待値をとれば

$$E[\hat{k}_1(j)] = \frac{1}{PT} \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=0}^R h_1(i) E[x(t-i)x(t-j)] + E[e(t)x(t-j)] \right\} \quad (3.4)$$

となる。 $e(t)$  を入力とは独立な平均0、分散  $P_e$  の定常白色系列とすれば、 $E[e(t)x(t-j)] = 0$  となり、一方、 $x(t)$  の性質より、 $E[x(t-i)x(t-j)] = P\delta_{i,j}$  となる。したがって、上式は、

$$E[\hat{k}_1(j)] = h_1(j) = k_1(j) \quad (3.5)$$

となり、1次 Wiener 核推定は不偏性を持つことが分かる。

1次 Wiener 核の推定分散  $\text{Var}[\hat{k}_1(j)]$  は、分散の公式から

$$\text{Var}[\hat{k}_1(j)] = E[\hat{k}_1^2(j)] - E^2[\hat{k}_1(j)] \quad (3.6)$$

であり、式(3.3),(3.5)を代入すれば、

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{k}_1(j)] = & \frac{1}{P^2 T^2} \sum_{t_1=1}^T \sum_{t_2=1}^T \left\{ \sum_{i_1=0}^R \sum_{i_2=0}^R h_1(i_1) h_1(i_2) E[x(t_1-i_1)x(t_1-j)x(t_2-i_2)x(t_2-j)] \right. \\ & + 2 \sum_{i=0}^R h_1(i) E[x(t-i)x(t-j)e(t)x(t-j)] \\ & \left. + E[e(t_1)x(t_1-j)e(t_2)x(t_2-j)] \right\} \\ & - h_1^2(j) \end{aligned} \quad (3.7)$$

と表される。さて、 $x(t)$  と  $e(t)$  の独立性から、式(3.7)の第2項は0、第3項は

$$E[e(t_1)e(t_2)]E[x(t_1-j)x(t_2-j)]$$

となるので、式(3.7)は

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{k}_1(j)] = & \frac{1}{P^2 T^2} \sum_{t_1=1}^T \sum_{t_2=1}^T \left[ \sum_{i_1=0}^R \sum_{i_2=0}^R h_1(i_1) h_1(i_2) \right. \\ & \left\{ E[x(t_1-i_1)x(t_1-j)]E[x(t_2-i_2)x(t_2-j)] \right. \\ & + E[x(t_1-i_1)x(t_2-i_2)]E[x(t_1-j)x(t_2-j)] \\ & + E[x(t_1-i_1)x(t_2-j)]E[x(t_1-j)x(t_2-i_2)] \left. \right\} \\ & \left. + E[e(t_1)e(t_2)]E[x(t_1-j)x(t_2-j)] \right] \\ & - h_1^2(j) \end{aligned} \quad (3.8)$$



と書ける. pair-wise rule[70, 90](付録 C) を適用すれば, 式 (3.8) の第 1 項は,  $j = i_1 = i_2$  の時のみ非 0 となることから,  $h_1^2(j)$  となり, 第 5 項と相殺する. 第 2 項は,  $t_1 = t_2$  かつ  $i_1 = i_2$  の時のみ非 0 となることから,  $\frac{1}{T} \sum_{i=0}^R h_1^2(i)$  となり, 第 3 項は,  $d \equiv t_1 - t_2$  とおけば,  $i_1 = j + d$  かつ  $i_2 = j - d$  の場合のみ非 0 値をとることから,  $\frac{1}{T} \sum_{d=-j}^j h_1(j+d)h_1(j-d)$  となり, 第 4 項は,  $t_1 = t_2$  の時のみ非 0 となることから,  $\frac{P_e}{PT}$  となる. したがって, 1 次 Wiener 核の推定分散は,

$$\text{Var}[\hat{k}_1(j)] = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^R h_1^2(i) + \frac{1}{T} \sum_{d=-j}^j h_1(j+d)h_1(j-d) + \frac{P_e}{PT} \quad (3.9)$$

と表され, 観測時間  $T$  に反比例して減少する. 式 (3.9) 第 1, 2 項は, システムそのものに依存する項であり, 一般にシステムの利得が高いほど推定精度が悪くなることを表している. また, 第 3 項は観測雑音の影響であり, 入力パワーレベルに対する雑音のパワーレベルの比に比例し, システムには依存しない項である. 式 (3.9) は,

$$\text{Var}[\hat{k}_1(j)] = \frac{2}{T} h_1^2(j) + \frac{1}{T} \sum_{d=1}^j (h_1(j+d) + h_1(j-d))^2 + \frac{P_e}{PT} \quad (3.10)$$

と変形できることから, 分散  $\text{Var}[\hat{k}_1(j)]$  は非負であることが分かる.

### 3.2.2 非線形システムの Wiener 核推定精度

推定された Wiener 核は, 入力である確率過程の高次モーメントであり, その推定精度の厳密な定式化は非常に困難である. そこで, 非線形システムの Wiener 核推定精度の定式化に際し, 対象とするシステムを, 離散時間, 有限記憶長, 有限次数の Volterra 汎関数級数モデルで表現できるシステムのクラスに限定する. したがって, こうしたクラスに属する非線形システムの応答  $y(t)$  は, 入力  $x(t)$  と Volterra 核  $h_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, L$ ) を用いて, 次式のように表現できる.

$$y(t) = \sum_{k=0}^L \sum_{\tau_1, \dots, \tau_k=0}^R h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) x(t - \tau_1) \cdots x(t - \tau_k) + e(t) \quad (3.11)$$

さて, 入力  $x(t)$  を平均 0, パワーレベル (分散)  $P$  の正規白色系列とすれば, 式 (2.63) より,  $n$  次 Wiener 核  $k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  は,

$$\hat{k}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \frac{1}{n! P^n T} \sum_{t=1}^T y(t) x(t - \sigma_1) \cdots x(t - \sigma_n), \quad \sigma_i \neq \sigma_j \ (\forall i, j) \quad (3.12)$$



と表現される. 式 (3.11) を式 (3.12) に代入することにより,  $n$  次 Wiener 核の推定値は

$$\begin{aligned}\hat{k}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = & \frac{1}{n!P^nT} \sum_{t=1}^T \sum_{k=0}^L \sum_{\tau_1, \dots, \tau_k=0}^R h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) x(t-\tau_1) \cdots x(t-\tau_k) \\ & \cdot x(t-\sigma_1) \cdots x(t-\sigma_n) \\ & + \frac{1}{n!P^nT} \sum_{t=1}^T e(t) x(t-\sigma_1) \cdots x(t-\sigma_n)\end{aligned}\quad (3.13)$$

と書ける. Wiener 核推定の期待値  $E[\hat{k}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)]$  は, 上式の両辺の期待値をとることにより

$$\begin{aligned}E[\hat{k}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)] = & \frac{1}{n!P^n} \sum_{k=0}^L \sum_{\tau_1, \dots, \tau_k=0}^R h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \\ & \cdot E[x(t-\tau_1) \cdots x(t-\tau_k) x(t-\sigma_1) \cdots x(t-\sigma_n)] \\ & + \frac{1}{n!P^n} E[e(t) x(t-\sigma_1) \cdots x(t-\sigma_n)]\end{aligned}\quad (3.14)$$

となる. 誤差  $e(t)$  が入力とは独立な平均 0 の信号とすれば, 上式の第 2 項は 0 になる. したがって, 第 1 項に pair-wise rule[70, 90](付録 C) を適用することにより, 式 (3.14) は,

$$E[\hat{k}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)] = \sum_{m=0}^L \frac{(n+2m)!P^m}{n!m!2^m} \sum_{\tau_1, \dots, \tau_m=0}^R h_{n+2m}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_m, \tau_m, \sigma_1, \dots, \sigma_n)\quad (3.15)$$

となり, Volterra 核から Wiener 核への変換公式 (2.70) そのものである. したがって, Wiener 核推定の期待値は, 真の Wiener 核に一致し, 不偏推定量となる.

$$E[\hat{k}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)] = k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\quad (3.16)$$

次に, Wiener 核推定の分散  $\text{Var}[\hat{k}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)]$  を定式化する. 式 (3.13) の第 1, 2 項をそれぞれ確率変数  $A, B$  とおくと, Wiener 核推定の分散は,

$$\begin{aligned}\text{Var}[\hat{k}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)] &= \text{Var}[A + B] \\ &= \text{Var}[A] + \text{Var}[B] + \text{Cov}[A, B] \\ &= E[A^2] - E^2[A] + E[B^2] - E^2[B] + E[AB] - E[A]E[B]\end{aligned}\quad (3.17)$$

と表される. 誤差  $e(t)$  が入力とは独立な平均 0 の信号とすれば,

$$\begin{aligned}E[AB] &= 0 \\ E[B] &= 0\end{aligned}$$

であり, また式 (3.16) の結果から

$$E[A] = k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$



となる。したがって、式 (3.17) は

$$\text{Var}[\hat{k}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)] = E[A^2] + E[B^2] - k_n^2(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (3.18)$$

となる。まず、上式の第1項は、

$$\begin{aligned} E[A^2] = & \left( \frac{1}{n! P^n T} \right)^2 \sum_{i,j=0}^L \sum_{\tau_1, \dots, \tau_i=0}^R \sum_{\mu_1, \dots, \mu_j=0}^R h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) h_j(\mu_1, \dots, \mu_j) \\ & \sum_{t_1=1}^T \sum_{t_2=1}^T E \left[ x(t_1 - \sigma_1) \cdots x(t_1 - \sigma_n) x(t_1 - \tau_1) \cdots x(t_1 - \tau_i) \right. \\ & \left. \cdot x(t_2 - \sigma_1) \cdots x(t_2 - \sigma_n) x(t_2 - \mu_1) \cdots x(t_2 - \mu_j) \right] \quad (3.19) \end{aligned}$$

で与えられる。\$x(t)\$ が白色であることから \$|t\_1 - t\_2| \leq R\$ においてのみ非零値を持ち、\$T \gg R\$ を仮定すれば \$t\_1 - t\_2\$ 平面上の対角付近で近似できると考えられる。したがって、この近似を用いれば、式 (3.19) は、総和演算において、変数変換 \$t = t\_1, s = t\_1 - t\_2\$ を行うことにより

$$\begin{aligned} E[A^2] = & \left( \frac{1}{n! P^n T} \right)^2 \sum_{i,j=0}^L \sum_{\tau_1, \dots, \tau_i=0}^R \sum_{\mu_1, \dots, \mu_j=0}^R h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) h_j(\mu_1, \dots, \mu_j) \\ & \sum_{s=-R}^R \sum_{t=1}^T E \left[ x(t - \sigma_1) \cdots x(t - \sigma_n) x(t - \tau_1) \cdots x(t - \tau_i) \right. \\ & \left. \cdot x(t + s - \sigma_1) \cdots x(t + s - \sigma_n) x(t + s - \mu_1) \cdots x(t + s - \mu_j) \right] \quad (3.20) \end{aligned}$$

となる。入力 \$x(t)\$ の定常性から \$t\$ に関する共分散の積分は定数値の積分である。また、\$x(t)\$ が正規白色系列であることから、pair-wise rule を利用すれば、式 (3.20) は、更に

$$\begin{aligned} E[A^2] = & \frac{P^{(n+\frac{i+j}{2})}}{n!^2} \frac{1}{T} \sum_{i,j=0}^L \sum_{\tau_1, \dots, \tau_i=0}^R \sum_{\mu_1, \dots, \mu_j=0}^R h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) h_j(\mu_1, \dots, \mu_j) \\ & \sum_{s=-R}^R \sum_{k,l=\{\sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_1, \dots, \tau_i, \sigma_1-s, \dots, \sigma_n-s, \mu_1-s, \dots, \mu_j-s\}} \prod \delta_{k,l} \quad (3.21) \end{aligned}$$

と変形できる。一方、式 (3.18) の右辺第2項 \$E[B^2]\$ は、

$$\begin{aligned} E[B^2] = & \left( \frac{1}{n! P^n T} \right)^2 \sum_{t_1, t_2=1}^T E[e(t_1) e(t_2) x(t_1 - \sigma_1) x(t_2 - \sigma_1) \cdots x(t_1 - \sigma_n) x(t_2 - \sigma_n)] \\ = & \left( \frac{1}{n! P^n T} \right)^2 \sum_{t=1}^T E[e(t_1) E[e^2(t) x^2(t - \sigma_1) \cdots x^2(t - \sigma_n)]] \\ = & \frac{1}{(n!)^2 P^{2n} T} E[e^2(t)] E[x^2(t - \sigma_1)] \cdots E[x^2(t - \sigma_n)] \\ = & \frac{P_e}{(n!)^2 P^n T} \quad (3.22) \end{aligned}$$

ただし \$\sigma\_i \neq \sigma\_j\$ (\$\forall i, j; i \neq j\$)



となる。したがって、式(3.18)は、

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{k}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)] &= \frac{P^{(n+\frac{1}{2})}}{n!^2} \frac{1}{T} \sum_{i,j=0}^L \sum_{\tau_1, \dots, \tau_i=0}^R \sum_{\mu_1, \dots, \mu_j=0}^R h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) h_j(\mu_1, \dots, \mu_j) \\ &\quad \sum_{s=-R}^R \sum_{k,l=\{\sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_1, \dots, \tau_i, \sigma_1-s, \dots, \sigma_n-s, \mu_1-s, \dots, \mu_j-s\}} \prod \delta_{k,l} \\ &\quad + \frac{P_e}{(n!)^2 P^n T} - k_n^2(\sigma_1, \dots, \sigma_n). \end{aligned} \quad (3.23)$$

ただし  $\sigma_i \neq \sigma_j \quad (\forall i, j; i \neq j)$ .

となる。式(3.23)を、以後、Wiener 核の推定分散式と呼ぶことにする。

ところで、式(2.64)で示した Wiener 核の逐次推定式

$$\hat{k}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \frac{1}{n! P^n T} \sum_{t=1}^T \left\{ y(t) - \sum_{i=0}^{n-1} G_i[k_i; x(t)] \right\} x(t - \sigma_1) \cdots x(t - \sigma_n) \quad (3.24)$$

を用いて推定された Wiener 核の精度評価には、式(3.23)の  $h_i$  から  $n$  未満の Wiener 核のすべての誘導  $i$  次 Wiener 核、同様に  $h_j$  から  $n$  未満の Wiener 核のすべての誘導  $j$  次 Wiener 核を減じる必要がある。すなわち、式(3.23)の  $h_i, h_j$  をそれぞれ以下の式に置き換えれば良い。

$$\left. \begin{aligned} h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) &- \sum_{k=0}^{[(n-i)/2]} k_{i(i+2k)}(\tau_1, \dots, \tau_i) \\ h_j(\mu_1, \dots, \mu_j) &- \sum_{k=0}^{[(n-j)/2]} k_{j(j+2k)}(\mu_1, \dots, \mu_j) \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

上式の誘導 Wiener 核  $k_{i(i+2k)}$  は、実際には推定値である。しかし、推定値を真値とみなしても式(3.23)は漸近的に不偏となるため、 $T \gg 1$  に対して、 $\hat{k}_{i(i+2k)}$  を  $k_{i(i+2k)}$  であると仮定する。

### 3.2.3 入力に加わる雑音の影響

次に、 $x(t)$  とは独立な平均 0、分散  $P_n$  の正規白色雑音  $\varepsilon(t)$  が  $x(t)$  に混入し、 $x^*(t) = x(t) + \varepsilon(t)$  が被推定システムを駆動する場合を考える。Wiener 核は、 $x(t)$  と、 $x^*(t)$  に対するシステム応答  $y(t)$  から推定されることから、式(3.11)の  $x(t - \tau_i)$  を  $x(t - \tau_i) + \varepsilon(t - \tau_i)$  とおき、式(2.63)に代入すれば

$$\begin{aligned} \hat{k}_n^*(\sigma_1, \dots, \sigma_n) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{n! P^n T} \sum_{\tau_1, \dots, \tau_p=0}^R h_p(\tau_1, \dots, \tau_p) \sum_{t=1}^T x(t - \sigma_1) \cdots x(t - \sigma_n) \\ &\quad \cdot \{x(t - \tau_1) + \varepsilon(t - \tau_1)\} \cdots \{x(t - \tau_p) + \varepsilon(t - \tau_p)\} \end{aligned} \quad (3.26)$$



となる. こうした Wiener 核推定の期待値は, 式 (3.26) の両辺の期待値をとることにより

$$E[\hat{k}_n^*(\sigma_1, \dots, \sigma_n)] = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{n! P^n} \sum_{\tau_1, \dots, \tau_p=0}^R h_p(\tau_1, \dots, \tau_p) E[x(t - \sigma_1) \cdots x(t - \sigma_n) \cdot \{x(t - \tau_1) + \varepsilon(t - \tau_1)\} \cdots \{x(t - \tau_p) + \varepsilon(t - \tau_p)\}] \quad (3.27)$$

となる. 上式右辺の  $E[\cdot]$  を pair-wise rule を利用して展開した際,  $\sigma$  を変数に含む  $x(t)$  の個数が,  $\tau$  を変数に含む  $x(t)$  の個数よりも多い, すなわち  $n > p$  である項は,  $\sigma_i \neq \sigma_j (i \neq j)$  とすると期待値は 0 である. また,  $p + n$  が奇数の場合には, 奇数個の平均 0 の確率変数の積となるため, その期待値は 0 である. したがって,  $p \geq n$  かつ  $p + n$  が偶数の場合のみを考えれば良い. そこで, 新たな正数  $m$  を用いて  $p = n + 2m (m = 0, 1, 2, \dots)$  とおき, 式 (3.27) の  $E[\cdot]$  の展開項のうち以下の項を考える.

$$E \left[ \overbrace{x(t - \sigma_1) \cdots x(t - \sigma_n)}^{n \text{ 個}} \overbrace{x(t - \tau_1) \cdots x(t - \tau_n)}^{n \text{ 個}} \cdot \underbrace{x(t - \tau_{n+1}) \cdots x(t - \tau_{n+2q})}_{2q \text{ 個}} \underbrace{\varepsilon(t - \tau_{n+2q+1}) \cdots \varepsilon(t - \tau_{n+2m})}_{2m - 2q \text{ 個}} \right]$$

次に, 核の変数に対する対称性による重複度を考える. まず,  $n + 2m$  個の  $\tau$  を変数とする確率変数のうち, それぞれ  $n, 2q, 2m - 2q$  個に分ける組み合わせは

$$\frac{(n + 2m)!}{n!(2q)!(2m - 2q)!} \quad (3.28)$$

$n$  個の  $\tau$  を変数とする  $x(t)$  を, それぞれ  $\sigma$  を変数とする  $x(t)$  に割り当てる組み合わせは

$$n! \quad (3.29)$$

である. また,  $2q$  個の  $\tau$  を変数とする  $x(t)$  を,  $q$  個のペアにする組み合わせは

$$\frac{(2q)!}{q! 2^q} \quad (3.30)$$

$2m - 2q$  個の  $\varepsilon(t)$  を,  $m - q$  個のペアにする組み合わせは

$$\frac{(2m - 2q)!}{(m - q)! 2^{m-q}} \quad (3.31)$$

となる. これらの事象はそれぞれ独立に生起するため, 総組み合わせ数は, 式 (3.28) ~ (3.31) の積

$$\frac{(n + 2m)!}{n!(2q)!(2m - 2q)!} n! \frac{(2q)!}{q! 2^q} \frac{(2m - 2q)!}{(m - q)! 2^{m-q}} = \frac{(n + 2m)!}{q!(m - q)! 2^m} \quad (3.32)$$



となる. また,  $x(t)$  どうしのペアの数は  $n+q$  であることから,  $x(t)$  によるパワーレベルは  $P^{n+q}$ , また  $\varepsilon(t)$  どうしのペアの数は  $m-q$  なので, これによるパワーレベルは  $P_n^{m-q}$  となる. 従って, 式 (3.27) は

$$E[\hat{k}_n^*(\sigma_1, \dots, \sigma_n)] = \frac{1}{n!P^n} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^m \frac{(n+2m)!}{q!(m-q)!2^m} P^{n+q} P_n^{m-q} \sum_{\tau_1, \dots, \tau_m=0}^R h_{n+2m}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_m, \tau_m, \sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (3.33)$$

ただし  $\sigma_i \neq \sigma_j \quad (\forall i, j; i \neq j)$

となる. ここで, 上式の右辺が  $q=m$  の場合には, Volterra 核から Wiener 核への変換公式 (2.70) に一致する.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+2m)!}{n!m!2^m} P^m \sum_{\tau_1, \dots, \tau_m=0}^R h_{n+2m}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_m, \tau_m, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (3.34)$$

したがって, 式 (3.33), (3.34) から次式が得られる.

$$E[\hat{k}_n^*(\sigma_1, \dots, \sigma_n)] = k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{m-1} \frac{(n+2m)!}{n!q!(m-q)!2^m} P^q P_n^{m-q} \sum_{\tau_1, \dots, \tau_m=0}^R h_{n+2m}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_m, \tau_m, \sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (3.35)$$

ただし,  $\sigma_i \neq \sigma_j \quad (\forall i, j; i \neq j)$ .

これより, システムの入力に雑音が混入する場合の  $n$  次 Wiener 核推定では, システムの  $n+2, n+4, \dots$  次成分がバイアス誤差として加わり, 不偏性が得られないことがわかる. また, 式 (3.35) の右辺第2項, すなわち, バイアス項の係数に  $\frac{1}{T}$  がなく, 漸近的不偏性も得られないことから, 分散評価はあまり意味があるとは考えられない. したがって, 本論文ではバイアス誤差の評価にとどめる.

ところで, 線形システムの Wiener 核推定では, システムの  $3, 5, \dots$  次成分がないことから不偏推定量となる. これは, 非線形システムの同定では, 線形システムの場合以上に, システムへの入力に混入する雑音を極力減らすよう努めなくてはならないことを示唆している.

### 3.2.4 数値実験

前節で導出した Wiener 核推定分散式 (3.23) が妥当であることを検証するため, 計算機による数値実験を行った. 数値実験は, あらかじめ設定したシステムの Volterra 核, 入



力のパワーレベル  $P$ , データ長  $T$  に対し, Wiener 核推定を 1000 回試行し, それらの分散と式 (3.23) から計算される分散の理論値を比較した. また, 観測雑音  $e(t)$  の推定精度への影響については既に検証されている [24, 128] ことから, ここでは, 観測雑音が存在しない場合 ( $P_e = 0$ ) についてのみ行う.

さて, 核推定分散式 (3.23) は, 離散時間, 有限記憶長, 有限次数の Volterra 汎関数級数モデルで表現できるシステムを対象にしていることから, 数値実験を行うための被推定システムとして, 次式で与えられる Volterra 核を有するシステム  $S$  (記憶長  $R = 10$ ) を設定する.

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= 1, \\ h_1(\tau_1) &= \cos\left(\frac{\pi\tau_1}{6}\right) && \text{for } 0 \leq \tau_1 \leq 9 \\ h_2(\tau_1, \tau_2) &= \exp\left(\frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{-32}\right) && \text{for } 0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq 9 \\ h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \exp\left(\frac{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}{-2}\right) && \text{for } 0 \leq \tau_1, \tau_2, \tau_3 \leq 2 \\ h_n &= 0 && \text{for } n > 3 \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

そして, 残りのパラメータである入力パワーレベル  $P$ , データ長  $T$  をそれぞれ様々な値に設定したときの Wiener 核推定分散を比較した.

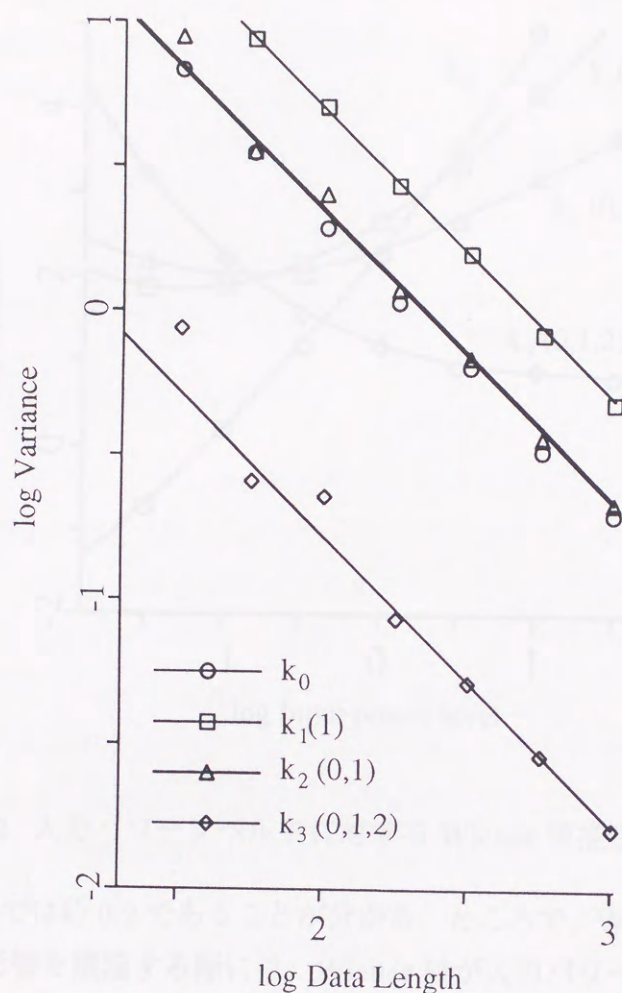
#### データ長に対する Wiener 核推定精度

入力のパワーレベル  $P$  を一定値 1.0 として, システム  $S$  の Wiener 核推定を行い, データ長  $T$  に対する核推定分散を求めた (図 3.1). 同図において, 式 (3.23) から計算される理論値を実線, また, 0, 1, 2, 3 次核についての実験値を, それぞれシンボル  $\circ, \square, \triangle, \diamond$  で示した. 1, 2, 3 次核については, それぞれ  $h_1(1), h_2(0, 1), h_3(0, 1, 2)$  についてのみ評価した.

図 3.1 において, システム  $S$  の記憶長  $R = 10$  に比べ, 十分長いデータ長  $T$  (およそ 100 以上) を用いた場合には, 0 次核から 3 次核にわたり, 実験値と理論値は良く一致しており, 分散式 (3.23) の妥当性を示している. しかし, データ長  $T$  が 100 以下の場合には, 条件  $T \gg R$  を満たさないため, 実験値と理論値の間に多少のずれを生じている.

Wiener 核推定の分散値は, データ長  $T$  に反比例し, その比例定数は, システムの Volterra 核  $h_n$  と入力パワーレベル  $P$  のみに依存し, データ長  $T$  には依存しないことから, 以後は, Wiener 核推定の分散値として, この比例定数を用いる.



図 3.1 データ長  $T$  に対する Wiener 核推定分散

### 入力パワーレベルに対する Wiener 核推定精度

次に、入力パワーレベル  $P$  に対する核推定値の分散を調べる。データ長  $T$  を 1000 に固定し、異なるパワーレベル  $P$  の入力を用いてシステム  $S$  の Wiener 核をそれぞれ推定し、その分散値とデータ長 ( $T = 1000$ ) の積、すなわち反比例の比例定数を求めた (図 3.2)。

同図より以下の知見が得られる。0 次核推定では、入力のパワーレベル  $P$  が 0、すなわち入力を加えないときが最も推定精度が高く、その際の分散は 0 である。一方、3 次 Wiener 核を推定する場合には、入力のパワーレベル  $P$  が大きい程、推定精度は高くなる。また、1, 2 次 Wiener 核推定では、入力パワーレベル  $P$  に対する核推定値の分散は、下に凸の関数となり、ある適当なパワーレベル  $P$  の入力を用いた時に、最大の推定精度が得られる。図 3.2 よりシステム  $S$  の Wiener 核推定に最適な入力のパワーレベル  $P$  は、1 次核推定で



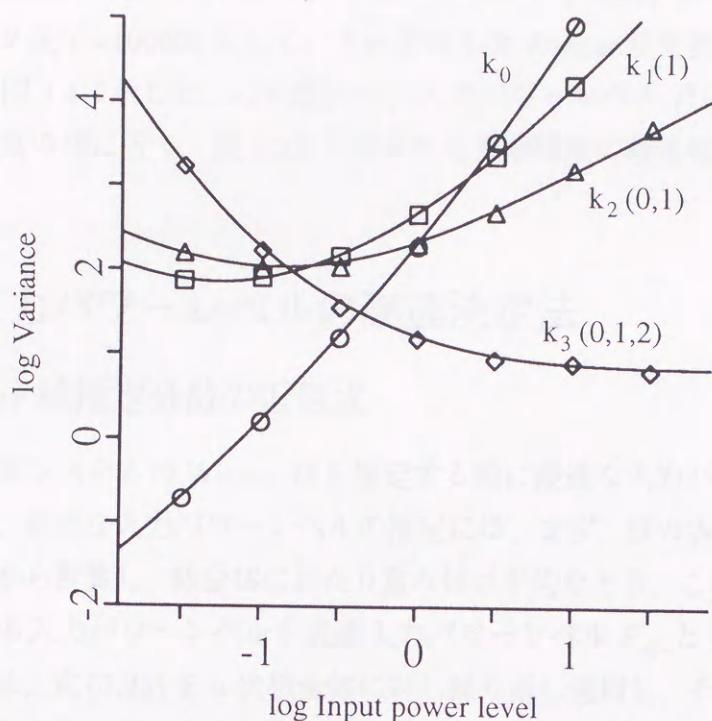


図 3.2 入力パワーレベル  $P$  に対する Wiener 核推定分散

は約 0.06, 2 次核推定では約 0.2 であることが分かる. ところで, Wiener 核推定における入力パワーレベルの影響を議論する際には, Wiener 核が入力パワーレベルの関数であることを考慮する必要がある. すなわち,  $n$  次 Wiener 核には, Volterra 核から Wiener 核への変換公式 (2.71) から分かるように,  $n+2, n+4, \dots$  次 Volterra 核の影響を含むからである. ところで, 一般に, 実在する物理システムの多くは, 非線形次数が高くなるにしたがい, その成分が次第に減少するものと考えられる. そこで, 対象とするシステムを, 非線形次数が高くなるにしたがい, その成分が次第に減少し, Wiener 核が Volterra 核がほとんど等しくなるようなシステムのクラスに限定する.

図 3.1, 図 3.2 とともに, 各次数の核の特定の変数値についてのみ示したが, 他の変数値でも同様の傾向を持つことを以下に示す. 図 3.3 は, 式 (3.36) で示した変数値  $\tau_i (1 \leq i \leq 3)$  に対する核の入力パワーレベル  $P$  に対する推定値の分散の理論値である. 同じ次数の核では, 変数値によらず特性はほぼ同様の傾向を持つことが分かる.

次に, 分散式より求められた最適な入力パワーレベル  $P$  を用いた時, 核の推定精度が最も高くなることを, 2 次核を例に実際に推定された Wiener 核の形状から調べる. 精度良く核を推定するためには, 図 3.3(C) より入力のパワーレベル  $P$  をおよそ 0.1 から 1.0 の



範囲で選べば良いことが分かる。そこで、パワーレベル  $P$  を 0.001 から 100 まで 10 倍ずつ変化させ、データ長  $T=100000$  として、それぞれ 2 次 Wiener 核を推定し、3 次元表示、等高線表示として図 3.4 に示した。この図から、入力パワーレベル  $P$  を 0.1 から 1.0 に設定したときが最も真の核に近く、図 3.3 から得られる推定精度の理論値と一致することが分かる。

### 3.3 最適入力パワーレベルの高速決定法

#### 3.3.1 Wiener 核推定分散の近似式

前節では、非線形システムの Wiener 核を推定する際に最適な入力パワーレベルが存在することを示した。最適な入力パワーレベルの推定には、まず、核の各変数値に対する推定分散を式 (3.23) から計算し、核全体にわたり重み付け平均をとる。これを評価値として、評価値を最小にする入力パワーレベルを最適入力パワーレベル  $P_{\text{opt}}$  とする。 $n$  次 Wiener 核全体の推定精度は、式 (3.23) を  $n$  次核全体に対し繰り返し適用し、それらの平均により評価することが考えられるが、こうした繰り返し計算は、計算時間の面で不利である。そこで、各次数の核の適当な変数値を代表させて推定精度を評価することを考える。その変数値は、その値では、式 (3.23) を簡略化できることが条件になる。こうした変数値を今後、代表点と呼ぶことにする。そこで、まず  $n$  次 Wiener 核において、 $\sigma_i > R (\forall i; 0 \leq i \leq n)$ 、かつ  $\sigma_i \neq \sigma_j (\forall i, j; i \neq j)$  である任意の点を代表点とした時、式 (3.23) が簡略化されることを確かめる。また、その点の分散値を  $\text{Var}[\hat{k}_n]$  で表す。

ここで、便宜上、システムの 0 次成分がない ( $h_0 = 0$ ) と仮定する。これは、あらかじめ入力  $x(t) = 0$  における出力  $y_0$  (すなわち 0 次 Volterra 核  $h_0$ ) を測定しておき、その後、システムの出力  $y(t)$  から、 $y_0$  を減じたものを出力  $y(t)$  とすることにより、 $h_0 = 0$  とみなすことができることから、実際には問題にはならない。これにより、代表点では  $h_i(\sigma_1, \dots, \sigma_i) = 0 (\forall i; i \geq 0)$  となる。

さて、式 (3.23) の第 1 項において、 $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  と  $\sigma_1 - s, \dots, \sigma_n - s$ 、 $\tau_1, \dots, \tau_i$  と  $\mu_1 - s, \dots, \mu_j - s$  がそれぞれペアを構成するためには、 $s = 0$  でなければならない。そこで、

$$\sum_{k,l=\{\sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_1, \dots, \tau_i, \sigma_1-s, \dots, \sigma_n-s, \mu_1-s, \dots, \mu_j-s\}} \prod \delta_{k,l} = \sum_{k,l=\{\tau_1, \dots, \tau_i, \mu_1, \dots, \mu_j\}} \prod \delta_{k,l} \quad (3.37)$$

となる。更に、展開項が非零であるためには、各変数  $\tau_1, \dots, \tau_i, \mu_1, \dots, \mu_j$  が、すべてペアを構成していなくてはならない。そこで、まず変数  $\tau_1, \dots, \tau_i$  のうち、 $l$  個が互いにペアを作り、残りの  $i - 2l$  個の変数が  $\mu_1, \dots, \mu_j$  とそれぞれペアとなり、 $\mu_1, \dots, \mu_j$  のうち残った



$j-i+2l$ 個の変数が互いにペアを構成する場合を考える. その時の  $h_i, h_j$  は, それぞれ以下のようになる.

$$\left. \begin{aligned} &h_i(\nu_1, \dots, \nu_{i-2l}, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_l, \tau_l) \\ &h_j(\nu_1, \dots, \nu_{i-2l}, \mu_1, \mu_1, \dots, \mu_{\frac{j-i+2l}{2}}, \mu_{\frac{j-i+2l}{2}}) \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

次に, 核の変数に対する対称性による重複度を考える. まず  $i$  個の  $h_i$  の変数のうち,  $(2l)$  個の  $\tau$  と  $(i-2l)$  個の  $\nu$  に分離する組合せは

$$\frac{i!}{(2l)!(i-2l)!} \quad (3.39)$$

であり, 一方,  $j$  個の  $h_j$  の変数のうち,  $(j-i+2l)$  個の  $\mu$  と  $(i-2l)$  個の  $\nu$  に分離する組合せは

$$\frac{j!}{(j-i+2l)!(i-2l)!} \quad (3.40)$$

である. 次に,  $(2l)$  個の  $\tau$  を  $l$  個のペアにする組合せは

$$\frac{(2l)!}{l! 2^l} \quad (3.41)$$

であり, 一方,  $(j-i+2l)$  個の  $\mu$  を  $\frac{j-i+2l}{2}$  個のペアにする組合せは

$$\frac{(j-i+2l)!}{(\frac{j-i+2l}{2})! 2^{\frac{j-i+2l}{2}}} \quad (3.42)$$

である. そして, 残った  $(i-2l)$  個の  $h_i$  の  $\nu$  を  $h_j$  の  $\nu$  とペアにする組合せは

$$(i-2l)! \quad (3.43)$$

である. これらは独立に生起する事象であることから, 重複度は, 式 (3.39)~(3.43) の積で表される.

$$\frac{i! j!}{(\frac{j-i+2l}{2})! (i-2l)! l! 2^{(j-i+2l)/2}} \quad (3.44)$$

そして,  $l = 0, 1, \dots, [\frac{\min(i,j)}{2}]$  に対して和をとり, パワーレベル  $P$  の多項式であることに注意して書き直せば, 代表点における核推定分散は次のようになる.

$$\text{Var}[\hat{k}_n] = \frac{1}{T(n!)^2} \left[ \sum_{k=1}^L P^{k-n} c_k + \frac{P_e}{P^n} \right]. \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} c_k = & \sum_{i=0}^L \sum_{\substack{j=0 \\ (i+j=2k)}}^L \sum_{l=0}^{[\frac{\min(i,j)}{2}]} \frac{i! j!}{(\frac{j-i+2l}{2})! (i-2l)! l! 2^{(j-i+2l)/2}} \\ & \sum_{\substack{\nu_1, \dots, \nu_{i-2l}, \tau_1, \dots, \tau_l, \mu_1, \dots, \mu_{(j-i+2l)/2} \\ \nu_1, \dots, \nu_{i-2l}, \tau_1, \dots, \tau_l, \mu_1, \dots, \mu_{(j-i+2l)/2} = 0}}^R h_i(\nu_1, \dots, \nu_{i-2l}, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_l, \tau_l) \\ & \cdot h_j(\nu_1, \dots, \nu_{i-2l}, \mu_1, \mu_1, \dots, \mu_{\frac{j-i+2l}{2}}, \mu_{\frac{j-i+2l}{2}}). \end{aligned} \quad (3.46)$$

ただし,  $k = 1, 2, \dots, L$



ただし,  $k = (i + j)/2$  とし,  $\min(i, j)$  は,  $i$  と  $j$  のうち小さい方をとることを意味する. 以後, 式 (3.45) を Wiener 核推定分散の近似式と呼ぶことにする. 近似式 (3.45) を, 例えば, 3 次非同次システム ( $L = 3$ ) に対して書き下すと以下のようなになる.

$$\begin{aligned}\text{Var}[\hat{k}_0] &= \frac{1}{T}(P_e + c_1 P + c_2 P^2 + c_3 P^3), \\ \text{Var}[\hat{k}_1] &= \frac{1}{T}(P_e P^{-1} + c_1 + c_2 P + c_3 P^2), \\ \text{Var}[\hat{k}_2] &= \frac{1}{4T}(P_e P^{-2} + c_1 P^{-1} + c_2 + c_3 P),\end{aligned}\quad (3.47)$$

$$\begin{aligned}\text{Var}[\hat{k}_3] &= \frac{1}{36T}(P_e P^{-3} + c_1 P^{-2} + c_2 P^{-1} + c_3), \\ &\vdots\end{aligned}\quad (3.48)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned}c_1 &= \sum_{\nu=0}^R h_1^2(\nu), \\ c_2 &= 2 \sum_{\nu_1, \nu_2=0}^R h_2^2(\nu_1, \nu_2) + \sum_{\tau, \mu=0}^R h_2(\tau, \tau) h_2(\mu, \mu) + 6 \sum_{\nu, \mu=0}^R h_1(\nu) h_3(\nu, \mu, \mu), \\ c_3 &= 6 \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3=0}^R h_3^2(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + 9 \sum_{\nu, \tau, \mu=0}^R h_3(\nu, \tau, \tau) h_3(\nu, \mu, \mu).\end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

以上の定式化により以下の知見が得られる. まず, 観測雑音  $e(t)$  が存在しない場合, 線形システムの 1 次 Wiener 核の推定精度は, 入力パワーレベル  $P$  には依存しない. 一般に, 同次システムでは, その次数の核を推定する場合には入力パワーレベル  $P$  には依存しない. 観測雑音  $e(t)$  が存在する場合には, 入力パワーレベル  $P$  が高いほど推定精度は向上し, 高次の核を推定する場合ほどその効果は顕著である. 一方, 非同次システムの核を推定する場合, システムの持つ最大次数の核の推定では入力パワーレベル  $P$  は高いほど推定精度が高くなるが, 一般に推定精度を最大にする最適な入力パワーレベルが存在する. 最適な入力パワーレベルは, 式 (3.45) を微分して 0 と置き, 代数方程式を解く, もしくは数値解法により得られる.

核推定分散式 (3.23) に対し, 近似式 (3.45) の近似の影響を線形システムの 1 次 Wiener 核の推定を例に調べる. 近似式では, 式 (3.9) の第 2 項が消失した形になっており, 1 次 Wiener 核が定数  $k_1(j) = h_1(j) = a$  ( $0 \leq j \leq R$ ) であるとすれば, 推定された 1 次 Wiener 核の変数値  $j = R/2$  において誤差が最大となる. この際, 誤差の大きさは, 式 (3.9) の第 1 項の 100% であり, 観測雑音が存在しない場合, 実際の推定分散を  $1/2$  に見積もる結果になる. そして, 1 次 Wiener 核の変数の値が  $j = 0$  あるいは  $j = R$  に近づくにつれ, 式 (3.9) との誤差は少なくなる. また, 非線形システムの場合の影響については, 式 (3.45)



から直接評価することが困難なため、数値実験により検証する。こうした近似が含まれるものの、Wiener 核推定分散式 (3.23) が、pair-wise rule を組み合わせ論的に計算機処理しなければならないのに対し、近似式 (3.45) では、簡単な積和演算によりパラメータ  $c_k$  を計算することが可能である。また、これらのパラメータは、システムが  $L$  次ならば高々  $L$  個であり、任意の次数の Wiener 核の推定精度を表す共通のパラメータとして利用できることから、推定精度の計算、最適入力パワーレベルの推定が格段に高速かつ容易になる。

### 3.3.2 数値実験

Wiener 核推定分散の近似式 (3.45) の妥当性を数値実験により検証するため、システム  $S$  に対し、核推定分散式 (3.23) とその近似式 (3.45) を用いて計算された Wiener 核推定分散値の理論値 ( $T$  は 1 に正規化) を比較した。近似式 (3.45) より計算されたパラメータは、それぞれ  $c_1 = 5.0$ ,  $c_2 = 62.27$ ,  $c_3 = 39.96$  となり、これらを係数とする代数方程式を解くことにより、最適なパワーレベルは  $P_{\text{opt}} = 0.3537$  と決定された。更に、3 次以下について、分散式 (3.23) から計算された核の各点の分散値を点線、近似式 (3.45) から計算された代表点の分散値を実線で重ね書きした (図 3.5)。各次数とも代表点は、核の他の変数値と類似した分散特性を有していることが分かる。また、最適なパワーレベルの計算に要した時間は、エンジニアリングワークステーション SUN4 において、分散式では 30 分程度、近似式では 1 秒以内となり、高速化が達成されていることが確認された。

## 3.4 まとめ

Volterra 汎関数級数モデル、バイナリ汎関数級数モデルなど、確定論的な汎関数級数モデルとは異なり、確率論的な側面を持つ Wiener 汎関数級数モデルにおいては、その積分核の推定に、確率系列である入力統計的変動による誤差を生ずる。そのため、Volterra 核、バイナリ核の最小 2 乗推定に比べ、Wiener 核の推定精度が悪化することが定性的に知られていた。本章では、こうした Wiener 汎関数級数モデルにおける積分核 (Wiener 核) の推定精度を、離散時間、有限記憶長、有限次数の Volterra 汎関数級数モデルで表現できる非線形システムのクラスに対して、定量的に定式化した。

具体的には、Wiener 核の推定分散を、観測時間、入力パワーレベル、システムの Volterra 核、観測雑音の分散の関数として定式化した。その結果、最も高い Wiener 核推定精度が得られる最適な入力のパワーレベルが存在することを明らかにした。これは、従来の線形誤差理論にない新しい知見である。更に、Wiener 核推定分散式を近似を導入して簡略化することにより、 $L$  次システムの Wiener 核推定に対し、わずか  $L$  個のパラメータのみで



任意の次数の核の推定精度を表現する近似式を導出した。これにより、最適入力パワーレベルを高速に推定することが可能になった。

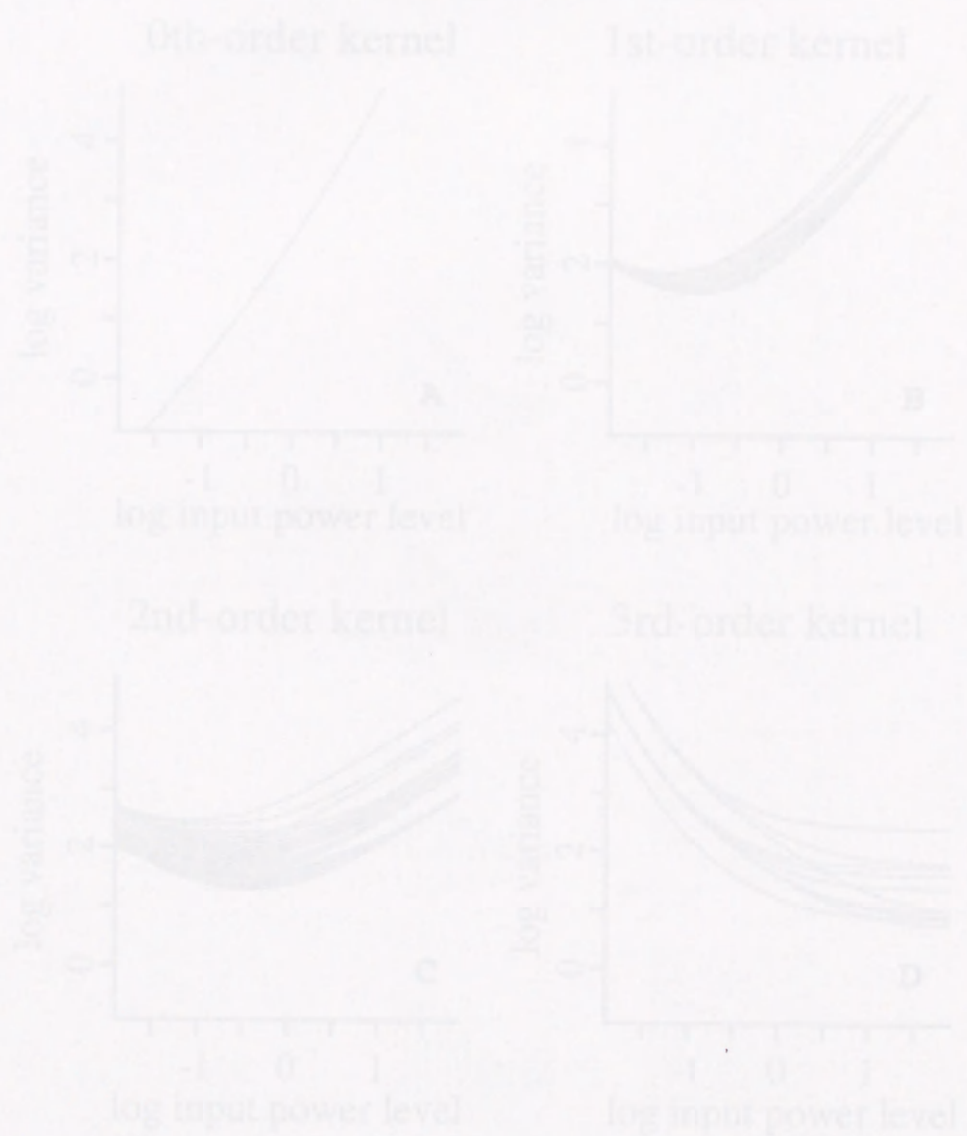


図 3.3 図 3.1, 図 3.2 で示した変動値以外の変動における Wiener 核推定分散



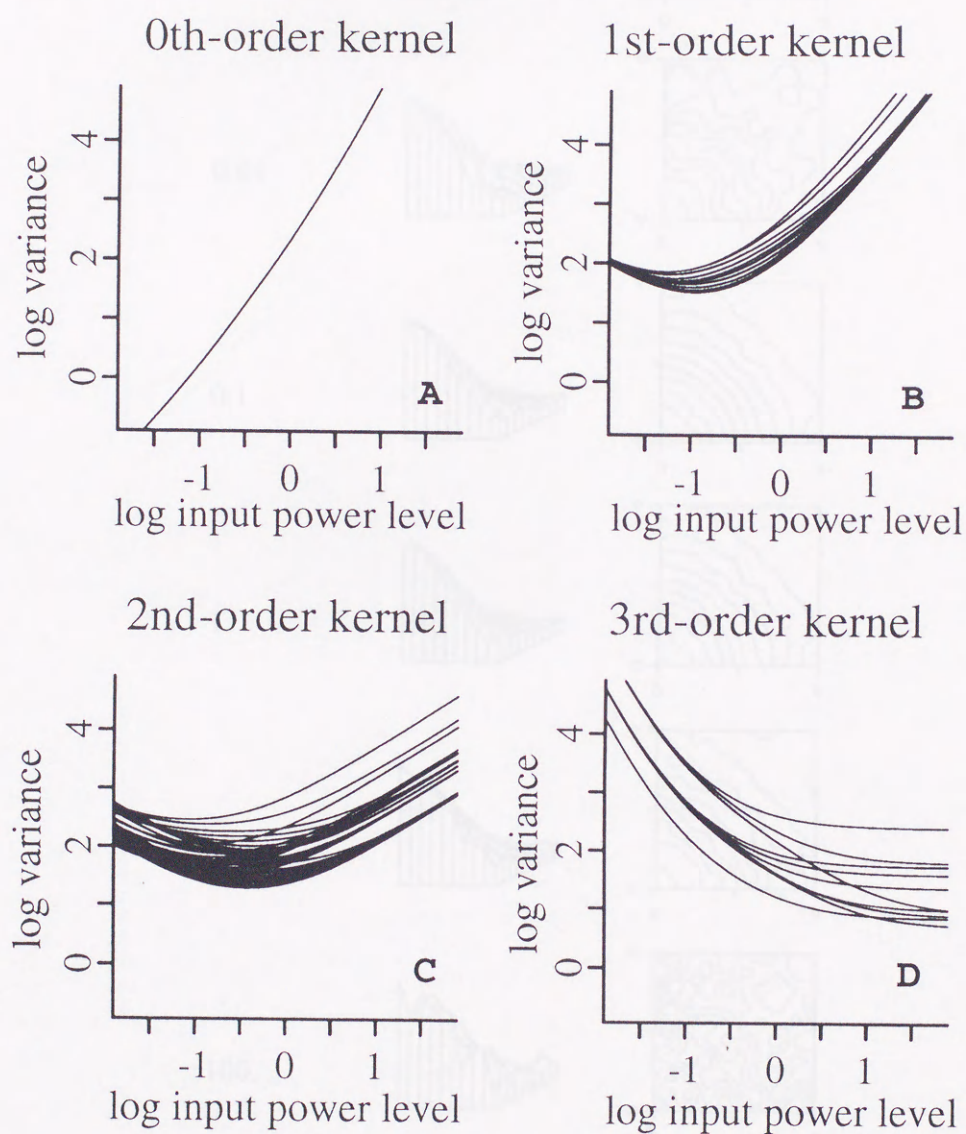


図 3.3 図 3.1, 図 3.2 で示した変数値以外の変数における Wiener 核推定分散



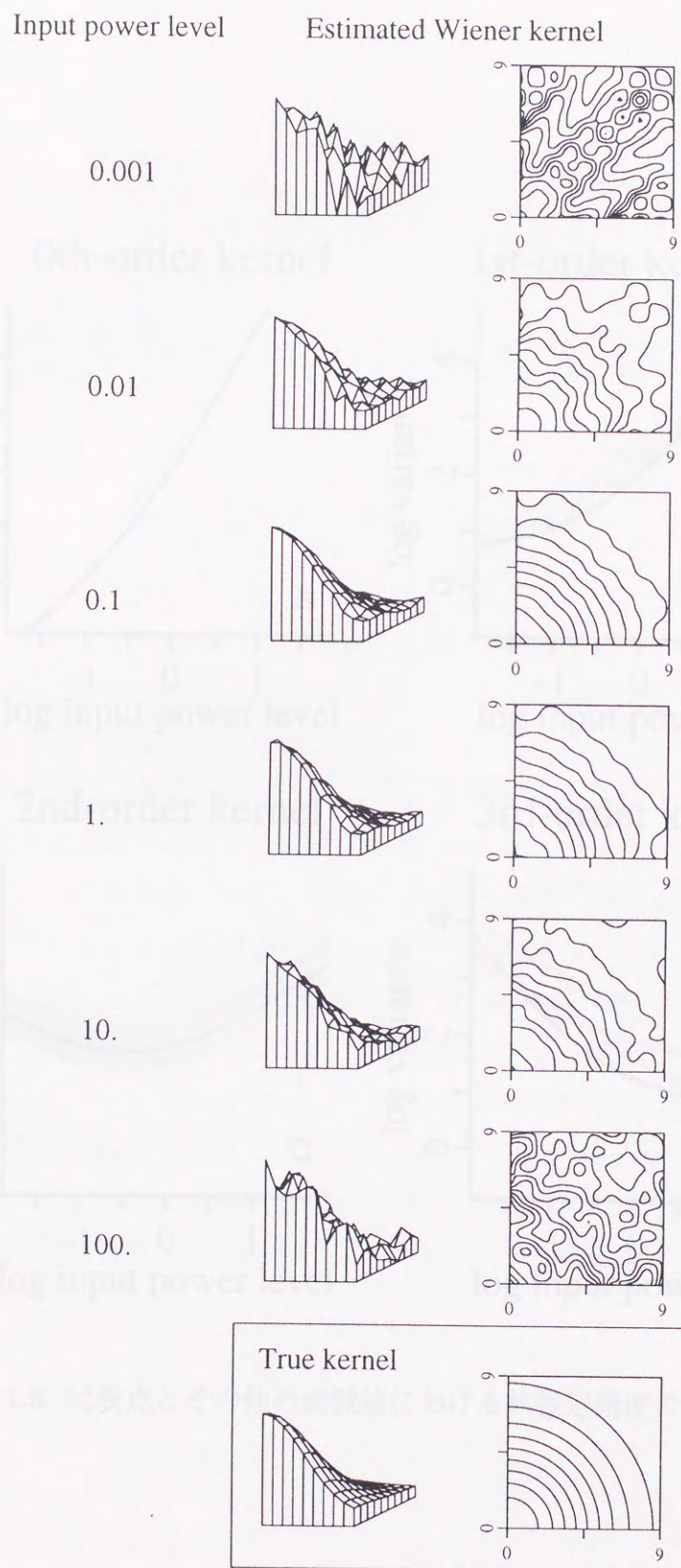


図 3.4 異なるパワーレベルを用いて推定された 2 次 Wiener 核の形状の比較



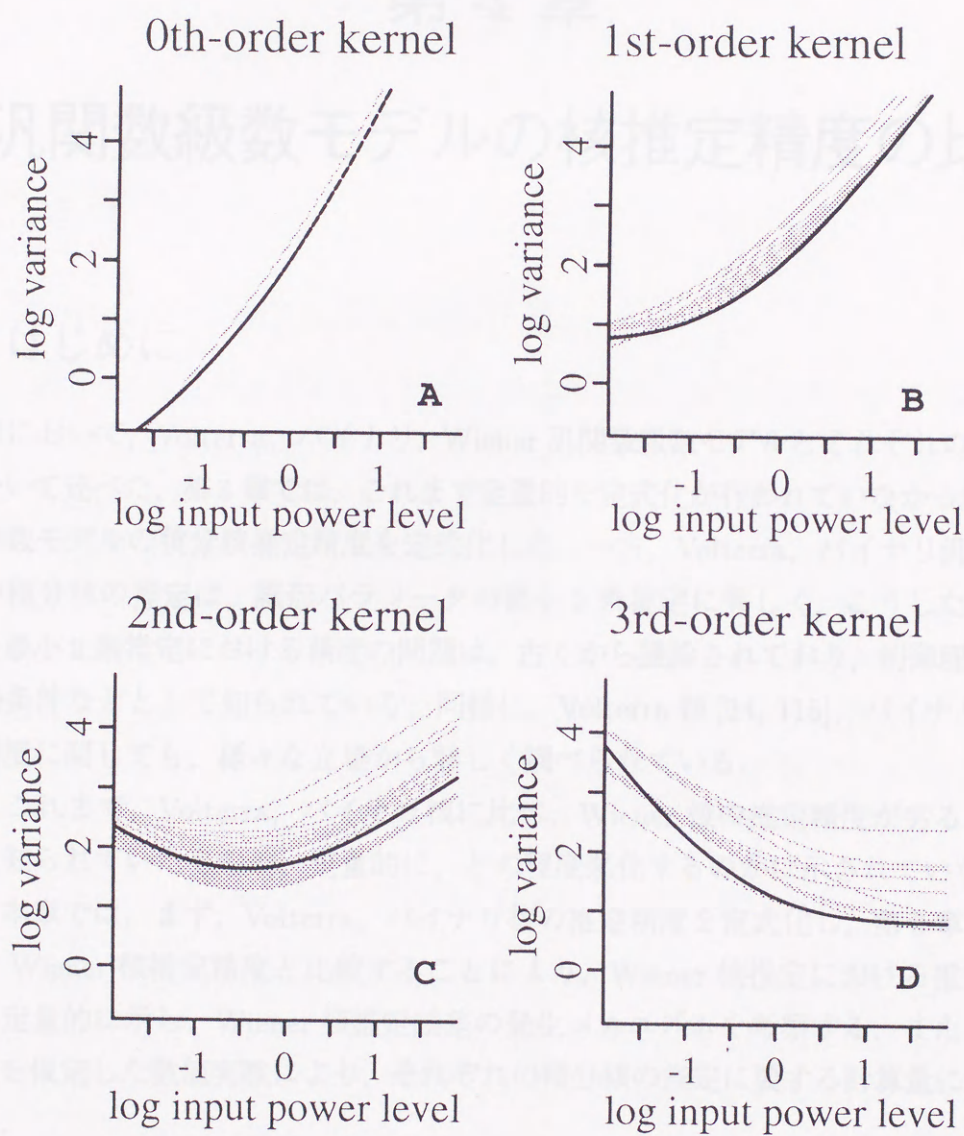


図 3.5 代表点とその他の変数値における核推定精度の比較



## 第 4 章

# 各汎関数級数モデルの核推定精度の比較

### 4.1 はじめに

第 2 章において, Volterra, バイナリ, Wiener 汎関数級数モデルとそれぞれの積分核推定法について述べた. 第 3 章では, これまで定量的な定式化が行われていなかった Wiener 汎関数級数モデルの積分核推定精度を定式化した. 一方, Volterra, バイナリ汎関数級数モデルの積分核の推定は, 線形パラメータの最小 2 乗推定に等しく, こうした線形パラメータの最小 2 乗推定における精度の問題は, 古くから議論されており, 制御理論では自発的励振条件などとして知られている. 同様に, Volterra 核 [24, 115], バイナリ核 [101] の推定精度に関しても, 様々な立場から詳しく調べられている.

さて, これまで, Volterra, バイナリ核に比べ, Wiener 核の推定精度が劣ることは定性的には知られていたものの, 定量的に, どの程度悪化するのかは示されていなかった. そこで, 本章では, まず, Volterra, バイナリ核の推定精度を定式化し, 第 3 章で既に定式化した Wiener 核推定精度と比較することにより, Wiener 核推定における推定精度の悪化分を定量的に示し, Wiener 核推定誤差の発生メカニズムを考察する. また, 適当なシステムを仮定した数値実験により, それぞれの積分核の推定に要する計算量についても検討する.



## 4.2 Volterra 汎関数級数モデル

### 4.2.1 Volterra 核推定

式(2.15),(2.16)で示したように, Volterra 核の最小2乗推定値  $\hat{\mathbf{h}}$  は, 次の正規方程式を解くことにより与えられる.

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\mathbf{h}} = \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (4.1)$$

あるいは,

$$\hat{\mathbf{h}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (4.2)$$

ただし, 上式において,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{h}$  は, 式(2.14)で示したものと等しい.

### 4.2.2 Volterra 核推定に要する計算量

Volterra 核を推定するために必要な計算量(本論文では, 乗算の回数と定義する)は, 式(4.2)で与えられる正規方程式を解くための計算量, すなわち, 入力行列  $\mathbf{X}$ , 入力の自己相関行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ , 入出力の相互相関ベクトル  $\mathbf{X}^T \mathbf{y}$ , 入力の自己相関行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  の逆行列を求めるための計算量の総和である. 入力行列の生成には, モデルの次数を  $L$ , 推定するパラメータ数を  $N$ , 観測時間を  $T$  とすれば,  $O(TNL)$  のオーダーの計算量が必要である. また, 入力行列  $\mathbf{X}$  は  $(T, N)$  次行列, 出力ベクトル  $\mathbf{y}$  は  $T$  次ベクトルであるため, 入力の自己相関行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ , 入出力の相互相関ベクトル  $\mathbf{X}^T \mathbf{y}$  を得るための計算量は, それぞれ,  $O(TN^2)$ ,  $O(TN)$  である. さらに, 逆行列の計算には, パラメータ数  $N$  の3乗のオーダーの計算  $O(N^3)$  が必要であるから, 結局, 正規方程式を解くための全計算量は,

$$O(N^3) + O(TN^2) + O(TNL) + O(TN) \quad (4.3)$$

となる. したがって, モデルの次数  $L$ , 記憶長  $R$  が増えると, Volterra 核の推定は, 非常に困難になる. そこで, Volterra 核の推定, すなわち, 正規方程式を高速に解く手法が数多く提案された. 中でも特に有効と考えられる次の代表的な4種の手法を付録Aに示した.

1. Cholesky 分解法 [44]
2. 入力系列直交化法 (orthogonal approach)[40, 43]
3. Volterra 核直交展開法 [103, 111]
4. Karhunen-Loève 展開法 [112, 113, 114]



## 4.2.3 Volterra 核推定精度

Volterra 核を始めとする線形パラメータの最小2乗推定における精度は、行列、ベクトルの計算により、比較的容易に導かれ、古くから研究されている。Volterra 核においても、Goussard[24], 横山 [115, 116] などにより、様々な解析が行われている。

式(2.14)を式(4.2)に代入し、出力ベクトル  $y$  を消去すれば

$$\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{h} + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{e} \quad (4.4)$$

となることから、パラメータベクトルの推定値の統計的性質は、入力行列  $\mathbf{X}$ 、パラメータベクトルの真値  $\mathbf{h}$ 、誤差ベクトル  $\mathbf{e}$  により決定されることが分かる。式(4.4)の両辺の期待値は、

$$E[\hat{\mathbf{h}}] = \mathbf{h} + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T E[\mathbf{e}] \quad (4.5)$$

であり、誤差  $e(t)$  が平均0

$$E[\mathbf{e}] = \mathbf{0}$$

であれば、

$$E[\hat{\mathbf{h}}] = \mathbf{h} \quad (4.6)$$

となり、推定されたパラメータベクトルの期待値は真値に一致し、不偏推定量となる。

次に、パラメータベクトル  $\mathbf{h}$  の推定値の分散を調べるため、その共分散行列  $\text{Cov}[\hat{\mathbf{h}}]$  を考える。共分散行列の定義と式(4.4)より

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\hat{\mathbf{h}}] &\equiv E[(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h})(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h})^T] \\ &= E[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}] \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T E[\mathbf{e} \mathbf{e}^T] \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

となり、ここで、誤差  $e(t)$  が定常白色系列、すなわち

$$E[\mathbf{e} \mathbf{e}^T] = P_e \mathbf{I}$$

という条件を付加すれば、式(4.7)は

$$\text{Cov}[\hat{\mathbf{h}}] = P_e (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \quad (4.8)$$

と表される。さて、パラメータの2乗誤差和は、共分散行列  $\text{Cov}[\hat{\mathbf{h}}]$  のトレース  $\text{tr}\{\text{Cov}[\hat{\mathbf{h}}]\}$  であり、更に、パラメータ数  $N$  で割ったものをパラメータの平均2乗誤差 MSE と定義する。

$$\text{MSE}(\hat{\mathbf{h}}) \equiv \frac{1}{N} \text{tr}\{\text{Cov}[\hat{\mathbf{h}}]\} = \frac{P_e}{N} \text{tr}\{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}\} \quad (4.9)$$



また, Goussard は, パラメータの2乗和  $\mathbf{h}^T \mathbf{h}$  で正規化したものをパラメータ推定の相対誤差 RE

$$\text{RE} \equiv \frac{\text{tr}\{\text{Cov}[\hat{\mathbf{h}}]\}}{\mathbf{h}^T \mathbf{h}} = \frac{P_e \text{tr}\{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}\}}{\mathbf{h}^T \mathbf{h}} \quad (4.10)$$

と定義し, Volterra 核の推定精度の評価量として用いている [24]. 相対誤差 RE を評価するため, まず, モデル出力  $\mathbf{X}\mathbf{h}$  の2乗平均  $\frac{(\mathbf{X}\mathbf{h})^T (\mathbf{X}\mathbf{h})}{T}$  を, 誤差  $\mathbf{e}$  の分散  $P_e$  で正規化したものをシステム出力における SN 比 SNR

$$\text{SNR} \equiv \frac{\mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{h}}{T P_e} \quad (4.11)$$

と定義する. また, 行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  が半正定値行列であることから, すべての固有値は非負であり, その中で最大の固有値を  $\lambda_{\max}$  とすると次の不等式が成り立つ [24].

$$\mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{h} \leq \lambda_{\max} \mathbf{h}^T \mathbf{h} \quad (4.12)$$

不等式 (4.12) を変形すれば,

$$\mathbf{h}^T \mathbf{h} \geq \frac{1}{\lambda_{\max}} \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{h}$$

となり, 式 (4.11) を代入すると

$$\mathbf{h}^T \mathbf{h} \geq \frac{T P_e \text{SNR}}{\lambda_{\max}} \quad (4.13)$$

となる. ところで, ある行列  $\mathbf{A}$  のトレースは, その行列の固有値の和に等しく, その逆行列  $\mathbf{A}^{-1}$  の固有値は, 行列  $\mathbf{A}$  の各固有値の逆数である. したがって, 行列  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$  のトレースは, 行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  の各固有値の逆数の和になり, その最小固有値を  $\lambda_{\min}$  とすると次の不等式が成り立つ.

$$\text{tr}\{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}\} \leq \frac{N}{\lambda_{\min}} \quad (4.14)$$

式 (4.10) に式 (4.13), (4.14) を代入し, 行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  において最大固有値の最小固有値に対する比, すなわち条件数を  $\text{CN} \equiv \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$  とおけば, パラメータの相対誤差 RE は,

$$\text{RE} \leq \frac{1}{\text{SNR}} \frac{N}{T} \text{CN} \quad (4.15)$$

と表される. これより, システム出力の SN 比 SNR が高く, 入出力のデータ長  $T$  が長く, 推定パラメータ数  $N$  が少なく, また入力自己相関行列の条件数 CN が 1 に近い程, 推定精度が高くなることが分かる. また, 入出力のデータ長  $T$  に反比例するから,  $T \rightarrow \infty$  において  $\text{RE} \rightarrow 0$  となり, 一致推定量となる.

Volterra 核推定の平均2乗誤差 MSE の一般式は, 式 (4.9) で与えられるが, 入力行列  $\mathbf{X}$  に依存しており, 具体的には表現できない. そこで, 平均 0, 分散  $P$  の定常白色系列を



入力とし、線形システムの Volterra 核、すなわち線形インパルス応答関数を推定する場合を例に考える。パラメータベクトルの推定値の共分散行列は、式 (4.8) より

$$\text{Cov}[\hat{\mathbf{h}}] = P_e(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \quad (4.16)$$

である。行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  は、対称 Toeplitz 行列であり、入力が平均 0 の定常白色列であることから近似的に対角行列となる。そこで、行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  の対角部分を  $t_1, t_2, \dots, t_N$  とおけば、逆行列  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$  のトレースは、

$$\text{tr}\{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}\} \geq \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_N} \quad (4.17)$$

なる関係を満たす。行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  が厳密な対角行列ならば、等号が成り立つ。また、入力系列の性質より、 $t_i \simeq TP$  と近似できるので、

$$\text{tr}\{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}\} \geq \frac{N}{TP} \quad (4.18)$$

となる。したがって、推定されたパラメータの平均 2 乗誤差 MSE は、

$$\text{MSE}(\hat{k}) = \frac{P_e}{N} \text{tr}\{\text{Cov}[\hat{\mathbf{h}}]\} \geq \frac{P_e}{TP} \quad (4.19)$$

となる。

### 4.3 バイナリ汎関数級数モデル

#### 4.3.1 バイナリ核推定

バイナリ汎関数級数モデルのバイナリ核  $\mathbf{b}$  は、式 (2.28), (2.29) に示すように、

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{N} \mathbf{H}_N \mathbf{y} \quad (4.20)$$

として推定される。また、 $\mathbf{H}_N$  が自然順 Hadamard 行列であることから、高速 Walsh 変換  $[32]\text{FWT}[\cdot]$  を用いれば、

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{N} \text{FWT}[\mathbf{y}] \quad (4.21)$$

として高速に計算することが可能である [99]。

#### 4.3.2 バイナリ核推定に要する計算量

高速 Walsh 変換においては、 $\pm 1$  を乗じて足し込むだけであるから、行われる乗算の数は 0 である。したがって、高速 Walsh 変換前後に、 $1/n$ ,  $1/N$  を掛ける  $N$  回の乗算がある



のみである。ただし、高速 Walsh 変換を用いるため、パラメータ数  $N$  が、2 のべき乗数でなければならないことに注意すれば、バイナリ核推定に必要な計算量は、

$$O(N) \quad (4.22)$$

となる。

### 4.3.3 バイナリ核推定精度

入力系列  $x(t), t = 1, \dots, T$  をバイナリ  $m$  系列より生成される 2 値 ( $\pm\sqrt{P}$ ) 系列とする。この時、入力系列の分散は  $P$  となる。さて、パラメータベクトル  $\mathbf{b}$  の推定値の共分散行列

$$\text{Cov}[\hat{\mathbf{b}}] = P_e(\mathbf{H}_N^T \mathbf{H}_N)^{-1} \quad (4.23)$$

において、行列  $\mathbf{H}_N^T \mathbf{H}_N$  は、 $m$  系列の性質により、厳密に対角行列

$$\mathbf{H}_N^T \mathbf{H}_N = \text{diag}(PT, PT, \dots, PT) \quad (4.24)$$

となる。従って、その逆行列は、単純に

$$(\mathbf{H}_N^T \mathbf{H}_N)^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{PT}, \frac{1}{PT}, \dots, \frac{1}{PT}\right) \quad (4.25)$$

となり、推定パラメータの平均 2 乗誤差和 MSE は、式 (4.9) より

$$\text{MSE}(\hat{\mathbf{b}}) = \frac{P_e}{N} \text{tr}\{\text{Cov}[\hat{\mathbf{b}}]\} = \frac{P_e}{TP} \quad (4.26)$$

となる。これは、Volterra 核推定において、白色確率系列を入力とする場合の推定精度、すなわち式 (4.19) の上限を与える場合となり、最も高い推定精度が得られる。

次に、システムの真の記憶長に比べ、モデルの記憶長  $R$  を短く設定した場合の影響を考える。こうした場合、一般に、いずれの汎関数級数モデルにおいても、核の推定にバイアス誤差を生ずる。しかし、Volterra、あるいは Wiener 汎関数級数モデルの場合、誤差  $e(t)$  と入力  $x(t)$  の (高次) 相関を調べることにより、こうした誤差を検出することができる。一方、バイナリ汎関数級数モデルの場合、式 (2.26) から分かるように、パラメータベクトルと出力ベクトルが張る線形空間の次元は等しく、また、これらは全単射変換により結ばれているから、誤差ベクトルは、常に、 $\mathbf{e} = \mathbf{0}$  である。したがって、バイナリ核の推定値にバイアス誤差が含まれていたとしても、核推定に用いた入出力データからは、バイアス誤差を検出することは不可能である。したがって、バイアス誤差の検出は、通常、核の推定に用いていない適当な (テスト) 入力に対するシステム応答の実測値を、こうした入力に対するモデル出力と比較することにより行われる。



システムの記憶長  $R$  が未知の場合には、用いるシフトレジスタの段数  $N$  を決めることができない。システムの記憶長を少なく見積もった場合には、シフトレジスタの段数  $N$  以上の過去の入力の影響が表現できず、バイナリ核推定にバイアス誤差を生じることになる。また、入力の系列長は、 $T = 2^N$  で与えられるから、記憶長を1時刻長く見積る毎に、バイナリ核推定に必要な入力の系列長は2倍に増える。したがって、対象とするシステムの記憶長  $R$  の推定は、非常に重要な問題となる。

## 4.4 Wiener 汎関数級数モデル

### 4.4.1 Wiener 核推定

Wiener 核の推定において、式 (2.64) に示した Lee と Schetzen による相互相関法 [49] が最も広く用いられている。Lee-Schetzen 法では、Wiener 核は、システムの入力  $x(t)$ 、出力  $y(t)$  から、

$$\hat{k}_n(i_1, \dots, i_n) = \frac{1}{n! P^n T} \sum_{t=1}^T \left[ \left\{ y(t) - \sum_{\nu=1}^{[n/2]} G_{n-2\nu}[f_{n-2\nu}; x] \right\} \prod_{\mu=1}^n x(t - i_\mu) \right] \quad (4.27)$$

として推定される。また、Wiener 核の非対角要素、すなわち、Wiener 核  $k_n(i_1, \dots, i_n)$  の変数  $i_1, \dots, i_n$  がいずれも互いに等しくならない変数値に対する Wiener 核のみを推定する場合には、式 (2.65) で示したように、単純に、

$$\hat{k}_n(i_1, \dots, i_n) = \frac{1}{n! P^n T} \sum_{t=1}^T y(t) x(t - i_1) \cdots x(t - i_n), \quad i_k \neq i_l, \quad \forall k, l, \quad k \neq l \quad (4.28)$$

として推定することができる。

### 4.4.2 Wiener 核推定に要する計算量

Wiener 核の推定においては、入力の自己相関行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  を対角行列として近似しているため、入力行列  $\mathbf{X}$  と、入出力の相互相関ベクトル  $\mathbf{X}^T \mathbf{y}$  を求めるだけで良く、推定に要する計算量は、

$$O(TNL) + O(TN) + O(N) \quad (4.29)$$

となる。



### 4.4.3 Wiener 核推定精度

Wiener 核推定分散は、既に、第3章にて定式化した。推定分散の近似式 (3.45), (3.46) を再び示せば、次式となる。

$$\text{MSE}(\hat{k}_n) = \frac{1}{T(n!)^2} \left[ \sum_{k=1}^L P^{k-n} c_k + \frac{P_e}{P^n} \right]. \quad (4.30)$$

$$c_k = \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{\min(i,j)}{2} \rfloor} \frac{i! j!}{\left(\frac{i-i+2l}{2}\right)! (i-2l)! l! 2^{(j-i+2l)/2}} \sum_{\nu, \tau, \mu=0}^R h_i(\nu_1, \dots, \nu_{i-2l}, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_l, \tau_l) \cdot h_j(\nu_1, \dots, \nu_{i-2l}, \mu_1, \mu_1, \dots, \mu_{\frac{j-i+2l}{2}}, \mu_{\frac{j-i+2l}{2}}). \quad (4.31)$$

ただし、 $k = 1, 2, \dots, L$

ただし、 $k = (i+j)/2$  とし、 $\min(i, j)$  は、 $i$  と  $j$  のうち小さい方をとることを意味し、 $\sum_{\nu, \tau, \mu=0}^R$  は、 $\nu_1, \dots, \nu_{i-2l}, \tau_1, \dots, \tau_l, \mu_1, \dots, \mu_{(j-i+2l)/2}$  について、0 から  $R$  まで総和をとることを意味する。

また、式 (4.30) は、Wiener 核の変数に対する対称性を仮定した時の推定分散であり、他方、

$$k_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = 0, \quad \tau_i > \tau_j, \quad i < j$$

と定義した場合には、

$$\text{MSE}(k_n) = \frac{1}{T} \left[ \sum_{k=1}^L P^{k-n} c_k + \frac{P_e}{P^n} \right] \quad (4.32)$$

となる。

## 4.5 各汎関数級数モデルの核推定精度、計算量の比較

### 4.5.1 Wiener 核推定誤差の発生メカニズム

第3章において定式化した Wiener 核の推定精度を、Volterra, バイナリ核の推定精度と比較することにより、Wiener 核推定誤差の発生メカニズムについて考察する。Volterra, バイナリ, Wiener 核の平均2乗誤差 MSE は、それぞれ、式 (4.9), (4.26), (4.30) で与えられ、再び示せば、

$$\text{MSE}(\hat{h}) = \frac{P_e}{N} \text{tr}\{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}\} \quad (4.33)$$



$$\text{MSE}(\hat{b}) = \frac{P_e}{TP} \quad (4.34)$$

$$\text{MSE}(\hat{k}_n) = \frac{1}{T} \left[ \sum_{k=1}^L P^{k-n} c_k + \frac{P_e}{P^n} \right] \quad (4.35)$$

となる．それぞれの汎関数級数モデルの核推定誤差の発生メカニズムの理解を容易にするため，線形システムの1次核推定の場合に限定すれば，上式は，それぞれ

$$\text{MSE}(\hat{h}) \geq \frac{P_e}{TP} \quad (4.36)$$

$$\text{MSE}(\hat{b}) = \frac{P_e}{TP} \quad (4.37)$$

$$\text{MSE}(\hat{k}_1) = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^R h_1^2(i) + \frac{P_e}{TP} \quad (4.38)$$

となる．Volterra，バイナリ核に限らず，線形パラメータの最小2乗推定においては，推定精度は，入力の自己相関行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  に依存し，最も高い推定精度は，入力行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  が厳密に対角行列となる場合に得られる．バイナリ核推定は，この最も高い推定精度が得られる場合に相当する．一方，Volterra 核推定では，一般に，入力行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  は，対角行列とはならず，バイナリ核より推定精度が劣る．白色系列を入力として用い，線形システムの1次 Volterra 核，すなわち線形インパルス応答関数を推定する場合においても，行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  は，漸近的に対角行列となるものの，観測時間 ( $T$ ) が有限の場合には，対角行列とはならず，Volterra 核では，バイナリ核の推定精度を越えることはない．

Wiener 汎関数級数モデルにおいては，各次数の汎関数が確率的に直交するため，入力の自己相関行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  は，漸近的に対角行列となる．Wiener 核推定では，こうした入力の自己相関行列を対角行列と置いて推定するため，観測時間 ( $T$ ) が有限の場合に推定誤差を生ずる．これによる推定精度の悪化分が，式 (4.35)，あるいは (4.38) におけるシステムそのものに依存する右辺第1項に相当し，Wiener 核推定誤差の発生メカニズムとなっている．

#### 4.5.2 数値実験

式 (4.36) における Volterra 核の推定精度は，上限が示されているだけで，実際には，どの程度の精度の悪化となって現れるかについては明らかではない．そこで，実際に，適当なシステムに対する数値実験により，それぞれの核の推定精度を比較する．Volterra 核，バイナリ，Wiener 核の推定には，それぞれ，最も高速と考えられる Korenberg の直交化法 [40, 43]，高速 Walsh 変換法 [99]，Lee と Schetzen による相互相関法 [49] を用いた．



推定精度を定量的に比較するためには, Volterra, バイナリ, Wiener 核が等しくなければならない. そこで, これらの核を等しくするため, 次の1次核を持つ線形システム  $S_L$  を設定する.

$$h_1(i) = b_1(i) = k_1(i) = \sin\left(\frac{2\pi i}{N}\right) \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, R \quad (4.39)$$

また, 核の推定精度は, 入力系列のモーメントなどに依存するため, 推定精度を評価する際には, 入力の統計的性質も統一しなければならない. しかし, バイナリ汎関数級数モデルにおいては, 入力が2値に規定されているから, Volterra, Wiener 核推定においても, 2値入力を用いなければならない. そこで, Volterra, Wiener 核推定では, 確率  $1/2$  で  $\pm 1$  の値をとる確率系列を用い, バイナリ核推定では, シフトレジスタにより生成される  $\pm 1$  の値を持つバイナリ  $m$  系列を用いた. 本来, Wiener 核推定には, 正規白色系列を入力としなければならない. しかし, 1次 Wiener 核の推定の場合には, 入力の2次の統計量 (パワーレベル) までしか核の推定に影響を与えないので, このようなバイナリ入力を与えても Wiener 核を推定することができる. また, こうした線形システム  $S_L$  に対して, Volterra, Wiener 汎関数級数モデルでは, パラメータ数は,  $N = R + 1$ , バイナリ汎関数級数モデルでは,  $N = 2^{R+1}$  となる.

#### 推定時間

各汎関数級数モデルの核の推定に要する時間を比較するため, 観測時間を一定 ( $T = 1024$ ) とし, パラメータ数を  $N = 32, 64, 128, 256, 512, 640$  とした時のそれぞれの計算時間 (CPU Time) を計測した. その結果を図 4.1 に示す. 横軸はパラメータ数 ( $N$ ), 縦軸はそれぞれの核の推定時間を表し,  $\circ$ ,  $\triangle$ ,  $\square$  は, それぞれ Volterra, バイナリ, Wiener 核に対する実験値を表す. また, 使用した計算機は, SPARC station 10 である.

さて, Volterra, バイナリ, Wiener 核推定の計算量をパラメータ数  $N$  の関数として, それぞれ,  $C_{Vol}(N)$ ,  $C_{bin}(N)$ ,  $C_{Wie}(N)$  と表せば, 式 (4.3), (4.22), (4.29) と入力が  $\pm 1$  の系列, 1 次汎関数級数モデルを用いることを考慮し,

$$C_{Vol}(N) = N^3 + TN^2 + TN \quad (4.40)$$

$$C_{bin}(N) = N \quad (4.41)$$

$$C_{Wie}(N) = TN + N \quad (4.42)$$

となる. 一方, 両対数軸において, 関数  $C(N)$  の  $N = 32$  から  $N = 1024$  までの傾き  $b$  は,

$$b = \frac{\log C(1024) - \log C(32)}{\log 1024 - \log 32} \quad (4.43)$$



であるから、 $T = 1024$  として、上式の  $C(N)$  の代わりに、 $C_{Vol}(N)$ ,  $C_{bin}(N)$ ,  $C_{Wie}(N)$  を代入して計算すれば、それぞれ 2.12, 1.00, 0.98 となる。これらの数値は、Volterra, バイナリ, Wiener 核推定の計算時間の傾きの理論値であり、図 4.1 に実線で示した。バイナリ核推定では、計算量 (乗算の回数) が非常に少なく、加算など他の処理に要する計算量が多いため、実験値には従わないが、Volterra, Wiener 核推定では、実験値と理論値はよく一致している。

### 推定精度

各汎関数級数モデルの核の推定精度を比較するため、パラメータ数  $N$ 、観測時間  $T$  を一定 ( $N = 256$ ,  $T = 1024$ )、雑音の分散を  $P_e = 0.0, 8.0, 16.0, 32.0$  として核を推定し、それらの平均 2 乗誤差 MSE を求めた。その結果を図 4.2 に示す。横軸は雑音の分散 ( $P_e$ )、縦軸は MSE を表し、○, △, □ は、それぞれ Volterra, バイナリ, Wiener 核に対する実験値を表す。また、推定した MSE の度数分布を重ねて示した。

さて、線形システムに対し、先に述べた入力系列を用いて Volterra, バイナリ, Wiener 核を推定した際の平均 2 乗誤差 MSE は、式 (4.36)~(4.38) に、 $P = 1$ ,  $T = 1024$  を代入すれば、それぞれの核の MSE の理論値が得られる (図 4.2 の実線)。ただし、Volterra 核推定においては、推定精度の上限を示した。

Wiener 核推定では、理論値より実験値の方が多少良い結果となったが、これは、式 (4.30), (4.31) で与えられる理論値が、入力として正規白色系列を仮定しているのに対し、数値実験ではバイナリ系列としており、これらの系列の高次モーメントの違いが影響したものである。以上のことから、各モデルとも実験値と理論値は、ほぼ一致すると考えられる。

## 4.6 まとめ

本章では、Wiener 核の推定精度を、最小 2 乗推定された Volterra, バイナリ核の推定精度と比較し、誤差の発生メカニズムを調査した。その結果、Volterra 核推定などの通常の線形パラメータの最小 2 乗推定と比べ、バイナリ核推定では、入力行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  が厳密に対角行列となり、最も高い推定精度が得られる場合に相当することを示した。一方、Wiener 核推定では、バイナリ核の推定分散より、システムに依存して決まる一定値だけ分散が増加することを明らかにした。この値が、Wiener 核推定誤差の発生メカニズムとなり、最小 2 乗推定に対する推定精度の悪化分となる。

また、Volterra, バイナリ, Wiener 汎関数級数モデルのそれぞれの積分核の推定に要す



る計算量についても考察した。計算量は、高速 Walsh 変換アルゴリズムを利用できるバイナリ汎関数級数モデルが、Volterra, Wiener 汎関数級数モデルに比べ、圧倒的に少なくなる結果が得られた。しかし、バイナリ汎関数級数モデルにおける、表現しうる入力値が2値振幅のクラスに限定されること、入力として用いられるバイナリ m 系列 [63](付録 B) の限られた直交性を考えれば、実際のシステム同定に適用する際には、相当な注意を要するものと考えられる。



図 1.1 各汎関数級数モデルの核推定時間の比較



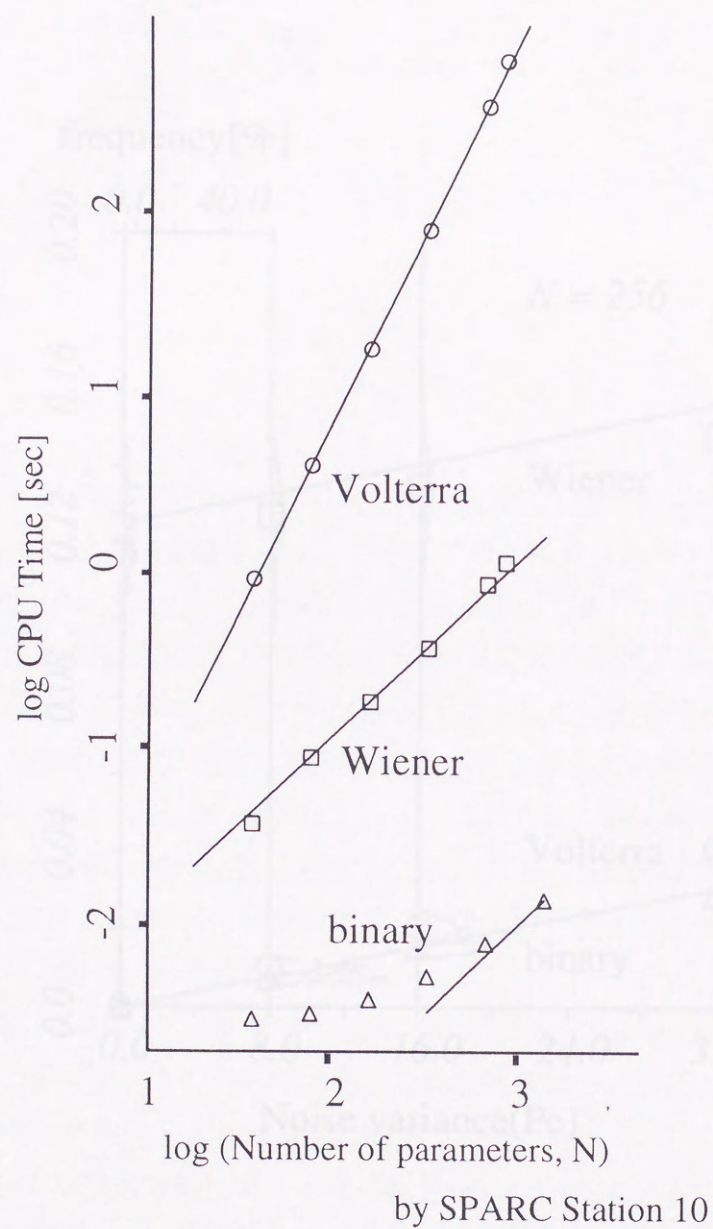


図 4.1 各汎関数級数モデルの核推定時間の比較



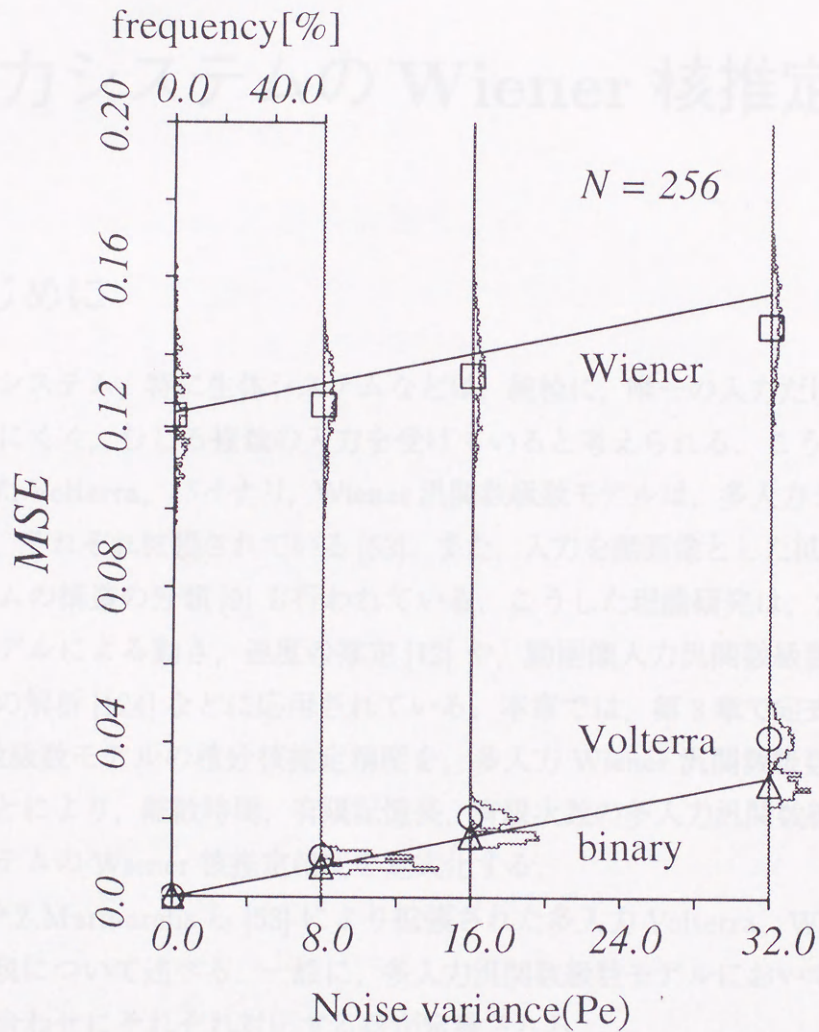


図 4.2 各汎関数級数モデルの核推定精度の比較



## 第 5 章

# 多入力システムの Wiener 核推定精度

### 5.1 はじめに

実際の物理システム，特に生体システムなどは，純粋に，唯一の入力だけで駆動されているとは考えにくく，むしろ複数の入力を受けていると考えられる．こうした立場から，第 2 章で述べた Volterra, バイナリ, Wiener 汎関数級数モデルは，多入力システムを記述し得るように，それぞれ拡張されている [53]．また，入力を動画像とした拡張 [16, 124] や，多入力システムの構造の分類 [9] も行われている．こうした理論研究は，2 入力 Volterra 汎関数級数モデルによる動き，速度の推定 [12] や，動画像入力汎関数級数モデルによる網膜神経細胞の解析 [124] などに応用されている．本章では，第 3 章で定式化した 1 入力 Wiener 汎関数級数モデルの積分核推定精度を，多入力 Wiener 汎関数級数モデルに対して拡張することにより，離散時間，有限記憶長，有限次数の多入力汎関数級数モデルで表現可能なシステムの Wiener 核推定精度を定式化する．

2 節では，P.Z.Marmarelis ら [53] により拡張された多入力 Volterra, Wiener 汎関数級数モデルの表現について述べる．一般に，多入力汎関数級数モデルにおいては，各入力のすべての組み合わせにそれぞれ対応する核が定義される．

3 節では，こうした汎関数級数モデルの核の推定法について述べる．多入力 Volterra 汎関数級数モデルについては，1 入力モデルと同様に，正規方程式を解くことにより核を推定することができる．一方，多入力 Wiener 汎関数級数モデルにおいても，1 入力モデルと同様，Lee と Schetzen[87] による相互相関法を適用することにより，Wiener 核を容易に推定することが可能である．

4 節では，多入力 Wiener 汎関数級数モデルの積分核の推定精度を定式化する．これにより，多入力システムの Wiener 核推定では，推定する核に関係しない入力のパワーレベ



ルを極力小さくし、関係する入力には、0 以外の適当なパワーレベルの信号を与えたとき、推定精度が最大になることを示す。ただし、Wiener 核推定における入力パワーレベルの影響を議論する際、Wiener 核が入力パワーレベルの関数であることを考慮する必要がある。そこで、本章では、1 入力 Wiener 汎関数級数モデルと同様、対象とするシステムを非線形次数が高くなるにしたがい、その成分が次第に減少する、すなわち Wiener 核が Volterra 核とほとんど等しくなり、Wiener 核が入力パワーレベルには依存しないようなシステムのクラスに限定する。

## 5.2 多入力汎関数級数モデル

### 5.2.1 多入力 Volterra 汎関数級数モデル

まず、多入力システムを定義する。システムが  $M$  個のパスからの入力を受けているとき、それぞれのパスに、 $1, 2, \dots, M$  までの番号を割り当て、それぞれ、 $x_1(t), \dots, x_M(t)$  と表す。一方、システムの出力を  $y(t)$  と記述する。この時、1 入力 Volterra 汎関数級数を多入力システムに拡張すれば、次式が得られる [53]。

$$y(t) = \sum_{n=0}^L H_n[\{h\}_n; \{x(t)\}_n] + e(t) \quad (5.1)$$

ただし、

$$H_n[\{h\}_n; \{x(t)\}_n] = \sum_{\zeta_1=1}^M \cdots \sum_{\zeta_n=\zeta_{n-1}+1}^M \sum_{\tau_1, \dots, \tau_n=0}^R h_n^{(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) x_{\zeta_1}(t - \tau_1) \cdots x_{\zeta_n}(t - \tau_n) \quad (5.2)$$

上式において、 $e(t)$  は観測雑音であり、いずれの入力  $x_1(t), \dots, x_M(t)$  とも独立な平均 0、分散  $P_e$  の正規白色過程とする。 $H_n[\{h\}_n; \{x(t)\}_n]$  は、多入力モデルの  $n$  次 Volterra 汎関数、 $h_n^{(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}$  は、その  $n$  次 Volterra 核である。 $\{x(t)\}_n$  は、入力  $x_1(t), \dots, x_M(t)$  から重複も含めて選ぶことのできる  $n$  個の組の集合、 $\{h\}_n$  は、こうした入力の組に対応する Volterra 核の集合を表す。

Volterra 核  $h_n^{(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}$  は、入力  $x_{\zeta_1}, \dots, x_{\zeta_n}$  の相互関係が出力へ及ぼす影響を表わしている。特に、 $\zeta_1 = \dots = \zeta_n = p$  の場合には、入力  $x_p(t)$  が出力  $y(t)$  へ及ぼす影響を表しており、入力  $x_p(t)$ 、出力  $y(t)$  とした 1 入力汎関数級数モデルの核  $h_n$  に等しい。

本章では、式 (5.1), (5.2) で表される離散時間、有限記憶長、有限次数の Volterra 汎関数級数モデルで表現できるシステムのクラスに限定する。



## 5.2.2 多入力 Wiener 汎関数級数モデル

入力  $x_1(t), \dots, x_M(t)$  を, それぞれパワーレベル  $P_1, \dots, P_M$ , 平均0の正規白色過程として各次 Volterra 汎関数  $H_n[\{h\}_n; \{x(t)\}_n; n = 0, 1, \dots$  を直交化すれば, 多入力非線形システムの Wiener 汎関数級数表現が得られる [53].

$$y(t) = \sum_{n=0}^L G_n[\{k\}_n; \{x(t)\}_n] + e(t) \quad (5.3)$$

ここで,  $G_n[\{k\}_n; \{x(t)\}_n]$  は一般に複雑であり, 例えば2入力3次モデルでは, 次式で表される.

$$G_0[\{k\}_0; x_1(t), x_2(t)] = k_0 \quad (5.4)$$

$$G_1[\{k\}_1; x_1(t), x_2(t)] = \sum_{\tau=0}^R k_1^{(1)}(\tau) x_1(t - \tau) + \sum_{\tau=0}^R k_1^{(2)}(\tau) x_2(t - \tau) \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} G_2[\{k\}_2; x_1(t), x_2(t)] = & \sum_{\tau_1, \tau_2=0}^R k_2^{(11)}(\tau_1, \tau_2) x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) - P_1 \sum_{\tau=0}^R k_2^{(11)}(\tau, \tau) \\ & + \sum_{\tau_1, \tau_2=0}^R k_2^{(22)}(\tau_1, \tau_2) x_2(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) - P_2 \sum_{\tau=0}^R k_2^{(22)}(\tau, \tau) \\ & + \sum_{\tau_1, \tau_2=0}^R k_2^{(12)}(\tau_1, \tau_2) x_1(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} G_3[\{k\}_3; x_1(t), x_2(t)] = & \sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3=0}^R k_3^{(111)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) x_1(t - \tau_3) \\ & - 3P_1 \sum_{\tau_1, \tau_2=0}^R k_3^{(111)}(\tau_1, \tau_2, \tau_2) x_1(t - \tau_1) \\ & + \sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3=0}^R k_3^{(222)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_2(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) x_2(t - \tau_3) \\ & - 3P_2 \sum_{\tau_1, \tau_2=0}^R k_3^{(222)}(\tau_1, \tau_2, \tau_2) x_2(t - \tau_1) \\ & + \sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3=0}^R k_3^{(112)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) x_2(t - \tau_3) \\ & - P_1 \sum_{\tau_1, \tau_2=0}^R k_3^{(112)}(\tau_1, \tau_1, \tau_2) x_2(t - \tau_2) \\ & + \sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3=0}^R k_3^{(122)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_1(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) x_2(t - \tau_3) \\ & - P_2 \sum_{\tau_1, \tau_2=0}^R k_3^{(122)}(\tau_1, \tau_2, \tau_2) x_1(t - \tau_1) \end{aligned} \quad (5.7)$$



上式において,  $G_n[\{k\}_n; \{x(t)\}_n]$  は, 多入力モデルの  $n$  次 Wiener 汎関数,  $k_n^{(\zeta_1 \cdots \zeta_n)}$  は, その  $n$  次 Wiener 核である.

### 5.3 多入力汎関数級数モデルの核推定

多入力 Volterra 汎関数級数モデルの核  $h_n^{(\lambda_1 \cdots \lambda_n)}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  の推定は, 1 入力 Volterra 汎関数級数モデルと同様に, 正規方程式を解くことにより, 推定することが可能である.

一方, 多入力 Wiener 汎関数級数モデルの核  $k_n^{(\lambda_1 \cdots \lambda_n)}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  は, Wiener 汎関数の直交性, すなわち  $m \neq n$  に対し,

$$E[G_m[\{k\}_m; \{x(t)\}_m] \cdot G_n[\{k\}_n; \{x(t)\}_n]] = 0$$

となることを利用すれば, 1 入力の場合と同様に,

$$\begin{aligned} \hat{k}_n^{(\lambda_1 \cdots \lambda_n)}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) &= \frac{1}{r_1! \cdots r_M! P_{\lambda_1} \cdots P_{\lambda_n} T} \\ &\quad \sum_{t=1}^T y(t) x_{\lambda_1}(t - \sigma_1) \cdots x_{\lambda_n}(t - \sigma_n) \\ &\quad \text{for } \sigma_i \neq \sigma_j \ (\forall i, j; i \neq j) \end{aligned} \quad (5.8)$$

と推定される. 上式中,  $r_1, \dots, r_M$  は,  $\lambda_1 \cdots \lambda_n$  のうち, 値 1 をとるものが  $r_1$  個, 値 2 をとるものが  $r_2$  個, 同様に, 値  $M$  をとるものが  $r_M$  個であることを意味する. したがって,  $r_1 + \cdots + r_M = n$  となる.

## 5.4 多入力システムの Wiener 核推定精度

### 5.4.1 静的線形システムの 1 次 Wiener 核推定精度

多入力非線形ダイナミカルシステムの Wiener 核推定精度を定式化するための準備として, まず, 記憶を持たない多入力線形システムの 1 次 Wiener 核の推定精度を定式化する.

記憶を持たない多入力線形システムは, 記憶長  $R = 0$  の多入力 1 次 Volterra 汎関数級数モデル (式 (5.1)) で表現できるから, システム応答  $y(t)$  は,

$$y(t) = \sum_{n=1}^N h_1^{(n)} x_n(t) + e(t) \quad (5.9)$$

と表わされる. ここで,  $x_i(t)$  は,

$$\begin{aligned} E[x_i(t)] &= 0, \quad \forall i, t \\ E[x_i(t)x_j(s)] &= \begin{cases} P, & i = j, t = s \\ 0, & \text{others} \end{cases} \end{aligned}$$



を満たす正規白色系列とし,  $e(t)$  は,

$$\begin{aligned} E[e(t)] &= 0 \\ E[e(t)e(s)] &= \begin{cases} P_e, & t = s \\ 0, & \text{others} \end{cases} \\ E[e(t)x_i(s)] &= 0, \quad \forall i, t, s \end{aligned}$$

を満たす白色系列とする. この時, 式 (5.8) より, 1 次 Wiener 核の推定値  $\hat{h}_1^{(i)}$  は,

$$\hat{h}_1^{(i)} = \frac{1}{PT} \sum_{t=1}^T y(t)x_i(t) \quad (5.10)$$

と表される. 上式に, 式 (5.9) を代入すれば,

$$\hat{h}_1^{(i)} = \frac{1}{PT} \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{n=1}^N h_1^{(n)} x_n(t) + e(t) \right\} x_i(t) \quad (5.11)$$

となる. 上式の両辺の期待値が,  $x(t), e(t)$  の性質より

$$E[\hat{h}_1^{(i)}] = \frac{1}{PT} \sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N h_1^{(n)} E[x_n(t)x_i(t)] + E[e(t)x_i(t)] = h_1^{(i)} \quad (5.12)$$

となることから, 推定値  $\hat{h}_1^{(i)}$  は不偏推定量である.

次に, 推定値  $\hat{h}_1^{(i)}$  の分散  $\text{Var}[\hat{h}_1^{(i)}] = E[(\hat{h}_1^{(i)})^2] - E[\hat{h}_1^{(i)}]^2$  を求める. 式 (5.11), (5.12) より,

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{h}_1^{(i)}] &= E[(\hat{h}_1^{(i)})^2] - E[\hat{h}_1^{(i)}]^2 \\ &= \left( \frac{1}{PT} \right)^2 \text{Var} \left[ \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{n=1}^N h_1^{(n)} x_n(t)x_i(t) + e(t)x_i(t) \right\} \right] - (h_1^{(i)})^2 \\ &= \left( \frac{1}{PT} \right)^2 \left\{ \sum_{t_1=1}^T \sum_{t_2=1}^T \sum_{n_1=1}^N \sum_{n_2=1}^N h^{(n_1)} h^{(n_2)} E[x_{n_1}(t_1)x_i(t_1)x_{n_2}(t_2)x_i(t_2)] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t_1=1}^T \sum_{t_2=1}^T E[e(t_1)x_i(t_1)e(t_2)x_i(t_2)] \right\} - (h_1^{(i)})^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

となり, 右辺の最後の式の第 1 項の期待値の計算には, 正規白色系列  $x_i(t)$  の 4 次モーメントの計算が必要であり, pair-wise rule(付録 C) により

$$\begin{aligned} E[x_{n_1}(t_1)x_i(t_1)x_{n_2}(t_2)x_i(t_2)] &= E[x_{n_1}(t_1)x_i(t_1)]E[x_{n_2}(t_2)x_i(t_2)] \\ &\quad + E[x_{n_1}(t_1)x_i(t_2)]E[x_{n_2}(t_2)x_i(t_1)] \\ &\quad + E[x_{n_1}(t_1)x_{n_2}(t_2)]E[x_i(t_1)x_i(t_2)] \\ &= P^2 (\delta_{n_1,i}\delta_{n_2,i} + \delta_{n_1,i}\delta_{n_2,i}\delta_{t_1,t_2} + \delta_{n_1,n_2}\delta_{t_1,t_2}) \end{aligned} \quad (5.14)$$



と展開される. 同様に, 式 (5.13) の右辺第2項は,

$$E[e(t_1)x_i(t_1)e(t_2)x_i(t_2)] = E[x_i(t_1)x_i(t_2)]E[e(t_1)e(t_2)] = PP_e\delta_{t_1,t_2} \quad (5.15)$$

となる. したがって, 式 (5.13) の右辺第1,2項は,

$$\begin{aligned} E[(\hat{h}_1^{(i)})^2] &= \left(\frac{1}{PT}\right)^2 \left\{ \sum_{t_1=1}^T \sum_{t_2=1}^T (h_1^{(i)})^2 P^2 + \sum_{t=1}^T (h_1^{(i)})^2 P^2 + \sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N (h_1^{(n)})^2 P^2 \right\} + \frac{P_e}{PT} \\ &= (h_1^{(i)})^2 + \frac{1}{T} \left( (h_1^{(i)})^2 + \sum_{n=1}^N (h_1^{(n)})^2 \right) + \frac{P_e}{PT} \end{aligned} \quad (5.16)$$

となる. 推定値  $\hat{h}_1^{(i)}$  の分散は, 式 (5.13) に式 (5.16) を代入することにより

$$\text{Var}[\hat{h}_1^{(i)}] = \frac{1}{T} \left( (h_1^{(i)})^2 + \sum_{n=1}^N (h_1^{(n)})^2 \right) + \frac{P_e}{PT} \quad (5.17)$$

となる. ゆえに, 平均2乗誤差 MSE は,

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Var}[\hat{h}_1^{(i)}] \\ &= \frac{1}{T} \left( 1 + \frac{1}{N} \right) \sum_{i=1}^N (h_1^{(i)})^2 + \frac{P_e}{PT} \end{aligned} \quad (5.18)$$

となる.

#### 5.4.2 動的非線形システムの Wiener 核推定精度

多入力 Wiener 汎関数級数モデルにおける Wiener 核の推定精度を定式化する. 1 入力モデルにおいて定式化したときと同様, 対象とするシステムを離散時間, 有限記憶長, 有限次数の多入力 Volterra 汎関数級数で表現できるシステムのクラスに限定する.

式 (5.1) を式 (5.8) に代入し, 両辺の期待値をとることにより,

$$\begin{aligned} E[\hat{k}_n^{(\lambda_1 \dots \lambda_n)}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)] &= \frac{1}{Tr_1! \dots r_M! P_{\lambda_1} \dots P_{\lambda_n}} \\ &\quad \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\zeta_i}^M \sum_{t=1}^T \sum_{\tau_1, \dots, \tau_i=0}^R h_i^{(\zeta_1 \dots \zeta_i)}(\tau_1, \dots, \tau_i) \\ &\quad \cdot E[x_{\zeta_1}(t - \tau_1) \dots x_{\zeta_i}(t - \tau_i) x_{\lambda_1}(t - \sigma_1) \dots x_{\lambda_n}(t - \sigma_n)] \end{aligned} \quad (5.19)$$

となる. 上式において,  $E[\cdot]$  は, 期待値を意味し, 入力  $x_i(t)$  が正規白色過程であることから, pair-wise rule(付録 C) を用いて展開することができる. 実際に, 2 入力システム



の場合について書き下すと次式になる.

$$E[k_n^{(\lambda_1 \dots \lambda_n)}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\zeta_{n+2m}}^2 \frac{q_1! q_2! P_1^{\frac{q_1-r_1}{2}} P_2^{\frac{q_2-r_2}{2}}}{r_1! r_2! \left(\frac{q_1-r_1}{2}\right)! \left(\frac{q_2-r_2}{2}\right)! 2^m} \sum_{\substack{\tau_1, \dots, \tau_{\frac{q_1-r_1}{2}}, \tau_{q_1+1}, \dots, \tau_{\frac{q_1+q_2-r_2}{2}}=0 \\ h_{n+2m}^{(\zeta_1 \dots \zeta_{n+2m})}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_{\frac{q_1-r_1}{2}}, \tau_{\frac{q_1-r_1}{2}}, \\ \sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}, \tau_{q_1+1}, \tau_{q_1+1}, \dots, \\ \tau_{\frac{q_1+q_2-r_2}{2}}, \tau_{\frac{q_1+q_2-r_2}{2}}, \sigma_{r_1+1}, \dots, \sigma_{r_1+r_2})}} \quad (5.20)$$

一方, Wiener 核の推定分散は, 同様に式 (5.1) を式 (5.8) に代入し, 両辺の分散を計算することにより,

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{k}_n^{(\lambda_1 \dots \lambda_n)}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)] &= \frac{1}{T(r_1! \dots r_M! P_{\lambda_1} \dots P_{\lambda_n})^2} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\zeta_i}^M \sum_{\xi_j}^M \sum_{\substack{\tau_1, \dots, \tau_i=0 \\ \mu_1, \dots, \mu_j=0}}^R h_i^{(\zeta_1 \dots \zeta_i)}(\tau_1, \dots, \tau_i) h_j^{(\xi_1 \dots \xi_j)}(\mu_1, \dots, \mu_j) \right. \\ &\quad \sum_{s=-R}^R \sum_{t=1}^T \text{Cov}[x_{\lambda_1}(t - \sigma_1) \dots x_{\lambda_p}(t - \sigma_n) \\ &\quad \cdot x_{\zeta_1}(t - \tau_1) \dots x_{\zeta_i}(t - \tau_i), \\ &\quad x_{\lambda_1}(t + s - \sigma_1) \dots x_{\lambda_n}(t + s - \sigma_n) \\ &\quad \cdot x_{\xi_1}(t + s - \mu_1) \dots x_{\xi_j}(t + s - \mu_j)] + P_e \Big\} \quad (5.21) \\ &\text{for } \sigma_i \neq \sigma_j \ (\forall i, j; i \neq j) \end{aligned}$$

となる. 上式中,  $\text{Cov}[\cdot, \cdot]$  は, 共分散を表しており,  $\text{Cov}[A, B] = E[AB] - E[A]E[B]$  である. 実際に,  $M$  入力システムの場合,

$$\begin{aligned} h_n^{(\lambda_1 \dots \lambda_n)}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_n) &= 0, \\ \forall n, \varsigma_i; \varsigma_i \neq \varsigma_j; \forall i, j; 0 \leq i, j \leq n, i \neq j \end{aligned} \quad (5.22)$$

となる任意の点  $(\varsigma_1, \dots, \varsigma_n)$  について計算すると次式になる.

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{k}_n^{(\lambda_1 \dots \lambda_n)}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_n)] &= \frac{1}{T(r_1! \dots r_M!)^2 P_{\lambda_1} \dots P_{\lambda_n}} \left\{ \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{\zeta_i}^M \sum_{\xi_j}^M \sum_{\substack{\tau_1, \dots, \tau_i=0 \\ \mu_1, \dots, \mu_j=0}}^R h_i^{(\zeta_1 \dots \zeta_i)}(\tau_1, \dots, \tau_i) h_j^{(\xi_1 \dots \xi_j)}(\mu_1, \dots, \mu_j) \right. \\ &\quad \cdot E[x_{\zeta_1}(\tau_1) \dots x_{\zeta_i}(\tau_i) x_{\xi_1}(\mu_1) \dots x_{\xi_j}(\mu_j)] + P_e \Big\} \quad (5.23) \end{aligned}$$



上式の期待値  $E[\cdot]$  を pair-wise rule(付録 C) を利用して, 2 入力 3 次システムの場合について展開すると次式となる.

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{k}_n^{(\lambda_1 \dots \lambda_n)}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_n)] &= \frac{1}{T(r_1!r_2!)^2 P_1^{r_1} P_2^{r_2}} \\ &\quad \left\{ C_1^{(1)} P_1 + C_2^{(11)} P_1^2 + C_3^{(111)} P_1^3 \right. \\ &\quad + C_1^{(2)} P_2 + C_2^{(22)} P_2^2 + C_3^{(222)} P_2^3 \\ &\quad \left. + C_2^{(12)} P_1 P_2 + C_3^{(112)} P_1^2 P_2 + C_3^{(122)} P_1 P_2^2 + P_e \right\} \quad (5.24) \end{aligned}$$

但し,

$$C_1^{(1)} = \sum_{\tau=0}^R h_1^{(1)}(\tau)^2 \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} C_2^{(11)} &= 2 \sum_{\tau_1, \tau_2=0}^R h_2^{(11)}(\tau_1, \tau_2)^2 \\ &\quad + \sum_{\tau, \mu=0}^R h_2^{(11)}(\tau, \tau) h_2^{(11)}(\mu, \mu) \\ &\quad + 6 \sum_{\tau, \mu=0}^R h_1^{(1)}(\tau) h_3^{(111)}(\tau, \mu, \mu) \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} C_3^{(111)} &= 6 \sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3=0}^R h_3^{(111)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)^2 \\ &\quad + 9 \sum_{\tau, \mu, \nu=0}^R h_3^{(111)}(\tau, \tau, \nu) h_3^{(111)}(\mu, \mu, \nu) \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$C_1^{(2)} = \sum_{\tau=0}^R h_1^{(2)}(\tau)^2 \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} C_2^{(22)} &= 2 \sum_{\tau_1, \tau_2=0}^R h_2^{(22)}(\tau_1, \tau_2)^2 \\ &\quad + \sum_{\tau, \mu=0}^R h_2^{(22)}(\tau, \tau) h_2^{(22)}(\mu, \mu) \\ &\quad + 6 \sum_{\tau, \mu=0}^R h_1^{(2)}(\tau) h_3^{(222)}(\tau, \mu, \mu) \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} C_3^{(222)} &= 6 \sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3=0}^R h_3^{(222)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)^2 \\ &\quad + 9 \sum_{\tau, \mu, \nu=0}^R h_3^{(222)}(\tau, \tau, \nu) h_3^{(222)}(\mu, \mu, \nu) \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$C_2^{(12)} = \sum_{\tau_1, \tau_2=0}^R h_2^{(12)}(\tau_1, \tau_2)^2$$



$$\begin{aligned}
& +2 \sum_{\tau, \mu=0}^R h_2^{(11)}(\tau, \tau) h_2^{(22)}(\mu, \mu) \\
& +2 \sum_{\tau, \mu=0}^R h_1^{(1)}(\tau) h_3^{(122)}(\tau, \mu, \mu) \\
& +2 \sum_{\tau, \mu=0}^R h_1^{(2)}(\tau) h_3^{(112)}(\mu, \mu, \tau)
\end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}
C_3^{(112)} &= 2 \sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3=0}^R h_3^{(112)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)^2 \\
& + \sum_{\tau, \mu, \nu=0}^R h_3^{(112)}(\tau, \tau, \nu) h_3^{(112)}(\mu, \mu, \nu) \\
& + 6 \sum_{\tau, \mu, \nu=0}^R h_3^{(111)}(\tau, \tau, \mu) h_3^{(122)}(\mu, \nu, \nu)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned}
C_3^{(122)} &= 2 \sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3=0}^R h_3^{(122)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)^2 \\
& + \sum_{\tau, \mu, \nu=0}^R h_3^{(122)}(\tau, \nu, \nu) h_3^{(122)}(\tau, \mu, \mu) \\
& + 6 \sum_{\tau, \mu, \nu=0}^R h_3^{(112)}(\tau, \tau, \nu) h_3^{(222)}(\nu, \mu, \mu)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

これらの式より、相互相関法による多入力 Wiener 汎関数級数モデルの Wiener 核推定分散は、1 入力モデルの場合と同様に、観測時間  $T$  に反比例し、その比例定数はそれぞれの入力のパワーレベル  $P_1, P_2$  の有理式となり、その係数  $C_n^{(\lambda_1 \dots \lambda_n)}$  は、推定する多入力システムの Volterra 核、観測雑音の分散  $P_e$  の関数として表されることが分かる。

### 5.4.3 数値実験

#### Wiener 核推定分散の実験値と理論値の比較

前節で導出した多入力 Wiener 汎関数級数モデルにおける Wiener 核推定の分散式 (5.21) が妥当であることを検証するため、計算機による数値実験を行った。推定された核の期待値は、Volterra 核から Wiener 核への変換公式として既に与えられていることから、分散の検証のみを行った。分散式は、式 (5.1), (5.2) で表現されるシステムを仮定して導出していることから、まず、次式で与えられる Volterra 核を有する 2 入力 3 次システム  $S_M$  を設定する。

$$h_1^{(1)}(\tau_1) = \exp\left(-\frac{\tau_1^2}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\tau_1\right)$$



$$\begin{aligned}
h_1^{(2)}(\tau_1) &= \exp\left(-\frac{\tau_1^2}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\tau_1\right) \\
&\quad \text{for } 0 \leq \tau_1 \leq 9 \\
h_2^{(11)}(\tau_1, \tau_2) &= \exp\left(-\frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{5}\right) \\
h_2^{(22)}(\tau_1, \tau_2) &= \exp(-\tau_1 - \tau_2) \\
h_2^{(12)}(\tau_1, \tau_2) &= \sin\left(\frac{\pi}{12}\tau_1\right) \exp\left(-\frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{4}\right) \\
&\quad \text{for } 0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq 9 \\
h_3^{(111)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \cos\left(\frac{\pi}{75}(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)\right) \exp\left(-1.2(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)\right) \\
h_3^{(222)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \sin\left(\frac{\pi}{75}(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)\right) \exp\left(-(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)\right) \\
h_3^{(112)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \cos\left(\frac{\pi}{10}\tau_3 + \frac{\pi}{6}\right) \exp(-2\tau_3) \exp(-\tau_1^2 - \tau_2^2) \\
h_3^{(122)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \sin\left(\frac{\pi}{5}\tau_1 + \frac{\pi}{4}\right) \exp(-2\tau_1) \exp(-\tau_2^2 - \tau_3^2) \\
&\quad \text{for } 0 \leq \tau_1, \tau_2, \tau_3 \leq 6 \\
h_n &= 0 \quad \text{for } n = 0, n > 3
\end{aligned}$$

システム  $S_M$  では、式 (5.24) の係数は、それぞれ

$$\begin{aligned}
C_1^{(1)} &= 1.49, & C_2^{(11)} &= 18.72, \\
C_3^{(111)} &= 19.45, & C_1^{(2)} &= 0.26, \\
C_2^{(22)} &= 4.57, & C_3^{(222)} &= 5.78, \\
C_2^{(12)} &= 9.10, & C_3^{(112)} &= 8.49, \\
C_3^{(222)} &= 5.55
\end{aligned}$$

と計算される。

数値実験は、計算機によりデータ長  $T = 1000$  の正規白色過程を入力の数  $M = 2$  だけ独立に生成し、式 (5.1), (5.2) を用いてシステム  $S_M$  の出力  $y(t)$  を計算する。得られた入出力データから相互相関法 (式 (5.8)) により Wiener 核を推定する。これらを 1000 回試行して分散を推定し、実験値とする。一方、システム  $S_M$  の Wiener 核推定分散を式 (5.21) から計算し、理論値とする。

入力  $x_2(t)$  のパワーレベル  $P_2 = 1.0$ 、観測雑音  $e(t)$  のパワーレベル  $P_e = 10.0$  と一定にした時の各次数、各入力に対応する Wiener 核の推定分散の実験値と理論値を比較した (図 5.1)。図 5.1 において、横軸は入力  $x_1(t)$  のパワーレベル  $P_1$  であり、実線は理論値、●印は実験値を表している。また、各図の複数の曲線は、Wiener 核の異なる変数に対応している。いずれも、実験値と理論値はよく一致しており、本研究で導出した分散式 (5.21) は、妥当であることが判る。



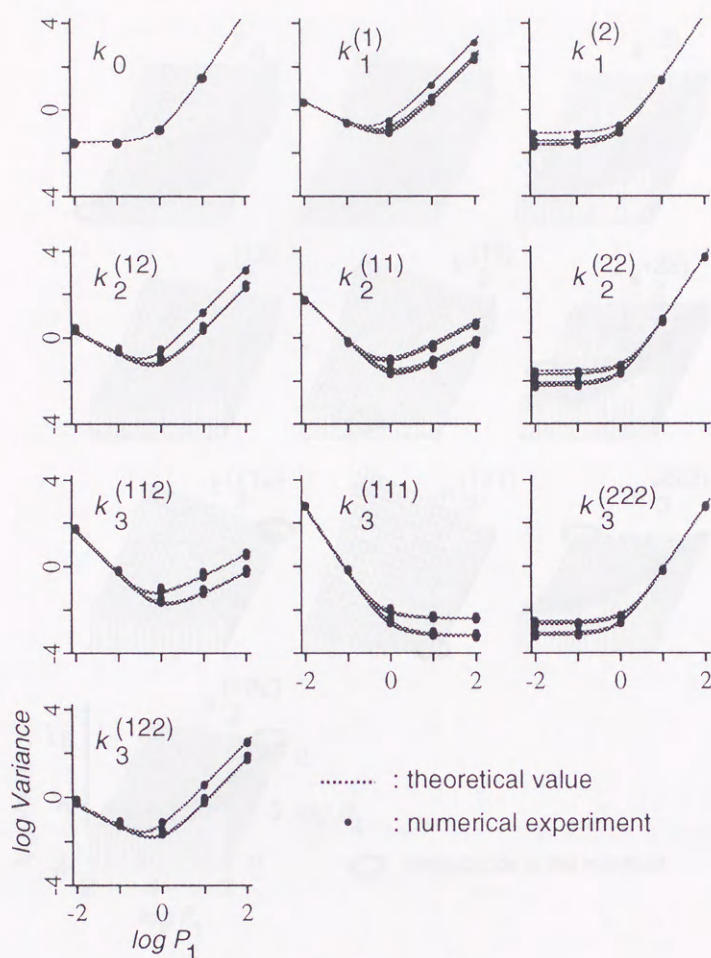


図 5.1 Wiener 核推定分散の理論値と実験値の比較

### 入力パワーレベルの Wiener 核推定分散への影響

次に、入力  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  のそれぞれのパワーレベル  $P_1$ ,  $P_2$  の Wiener 核推定精度への影響を調べる。  $P_1$ ,  $P_2$  を変数として、各入力、各次数に対するシステム  $S_M$  の Wiener 核推定分散の理論値を図 5.2 に示す。丸印は、各 Wiener 核の推定分散が最小になる点を示している。この時の各入力のパワーレベルは、表 5.1 のようになる。これより、推定する Wiener 核に関係のない入力では、入力パワーレベルが小さいほど推定精度が高くなり、一方、関係する入力では、0 以外の適切なパワーレベルの時、推定精度が最大となることが分かる。特殊な場合として、システムの持つ最大次数 (システム  $S_M$  では 3 次) の Wiener 核推定では、関係する入力の最適なパワーレベルが大きい程、推定精度が高くなる。

ただし、Wiener 核推定における入力パワーレベルの影響を議論する際、Wiener 核が



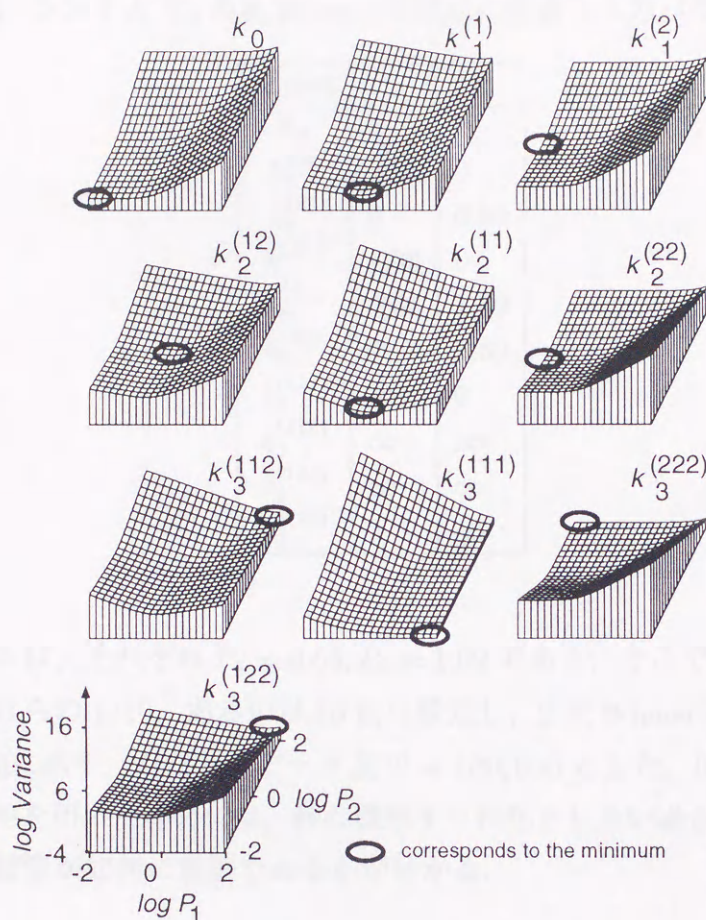


図 5.2 入力パワーレベル  $P_1, P_2$  に対する Wiener 核推定分散

入力パワーレベルの関数であることを考慮する必要がある。そこで、本章では、1 入力 Wiener 汎関数級数モデルと同様、対象とするシステムを非線形次数が高くなるにしたがい、その成分が次第に減少する、すなわち Wiener 核が Volterra 核とほとんど等しくなり、Wiener 核が入力パワーレベルには依存しないようなシステムのクラスに限定する。

#### 推定された Wiener 核の形状からの比較

図 5.2 は、Wiener 核推定に最適な入力パワーレベルの組が存在することを明確に示しているが、従来の Wiener 核推定では、入力パワーレベルの設定に注意が払われることはなく、不適切なパワーレベルが実験に使用されている可能性があった。そこで、不適切なパワーレベルと、最適なパワーレベルを用いて Wiener 核を推定したときの精度の違いを実際に推定した Wiener 核の形状から比較する。例えば、2 次 Wiener 核  $k_2^{(12)}$  では、最適な



表 5.1 システム  $S_M$  の各 Wiener 核推定に最適な入力パワーレベル

kernel	$P_1$	$P_2$
$k_0$	0	0
$k_1^{(1)}$	0.51	0
$k_1^{(2)}$	0	0.84
$k_2^{(11)}$	1.03	0
$k_2^{(12)}$	0.66	1.09
$k_2^{(22)}$	0	1.52
$k_3^{(111)}$	$\infty$	0
$k_3^{(112)}$	$\infty$	$\infty$
$k_3^{(122)}$	$\infty$	$\infty$
$k_3^{(222)}$	0	$\infty$

入力パワーレベルは、それぞれ  $P_1 = 0.66, P_2 = 1.09$  である。そこで、それぞれの入力パワーレベルをそれらの  $1/10$ 、あるいは  $10$  倍に設定し、2 次 Wiener 核  $k_2^{(12)}$  を推定したときの結果を図 5.3 に示す。ただし、データ長  $T = 100,000$  とした。図 5.3 より、不適切な入力パワーレベルを用いた場合には、核の概形すら判然としない場合もあり、入力パワーレベルの適切な設定が如何に重要であるかが分かる。

#### 5.4.4 考察

##### 一般のシステムにおける最適入力パワーレベル

一般に、すべての物理システムの Wiener 核推定において、最適な入力パワーレベルが存在することを示すため、まず、式 (5.25)~(5.33) で表される有理式の係数の正負を考える。式 (5.25), (5.28) より、 $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}$  は、非負である。また、式 (5.27) の右辺第 1 項は、任意の  $h_3^{(111)}$  に対して非負であり、第 2 項は、

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\tau, \mu, \nu=0}^R h_3^{(111)}(\tau, \tau, \nu) h_3^{(111)}(\mu, \mu, \nu) \\
 &= \sum_{\nu=0}^R \left\{ \sum_{\tau=0}^R h_3^{(111)}(\tau, \tau, \nu) \right\} \left\{ \sum_{\mu=0}^R h_3^{(111)}(\mu, \mu, \nu) \right\} \\
 &= \sum_{\nu=0}^R \left\{ \sum_{\tau=0}^R h_3^{(111)}(\tau, \tau, \nu) \right\}^2 \geq 0
 \end{aligned}$$



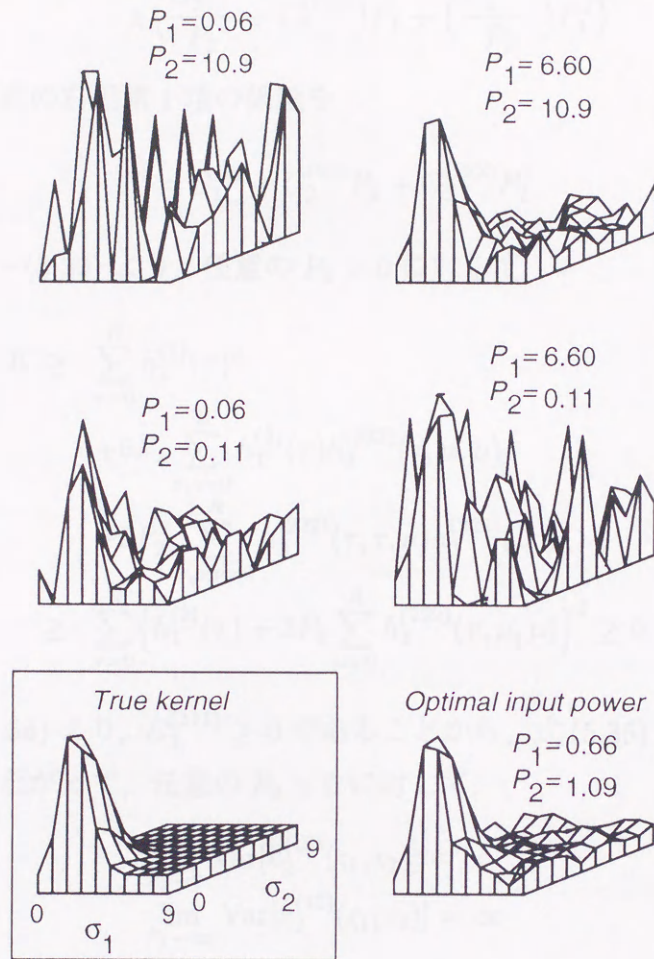


図 5.3 異なる入力パワーレベルにより推定された 2 次 Wiener 核の比較

となることから、 $C_3^{(111)}$  は非負である。同様に、 $C_3^{(222)}$  も非負である。一般に、 $L$  次システムでは、

$$C_1^{(i)} \geq 0, \quad C_L^{(i \dots i)} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (5.34)$$

となることが示される。また、他の係数に関しては、正負いずれの値もととり得る。

次に、3 次システムの 2 次 Wiener 核  $k_2^{(12)}$  の推定を例に考える。式 (5.24) を  $P_2$  を定数として、 $P_1$  について昇べきの順に並び換えると

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{k}_2^{(12)}(s_1, s_2)] &= \frac{1}{T} \left\{ \left( C_1^{(2)} + C_2^{(22)} P_2 + C_3^{(222)} P_2^2 \right) \frac{1}{P_1} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{C_1^{(1)}}{P_2} + C_2^{(12)} + P_e + C_3^{(122)} P_2 \right) \right\} \end{aligned}$$



$$+ \left( \frac{C_2^{(11)}}{P_2} + C_3^{(112)} \right) P_1 + \left( \frac{C_3^{(111)}}{P_2} \right) P_1^2 \quad (5.35)$$

となる。ここで、上式の右辺第1項の係数を

$$K = C_1^{(2)} + C_2^{(22)} P_2 + C_3^{(222)} P_2^2$$

とおけば、式(5.28)~(5.30)より、任意の  $P_2 > 0$  に対して

$$\begin{aligned} K &\geq \sum_{\tau=0}^R h_1^{(2)}(\tau)^2 \\ &\quad + 6P_2 \sum_{\tau, \mu=0}^R h_1^{(2)}(\tau) h_3^{(222)}(\tau, \mu, \mu) \\ &\quad + 9P_2^2 \sum_{\tau, \mu, \nu=0}^R h_3^{(222)}(\tau, \tau, \nu) h_3^{(222)}(\mu, \mu, \nu) \\ &\geq \sum_{\tau=0}^R \left\{ h_1^{(2)}(\tau) + 3P_2 \sum_{\mu=0}^R h_3^{(222)}(\tau, \mu, \mu) \right\}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

となる。一方、式(5.34)より、 $C_3^{(111)} \geq 0$  であることから、式(5.35)の右辺第4項の係数は、非負である。したがって、任意の  $P_2 > 0$  に対して、

$$\begin{aligned} \lim_{P_1 \rightarrow 0} \text{Var}[\hat{k}_2^{(12)}(\varsigma_1, \varsigma_2)] &= \infty \\ \lim_{P_1 \rightarrow \infty} \text{Var}[\hat{k}_2^{(12)}(\varsigma_1, \varsigma_2)] &= \infty \end{aligned}$$

となる。同様に、任意の  $P_1 > 0$  に対して、

$$\begin{aligned} \lim_{P_2 \rightarrow 0} \text{Var}[\hat{k}_2^{(12)}(\varsigma_1, \varsigma_2)] &= \infty \\ \lim_{P_2 \rightarrow \infty} \text{Var}[\hat{k}_2^{(12)}(\varsigma_1, \varsigma_2)] &= \infty \end{aligned}$$

となり、 $P_1, P_2 > 0$  において、有理式の連続性から、 $\text{Var}[\hat{k}_2^{(12)}(\varsigma_1, \varsigma_2)]$  は、 $P_1, P_2$  に関する下に凸の関数となり、最小値が存在する。こうした考察は、任意のシステムに対しても成り立つ。ただし、3次システムの場合、式(5.35)の右辺第2,3項の符号に関わらず、極小値は唯一つ(最小値)であるが、4次以上のシステムに対しては、推定分散を表す有理式の項数が増えるため、複数の極小値を持つことも有り得る。

#### 複数の核を推定する場合の最適入力パワーレベル

これまでは、それぞれの核のみを推定する場合の最適な入力パワーレベルについて述べたが、一般には、2つの1次核  $k_1^{(1)}, k_1^{(2)}$  を共に推定する、あるいは1,3次核を共に推定



する等、複数の核を同時に推定することも有り得る。こうした場合の最適な入力パワーレベルの決定には、各 Wiener 核推定分散の重み付き和

$$\text{Var}[\hat{k}] = w_0 \text{Var}[\hat{k}_0] + w_1^{(1)} \text{Var}[\hat{k}_1^{(1)}] + \dots \quad (5.36)$$

を評価関数とし、最適なパワーレベルを決定すれば良い。

## 5.5 まとめ

実際の物理システム、特に生体システムなどは、唯一の入力だけで駆動されているとは考えにくく、むしろ複数の入力を受けていると考えられる。そこで、本章では、第3章で定式化した1入力 Wiener 汎関数級数モデルの積分核推定精度を、多入力 Wiener 汎関数級数モデルについて拡張した。その結果、Wiener 核の推定分散は入出力のデータ長(観測時間)に反比例し、その比例定数はそれぞれの入力のパワーレベルの有理多項式となり、更に、その係数は、システムの Volterra 核、観測雑音の分散の関数となることを示した。

また、定式化した Wiener 核推定分散式を解析した結果、多入力非線形システムの Wiener 核推定では、核推定精度を最大にする最適な入力パワーレベルが存在することが明らかになった。具体的には、多入力システムの Wiener 核推定では、推定する核に関係しない入力のパワーレベルを極力小さくし、関係する入力には、0以外の適当なパワーレベルとする時、推定精度を最大にすることができる。実際に、不適切なパワーレベルが用いられた時、核推定精度が悪化する様子を数値実験により具体的に示し、従来、Wiener 核推定において、適当に決められていた入力パワーレベルは、本来、適切に決定されるべきであることを示した。本定式化により、こうした最適な入力パワーレベルを定量的に決定することが可能になった。



## 第 6 章

# 入力パワーレベル可変 Wiener 核推定法

### 6.1 はじめに

Wiener 核推定において最適な入力パワーレベルが存在し、精度良く Wiener 核を推定するためには、入力パワーレベルをこうした最適値に設定する必要があることを第 3 章で示した。しかしながら、最適入力パワーレベルは、システムの Volterra 核の関数であることから、システムに関する先見的な情報がない場合には、その値を決定することができない。ところで、相互依存関係にある複数の推定量を交互に反復推定することにより、それらの推定精度を向上させる手法として緩和法、または bootstrap 法 [19, 75, 85] が知られている。そこで、本章では、こうした緩和法を最適入力パワーレベルと Wiener 核の推定に適用し、Wiener 核の推定精度を改善する手法を提案する。

この際、Wiener 核は入力パワーレベルの値により変化するため、以下の制約を導入する。式 (2.71) で示したように、 $n$  次 Wiener 核は、 $n$  次 Volterra 核に加え、 $n+2, n+4, \dots$  次 Volterra 核の影響を受けている。しかしながら、自然界に存在する多くの物理システムでは、次数が高くなるに従い、その成分は減少するものと考えることができる。そこで、 $n$  次 Volterra 核に比べ、 $n+2, n+4, \dots$  次 Volterra 核が十分小さくなり、 $n$  次 Wiener 核が  $n$  次 Volterra 核にほとんど等しくなるようなシステムのクラスに限定して議論を進める。

### 6.2 入力パワーレベル可変 Wiener 核推定法のアルゴリズム

Wiener 核推定分散の近似式は、式 (3.45), (3.46) で表される。以下に、再度示す。

$$\text{Var}[\hat{k}_n] = \frac{1}{T(n!)^2} \left[ \sum_{k=1}^L P^{k-n} c_k + \frac{P_e}{P^n} \right]. \quad (6.1)$$



$$c_k = \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{\min(i,j)}{2} \rfloor} \frac{i! j!}{\left(\frac{j-i+2l}{2}\right)! (i-2l)! l! 2^{(j-i+2l)/2}} \\ \sum_{\nu, \tau, \mu=0}^R h_i(\nu_1, \dots, \nu_{i-2l}, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_l, \tau_l) \\ \cdot h_j(\nu_1, \dots, \nu_{i-2l}, \mu_1, \mu_1, \dots, \mu_{\frac{j-i+2l}{2}}, \mu_{\frac{j-i+2l}{2}}).$$

ただし,  $k = 1, 2, \dots, L$

ただし,  $k = (i+j)/2$  とし,  $\min(i, j)$  は,  $i$  と  $j$  のうち小さい方をとることを意味し,  $\sum_{\nu, \tau, \mu=0}^R$  は,  $\nu_1, \dots, \nu_{i-2l}, \tau_1, \dots, \tau_l, \mu_1, \dots, \mu_{(j-i+2l)/2}$  について, 0 から  $R$  まで総和をとることを意味する.

式 (6.1) は, 各次数の Wiener 核に対する推定分散を表しているから, 精度を要求する割合に応じて重み  $w_i$  を定め, 全ての次数の核の分散の重み付き平均

$$\text{Var}[\hat{k}] = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \text{Var}[\hat{k}_i]$$

をそのシステムに対する Wiener 核推定精度の評価値とする. 以後, この評価値を最小にする問題に絞って話を進める.

Wiener 核推定にともない, 緩和法により最適な入力パワーレベルを推定し, パワーレベルを動的に変化させる Wiener 核推定法 (以後, 入力パワーレベル可変 Wiener 核推定法と呼ぶ) の手順を定める. 一般に, 緩和法による推定は非線形最適化問題であり, 最も効率の良い手順を系統的に構成することは現在のところ非常に困難である. そこで, 本章では, 以下の手順にしたがって入力パワーレベルを可変とすれば推定精度が従来法に比して向上することを示す.

**step 1**  $n = 1$  とする. また, 適当に入力パワーレベルの初期値  $P_{(1)}$  を決める.

**step 2** パワーレベル  $P_{(n)}$ , データ長  $T_0$  の入力を用いて Wiener 核  $k(P_{(n)}, T_0)$  を推定する.

**step 3** Wiener 核から Volterra 核への変換公式 (2.80) を用いて,  $k(P_{(n)}, T_0)$  から  $h(P_{(n)}, T_0)$  に変換する. ただし, Volterra 核と Wiener 核がほとんど等しくなるようなシステムを仮定しているので,  $h(P_{(n)}, T_0) = k(P_{(n)}, T_0)$  となり, 実際には変換する必要がない. しかし, 本章では, 形式的に区別して表現しておく.

**step 4** 次式により, 推定した核  $h(P_{(n)}, T_0)$  とこれまでに推定した核  $h_{(n-1)}$  の平均  $h_{(n)}$  を計算する.

$$h_{(n)} = \frac{h(P_{(n)}, T_0) + \alpha(n-1)h_{(n-1)}}{1 + \alpha(n-1)} \quad (6.2)$$



step 5 式 (6.1) を用いて, Volterra 核  $h_{(n)}$  から, 係数  $c_1, c_2, \dots$  を推定する.

step 6 係数  $c_1, c_2, \dots$  から, 最適な入力パワーレベル  $P_{(n+1)}$  を推定する.

step 7  $n$  を 1 だけインクリメントする.

step 8 step 2 以下を繰り返す.

上記の手順中に用いた記号等を説明する.  $T_0$  は, Wiener 核と最適な入力パワーレベルを交互に反復推定する際, 1 反復あたりの観測時間 (以後, 区間観測時間と呼ぶ) を表し, 常に一定とする. したがって, 観測時間は  $T = nT_0$  となる.  $k(P_{(n)}, T_0)$  は, パワーレベル  $P_{(n)}$ , データ長  $T_0$  の入力を用いて推定された各次数の Wiener 核の集合  $\{k_0, k_1(\sigma_1), \dots\}$  を表し,  $h(P_{(n)}, T_0)$  は, Wiener 核から Volterra 核への変換公式 (2.80) により  $k(P_{(n)}, T_0)$  から変換された各次数の Volterra 核の集合  $\{h_0, h_1(\sigma_1), \dots\}$  を表す.  $h_{(n)}$  は,  $n$  回目の反復までに推定された Volterra 核の平均である.  $\alpha(n-1)$  (ただし,  $\alpha(0)=0, \alpha(n) \geq 0; n=1, 2, \dots$  とする) は,  $n$  回目の反復で推定された核  $h(P_{(n)}, T_0)$  と,  $n-1$  回目までに推定された核の平均  $h_{(n-1)}$  との重み付き平均において,  $h(P_{(n)}, T_0)$  に対する  $h_{(n-1)}$  の重みである.

さて, 従来の入力パワーレベル一定の Wiener 核推定法では, 各区間ごとに推定された核の精度はすべて等しく, 重み関数  $\alpha(n)$  は, 単純に  $\alpha(n) = n$  である (式 (6.11) を参照). しかし, 提案法では, 用いる入力パワーレベルが各区間ごとに異なるため, それぞれの時間で推定された核の精度が異なり, 精度の変化に応じた重み関数  $\alpha(n)$  を選択しなければならない.

### 6.3 重み関数 $\alpha(n)$ の条件

式 (6.2) において, 核  $h_{(n)}$  の分散を最小にするためには, 重み関数  $\alpha(n)$  が次式を満たすことが必要十分条件である.

$$\alpha(n-1) = \frac{\text{Var}[h(P_{(n)}, T_0)]}{\text{Var}[h_{(n-1)}]} \quad (6.3)$$

(証明)  $\beta = \frac{1}{1 + \alpha(n-1)}$  とおくと, 式 (6.2) は,  $h_{(n)} = \beta h(P_{(n)}, T_0) + (1 - \beta)h_{(n-1)}$  と書ける. 入力  $x(t)$  が白色であることから,  $h(P_{(n)}, T_0)$  と  $h_{(n-1)}$  は統計的に独立である. したがって,  $h_{(n)}$  の分散は,

$$\text{Var}[h_{(n)}] = \beta^2 \text{Var}[h(P_{(n)}, T_0)] + (1 - \beta)^2 \text{Var}[h_{(n-1)}] \quad (6.4)$$

となる. ここで,  $\text{Var}[h(P_{(n)}, T_0)] = \gamma \text{Var}[h_{(n-1)}]$  とおけば

$$\text{Var}[h_{(n)}] = \{\beta^2 \gamma + (1 - \beta)^2\} \text{Var}[h_{(n-1)}] \quad (6.5)$$



であり、両辺を $\beta$ で偏微分して0とおけば、 $\text{Var}[h_{(n)}]$ を最小にする $\gamma$ は

$$\gamma = \frac{1-\beta}{\beta} = \alpha(n-1) \quad (6.6)$$

となる。したがって、 $\text{Var}[h_{(n)}]$ が最小ならば、 $\alpha(n-1)$ は式(6.3)を満たし、また、式(6.3)を満たす $\alpha(n-1)$ に対し、 $\text{Var}[h_{(n)}]$ が最小となるのは明らかである。 ■

したがって、提案法では、式(6.3)を満たす重み関数 $\alpha(n)$ を用いたとき、最大の核推定精度が得られる。しかし、式(6.3)における $\text{Var}[\cdot]$ は真の核の関数であることから、最適な重み関数 $\alpha(n)$ もまた決定できない。そこで、重み関数 $\alpha(n)$ は、適当な関数で代用しなければならず、そのための目安を考える。

反復回数 $n$ が少ないときには、入力パワーレベルが次々と最適値に向けて更新されるため、これまでに推定された核の平均に対し、新しく推定した核の精度が高いことから、式(6.3)より $\alpha(n) < 1$ が望ましい。また、 $n \rightarrow \infty$ において、精度を最大にするための必要条件は次式を満たすことである。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n)}{n} = 1. \quad (6.7)$$

そして、その際の分散 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}[h_{(n)}]$ は、常に最適な入力パワーレベルを用いて推定された核の分散、すなわち Wiener 核推定精度の最大限界値となる。

(証明) 入力パワーレベル一定として Wiener 核を推定した場合には、Wiener 核の推定分散は $n$ に反比例し、常に最適な入力パワーレベルを用いた場合にはその値は最小になる。したがって、 $n \rightarrow \infty$ では、 $\text{Var}[h_{(n)}]$ は $n$ に反比例し、その際の $h(P_{(n+1)}, T_0)$ と $h_{(n)}$ の分散の関係は、

$$n = \frac{\text{Var}[h(P_{(n+1)}, T_0)]}{\text{Var}[h_{(n)}]} \Big|_{n \rightarrow \infty} \quad (6.8)$$

であることから、式(6.3)と比較することにより、式(6.7)が得られる。 ■

したがって、重み関数は $\alpha(0) = 0$ に始まり、最終的に $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n)}{n} = 1$ となるように選べば良い。

## 6.4 核推定精度変化の理論解析

3節において、重み関数 $\alpha(n)$ の選択の目安を示したが、ここでは式(6.3)を満たす最適な $\alpha(n)$ が選ばれたときの核推定精度の変化を調べる。式(6.2)の両辺の分散をとり、式(6.3)を代入して $\text{Var}[h(P_{(n)}, T_0)]$ を消去すれば、次の関係式が得られる。

$$\frac{\text{Var}[h_{(n+1)}]}{\text{Var}[h_{(n)}]} = \frac{\alpha(n)}{1 + \alpha(n)}. \quad (6.9)$$



上式を $\alpha(n)$ について陽に記述すれば

$$\alpha(n) = \frac{\text{Var}[h_{(n+1)}]}{\text{Var}[h_{(n)}] - \text{Var}[h_{(n+1)}]} \quad (6.10)$$

となる. ここで, 入力パワーレベル一定の従来法では,  $\text{Var}[h_{(n)}]$  が  $n$  に反比例することから, 式(6.10)に  $\text{Var}[h_{(n)}] = A/n$  (ただし,  $A$  は比例定数) を代入することにより

$$\alpha(n) = n \quad (6.11)$$

となる.

また, 式(6.9)を  $\text{Var}[h_{(n)}]$  について陽に記述すれば

$$\text{Var}[h_{(n)}] = \text{Var}[h_{(1)}] \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\frac{1}{\alpha(k)} + 1} \quad (6.12)$$

となり, これは, 最適な重み関数  $\alpha(n)$  に対し, 核推定精度の限界を与えている.

しかしながら, 3節において示したように, 最適な $\alpha(n)$ は未知である. そこで, 次に核推定精度を入力パワーレベル  $P_{(n)}$  の立場から調べる. 式(6.10)に式(6.3)を代入して $\alpha(n)$ を消去すれば, 次の関係式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Var}[h_{(n)}]} &= \frac{1}{\text{Var}[h(P_{(n)}, T_0)]} + \frac{1}{\text{Var}[h_{(n-1)}]} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{Var}[h(P_{(k)}, T_0)]}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

上式中,  $P_{(k)}$  は, 区間観測時間  $T_0$  に反比例する分散を持つ確率変数である  $h_{(n-1)}$  の非線形関数として決定される確率変数であり, さらにその非線形関数として  $h(P_{(k)}, T_0)$  が推定される. したがって, その分散を求めることは非常に難しく, 入力パワーレベル  $P_{(k)}$ , 区間観測時間  $T_0$  の立場から  $\text{Var}[h_{(n)}]$  を理論的に評価することは, かなり困難と思われる. そこで, 次節では, 数値実験により核推定精度  $\text{Var}[h_{(n)}]$  の変化を調べる.

## 6.5 数値実験

入力パワーレベル可変 Wiener 核推定法により, 推定精度が向上することを確認するために, 計算機による数値実験を行った. システムとしては, 式(3.36)で示したシステム  $S$



を用いる.

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= 1, \\ h_1(\tau_1) &= \cos\left(\frac{\pi\tau_1}{6}\right) && \text{for } 0 \leq \tau_1 \leq 9 \\ h_2(\tau_1, \tau_2) &= \exp\left(\frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{-32}\right) && \text{for } 0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq 9 \\ h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \exp\left(\frac{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}{-2}\right) && \text{for } 0 \leq \tau_1, \tau_2, \tau_3 \leq 2 \\ h_n &= 0 && \text{for } n > 3 \end{aligned} \right\}$$

また, 2 次 Wiener 核の推定精度向上を目指すことを考え, 各次数の重み  $w_i$  を次のように設定する.

$$w_i = \begin{cases} 1, & i = 2 \\ 0, & \text{others.} \end{cases} \quad (6.14)$$

さらに, 3 節の議論を考慮し, 次式で表される関数を  $\alpha(n)$  とする.

$$\alpha(n) = \frac{2n}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{nT_0}{T_m}\right). \quad (6.15)$$

パラメータ  $T_m = 250, 500, 1000, 2000, 4000$  について,  $\alpha(n)/n$  の関数形を示す (図 6.1). いずれも,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n)}{n} = 1$  となる関数であるが, 定数  $T_m$  により 1 に近づく速度が異なる.

また, ここで  $n$  回目の反復までに推定された核  $k_{(n)} = \{\hat{k}_0, \hat{k}_1(\sigma_1), \dots\}$  の誤差  $\text{Error}(n)$  を, 真の核  $k = \{k_0, k_1(\sigma_1), \dots\}$  との距離の 2 乗として次式で定義する.

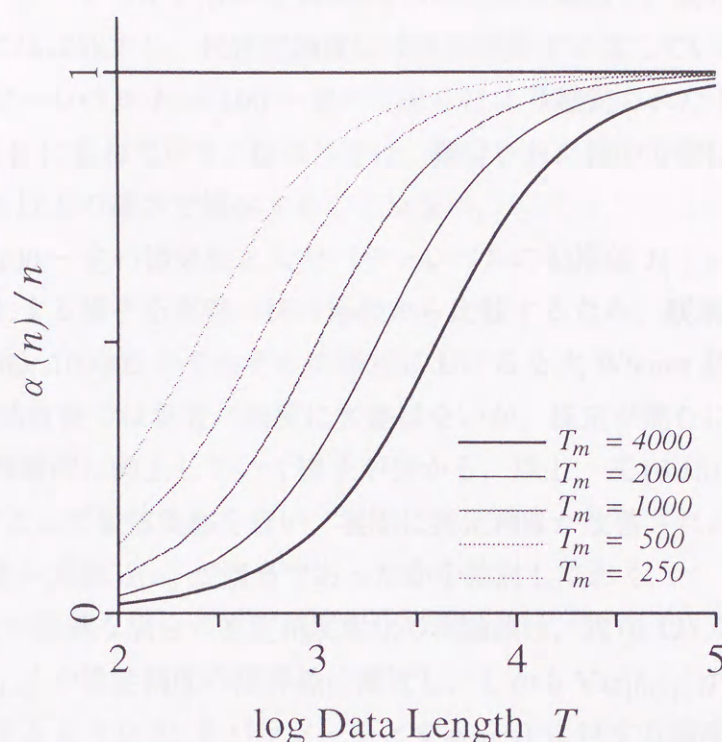
$$\text{Error}(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_i}{R^i} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_i=0}^R |\hat{k}_i(\sigma_1, \dots, \sigma_i) - k_i(\sigma_1, \dots, \sigma_i)|^2. \quad (6.16)$$

この誤差  $\text{Error}(n)$  と式 (6.1) で与えられる核推定分散との間には, 次の関係がある.

$$E[\text{Error}(n)] = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \text{Var}[\hat{k}_i] \quad (6.17)$$

さて, まず観測雑音が存在しない ( $P_e = 0$ ) ものとして, 区間観測時間  $T_0$  の Wiener 核推定精度への影響を調べる.  $T_m = 2000$ , 入力パワーレベルの初期値  $P_{(1)} = 100$  として,  $T_0 = 100, 200, 500, 1000, 2000$  のそれぞれについて, 提案法により Wiener 核を推定し, 入力パワーレベル  $P_{(n)}$  と誤差  $\text{Error}(n)$  の関係を求めた (図 6.2 A,B). 同図 A には, システム S の Wiener 核推定に最適な入力パワーレベルの理論値を式 (6.1) から計算し点線で示した. 同図 B の傾き -1 の 7 本の点線は, 上からそれぞれ入力パワーレベル  $P=0.001, 100, 0.01, 10, 0.1, 1, P_{\text{opt}}$  一定で, 従来法により推定された核の誤差の理論値 (式 (6.1), (6.17) から計算) を示したものである. すなわち, これらの最も下に位置する直線は, システム S の Wiener 核を推定する際の推定精度の理論的限界を示している. さて, 区間観測時間



図 6.1 選択した $\alpha(n)$  の関数形

$T_0 = 100$  では、各区間で推定される核の分散が大きいため、最適な入力パワーレベルの推定が安定していないが、 $T_0 = 200$  以上では、いずれも入力パワーレベルが最適値に漸近するにつれ、核推定精度も理論的限界に漸近している。したがって、区間観測時間  $T_0$  の選択には、それほど厳密性を要しないと考えられ、以後の実験では  $T_0 = 500$  とする。

次に、重み関数  $\alpha(n)$  のパラメータ  $T_m$  の、核推定精度への影響を調べる。入力パワーレベルの初期値を  $P_{(1)} = 100$  として、 $T_m$  をそれぞれ 250, 500, 1000, 2000, 4000 とした時の実験結果を図 6.2 と同様にして図 6.3 に示す。これより、 $T_m = 250, 500$  では入力パワーレベル、核推定精度ともに、それぞれ最適値、精度限界への漸近が多少遅くなっている。これは設定した  $\alpha(n)/n$  が、最適な関数に対して早く 1 に近づきすぎるためであると考えられる。一方、 $T_m = 1000, 2000, 4000$  では、核推定精度への影響の違いはほとんど認められず、重み関数  $\alpha(n)$  の選択に関しても、区間観測時間と同様に、さほど厳密性を要しないと考えられ、以後の実験では  $T_m = 2000$  とする。

最後に、入力パワーレベルの初期値  $P_{(1)}$  の推定精度への影響を調べる。 $T_0 = 500$ ,  $T_m = 2000$  として、それぞれ入力パワーレベルの初期値を  $P_{(1)} = 100, 10, 0.01, 0.001, P_{\text{opt}}$  とした際の結果を図 6.4 に示す。今回、数値実験を行った限りでは、最適値に対し上下 2 桁



程度異なる入力パワーレベルを用いて Wiener 核の推定を開始した場合でも、入力パワーレベルは最適値にはほぼ収束し、核推定精度は精度の限界まで達していることが分かる。

また、入力パワーレベル  $P = 100$  一定の従来法により推定された Wiener 核の誤差変化の一例を図 6.4 B に重ねて示す。従来法では、推定された核の分散は  $T$  に反比例して減少し、決してそれ以上の速さで減少することはない。

ここで、 $P = 100$  一定の従来法と入力パワーレベルの初期値  $P_{(1)} = 100$  の提案法について、精度が向上する様子を実際の核の形状から比較するため、観測時間  $T=500, 1000, 3000, 10000, 30000, 100000$  のそれぞれの時点における 2 次 Wiener 核を立体的に示した (図 6.5)。推定開始直後では両者の精度に大差はないが、推定が進むにつれ提案法による核の推定精度が飛躍的に向上していく様子が分かる。以上、式 (6.15) で与えられる関数を重み関数  $\alpha(n)$  として数値実験を行い、実際に推定精度が改善されることを示した。ここで、選択した重み関数  $\alpha(n)$  が適当であったかを検討しておく。

重み関数  $\alpha(n)$  が最適な場合の推定精度変化の理論値は、式 (6.12) から計算できる。そこで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}[h_{(n)}]$  が推定精度の限界線に漸近し、しかも  $\text{Var}[h_{(1)}]$  が  $P_{(1)}=100, 10, P_{\text{opt}}$  にそれぞれ一致するような  $T_m$  をパラメータとする  $\alpha(n)$  に対する精度変化の理論値を図 6.6 に示す。 $T_m$  の最適値は、入力パワーレベルの初期値  $P_{(1)}=100, 10, P_{\text{opt}}$  に対し、それぞれ 2600, 1000, 0 と異なるが、数値実験 (図 6.3) において決めた  $T_m=2000$  一定としても、数値実験 (図 6.4 B) の結果と良く一致している。したがって、 $\alpha(n)$  の決定に関しては、式 (6.7) で与えられる必要条件を満たすならば、ロバスト性は高いと思われる。

次に、本手法の観測雑音に対するロバスト性を検証する。システムの出力に、入力とは独立な平均 0、パワーレベル  $P_e$  の正規白色雑音が観測雑音として混入するものとして、入力パワーレベル可変 Wiener 核推定を行った。観測雑音のパワーレベル  $P_e$  は、最適入力パワーレベル  $P_{\text{opt}}$  に対し、0, 1, 10, 100, 1000 倍の値を持つものとして、また、初期入力パワーレベル  $P_{(1)}$  は、 $|\log_{10} P_{(1)} - \log_{10} P_{\text{opt}}| < 3$  の範囲から適当に複数選択した。これらの実験条件において、異なる 20 本の入出力系列に対して入力パワーレベル可変 Wiener 核推定を行い、最適入力パワーレベル  $P_{(n)}$  が最適値  $P_{\text{opt}}$  へ漸近する様子を調べた。最適値へ漸近することの評価尺度は、時刻  $n = 10^5$  における入力パワーレベル  $P_{(10^5)}$  が、最適値  $P_{\text{opt}}$  に対して  $10^{\pm 0.5}$  倍以内に近づく確率が 80% 以上、すなわち式 (6.18) を満たすことと定義し、この時、核の推定が成功したものと見なした。

$$\text{Prob} \left[ |\log_{10} P_{(10^5)} - \log_{10} P_{\text{opt}}| \leq 0.5 \right] \geq 0.8 \quad (6.18)$$

こうした尺度に基づき、Wiener 核推定を行なった結果 (“●”: 成功, “×”: 失敗) を図 6.7 に示す。同図より、雑音のパワーレベル  $P_e$  が増加するにつれ、初期入力パワーレベル  $P_{(1)}$



を最適値  $P_{\text{opt}}$  に対して小さい値に設定したとき、核の推定が失敗する傾向にあることが分かる。したがって、初期入力パワーレベルは、入力刺激装置の許容範囲内で十分高く設定すべきであるが、実際には、入力パワーレベルに対して数10倍のパワーレベルを持つ観測雑音が混入することは考えにくく(このような場合は、実験系そのものを見直すべきである)、入力パワーレベル可変 Wiener 核推定法は観測雑音に対して十分ロバストであると考えられる。

## 6.6 まとめ

Wiener 核推定に最適な入力パワーレベルはシステムに依存する値であることから、その決定には同定するシステムに関する知識が必要である。したがって、システムに関する先見的な情報が全くない場合には、同定するシステムに最適な入力パワーレベルを決定することができない。そこで、最適入力パワーレベルと Wiener 核を交互に反復推定することにより、Wiener 核の推定精度を向上させる入力パワーレベル可変 Wiener 核推定法を提案した。提案法の理論的考察と数値実験により、不適切な入力パワーレベルで核の推定を開始した場合でも、核の推定に伴い入力パワーレベルが適応的に最適値に漸近し、核の推定精度は Wiener 核推定精度の理論的限界まで高められることを確認した。この結果は、入力パワーレベルを一定として行われていた従来の Wiener 核推定に対し、刺激・測定系を含めた新しいシステム同定法の可能性を示すものである。



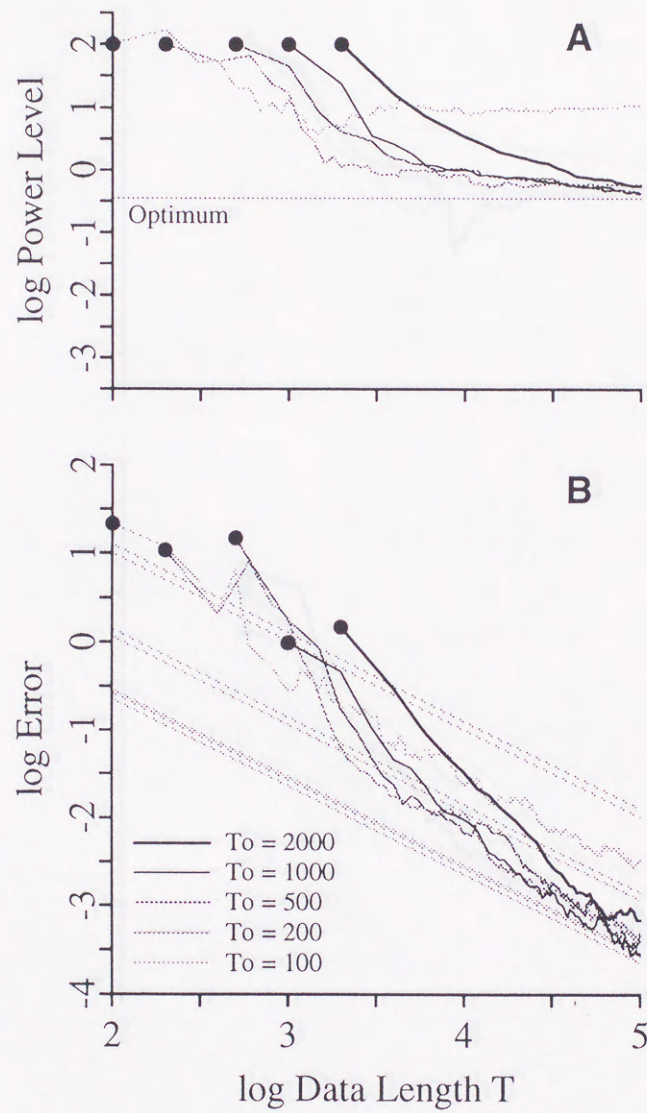


図 6.2 提案法における区間観測時間  $T_0$  の最適入力パワーレベル (A), 核推定精度への影響 (B)



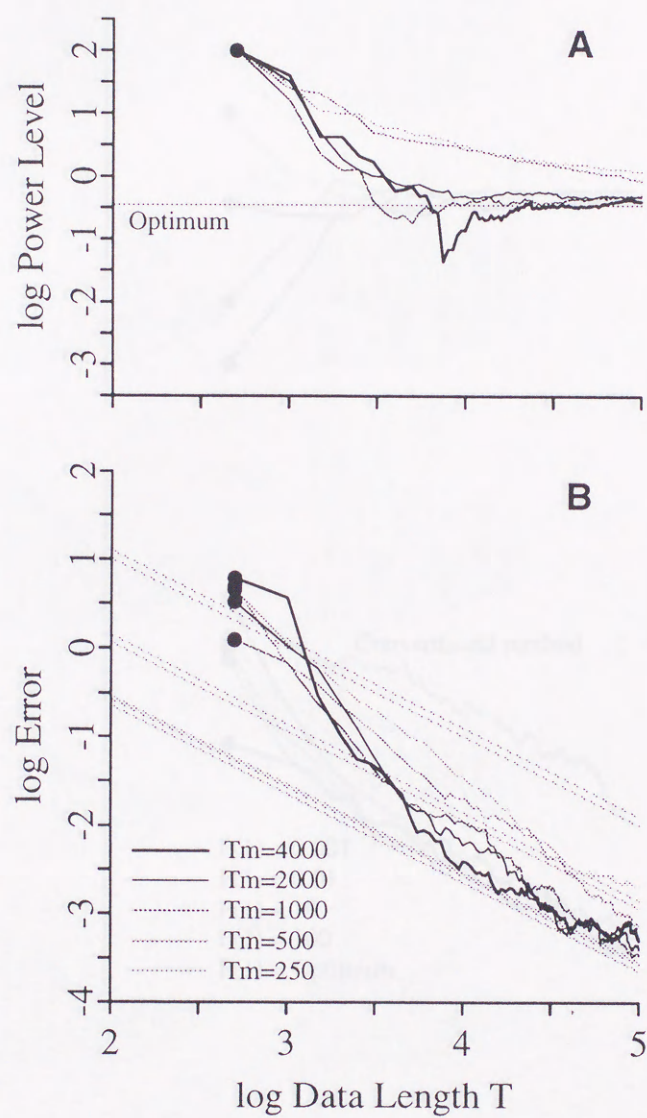


図 6.3 提案法における重み関数  $\alpha(n)$  のパラメータ  $T_m$  の最適入力パワーレベル (A), 核推定精度への影響 (B)



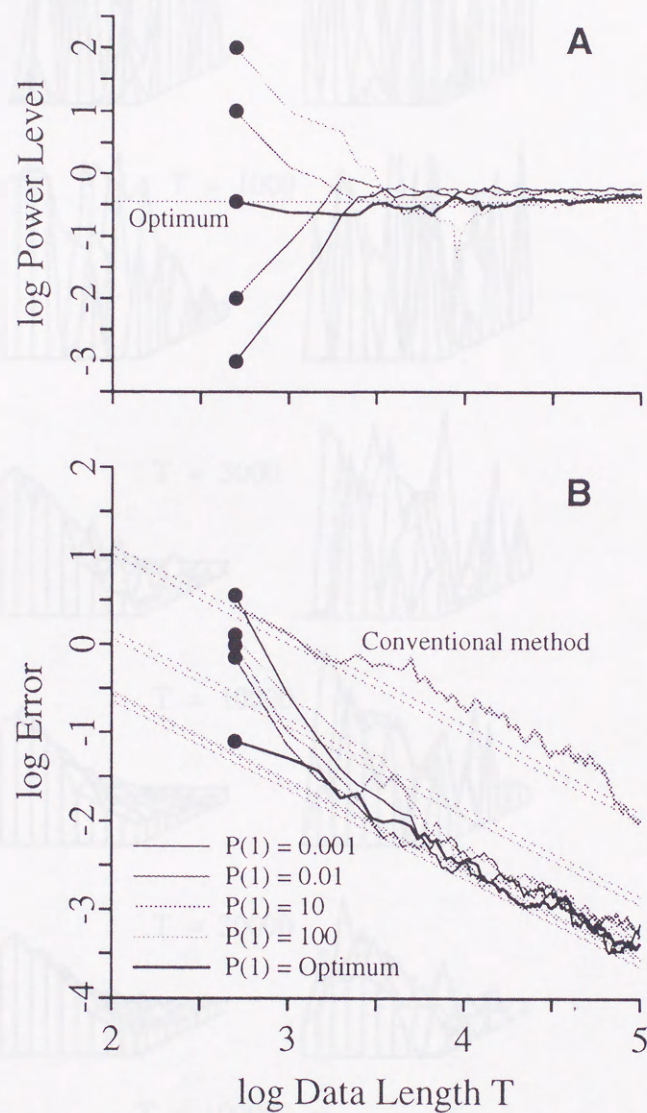


図 6.4 提案法における初期入力パワーレベル  $P(1)$  の最適入力パワーレベル (A), 核推定精度への影響 (B)



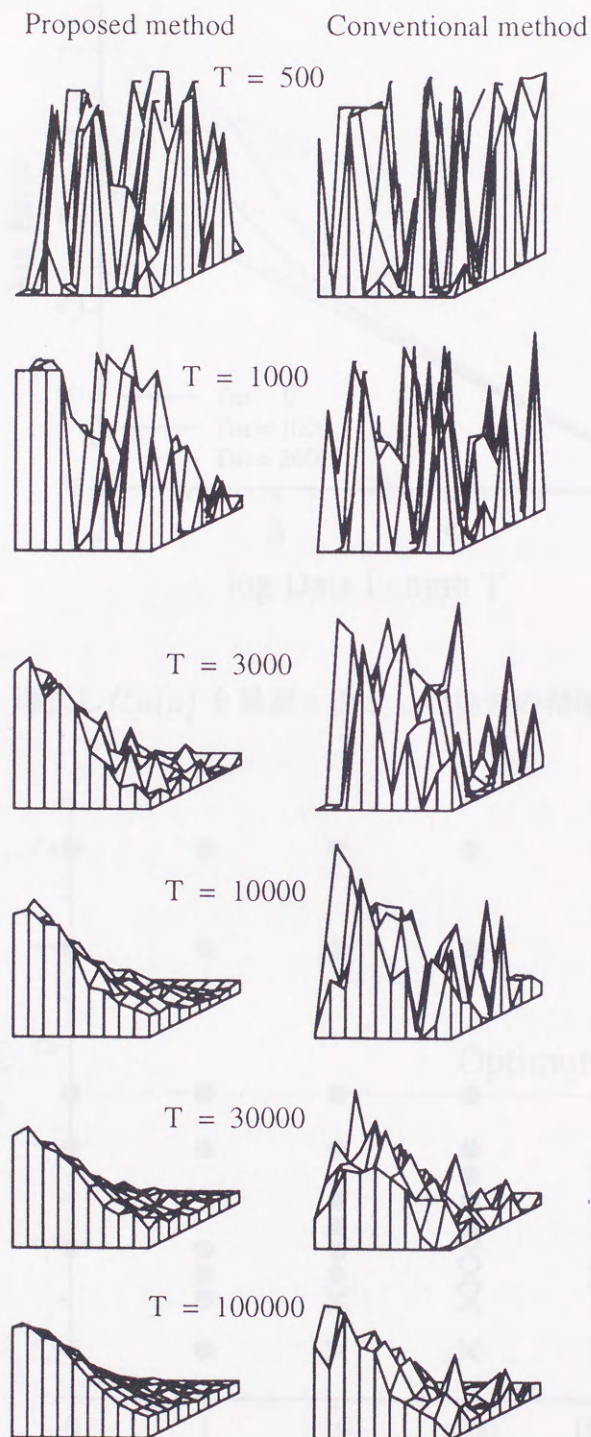


図 6.5 提案法と従来法により推定された 2 次核の比較



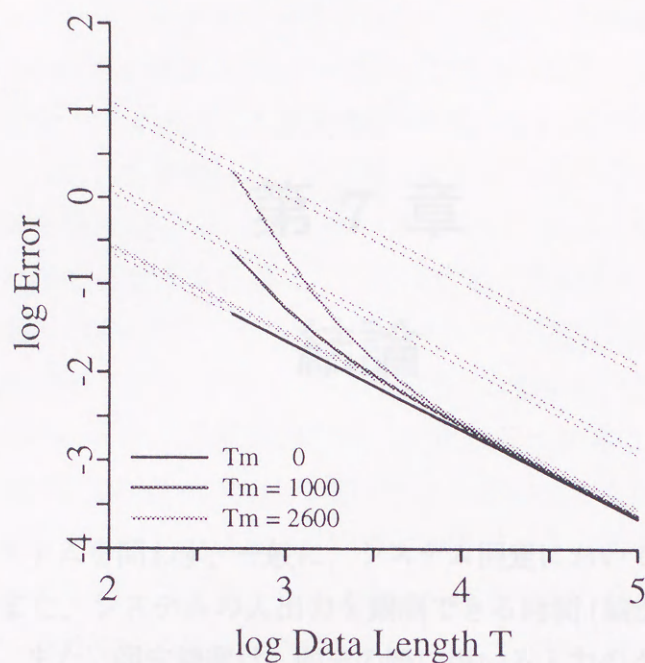
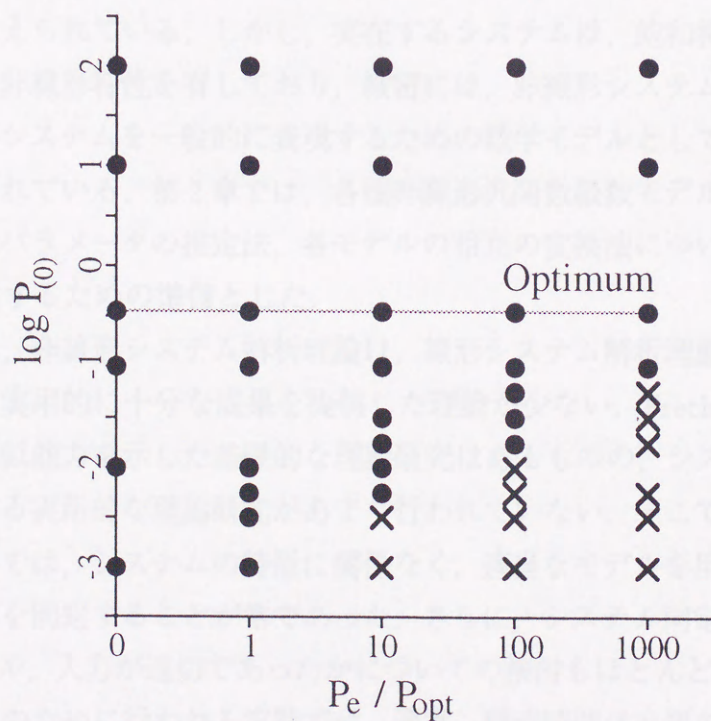
図 6.6 選択した $\alpha(n)$  を最適と仮定した場合の精度変化の理論値

図 6.7 観測雑音に対するロバスト性



## 第 7 章

### 結論

線形、非線形システムを問わず、一般に、システム同定においては、システムの構造が複雑であるほど、また、システムの入出力を観測できる時間 (観測時間) が短いほど、同定精度は悪くなる。また、同定精度は、同定の際に用いる入力のカラスに依存し、システムを精度良く同定するためには、対象とするシステムに応じた適切な入力を選択する必要がある。

線形システムを同定するための理論体系は、系統的に整備され、今日では、ほぼ完成の域に達したと考えられている。しかし、実在するシステムは、飽和特性、ヒステリシスなど、なんらかの非線形特性を有しており、厳密には、非線形システムである。こうしたことから、非線形システムを一般的に表現するための数学モデルとして、非線形汎関数級数モデルが提案されている。第 2 章では、各種非線形汎関数級数モデルについて、そのモデル表現、モデルパラメータの推定法、各モデルの相互の変換法について概説し、システム同定精度を議論するための準備とした。

しかしながら、非線形システム解析理論は、線形システム解析理論の完成度に比べ、未だ錯雑であり、実用的に十分な成果を提供した理論が少ない。Fréchet の定理など、数学的に汎関数の近似能力を示した基礎的な理論研究はあるものの、システム、入力、同定精度の関係に関する実用的な理論研究があまり行われていない。そこで、従来の非線形システム同定においては、システムの特徴に関係なく、適当なモデルを用意し、適当な入力を用いてシステムを同定することが常であった。さらに、システム同定後の同定精度の評価や、用いたモデル、入力が適切であったかについての検討もほとんど行われていなかった。

システム同定のために行われる実験では、通常、観測時間は有限である。線形システムを対象とする限りでは、システムの構造がそれほど複雑ではなく、ある程度の同定精度が得られていたため、こうした同定精度に関する問題は特に意識されなかった。しかし、非



線形システムを対象とする際には、システムの構造が複雑である場合が多く、雑音レベルの精度でしかモデルパラメータを推定できず、せっかく行った実験が無駄になることも起こりうる。そこで、非線形システム同定への関心が高まってきた近年では、限られた観測時間で、同定精度を最大にすることの重要性が特に問われるようになってきた。

本論文の目的は、こうした要請に基づき、非線形システム同定のための一般的な数学モデルである非線形汎関数級数モデルについて、システム、入力、同定精度の関係を具体的に定式化し、同定精度を最大する最適な入力の決定法を見いだすことにあった。

非線形汎関数級数モデルの中でも、Volterra、バイナリ汎関数級数モデル、伝達関数カスケードモデルにおけるモデルパラメータ(積分核)の推定は、線形パラメータの最小2乗推定であることから、それらの推定精度は、簡単な行列演算により容易に求められる。一方、Wiener 汎関数級数モデルにおける積分核は、確率的な性質を利用し近似により推定されるため、その推定精度は、Volterra 核などの推定精度に比べて劣ることが定性的に知られている。しかしながら、推定された Wiener 核は、入力である正規白色過程の高次モーメントであり、その精度を厳密に定式化することは非常に困難である。そこで、現在まで、こうした問題は放置されてきた。

ところで、モデルに含まれる時刻を表す変数は、本来、連続時間で定義されるものである。しかし、今日のシステム解析においては、観測されたデータを A/D 変換し、計算機で処理することが多いため、離散時間で定義しても差し支えなく、むしろその方が便利でもある。さらに、計算機の記憶容量が有限であることから、モデルの非線形次数、記憶長も有限でなければならない。そこで、第3章では、対象とするシステムを離散時間、有限記憶長、有限次数の Volterra 汎関数級数で表現できるシステムのクラスに限定して問題を単純化し、そのクラスに属するシステムに対する Wiener 核の推定精度を定式化した。これにより、今まで不可能だった Wiener 汎関数級数モデルによるシステム同定精度の定量的評価が可能になり、推定された Wiener 核から導かれる結論の信頼性が向上することが期待される。また、Wiener 核の推定分散は、観測時間に反比例し、その比例定数は、入力として用いる正規白色系列の分散(パワーレベル)と観測雑音の分散の有理式で表現され、更にその係数は、システムの Volterra 核の関数で表されることを示した。これにより、Wiener 核推定において、対象とするシステムに応じて、推定精度を最大にする最適な入力パワーレベルが存在することを明らかにした。実際に、不適切なパワーレベルを設定した時の推定精度の悪化の様子を数値実験により示した。ところで、Wiener 核は、入力パワーレベルに依存して定義されるパラメータである。しかしながら、実在する物理システムの多くは、非線形次数が高くなるに従い、その成分が次第に減少するものと考えられる。そこで、本論文において、Wiener 核推定における入力パワーレベルの影響を議論



する際には、Wiener 核が Volterra 核に等しくなり、Wiener 核が入力パワーレベルにほとんど依存しないようなシステムのクラスに限定する。

また、第3章では、第6章で提案した入力パワーレベル可変 Wiener 核推定法を実用的にするため、定式化した Wiener 核推定分散式を適当な近似を導入して単純化した。これにより、 $L$  次システムの Wiener 核推定に対し、高々  $L$  個のパラメータで任意の次数の Wiener 核の推定精度を表現できるようになった。同時に、最適な入力パワーレベルも高速に決定できるようになり、最適入力パワーレベル高速決定法として提案した。

Volterra, バイナリ汎関数級数モデルにおける積分核の推定は、線形パラメータの最小 2 乗推定に等しく、既に推定精度が定式化されている。こうした Volterra, バイナリ核の推定精度に比べ、Wiener 核の推定精度が劣ることが定性的には知られていたものの、定量的に、どの程度悪化するのかは明らかではなかった。そこで、第4章では、第3章で定式化した Wiener 核推定精度と、Volterra, あるいはバイナリ核の推定精度と比較することにより、Wiener 核推定精度が Volterra, バイナリ核の推定精度に比べてどの程度悪化するのかを調べた。実際に、適当なシステムを仮定した数値実験により、推定精度が劣る様子を示した。

実在する物理システムでは、純粋に1つの経路からの入力を受けていることは、極めて稀であり、何らかの形で、他の経路からの入力が入混入すると考えられる。こうしたことから、1入力汎関数級数モデルは、多入力システムを記述しうるように拡張されている。第5章では、離散時間、有限記憶長、有限次数の多入力 Volterra 汎関数級数で表現できるシステムのクラスに対して、多入力 Wiener 汎関数級数モデルの積分核推定精度を定式化した。これにより、Wiener 核推定精度を最大にする最適な入力パワーレベルが存在することを示した。実際に、不適切なパワーレベルを設定した時の核推定精度の悪化の様子を数値実験により示した。

Wiener 核推定精度を最大にする最適な入力パワーレベルは、システムそのものに依存する。したがって、Wiener 核を推定する以前には、Wiener 核推定に最適な入力パワーレベルを知ることはできない。そこで、何らかの先見情報を基に、最適値を推測する必要がある。ところで、一般に、相互に関係する複数の推定量を交互に反復推定し、推定精度を向上させる手法として、緩和法、あるいは bootstrap 法が知られている。そこで、2つの互いに依存する推定量、すなわち最適入力パワーレベルと Wiener 核の推定に、こうした緩和法を適用することが考えられる。第6章では、こうした入力パワーレベルを可変とした新しい Wiener 核推定法を考え、入力パワーレベル可変 Wiener 核推定法として提案した。本手法の概略は以下の通りである。まず、適当に設定した入力パワーレベルにより、Wiener 核を推定し、それを先見情報として、最適入力パワーレベルを推定する。推定さ



れた最適入力パワーレベルを用いて、再び Wiener 核を推定する。以下同様に、最適入力パワーレベルと Wiener 核を交互に反復推定することにより、入力パワーレベルを最適値に近づけつつ、Wiener 核の推定精度向上を目指すものである。

この際、以下の制約を導入した。一般に、Wiener 核は、入力に依存して定義されるパラメータである。これは、各次数の Wiener 核に、より高次の成分が影響するからである。ところで、自然界に存在する多くのシステムは、非線形次数が高くなるに従い、その成分は減少するものと考えることができる。そこで、こうした仮定を導入することにより、Wiener 核の入力の統計的性質の変化に対する不変性を得た。

通常の Wiener 核推定では、核推定分散は観測時間に反比例して減少し、決してそれ以上の速度で減少することはない。しかし、こうした入力パワーレベルを可変とする Wiener 核推定では、不適切な入力パワーレベルで核の推定を開始した場合でも、核の推定に伴い入力パワーレベルが適応的に最適値に漸近し、核の推定分散は、観測時間に反比例する以上の速度で減少する。その結果、核の推定精度は、Wiener 核推定精度の理論的限界まで高められる。実際に、適当なシステムを仮定した数値実験により検証した。

以上の結果は、従来、入力の統計的性質を一定として行われていた非線形システム同定に対し、入力の統計的性質をシステムに応じて適応的に変化させる刺激・測定系を含めた新しいシステム同定法の可能性を示唆するものである。

我々は、常に、さまざまな対象の理解を試みている。その対象が自然であれば、自然科学であり、経済、文学などの人工物であれば、人文科学である。これは、学問の分野だけでなく、ごく日常的なことである。例えば、人との会話では、相手の挙動から、その人の性格を理解しようと無意識のうちに努力しているはずである。また、朝、家を出るときには、天気予報、昨日の天気、現在の雲行き、その他の情報から、傘を持って行くべきであるか否かを決めている。さらには、八百屋で西瓜を選ぶ場合にも、手で西瓜をたたき、その音から西瓜の熟れ具合を知ろうとしているのである。対象は、システムであり、対象を理解する試みは、まさしくシステム同定を行っていることに他ならない。システム同定は、日常的に行われているごく当たり前のことである。

対象の理解には、必ず、その対象が振る舞う現象とその要因に関する情報が必要である。人の性格を知るためには、相手に与えた情報とその情報に対する顔色の変化などの反応が必要であり、また、西瓜の叩き方とその時のポンという音の音色から、西瓜の熟れ具合を推測している。要因がシステムへの入力、現象がシステムからの出力に対応する。こうした要因と現象との関係は繰り返し学習され、我々の頭の中になんらかの形で記憶されている。これがモデルに相当する。

西瓜の熟れ具合をたたいて判断する際に、金槌や藁を用いる人はまずいない。手近に金



槌や藁がないことも、その理由の一つではある。しかし、主たる要因は、叩いたときの衝撃が金槌では強すぎ、藁では弱すぎるため、反応音と西瓜の熟れ具合の関係を正しく学習できない、すなわち正確に熟れ具合を判断できないからである。これは、まさに、システム同定には、高い同定精度を得るための最適な入力の高さ、すなわち入力のクラスが存在することを意味している。

非線形汎関数級数モデルなどのシステム同定の手段、技術は、科学に対して道具を提供するだけではない。こうした非線形システム同定の技術を用いて、例えば、生体の神経回路網を解明する試みが続けられている。その一つの成果である神経細胞の持つ飽和特性とそれらの接続特性に関する知見は、単純化されてニューラルネットワークとして工学的に应用されている。ニューラルネットワークは、従来のノイマン型計算機に代わる新しい情報処理機械としての機能を持つ可能性があるとして注目されている。これにより、生体特有の優れた学習、連想記憶、文字・パターン認識などの機能が工学的に実現できる可能性が示唆され、実際、多くの優れた応用がなされている。

本研究により得られた成果が、科学の発展に貢献することはもとより、それにより得られた成果が再び工学的にフィードバックされ、生活資質の向上、文化の発展に利用されることを深く願うものである。



## 謝辞

本博士論文に関する研究を進めるにあたり、終始懇切なるご指導を賜った豊橋技術科学大学工学部情報工学系臼井支朗教授に深く感謝の意を表します。

本論文をまとめるにあたり、有益な御討論、御助言を頂いた豊橋技術科学大学知識情報工学系 伊藤嘉房教授、豊橋技術科学大学情報工学系 田所嘉昭教授、池野英利講師に対し、厚く御礼申し上げます。

舞鶴工業高等専門学校電気工学科 戸田尚宏講師には、豊橋技術科学大学情報工学系助手である頃より、研究の発想、実際の研究の進め方、論文のまとめ方に至るまで、細部にわたり惜しめない御指導を頂いた。豊橋技術科学大学知識情報工学系 神山齊己助手、同情報工学系 中内茂樹助手には、異なった視点からの有益な御討論をいただくと共に日頃の研究生活全般にわたり、惜しめない御支援をいただいた。以上の方々に心から感謝いたします。

杉本充氏(現 日本アイ・ビー・エム株式会社)には、豊橋技術科学大学在学中、本研究を進めるにあたって惜しめない御協力を頂いた。心より感謝いたします。

本学生体情報工学研究室における日頃の様々な議論が、博士論文に関する研究を進めるに際し直接的あるいは間接的に非常に役立った。特に、長坂英一郎氏(現 株式会社トーマー)、工藤英貴氏(修士2年)、大栄陽子氏(修士1年)、大木和美氏(学部4年)には、数多くの議論を重ねて頂いた。以上の方々に深く感謝いたします。

また、落合慶広氏(博士3年)、白川正輝氏(博士3年)、石井宏幸(現 豊橋技術科学大学情報工学系教務職員)をはじめとする本学生体情報工学研究室の学友の方々には、日頃から惜しめない御支援、御助力を頂いた。ここに記して、以上の方々に心より御礼申し上げます。

最後に、妻 正恵(旧姓 中野)には、生体情報工学研究室の学友時代から苦勞を分かち合い、修士課程修了後も研究に対する理解と支援を続けてくれたことに対し心から感謝します。



## 参 考 文 献

- [1] J.Arakil : "Measurement of Wiener kernels with binary random signals", IEEE Trans. on Autom. Control, **15**, 2, pp.123-125 (1970)
- [2] E.de Boer : "Correlation functions as tools for analysis", Adv. Physiol. Sci. **30**, pp.79-91 (1981)
- [3] H.van den Boogaard : "Maximum likelihood estimations in a nonlinear self-exciting point process model", Biol. Cybern., **55**, pp.219-225 (1986)
- [4] M.B.Brilliant : "Theory of the analysis of nonlinear systems", Tech. Rep., 345, Res.Lab.Elec., MIT (1958)
- [5] D.R.Brillinger : "The identification of point process systems", Ann. Probability, **2**, 6, pp.909-929 (1975)
- [6] D.R.Brillinger : "The identification of a particular nonlinear time series system", Biometrika, **64**, pp.509-515 (1977)
- [7] J.Bustamante and W.Buno : "Signal transduction and nonlinearities revealed by white noise inputs in the fast adapting crayfish stretch receptor", Experimental Brain Research, **88**, pp.303-312 (1992)
- [8] R.H.Cameron and W.T.Martin : "The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier-Hermite functionals", Ann. Math., **48**, pp.385-392 (1947)
- [9] H.W.Chen, L.D.Jacobson and J.P.Gaska : "Structural classification of multi-input nonlinear systems", Biol. Cybern., **63**, pp.341-357 (1990)
- [10] E.S.Chornoboy, L.P.Schramm and A.F.Karr : "Maximum likelihood identification of neural point process systems", Biol. Cybern., **59**, pp.265-275 (1988)



- [11] N.E.Cotter : "The Stone-Weierstrass theorem and its application to neural networks", IEEE Trans. on Neural Networks, **1**, 4, (1990)
- [12] S.H.Courellis and V.Z.Marmarelis : "Nonlinear functional representations for motion detection and speed estimation schemes", in Nonlinear Vision, CRC Press, pp.91-108 (1992)
- [13] T.A.Denton and G.A.Diamond : "Can the analytic techniques of nonlinear dynamics distinguish periodic random and chaotic signals?", Comput. Biol. Med., **21**, 4, pp.243-264 (1991)
- [14] M.V.Dokic and P.M.Clarkson : "On the performance of a second-order adaptive Volterra filter", IEEE Trans. on Signal Process., **41**, 5, pp.1944-1947 (1993)
- [15] J.L.Douce : "Identification of a class of non-linear system", IFAC Symp. Ident. Sys. Param. Est.4, pp.1655-1668 (1976)
- [16] J.Duvernoy : "Volterra-Wiener partially coherent imaging systems: three-dimensional objects and generalized  $G$ -functionals", J.Opt. Soc. Am. A **7**, 5, pp.809-819 (1990)
- [17] R.Eckhorn, F.Krause and J.I.Nelson : "The RF-cinematogram — A cross-correlation technique for mapping several visual receptive fields at once", Biol. Cybern., **69**, pp.37-55 (1993)
- [18] S.Y.Fakhouri, S.A.Billings and C.N.Wormald : "Analysis of estimation errors in the identification of non-linear systems", Int J. Sys. Sci., **12**, pp.205-225 (1981)
- [19] D.H.Foster and W.F.Bischof : "Bootstrap variance estimations for the parameters of small-sample sensory-performance functions", Biol. Cybern., **57**, pp.341-347 (1987)
- [20] M.Frèchet : "Sur les foncionelles continues", Annales Scientifiques de L'Ecole Normale Superieure, third ser.,**27**, pp.193-216 (1910)
- [21] A.S.French and E.G.Butz : "The use of Walsh functions in the Wiener analysis of nonlinear systems", IEEE Trans. on Comput., **23**, pp.225-231 (1974)
- [22] A.S.French : "Practical nonlinear system analysis by Wiener kernel estimation in the frequency domain", Biol. Cybern., **24**, pp.111-119 (1976)



- [23] A.S.French and R.K.Wong : "Nonlinear analysis of sensory transduction in an insect mechanoreceptor", *Biol. Cybern.*, **26**, pp.231-249 (1977)
- [24] Y.Goussard, W.C.Krenz, L.A.Stark and G.Demoment : "Practical identification of functional expansions of nonlinear systems submitted to non-Gaussian inputs", *Annals of Biomedical Engineering*, **19**, pp.401-427 (1991)
- [25] W.Greblicki : "Nonparametric identification of a cascade nonlinear time series system", *Signal Processing*, **22**, pp.61-75 (1991)
- [26] W.Greblicki and M.Pawlak : "Nonparametric identification of a particular nonlinear time series system", *IEEE Trans. on Signal Process.*, **40**, 4, pp.985-989 (1992)
- [27] T.Hida and N.Ikeda : "Analysis on Hilbert space with reproducing kernel arising from multiple Wiener integral", *Proc. 5th Berkeley Symp. Mathematical Statistics and Probability*, **2**, pp.117-143 (1965)
- [28] 市川 哲, 鴨尾 康宏 : "ボルテラ級数に基づいた一般化記述関数の計算法", *信学技報, CAS93-46*, pp.27-34 (1993)
- [29] K.Itô : "Multiple Wiener integral", *J.Math. Soc. Japan*, **13**, 1, pp.157-169 (1951)
- [30] K.Itô : "Complex Multiple Wiener integral", *Japan J.Math.*, **22**, pp.63-86 (1952)
- [31] H.Kashiwagi and U.Kitajima : "Identification of second Volterra kernel of nonlinear systems", *SICE, SICE'93*, pp.1141-1144 (1993)
- [32] 喜安 善市 : "アダマール行列とその応用", *電子通信学会 情報とシステムシリーズ* (1990)
- [33] S.A.Klein : "Optimizing the estimation of nonlinear kernels", in *Nonlinear Vision*, CRC Press, pp.109-170 (1992)
- [34] S.A.Klein : "Sparse-stimulation and Wiener kernels", in *Analysis and Modeling of neural systems*, F.H.Eechman, E.R.Lewis, Kluwer Academic Publishers, pp.47-53 (1992)



- [35] A.N.Kolmogoroff : "On the representation of continuous functions of several variables by superposition of continuous functions of one variable and addition(Russian)", Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **114**, pp.953-956 (1957) : AMS Translation, **2**, pp.55-59 (1963)
- [36] M.J.Korenberg and I.W.Hunter : "The identification of nonlinear biological systems: LNL cascade models", Biol. Cybern., **55**, pp.125-134 (1977)
- [37] I.W.Hunter and M.J.Korenberg : "The identification of nonlinear biological systems: Wiener and Hammerstein cascade models", Biol. Cybern., **55**, pp.135-144 (1986)
- [38] M.J.Korenberg : "Functional expansions, parallel cascades and nonlinear difference equation", in Advanced Methods of Physiological System Modeling, V.Z.Marmarelis, Ed. Los Angeles: Univ. Southern California, pp.221-239 (1987)
- [39] M.J.Korenberg, A.S.French and S.K.L.Voo : "White-noise analysis of nonlinear behavior in an insect sensory neuron: kernel and cascade approaches", Biol. Cybern., **58**, pp.313-320 (1988)
- [40] M.J.Korenberg : "A robust orthogonal algorithm for system identification and time-series analysis", Biol. Cybern., **60**, pp.267-276 (1989)
- [41] M.J.Korenberg and I.W.Hunter : "The identification of nonlinear biological systems: Wiener kernel approaches", Annals of Biomedical Engineering, **18**, pp.629-654 (1990)
- [42] A.E.C.Pece, A.S.French, M.J.Korenberg and J.E.Kuster : "Nonlinear mechanisms for gain adaptation in locust photoreceptors", Biophys.J., **57**, 733-743 (1990)
- [43] M.J.Korenberg and L.D.Paarmann : "Orthogonal approaches to time-series analysis and system identification", IEEE, SP MAGAZIN, pp.29-43, July (1991)
- [44] M.J.Korenberg : "Parallel cascade identification and kernel estimation for nonlinear systems", Annals of Biomedical Engineering, **19**, pp.429-455 (1991)
- [45] M.J.Korenberg : "Applications to the study of visual systems of the fast orthogonal search and parallel cascade methods", in Nonlinear Vision, CRC Press, pp.221-241 (1992)



- [46] D.Krieger, T.W.Berger and R.J.Sclabassi : "Instantaneous characterization of time-varying nonlinear systems", IEEE Trans. on Biomed. Eng., **39**, 4, pp.420-424 (1992)
- [47] J.P.Kroeker : "Wiener analysis of nonlinear systems using Poisson-Charlier cross correlation", Biol. Cybern., **27**, pp.221-227 (1977)
- [48] Y.W.Lee : "Contributions of Norbert Wiener to linear theory and nonlinear theory in engineering", in Selected Papers of Norbert Wiener. Cambridge, MA: Soc. for Indust. and Appl. Mathemat. and M.I.T. Press p.24 (1964)
- [49] Y.W.Lee and M.Schetzen : "Measurement of the Wiener kernels of a nonlinear system by cross-correlation", Int.J.Contr., **2**, 3, pp. 237-254, Sept. (1965)
- [50] A.D.Logvinenko : "Nonlinear analysis of spatial vision using first-and-second-order Volterra transfer functions measurement", Vision Res. **30**, 12, pp.2031-2057 (1990)
- [51] F.Mammano : "Modeling auditory system nonlinearities through Volterra series", Biol. Cybern., **63**, pp.307-313 (1990)
- [52] M.Mancini, B.C.Madden and R.C.Emerson : "White noise analysis of temporal properties in simple receptive fields of cat cortex", Biol. Cybern., **63**, pp.209-219 (1990)
- [53] P.Z.Marmarelis and K.Naka : "Identification of multi-input biological systems", IEEE Trans. on Biomed. Eng., **21**, 3, pp.88-101 (1974)
- [54] V.Z.Marmarelis : "A family of quasi-white random signals and its optimal use in biological system identification: Theory", Biol. Cybern., **27**, 49-56. (1977)
- [55] V.Z.Marmarelis and G.D.McCann : "A family of quasi-white random signals and its optimal use in biological system identification", Biol. Cybern., **27**, pp.57-62 (1977)
- [56] P.D.Marmarelis and V.Z.Marmarelis : "Analysis of physiological systems", Plenum Press, New York (1978)
- [57] V.Z.Marmarelis, M.C.Citron and C.P.Vivo : "Minimum-order Wiener modeling of spike-output systems", Biol. Cybern., **54**, pp.115-123 (1986)



- [58] M.C.Citron and V.Z.Marmarelis : "Application of minimum-order Wiener modeling to retinal ganglion cell spatio-temporal dynamics", Biol. Cybern., **57**, pp.241-247 (1987)
- [59] J.C.Curlander and V.Z.Marmarelis : "A linear spatio-temporal model of the light-to-bipolar cell system and its response characteristics to moving bars", Biol. Cybern., **57**, pp.357-363 (1987)
- [60] V.Z.Marmarelis : "Linearized models of a class of nonlinear dynamic systems", Appl. Math. Modeling, **13**, pp.21-26 (1989)
- [61] V.Z.Marmarelis : "Signal transformation and coding in neural systems", IEEE Trans. on Biomed. Eng., **36**, 1, pp.15-24 (1989)
- [62] V.J.Mathews: "Adaptive polynomial filters", IEEE SP MAGAZIN, pp.10-26, July (1991)
- [63] R.J.McEliece : "Finite fields for computer scientists and engineers", Kluwer academic publishers (1990)
- [64] 宮川洋, 岩垂好裕, 今井秀樹 : "符号理論", 昭晃堂 コンピュータ基礎講座 18 (1973)
- [65] 水野真, 岩澤進, 塚田稔 : "ネコの網膜神経節細胞の空間的非線形性", 信学技報, **MBE84**, 85, pp.17-22 (1984)
- [66] 水野真, 塚田稔, 樋田栄輝, 中研一 : "ネコの網膜神経節細胞の時空間非線形応答", 信学技報, **MBE87**, 120, pp.135-142 (1987)
- [67] M.Morhác : "A fast algorithm of nonlinear Volterra filtering", IEEE Trans. on Signal Process., **39**, 10, pp.2353-2356 (1991)
- [68] 西川緯一, 三宮信夫, 茨木俊秀 : "最適化", 岩波書店, 岩波講座情報科学 19 (1982)
- [69] H.Ogura : "Orthogonal functionals of the Poisson process", IEEE Trans. on Inform. Theory, **18**, 7, pp.473-481 (1972)
- [70] 小倉久直 : "物理・工学のための確率過程論", コロナ社 (1978)
- [71] 小倉久直 : "Wiener-Hermite 展開", システムと制御, **27**, 8, pp.498-507 (1983)



- [72] 小倉久直, 中山純一, 栗津知彦: “Laguerre フィルタによる非線形系の Wiener 核の推定について”, 信学技報, **CAS83**, 170, pp.49-54 (1983)
- [73] D.P.O’leary and S.Peleg: “Digital image compression by outer product expansion”, IEEE Trans. on Commun., **31**, 3, pp.441-444 (1983)
- [74] G.Palm: “ON the representation and approximation of nonlinear systems. Part II: Discrete time”, Biol. Cybern., **34**, pp.49-52 (1979)
- [75] R.N.Pandya: “A class of bootstrap estimators and their relationship to the generalized two stage least square estimators”, IEEE Trans. on Autom. Control, **19**, pp.831-835 (1974)
- [76] R.C.Poe and E.D.Lipson: “System analysis of phycomyces light-growth response with Gaussian white-noise test stimuli”, Biol. Cybern., **55**, pp.91-98 (1986)
- [77] R.C.Poe, P.Pratap and E.D.Lipson: “System analysis of phycomyces light-growth response: single mutants”, Biol. Cybern., **55**, pp.99-104 (1986)
- [78] R.C.Poe, P.Pratap and E.D.Lipson: “System analysis of phycomyces light-growth response: double mutants”, Biol. Cybern., **55**, pp.105-113 (1986)
- [79] W.J.Rugh: “Nonlinear System Theory —The Volterra/Wiener Approach—”, The Johns Hopkins University Press (1981)
- [80] 斉藤 隆弘, 小松 隆, 原島 博, 宮川 洋: “多次元外積展開による静止画像の符号化”, 信学論 (B), **J68-B**, 4, pp.547-548 (1985)
- [81] H.M.Sakai and K.Naka: “Dissection of the neuron network in the catfish inner retina IV. Bidirectional interactions between amacrine and ganglion cells”, Journal of Neurophysiology, **63**, 1, pp.105-119 (1990)
- [82] H.M.Sakai and K.Naka: “Dissection of the neuron network in the catfish inner retina V. Interactions between NA and NB amacrine cells”, Journal of Neurophysiology, **63**, 1, pp.120-130 (1990)
- [83] H.M.Sakai: “White-noise analysis in neurophysiology”, Physiological reviews, **72**, 2, pp.491-505 (1992)



- [84] H.M.Sakai, K.Naka and M.J.Korenberg : "Dissection of a neuron network through white-noise analysis", Union Physiol. Sci./Am. Physiol. Soc, **7**, pp.259-264 (1992)
- [85] F.Sakaguchi and H.Sakai : "Approximate bootstrap confidence intervals for autoregressive power spectral estimates", The transactions of the IEICE, **73**, 7, pp.1158-1165 (1990)
- [86] E.Isobe and S.Sato : "An integro-differential formula on the Wiener kernels and its application to sandwich system identification", IEEE Trans. on Autom. Control, **29**, 7, pp.595-602 (1984)
- [87] M.Schetzen : "Measurement of the kernels of a nonlinear system of finite order", Int. J. Contr. **1**, 3, pp.251-263, Mar(1965); Corrigendum, **2**, 4, p.408, (1965)
- [88] M.Schetzen : "Determination of optimum nonlinear systems for generalized error criteria based on the use of gate functions", IEEE Trans. on Inform. Theory, **11**, 1, pp.117-125, Jan.(1965)
- [89] M.Schetzen : "A theory of nonlinear system identification" , Int.J.Contr., **20**, 4, pp.577-592, Oct.(1974)
- [90] M.Schetzen: "The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems", New York: Wiley (1980)
- [91] M.Schetzen : "Nonlinear system modeling based on the Wiener theory", IEEE Proc., **69**, 12, pp. 1557-1573 (1981)
- [92] A.Segall and T.Kailath : "Orthogonal functionals of independent increment processes", IEEE Trans. on Information Theory, **22**, 3, pp.287-298 (1976)
- [93] Y.Shi and K.E.Hecox : "Nonlinear system identification by  $m$ -pulse sequences: application to brainstem auditory evoked responses", IEEE Trans. on Biomed. Eng., **38**, 9, pp.834-845 (1991)
- [94] L.L.Stockbridge, P.H.Torkkeli and A.S.French : "Intracellular nonlinear frequency response measurements in the cockroach tactile spine neuron", Biol. Cybern., **65**, pp.181-187 (1991)



- [95] Béla Suki and Kenneth R. Lutchén : "Pseudorandom signals to estimate apparent transfer and coherence functions of nonlinear systems : Applications to respiratory mechanics", IEEE Trans. on Biomed. Eng., **39**, 11, pp.1142-1151 (1992)
- [96] H.J. Sussmann : "Existence and uniqueness of minimal realizations of nonlinear systems", Mathematical Systems Theory, **10**, pp.263-284 (1977)
- [97] E.E. Sutter : "A practical nonstochastic approach to nonlinear time-domain analysis", in Advanced Methods of Physiological System Modeling, V.Z. Marmarelis, Ed. Los Angeles: Univ. Southern California, pp.303-315 (1987)
- [98] E.E. Sutter and Vaegan : "Lateral interaction component and local luminance nonlinearities in the human pattern reversal ERG", Vision Res, **30**, 5, pp.659-671 (1990)
- [99] E.E. Sutter : "The fast m-transform : A fast computation of cross-correlations with binary m-sequences", SIAM J. Comput, **20**, 4, pp.686-694 (1991)
- [100] E.E. Sutter and D. Tran : "The field topography of ERG components in man — I. The photopic luminance response", Vis. Res., **32**(3), pp.433-446 (1992)
- [101] E.E. Sutter : "Deterministic time-domain nonlinear analysis", in Nonlinear Vision, CRC Press, pp.171-220 (1992)
- [102] 高木貞治 : "解析概論 (改訂第3版, 軽装版)", 岩波書店 (1983)
- [103] 戸田尚宏, 臼井支朗 : "対称関数のテンソル積展開を用いた非線形システム構造同定の一手法", 信学論 (A), **J73-A**, 1, pp.51-58 (1990)
- [104] 相原威, 塚田稔 : "網膜神経細胞の受容野解析への情報論的接近法", 信学技報, **MBE82**, 81, pp.27-30 (1982)
- [105] 今井聡, 水野真, 塚田稔, 樋田栄輝, 中研一 : "網膜神経節細胞の受容野の時・空間特性の同定", 信学技報, **MBE82**, 82, pp.31-34 (1982)
- [106] 臼井支朗, 村瀬一之, 池谷和夫, 渡辺敦 : "AIC による非線形ボルテラ汎関数モデルの決定", 信学技報 **MBE78-64** (1978)
- [107] J.D. Victor and P. Johannesma : "Maximum-entropy approximations of stochastic nonlinear transductions : An extension of the Wiener theory", Biol. Cybern., **54**, pp.289-300 (1986)



- [108] J.D.Victor : "The fractal dimension of a test signal : Implications for system identification procedures", Biol. Cybern., **57**, pp.421-426 (1987)
- [109] J.D.Victor : "Nonlinear systems analysis in vision : Overview of kernel methods", in Nonlinear Vision, CRC Press, pp.1-37 (1992)
- [110] V.Volterra : "Theory of functionals and of integro-differential equations", New York Dover Publications (1958)
- [111] 渡辺敦 : "有限次元ベクトル空間上の汎関数のボルテラ級数展開と非線形システムの核の測定計算量の削減への応用", 信学論 **J68-A**, 4 (1985)
- [112] 渡辺敦, 横山誠 : "Karhunen-Loève 展開を応用した Volterra 核の測定", 計測自動制御学会論文集, **22-6**, pp.610-615 (1986)
- [113] 渡辺敦 : "汎関数級数表現による非線形系の入出力特性の表現", 計測と制御学会誌, **25**, 7 (1986)
- [114] 横山誠, 渡辺敦 : "非白色正規性入力を受ける非線形システムの直交汎関数級数表現", 計測自動制御学会論文集, **23**, 11 (1987)
- [115] 横山誠, 渡辺敦 : "非白色入力を用いた Volterra 核の推定における誤差", 信学論 (A), **J74-A**, 5, pp.775-784 (1991)
- [116] 横山誠, 渡辺敦 : "非白色入力を用いたインパルス応答の推定—幾何学的手法による誤差解析", 信学論 (A), **J74-A**, 5, pp.785-793 May (1991)
- [117] 横山誠, 渡辺敦 : "ボルテラ級数と実現問題", 計測と制御, **31**, 8, pp.865-871 (1992)
- [118] N.Wiener : "The homogeneous chaos", Amer.J. of Math., **60**, pp.897-936 (1938)
- [119] N.Wiener : "Nonlinear problems in random theory", New York, Wiley (1958)
- [120] N.Xiang : "Using m-sequences for determining the impulse responses of LTI-systems", Signal Processing, **28**, pp.139-152 (1992)
- [121] 山田雅弘, 不破正宏, 重松征史 : "神経系における動的応答特性の線形および非線形解析—網膜神経細胞系への応用—", 電総研彙報 39,10 (1975)



- [122] X.Yang and S.A.Shamma : "Identification of connectivity in neural networks", *Biophys. J.*, **57**, pp.987-999 (1990)
- [123] X.Yang and S.A.Shamma : "Minimum mean square error estimation of connectivity in biological networks", *Biol. Cybern.*, **65**, pp.171-179 (1991)
- [124] S.Yasui, W.Davis and K.Naka : "Spatio-temporal receptive field measurement of retinal neurons by random pattern stimulation and cross correlation", *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, **26**, pp.263-272 (1979).
- [125] S.Yasui : "Stochastic functional Fourier series, Volterra series and nonlinear systems", *IEEE Trans. on Autom. Control*, **24**, pp.230-240 (1979)
- [126] S.Yasui : "Wiener-like Fourier kernels for nonlinear system identification and synthesis (nonanalytic cascade, bilinear, and feedback cases)", *IEEE Trans. on Autom. Control*, **27**, 3 pp.677-685 (1982)
- [127] S.Yasui : "The use of clipped input information in multidimensional cross correlation for estimating Wiener-like kernels of non-linear systems", *INT.J.SYSTEMS Sci.*, **17**, 10, pp.1421-1434 (1986)
- [128] 吉根勝美, 石井直宏 : "外乱が混入する非線形システムの解析", *信学技報*, **NLP88**, 88, pp.37-42 (1989)

#### 1. Cholesky 分解法 (44)

#### 2. 入力系列直交化法 (orthogonal approximation) (40, 43)

#### 3. Volterra 級数表現 (19, 110)

#### 4. Karhunen-Loève 展開法 (12, 125, 114)

### A.1 Cholesky 分解法

Cholesky 分解法は、入力系列が相互相関行列が正定値であることから、上三角行列とその転置行列の積で表せることを利用し、計算を効率的に行う手法である。この手法は、Volterra 級数に代わらず、広く知られた力率式の解法に利用されている。



## 付 録 A

### Volterra 核推定の各種アルゴリズム

第2章で述べたように, Volterra 汎関数級数モデルにおけるシステムの出力は,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{h} + \mathbf{e} \quad (\text{A.1})$$

として表され, Volterra 核の最小 2 乗推定は, 次の正規方程式を解くことに帰着される.

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\mathbf{h}} = \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (\text{A.2})$$

あるいは,

$$\hat{\mathbf{h}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

さて, 正規方程式の解法, すなわち Volterra 核の推定は, モデルの次数, 記憶長が増えると, 非常に困難になる. そこで, こうした方程式を高速に解く手法が数多く提案された. 中でも特に有効と考えられる次の代表的な 4 種の手法について以下に述べる.

1. Cholesky 分解法 [44]
2. 入力系列直交化法 (orthogonal approach)[40, 43]
3. Volterra 核直交展開法 [103, 111]
4. Karhunen-Loève 展開法 [112, 113, 114]

#### A.1 Cholesky 分解法

Cholesky 分解法は, 入力自己相関行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  が対称正定値行列であることから, 下三角行列とその転置行列の積に変形できることを利用し, 計算を効率的に行う手法である. この手法は, Volterra 核の推定に限らず, 古くから正規方程式の解法に利用されている.



入力 of 自己相関行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  は、対称行列であるから、下三角行列  $\mathbf{R}$  とその転置行列である上三角行列  $\mathbf{R}^T$  の積で表すことができる。

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T \quad (\text{A.3})$$

一般に、対称行列を三角行列の積に分解することを LU 分解、あるいは Cholesky 分解という。さて、入力 of 自己相関行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  の  $(i, j)$  要素を  $a_{ij}$ 、下三角行列  $\mathbf{R}$  の  $(i, j)$  要素を  $r_{ij}$  と書くことにすると、上式は、要素毎に、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & & & 0 \\ r_{12} & r_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ r_{1n} & r_{2n} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & r_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

と書くことができるので、両辺を比較することにより、

$$\begin{cases} r_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ r_{1j} = \frac{a_{1j}}{r_{11}} & j = 2, 3, \dots, n \\ r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2} & i = 2, 3, \dots, n \\ r_{ij} = \frac{1}{r_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj} \right) & j = i+1, i+2, \dots, n \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

なる関係があることが分かる。一方、入出力の相互相関ベクトル  $\mathbf{X}^T \mathbf{y}$  を上で求めた下三角行列  $\mathbf{R}$  を用いて

$$\mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{R} \mathbf{p} \quad (\text{A.6})$$

と表すことにする。各要素を明らかに書けば、

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & & & 0 \\ r_{12} & r_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ r_{1n} & r_{2n} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

となり、両辺を比較することにより、次の関係が得られる。

$$\begin{cases} p_1 = \frac{b_1}{r_{11}} \\ p_i = \frac{1}{r_{ii}} \left( b_i - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} p_k \right) & j = 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

さて、式 (A.3), (A.6) を式 (A.2) に代入し、両辺に左から行列  $\mathbf{R}^{-1}$  を掛ければ

$$\mathbf{R}^T \mathbf{x} = \mathbf{p} \quad (\text{A.9})$$



となり、行列  $\mathbf{R}$  が下三角行列であることから、ベクトル  $\mathbf{x}$  は次式として逐次的に計算することができる。

$$\begin{cases} x_n = \frac{p_n}{r_{nn}} \\ x_{n-i} = \frac{1}{r_{n-i, n-i}} \left( p_{n-i} - \sum_{k=n-i+1}^n r_{ik} x_k \right) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{A.10})$$

こうして、パラメータベクトルの各要素を高速に計算することができる。

## A.2 入力系列直交化法

入力系列直交化法 (orthogonal approach) は、入力行列  $\mathbf{X}$  の各列ベクトルを Gram-Schmidt の直交化法を用いて直交化することにより、入力の自己相関行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  を対角行列に変形し、計算を効率的に行う手法である。

式 (A.1) において、入力行列  $\mathbf{X}$  の  $m$  列をベクトル  $\mathbf{p}_m$  とおくと、出力ベクトル  $\mathbf{y}$  は、

$$\mathbf{y} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \mathbf{h} + \mathbf{e} \quad (\text{A.11})$$

と表される。  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$  を Gram-Schmidt の直交化法により直交化し、  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$  を生成する。

$$\mathbf{q}_m = \begin{cases} \mathbf{p}_1, & m = 1 \\ \mathbf{p}_m - \sum_{r=1}^{m-1} \alpha_{mr} \mathbf{q}_r, & m = 2, \dots, N \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

$$\alpha_{mr} = \frac{\mathbf{p}_m^T \mathbf{q}_r}{\mathbf{q}_r^T \mathbf{q}_r} \quad (\text{A.13})$$

$\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$  が張る線形空間と  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$  が張る線形空間は等しいから、生成した直交ベクトル  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$  を用いて、出力  $\mathbf{y}$  を

$$\mathbf{y} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \mathbf{g} + \mathbf{e} \quad (\text{A.14})$$

と表現することができる。  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$  の直交性から、入力の自己相関行列は、厳密に対角行列になる。したがって、パラメータ  $\mathbf{g}$  の  $n$  要素  $g_n$  の推定値  $\hat{g}_n$  は、

$$\hat{g}_n = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{q}_n}{\mathbf{q}_n^T \mathbf{q}_n}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A.15})$$

となる。



式 (A.15) の分子  $C(m) \equiv \mathbf{y}^T \mathbf{q}_m$  を  $\mathbf{q}_n$  を用いずに計算することを考える. 式 (A.12) の両辺に,  $\mathbf{y}^T$  を左から乗じれば,

$$\begin{aligned} C(m) &= \mathbf{y}^T \mathbf{q}_m = \mathbf{y}^T \mathbf{p}_m - \sum_{r=1}^{m-1} \alpha_{mr} \mathbf{y}^T \mathbf{q}_r \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{p}_m - \sum_{r=1}^{m-1} \alpha_{mr} C(r) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

となる. ただし,  $C(1) = \mathbf{y}^T \mathbf{p}_1$  である. したがって,  $m = 2, \dots, N$  に対して順に  $C(m)$  を計算すれば,  $\mathbf{q}_n$  を用いることなく,  $C(m)$  が得られる.

同様に, 式 (A.15) の分母  $E(n) \equiv \mathbf{q}_n^T \mathbf{q}_n$  を  $\mathbf{q}_n$  を用いずに計算することを考える. 式 (A.12) の両辺に,  $\mathbf{q}_m^T$  を左から乗じれば

$$E(m) = \mathbf{q}_m^T \mathbf{q}_m = \mathbf{q}_m^T \mathbf{p}_m - \sum_{r=1}^{m-1} \alpha_{mr} \mathbf{q}_m^T \mathbf{q}_r \quad (\text{A.17})$$

となり, 右辺第 2 項は,  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$  の直交性から 0 になる. 右辺第 1 項に式 (A.12) を再度代入すると

$$\begin{aligned} E(m) &= \mathbf{p}_m^T \mathbf{p}_m - \sum_{r=1}^{m-1} \alpha_{mr}^2 \mathbf{q}_r^T \mathbf{q}_r \\ &= \mathbf{p}_m^T \mathbf{p}_m - \sum_{r=1}^{m-1} \alpha_{mr}^2 E(r) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

となる. ただし,  $E(1) = \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1$  である. したがって,  $m = 2, \dots, N$  に対して順に  $E(m)$  を計算すれば,  $\mathbf{q}_n$  を用いることなく,  $E(m)$  が得られる.

さらに, 式 (A.15) の分子  $D(m, r) \equiv \mathbf{p}_m^T \mathbf{q}_r$  を  $\mathbf{q}_r$  を用いずに計算する. 式 (A.12) の両辺に,  $\mathbf{p}_m^T$  を左から乗じれば,

$$D(m, r) = \mathbf{p}_m^T \mathbf{q}_r = \mathbf{p}_m^T \mathbf{p}_r - \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_{rj} \mathbf{p}_m^T \mathbf{q}_j \quad (\text{A.19})$$

$$= \mathbf{p}_m^T \mathbf{p}_r - \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_{rj} D(m, j) \quad (\text{A.20})$$

となり,  $r = 1, \dots, N$  の順に  $D(m, r)$  を計算すれば,  $\mathbf{q}_n$  を用いることなく,  $D(m, r)$  が得られる. したがって, 係数  $\hat{g}_n, \alpha_{mr}$  は,

$$\hat{g}_n = \frac{C(n)}{E(n)} \quad (\text{A.21})$$

$$\alpha_{mr} = \frac{D(m, r)}{E(r)} \quad (\text{A.22})$$



として計算される.

直交展開の係数  $\hat{g}_m, m = 1, \dots, N$  が推定されたならば, 式 (A.22) で得られた直交化係数  $\alpha_{mr}$  を用いて, 元のパラメータベクトル  $\mathbf{h}$  の各要素  $\hat{h}_m, m = 1, \dots, N$  に変換することも可能である.

$$\begin{aligned} \hat{h}_m &= \sum_{i=m}^N \hat{g}_i Z_i \\ \text{ただし, } Z_m &= 1 \\ Z_j &= - \sum_{r=m}^{j-1} \alpha_{jr} Z_r, \quad j = m+1, \dots, N \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

### A.3 Volterra 核直交展開法

Volterra 核直交展開法は, 各次数の Volterra 核を多変数関数と見なして, 1 変数直交関数の外積の線形結合として展開し, 展開項数をパラメータ数よりも減らすことにより, 推定するパラメータ数の削減をはかり, 計算時間を短縮するものである. この手法は, 展開を打ち切ることにより, パラメータ数を削減することから, 近似を導入しており, 厳密に正規方程式を解く手法ではない.

次の正規直交関係を満たす直交関数  $\phi_k(i), k = 0, \dots, R, i = 0, \dots, R$  を考える.

$$\sum_{i=0}^R \phi_k(i) \phi_l(i) = \delta_{k,l}, \quad k, l = 0, 1, \dots, R \quad (\text{A.24})$$

ここで,  $\phi_k(i), k = 0, \dots, R$  から復元抽出された  $n$  個の関数の外積

$$\phi_{m_1}(i_1) \cdots \phi_{m_n}(i_n), \quad m_1, \dots, m_n = 0, 1, \dots, R \quad (\text{A.25})$$

は,  $(R+1)^n$  個の要素を持つ  $(R+1)^n$  個のベクトルであり, 互いに直交するから独立である. したがって, これらは,  $(R+1)^n$  次元線形空間を張る基底となりうる. 一方,  $n$  次 Volterra 核  $h_n(i_1, \dots, i_n)$  は,  $(R+1)^n$  個の自由パラメータを持つから,  $(R+1)^n$  次元空間の一つのベクトルとして考えることができる. したがって,  $n$  次 Volterra 核  $h_n(i_1, \dots, i_n)$  は, 式 (A.25) で表される基底ベクトルの線形結合により,

$$h_n(i_1, \dots, i_n) = \sum_{m_1=0}^R \cdots \sum_{m_n=0}^R c_n(m_1, \dots, m_n) \phi_{m_1}(i_1) \cdots \phi_{m_n}(i_n) \quad (\text{A.26})$$

と表現することができ, Volterra 核の直交展開形が得られる. 式 (A.26) による表現では, Volterra 核を厳密に表現しているものの, 自由パラメータ数は, Volterra 核そのものによ



る表現と等しい数である。そこで、式 (A.26) の直交展開を適当な  $N_n < R$  で打ち切り、

$$h_n(i_1, \dots, i_n) \approx \sum_{m_1=0}^{N_n} \cdots \sum_{m_n=0}^{N_n} c_n(m_1, \dots, m_n) \phi_{m_1}(i_1) \cdots \phi_{m_n}(i_n) \quad (\text{A.27})$$

と近似することにする。したがって、式 (A.27) を Volterra 汎関数級数モデルの式 (2.11) に代入すれば、システム出力  $y(i)$  は、 $L$  次 Volterra 汎関数級数モデルにより、

$$\begin{aligned} y(i) &= h_0 + \sum_{n=1}^L \sum_{m_1=0}^{N_n} \cdots \sum_{m_n=0}^{N_n} c_n(m_1, \dots, m_n) \left\{ \sum_{i_1=0}^R \phi_{m_1}(i_1) x(i-i_1) \right\} \\ &\quad \cdots \left\{ \sum_{i_n=0}^R \phi_{m_n}(i_n) x(i-i_n) \right\} + e(i) \\ &= h_0 + \sum_{n=1}^L \sum_{m_1=1}^{N_n} \cdots \sum_{m_n=1}^{N_n} c_n(m_1, \dots, m_n) \Phi_{m_1}(i) \cdots \Phi_{m_n}(i) + e(i) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

と近似できる。ただし、

$$\Phi_{m_j}(i) \equiv \sum_{i_j=0}^R \phi_{m_j}(i_j) x(i-i_j), \quad \text{for } j = 1, \dots, n \quad (\text{A.29})$$

は、直交基底  $\{\phi_{m_j}\}$  をインパルス応答関数とする線形フィルタの入力  $x(i)$  に対する出力を表す。式 (A.28) をベクトル、行列を用いれば、次のように表現できる。

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{h}' + \mathbf{e}$$

ただし、

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(T) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(T) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}' = \begin{pmatrix} h_0 \\ c_1(0) \\ \vdots \\ c_1(N_1) \\ c_2(0,0) \\ \vdots \\ c_2(N_2, N_2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \Phi_0(1) & \cdots & \Phi_{N_1}(1) & \Phi_0(1)\Phi_0(1) & \cdots & \Phi_{N_2}(1)\Phi_{N_2}(1) & \cdots \\ 1 & \Phi_0(2) & \cdots & \Phi_{N_1}(2) & \Phi_0(2)\Phi_0(2) & \cdots & \Phi_{N_2}(2)\Phi_{N_2}(2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & \Phi_0(T) & \cdots & \Phi_{N_1}(T) & \Phi_0(T)\Phi_0(T) & \cdots & \Phi_{N_2}(T)\Phi_{N_2}(T) & \cdots \end{pmatrix}$$

したがって、2乗誤差  $J = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$  を最小にする  $\mathbf{h}'$  をパラメータベクトル  $\mathbf{h}'$  の推定値  $\hat{\mathbf{h}}'$  とすると、推定値  $\hat{\mathbf{h}}'$  は、次の正規方程式を解くことにより得られる。

$$\hat{\mathbf{h}}' = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (\text{A.30})$$

パラメータベクトル  $\mathbf{h}'$  が推定されたならば、式 (A.27) によって Volterra 核へ変換される。



## A.4 Karhunen-Loève 展開法

Karhunen-Loève 展開法 [112, 113, 114] は、入力の自己相関行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  が対称行列であることから、適当な直交行列により対角化可能であることを利用している。

入力の自己相関行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  は、対称行列であるから、その固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  を対角要素とする対角行列

$$\mathbf{A} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$$

と対応する固有ベクトル  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$  を各列ベクトルに持つ正規直交行列

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)$$

を用いて、

$$\mathbf{P}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{P} = \mathbf{A} \quad (\text{A.31})$$

と対角化することができる。そこで、上式を式 (A.2) に代入すれば、

$$\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{h}} = \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (\text{A.32})$$

となるから、

$$\hat{\mathbf{h}}' \equiv \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{h}} \quad (\text{A.33})$$

$$\mathbf{X}' \equiv \mathbf{X} \mathbf{P} \quad (\text{A.34})$$

とおき、式 (A.32) に代入すると、

$$\mathbf{A} \hat{\mathbf{h}}' = \mathbf{X}'^T \mathbf{y} \quad (\text{A.35})$$

となる。故に、パラメータベクトル  $\mathbf{h}'$  は

$$\hat{\mathbf{h}}' = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}'^T \mathbf{y} \quad (\text{A.36})$$

として、逆行列の計算をほとんど不要 ( $N$  のオーダー) にして、推定することが可能になる。

しかしながら、行列  $\mathbf{A}, \mathbf{P}$  を求めるためには、入力の自己相関行列  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  の固有値、固有ベクトルを求めなければならない。固有値を求めるためには、逆行列の計算と同じオーダー ( $N^3$ ) の計算が必要であるから、結局、計算量のオーダーは減少していない。しかし、入力を確率過程とした場合には、その確率的性質と Volterra 汎関数級数モデルが定められれば、入力の自己相関行列の期待値は一意に定まり、その固有値、固有ベクトルもまた定まる。そこで、入力の自己相関行列の期待値から行列  $\mathbf{A}, \mathbf{P}$  をあらかじめ求めておけば、Volterra 核の近似値は、式 (A.36) により  $NT$  のオーダーで高速に推定できる。



## 付録 B

### バイナリ m 系列

2.5 節で述べたように,  $y_{**}$  が効率的に得られる入力系列として, バイナリ m 系列 [63, 64] が知られている. 例えば, 3 段シフトレジスタにより生成される 0, 1 の値を持つ周期  $2^3 - 1 = 7$  のバイナリ m 系列に対し,  $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow -1$  なる変換を施した系列に対する出力は,  $y_{+++}$  を除くすべての  $y_{**}$  を含む. 以下では, こうしたバイナリ m 系列の生成法と重要な性質について述べる.

#### B.1 線形自己回帰系列

バイナリ m 系列について述べる前に, 基本となる線形自己回帰系列について簡単に説明する. 一般に,  $N$  次線形自己回帰系列  $a_1, a_2, \dots$  は, 次式で表現される.

$$\begin{aligned} a_t &= -(c_{N-1}a_{t-1} + c_{N-2}a_{t-2} + \dots + c_1a_{t-N+1} + c_0a_{t-N}) \\ &= -\sum_{i=1}^N c_{N-i}a_{t-i}, \quad t = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

または,  $c_N = 1$  として, 任意の  $t$  に対して

$$\sum_{i=0}^N c_{N-i}a_{t-i} = 0 \quad (\text{B.2})$$

を満たす系列  $a_1, a_2, \dots$  として表現することも可能である. この関係は, 線形自己回帰モデル表現として, 図 B.1 のように表すことができる. 図中, 点線の枠内がモデル部分であり, 時間とともに右へ離散的にシフトする.

ところで, 通常, 線形自己回帰系列では, 系列値  $a_t$ , 帰還係数  $c_i$  は, 一般に実数値を取る. しかし, ここでは, 系列値  $a_t$ , 帰還係数  $c_i$  を有限体  $F_q$  の元とする.



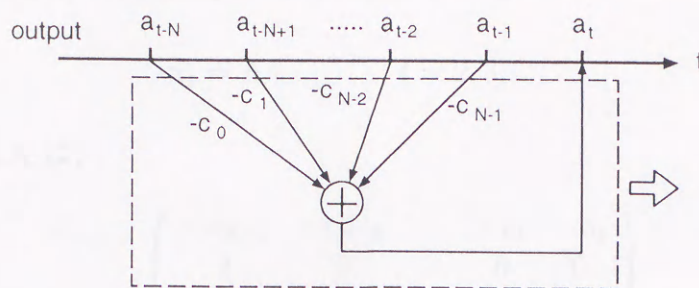


図 B.1 線形自己回帰系列

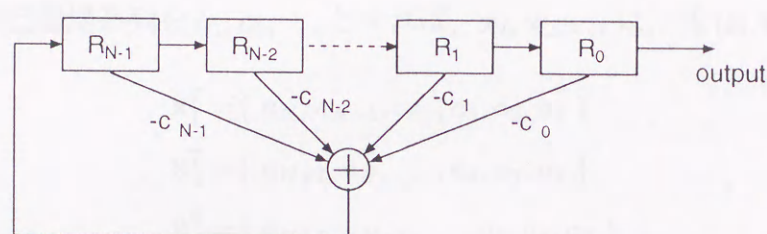


図 B.2 シフトレジスタによる線形自己回帰系列の生成法

有限体  $F_q$  の元をとる自己回帰系列  $a_1, a_2, \dots$  は, シフトレジスタを用いて発生させることができる. そのため, 要素数  $q$  の任意の有限体  $F_q$  の元を状態として取りうる  $n$  個のレジスタ  $R_0, R_1, \dots, R_{N-1}$  を考え, 図 B.2 のように接続し, 離散時間で各レジスタの状態を変化させるものとする. 図中,  $c_0 \neq 0, c_1, \dots, c_{N-1}$  は, 有限体  $F_q$  上の乗算による重みづけ,  $+$  は, 有限体  $F_q$  上の加算を意味する. また, 離散時刻  $t$  における各レジスタの状態を, それぞれ  $R_0(t), R_1(t), \dots, R_{N-1}(t)$  と表せば, これらには次の関係がある.

$$R_i(t) = \begin{cases} R_{i+1}(t-1), & i = 0, 1, \dots, N-2 \\ -\sum_{j=0}^{N-1} c_j R_j(t-1), & i = N-1 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

この回路は, 各レジスタの状態を線形結合として帰還していることから, レジスタ  $R_0$  の状態を観測することにより得られる系列は, 線形自己回帰系列になる.

線形自己回帰系列の生成回路は,  $N$  個の状態を内部に持つ状態遷移回路であり, 遷移は線形変換であることから, 状態の変化は, 行列, ベクトルにより表現することができる. 具体的には, 時刻  $t$  における各レジスタの状態をベクトル

$$\mathbf{x}_t^T = (R_{N-1}(t), R_{N-2}(t), \dots, R_1(t), R_0(t)), \quad t = 1, 2, \dots \quad (\text{B.4})$$



として表せば、式 (B.3) の関係は次のように表わされる.

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1}, \quad t = 2, 3, \dots \quad (\text{B.5})$$

ただし、遷移行列  $\mathbf{A}$  は、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -c_{N-1} & -c_{N-2} & \cdots & -c_1 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

となる. 線形自己回帰系列を  $a_1, a_2, \dots$  とすれば,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$  は, 式 (B.4) より,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^T &= (a_N, a_{N-1}, \dots, a_3, a_2, a_1) \\ \mathbf{x}_2^T &= (a_{N+1}, a_N, \dots, a_4, a_3, a_2) \\ \mathbf{x}_3^T &= (a_{N+2}, a_{N+1}, \dots, a_5, a_4, a_3) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

となる.

線形自己回帰系列は、各時刻のレジスタの状態を多項式の剰余類からなる巡回群の元とみなして表現することも可能である. そこで、式 (B.2) の左辺において、 $a_{t-N+k} = x^k$  とおくことにより得られる、 $c_i$  を  $i$  次項の係数とする有限体  $F_q$  上の  $N$  次多項式

$$H(x) = x^N + c_{N-1}x^{N-1} + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0 = \sum_{i=0}^N c_i x^i \quad (\text{B.8})$$

により、線形自己回帰系列を表現することも多い. ただし、 $c_N = 1, c_0 \neq 0$  とする. こうした多項式  $H(x)$  は、線形自己回帰系列の特性多項式といわれる.

## B.2 線形自己回帰系列の周期と m 系列

ある特性多項式  $H(x)$  を定めれば、初期値  $R_{N-1}(0), \dots, R_0(0)$  の線形結合により、線形自己回帰系列が一意に定まることから、線形自己回帰系列の全体は、 $N$  次元線形空間をなしているといえる. 各レジスタは、有限体  $F_q$  の元をとるから、シフトレジスタがとりうる状態数の上限は、 $q^N$  である. したがって、任意の初期値より状態遷移を開始すれば、 $q^N$  回以内で再び初期状態に戻る巡回列となる. この時の周期を  $T$  と表す. 例えば、 $N = 4, q = 2$  とし、特性多項式  $H(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  により表される線形帰還シフトレジスタ



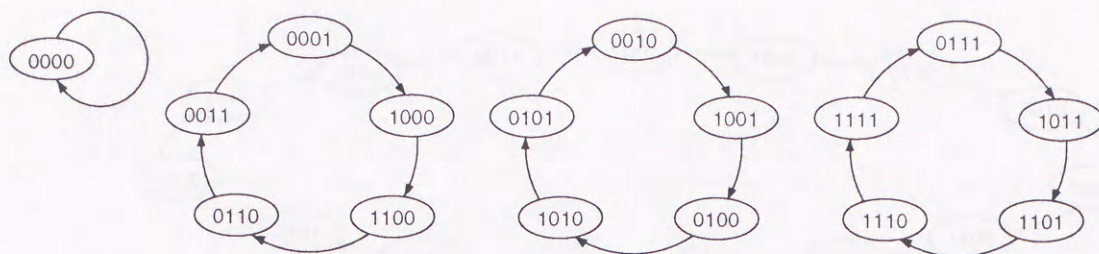


図 B.3  $F_2$  上の特性多項式  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  に対するシフトレジスタの状態遷移

は、図 B.3 に示すような 1 個の周期 1 の巡回系列と、3 個の周期 5 の巡回系列を生成する。すべてのレジスタが値 0 を初期値とする場合には、値 0 が  $F_q$  の零元であり、遷移が線形変換で表されることから、特性多項式をどのように選んでも状態が変化せず、周期  $T = 1$  の巡回系列とみなせる。ゆえに、自明な状態遷移として、以後、除外して考える。

特性多項式  $H(x)$  とその多項式が生成する線形自己回帰系列の周期  $T$  の間には、次の関係がある [63]。特性多項式  $H(x)$  が体  $F_q$  上で割り切ることのできる二項式  $x^m - 1$  の最小の次数を  $m$  とすると、線形自己回帰系列の周期  $T$  は、すべて  $m$  となる。例えば、上の例で示したシフトレジスタの特性多項式  $H(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  は、

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

であることから、体  $F_2$  上で  $x^5 - 1$  を割り切ることができ、周期  $T = 5$  となる。別の見方をすれば、周期  $T$  とは、 $x_0 = x_m$  となる最小の  $m$  が  $T$  であることであるから、式 (B.6) で与えられる遷移行列  $A$  を  $m$  乗して単位行列  $I$  になる最小の  $m$  が周期  $T$  であるともいえる。

$$T = \min m, \quad \text{such that } A^m = I, \quad m > 1$$

ところで、 $N$  次多項式  $H(x)$  が、有限体  $F_q$  上で原始既約多項式となっているならば、 $H(x)$  で割り切ることができる最小次数の二項式の次数は、 $q^N - 1$  であることも知られている [63]。したがって、特性多項式  $H(x)$  として、原始既約多項式を選べば、得られる線形自己回帰系列は、周期  $q^N - 1$  個の巡回系列を持つことになる。例えば、 $N = 4, q = 2$ 、特性多項式を  $H(x) = x^4 + x + 1$  とすると、 $H(x)$  は、有限体  $F_2$  上で既約であり、 $H(x)$  を法多項式とする多項式環の剰余類からなるガロア体の原始元を  $H(x) = 0$  の根として持つことから、原始既約多項式である。この  $H(x)$  に対するシフトレジスタの状態遷移は、図 B.4 に示すものとなり、周期  $T = q^N - 1 = 2^4 - 1 = 15$  となることがわかる。こうした最大長の系列を生成するシフトレジスタは、すべてが 0 である場合を除く、すべての組み合



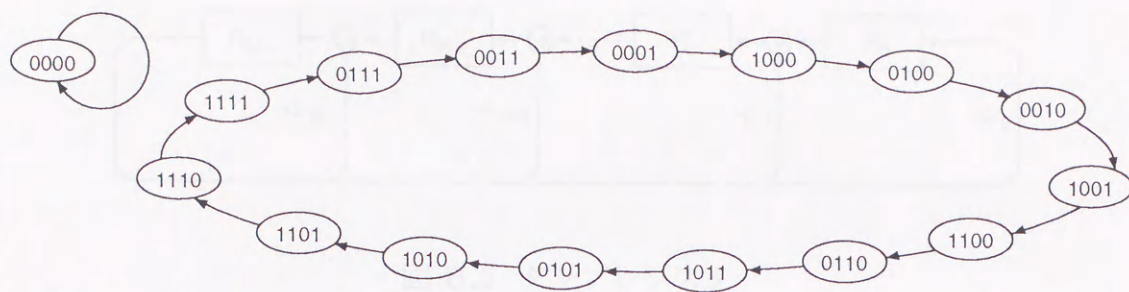


図 B.4  $F_2$  上の特性多項式  $x^4 + x + 1$  を持つシフトレジスタの状態遷移

わせの状態 ( $q^N - 1$  個) をとる. こうした  $q^N - 1$  個の系列は, 最も少ないレジスタ数で生成できる最大長の系列であることから, 最大長シフトレジスタ系列 (maximum length shift register sequence), または m 系列と呼ばれている. 特に,  $q = 2$  の場合には, バイナリ m 系列と呼ばれ, 計算機により容易に生成できることから, 擬似乱数等に広く用いられている.

### B.3 線形自己回帰系列の基底による表現

式 (B.5) では, 線形帰還シフトレジスタの状態遷移を漸化式で表現した. 漸化式による表現では, 任意の  $\mathbf{x}_i$  を求める場合に,  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}$  を順に求めなければならず不便である. ところで, 線形自己回帰系列は,  $N$  次元線形空間をなすことから, ベクトル  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  が一次独立であれば, これらの線形結合により  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T$  を表現することが可能である. そこで, 基底を定め, その線形結合により, 任意の  $\mathbf{x}_i$  を表現することを考え, まず, こうした線形結合の係数を求める. 線形自己回帰系列を  $a_1, a_2, \dots, a_T$  とすれば,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^T &= (a_N, a_{N-1}, a_{N-2}, \dots, a_3, a_2, a_1) \\ \mathbf{x}_2^T &= (a_{N+1}, a_N, a_{N-1}, \dots, a_4, a_3, a_2) \\ \mathbf{x}_3^T &= (a_{N+2}, a_{N+1}, a_N, \dots, a_5, a_4, a_3) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_{T-1}^T &= (a_{T-2}, a_{T-3}, a_{T-4}, \dots, a_1, a_T, a_{T-1}) \\ \mathbf{x}_T^T &= (a_{T-1}, a_{T-2}, a_{T-3}, \dots, a_2, a_1, a_T) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

と表される. さて,

$$a_N = - \sum_{i=1}^N c_i a_i \quad (\text{B.10})$$



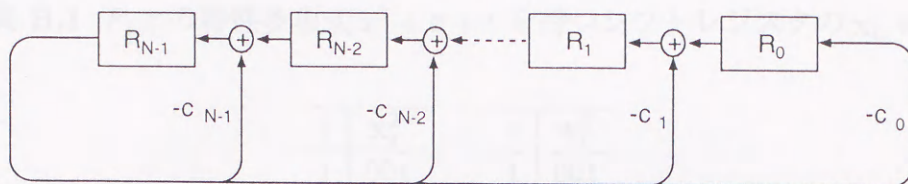


図 B.5 タップレジスタ

であるから、 $\mathbf{x}_t$  を  $\mathbf{x}_N, \dots, \mathbf{x}_1$  の線形結合で表したときの重みは、 $a_t$  を  $a_N, \dots, a_1$  の線形結合で表したときの重みに等しい。 $a_t$  は、

$$a_t = \mathbf{x}_1^T \mathbf{w}_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{w}_t = \begin{cases} \mathbf{A}^T \mathbf{w}_{t-1}, & t = 2, 3, \dots, T \\ (0, 0, \dots, 0, 1)^T, & t = 1 \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

として表されるから、任意の時刻  $t$  のレジスタの状態  $\mathbf{x}_t$  は、

$$\mathbf{x}_t = (\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_{N-1}, \dots, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \mathbf{w}_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (\text{B.13})$$

と表現できる。重みベクトル  $\mathbf{w}_t$  は、図 B.2 で示したシフトレジスタを逆方向に動作させるタップレジスタにより生成することができる。このタップレジスタの構成を図 B.5 に示す。

$N$  段シフトレジスタの任意の時刻  $t$  における状態は、時刻  $t-1$  における状態の線形変換により表現できるだけでなく、時刻  $1, 2, \dots, N$  における状態の線形結合によっても表現できる。さらに、こうした表現は、レジスタの初期値に依存しないため、基底としては、任意の時刻  $s$  からの連続する  $N$  時刻  $s, s+1, \dots, s+N-1$  のシフトレジスタの状態を選ぶことも可能である。すなわち、式 (B.11) は、一般に

$$a_{i+j-1} = \mathbf{x}_i^T \mathbf{w}_j, \quad 0 < i+j-1 \leq T \quad (\text{B.14})$$

と書けるから、時刻  $i+j-1$  におけるレジスタの状態  $\mathbf{x}_{i+j-1}$  は、

$$\mathbf{x}_{i+j-1} = (\mathbf{x}_{i+N-1}, \mathbf{x}_{i+N-2}, \dots, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_i) \mathbf{w}_j, \quad 0 < i+j-1 \leq T \quad (\text{B.15})$$

と表現できる。

ここで例を示す。特性多項式

$$H(x) = x^3 + x + 1$$



表 B.1  $F_2$ 上の特性多項式  $x^3 + x + 1$  を持つシフトレジスタの  $\mathbf{x}_t, \mathbf{w}_t$ 

$t$	$\mathbf{x}_t^T$	$t$	$\mathbf{w}_t^T$
1	001	1	001
2	100	2	010
3	010	3	100
4	101	4	011
5	110	5	110
6	111	6	111
7	011	7	101

により特徴づけられるシフトレジスタの時刻  $t$  の状態  $\mathbf{x}_t$  を  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  の線形結合により表現する. 初期値を  $\mathbf{x}_1^T = (001)$  とすると,  $\mathbf{x}_t, \mathbf{w}_t$  は, 表 B.1 のようになる.

したがって,  $\mathbf{x}_t$  は,  $(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$  の線形結合

$$\mathbf{x}_t = (\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \mathbf{w}_t \quad (\text{B.15})$$

として以下のように表現される.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= 0\mathbf{x}_3 + 0\mathbf{x}_2 + 1\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 &= 0\mathbf{x}_3 + 1\mathbf{x}_2 + 0\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_3 &= 1\mathbf{x}_3 + 0\mathbf{x}_2 + 0\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_4 &= 0\mathbf{x}_3 + 1\mathbf{x}_2 + 1\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_5 &= 1\mathbf{x}_3 + 1\mathbf{x}_2 + 0\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_6 &= 1\mathbf{x}_3 + 1\mathbf{x}_2 + 1\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_7 &= 1\mathbf{x}_3 + 0\mathbf{x}_2 + 1\mathbf{x}_1 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

線形自己回帰系列の表現法としては, 上記の基底  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  によるものの他に, ある初期値に対する線形自己回帰系列 1 周期  $\{a_1, a_2, \dots, a_T\}$  とその巡回列を基底とすることも可能である. ベクトル  $\mathbf{y}_1$  を

$$\mathbf{y}_1^T = (a_1, a_2, \dots, a_T) \quad (\text{B.17})$$

とすれば, 任意の初期値に対する線形自己回帰系列は, その巡回列

$$\mathbf{y}_i^T = (a_i, a_{i+1}, \dots, a_{N-1}, a_0, \dots, a_{i-1}), \quad i = 1, \dots, T \quad (\text{B.18})$$

と書ける. ベクトル  $\mathbf{y}_i$  のすべての要素は,  $1, \dots, N$  番目の線形結合により表現できることから, 式 (B.9) と見比べると,  $\mathbf{y}_i$  は, ベクトル  $\mathbf{x}_i$  に等価である. したがって,  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N$



表 B.2  $F_2$  上の特性多項式  $x^3 + x + 1$  を持つシフトレジスタの状態を元とする可換群

+	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_1$	$x_1$	$x_0$	$x_4$	$x_7$	$x_2$	$x_6$	$x_5$	$x_3$
$x_2$	$x_2$	$x_4$	$x_0$	$x_5$	$x_1$	$x_3$	$x_7$	$x_6$
$x_3$	$x_3$	$x_7$	$x_5$	$x_0$	$x_6$	$x_2$	$x_4$	$x_1$
$x_4$	$x_4$	$x_2$	$x_1$	$x_6$	$x_0$	$x_7$	$x_3$	$x_5$
$x_5$	$x_5$	$x_6$	$x_3$	$x_2$	$x_7$	$x_0$	$x_1$	$x_4$
$x_6$	$x_6$	$x_5$	$x_7$	$x_4$	$x_3$	$x_1$	$x_0$	$x_2$
$x_7$	$x_7$	$x_3$	$x_6$	$x_1$	$x_5$	$x_4$	$x_2$	$x_0$

の線形結合により,  $y_i$  を表現した際の結合重みは,  $x_i$  を  $x_1, \dots, x_N$  の線形結合で表した場合の結合重みと等しい. したがって, 任意の初期値に対する線形自己回帰系列は,

$$y_i = (y_N, y_{N-1}, \dots, y_2, y_1) w_i \quad (\text{B.19})$$

と表わされる.

最大長シフトレジスタ系列を生成するシフトレジスタの状態  $x_i$  は, すべてのレジスタが 0 である場合を除く, すべての状態を含む. したがって,  $x_1, \dots, x_T$  に  $x_0^T = (0, 0, \dots, 0)$  を付加すれば, これらは,  $F_q$  上の要素毎の加算に関して閉じており, 単位元  $x_0^T$ , 逆元も存在することから, 可換群をなしている. 例えば, 特性多項式  $H(x) = x^3 + x + 1$  により生成される  $x_0, \dots, x_T$  の演算表は, 表 B.2 に示すものとなる. ただし,  $x_1, \dots, x_T$  は, 既に表 B.1 に示した.

## B.4 バイナリ m 系列と Hadamard 行列の関係

以後, 有限体  $F_2$  の元をとるバイナリ m 系列に限定し, こうした系列からつくられる行列と Hadamard 行列との関係について述べる.  $x_0, \dots, x_T$  が加算に関して可換群をなすことは, 表 B.2 で示した. ここで, 次の全単射変換  $\varphi$  を考える.

$$\varphi : \begin{cases} 0 \rightarrow 1 \\ 1 \rightarrow -1 \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

$x_0, \dots, x_T$  の各要素に対して, 変換  $\varphi$  を施したものを  $x'_0, \dots, x'_T$  とすると, これらは, 乗法群をなす. したがって,  $x'_0, \dots, x'_T$  は,  $x_0, \dots, x_T$  と同型になる. また,  $y_1, \dots, y_T$  のそ



それぞれの先頭に 0 を付加し,  $y_0^T = (0, 0, \dots, 0)$  を追加し, 変換  $\varphi$  を施した

$$y_i^T = (1, \varphi[y_i^T]), \quad i = 0, 1, \dots, T \quad (\text{B.21})$$

もまた,  $x'_0, \dots, x'_T$  と同型であるから乗法群を構成する. ここで, 行列

$$M \equiv (y'_0, y'_1, \dots, y'_T) \quad (\text{B.22})$$

は, Hadamard 行列  $H$  の 1 つとなり, 特に自然順 Hadamard 行列と同値になることを以下に示す.

Hadamard 行列  $H$  は, 2 値 ( $\pm 1$ ) 要素を持つ直交行列であり, この行列による線形変換は Hadamard 変換と呼ばれている. Hadamard 行列  $H$  の次元  $m$  は, 行列の直交性より偶数であり, 行列の各行あるいは各列ベクトルは,  $m$  次元線形空間を張る直交ベクトルである. したがって, 次式の関係を満たす.

$$HH^T = H^T H = mI \quad (\text{B.23})$$

ただし,  $I$  は  $m \times m$  の単位行列である.

Hadamard 行列は, 任意の行あるいは列に  $-1$  を乗じても, また, 行列の任意の行や列の順番を変えたとしても, こうした直交性を失わない. すなわち, ある Hadamard 行列  $H_1$  が, 適当な行あるいは列の並び換え基本行列  $P_r, P_c$  を前後から乗じることにより,

$$H_2 = P_r H_1 P_c \quad (\text{B.24})$$

となるならば, 行列  $H_2$  もまた Hadamard 行列である. 一般に, 列あるいは行を並び換えることに等しくなる行列は, 同値であるといわれ, 同値な行列の集合を同値類という.

Hadamard 行列には多くの同値類が存在する. その 1 つである自然順 Hadamard 行列は, 各要素  $h_{r,c}$  が次式で表される  $2^n$  次行列  $H_{2^n}$  である.

$$h_{r,c} = (-1)^{q(r,c)}, \text{ ただし } q(r,c) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i c_i, 0 \leq c, r \leq 2^n - 1 \quad (\text{B.25})$$

ただし,  $r_i, c_i$  は, それぞれ  $r, c$  を 2 進数で表現した時の  $i$  桁めの値を表わす. また, 自然順 Hadamard 行列は, 再帰的に

$$\begin{aligned} H_1 &= (1) \\ H_2 &= \begin{pmatrix} H_1 & H_1 \\ H_1 & -H_1 \end{pmatrix} \\ H_4 &= \begin{pmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$$\mathbf{H}_{2^n} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{2^{n-1}} & \mathbf{H}_{2^{n-1}} \\ \mathbf{H}_{2^{n-1}} & -\mathbf{H}_{2^{n-1}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.26})$$

としても求められる。

次に、最大長シフトレジスタ系列から生成され、式 (B.22) で定義される行列  $\mathbf{M}$  と自然順 Hadamard 行列  $\mathbf{H}_{2^N}$  の同値関係を示す。行列  $\mathbf{M}$  の式 (B.20) の変換を行う前の行列として行列  $\mathbf{M}'$  を考える。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &\equiv (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_T \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_T & a_1 & \cdots & a_{T-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

式 (B.14) より、

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{w}_j = \begin{cases} a_{i+j-1}, & i, j \neq 0 \\ 0, & i = 0 \text{ or } j = 0 \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

であるから、行列  $\mathbf{M}'$  は、

$$\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \mathbf{w}_0^T & \mathbf{x}_1 \mathbf{w}_0^T & \cdots & \mathbf{x}_T \mathbf{w}_0^T \\ \mathbf{x}_0 \mathbf{w}_1^T & \mathbf{x}_1 \mathbf{w}_1^T & \cdots & \mathbf{x}_T \mathbf{w}_1^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_0 \mathbf{w}_T^T & \mathbf{x}_1 \mathbf{w}_T^T & \cdots & \mathbf{x}_T \mathbf{w}_T^T \end{pmatrix} \quad (\text{B.29})$$

と書くことができる。  $\mathbf{w}_t, \mathbf{x}_t$  を 2 進数とみなした数を、それぞれ  $u(t), v(t)$  とする。  $t = 0, 1, \dots, T$  に対して、  $u(t), v(t)$  は、それぞれ 0 から  $T$  の値に 1 対 1 に対応する。  $u(t), v(t)$  の 2 進数  $i$  桁目の値をそれぞれ  $u_i(t), v_i(t)$  とすると、行列  $\mathbf{M}'$  の  $(r, c)$  要素  $p(r, c)$  は、

$$p(r, c) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i(r) v_i(c), \quad 0 \leq r, c \leq T \quad (\text{B.30})$$

と書ける。行列  $\mathbf{M}$  は、行列  $\mathbf{M}'$  の各要素に対し、式 (B.20) の変換を施したものであるから、行列  $\mathbf{M}$  の  $(r, c)$  要素  $m_{r,c}$  は、

$$m_{r,c} = (-1)^{p(r,c)} \quad (\text{B.31})$$

となる。式 (B.30), (B.31) と式 (B.25) を比較すれば、  $t$  行を  $u(t)$  行に入れる行基本変形行列  $\mathbf{P}_r$ 、  $t$  列を  $v(t)$  列に入れる列基本変形行列  $\mathbf{P}_c$  を、それぞれ行列  $\mathbf{M}$  の前後から乗じた行列は、自然順 Hadamard 行列に等しくなる。

$$\mathbf{P}_r \mathbf{M} \mathbf{P}_c = \mathbf{H}_{2^N} \quad (\text{B.32})$$



したがって、行列  $\mathbf{M}$  は、自然順 Hadamard 行列  $\mathbf{H}_{2N}$  と同値類であることがわかる。

ここで、 $N = 3, q = 2$  として、特性多項式  $H(x) = x^3 + x + 1$  により特徴づけられるバイナリ m 系列について例を示す。ただし、初期値を  $\mathbf{x}_1^T = (001)$  とする。表 B.1 より、 $u(t), v(t)$  は、

$t$	$\mathbf{x}_t^T$	$v(t)$	$\mathbf{w}_t$	$u(t)$
0	000	0	000	0
1	001	1	001	1
2	100	4	010	2
3	010	2	100	4
4	101	5	011	3
5	110	6	110	6
6	111	7	111	7
7	011	3	101	5

(B.33)

となる。したがって、 $t$  行を  $u(t)$  行に入れる行基本変形行列  $\mathbf{P}_r$ 、 $t$  列を  $v(t)$  列に入れる列基本変形行列  $\mathbf{P}_c$  は、それぞれ、

$$\mathbf{P}_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.34})$$

となる。 $\mathbf{P}_r$  の列を  $t$ 、行を  $u(t)$  として対応する箇所に値 1 がたち、 $\mathbf{P}_c$  については、行を  $t$ 、列を  $v(t)$  として対応する箇所に値 1 がたつ。他の点では 0 が割り当てられている。したがって、行列

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & + & - & + & - & - \\ + & + & + & - & + & - & - & - \\ + & + & - & + & - & - & - & + \\ + & - & + & - & - & - & + & + \\ + & + & - & - & - & + & + & - \\ + & - & - & - & + & + & - & + \\ + & - & - & + & + & - & + & - \end{pmatrix} \quad (\text{B.35})$$

の前後から、 $\mathbf{P}_r, \mathbf{P}_c$  を掛けることにより、自然順 Hadamard 行列  $\mathbf{H}_{2N}$  となる。ただし、上式において、 $+$  は  $+1$ 、 $-$  は  $-1$  を意味する。



## 付 録 C

### 正規確率変数の高次モーメント

正規確率系列を入力とする Wiener 核の推定において，推定値の期待値，分散を評価するためには，正規確率変数の高次モーメントの計算が必須である．こうした正規確率変数の高次モーメントの計算には，pair-wise rule がよく利用される [70, 90]．以下では，こうした pair-wise rule について説明する．

#### C.1 確率変数のモーメント，キュムラント

確率密度分布  $f(x)$  を持つ確率変数  $X$  の関数  $g(X)$  の期待値は

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \quad (\text{C.1})$$

として与えられ， $g(X) = X$  ならば平均， $g(X) = g(X - m)^2$  ならば分散を表す．また， $g(X) = \exp(sX)$  ならば，

$$\varphi(s) \equiv E[\exp(sX)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sx) f(x) dx \quad (\text{C.2})$$

となるが， $\exp(sx)$  のマクローリン展開が

$$\exp(sx) = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \cdots \quad (\text{C.3})$$

となることを考慮すれば

$$\varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k!} s^k \quad (\text{C.4})$$

と表される．したがって，確率変数  $X$  の  $k$  次モーメント  $m_k$  は，

$$m_k = E[X^k] = \left. \frac{d^k \varphi(s)}{ds^k} \right|_{s=0} \quad (\text{C.5})$$



と表わすことができる。関数 $\varphi(s)$ は、モーメントを計算するときに便利なことから、モーメント母関数 $\varphi(s)$ と呼ばれる。

1変数モーメント母関数 $\varphi(s)$ の対数は、キウムラント母関数 $\log \varphi(s)$ と呼ばれ、複数の確率変数の積を扱う場合に便利である。キウムラント母関数のべき展開

$$\log \varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} s^k \quad (C.6)$$

における係数 $c_k$ を $k$ 次キウムラントと呼ぶ。0次キウムラントは、 $\varphi(0) = 1$ であることから、 $c_0 = 0$ である。キウムラント母関数のべき展開式(C.6)の両辺を $s$ で微分し、モーメント母関数のべき展開式(C.4)を代入すれば、キウムラントとモーメントの関係式が得られる。

$$m_n = c_1 m_{n-1} + \binom{n-1}{1} c_2 m_{n-2} + \binom{n-1}{2} c_3 m_{n-3} + \cdots + \binom{n-1}{n-2} c_{n-1} m_1 + c_n \quad (C.7)$$

キウムラント、モーメントについて解けば、それぞれ

$$\begin{aligned} c_1 &= m_1 \\ c_2 &= m_2 - m_1^2 \\ c_3 &= m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3 \\ c_4 &= m_4 - 4m_3 m_1 - 3m_2^2 + 12m_2 m_1^2 - 6m_1^4 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (C.8)$$

$$\begin{aligned} m_1 &= c_1 \\ m_2 &= c_2 + c_1^2 \\ m_3 &= c_3 + 3c_1 c_2 + c_1^3 \\ m_4 &= c_4 + 3c_2^2 + 4c_1 c_3 + 6c_1^2 c_2 + c_1^4 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (C.9)$$

となる。1,2次キウムラント $c_1, c_2$ は、それぞれ平均 $m_1$ 、分散 $m_2 - m_1^2$ に等しく、特に、平均 $m_1 = 0$ ならば、3次以下の中心モーメント、キウムラントは、それぞれ等しいといった性質がある。

1変数のモーメント母関数 $\varphi(s)$ は、多変数に拡張することができる。ベクトル表現 $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)^T$ ,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$ により、 $N$ 次元モーメント母関数は、

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{s}) &= E[\exp(\mathbf{s}^T \mathbf{X})] \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} E[(\mathbf{s}^T \mathbf{X})^k] \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_k}^N E[X_{j_1} \cdots X_{j_k}] s_{j_1} \cdots s_{j_k} \end{aligned} \quad (C.10)$$



と表される。ただし、 $\sum_{j_1, \dots, j_k}^N$  は、 $(1, 2, \dots, N)$  の数の中から、 $k$  個の重複を認めた順列について和をとることを意味する。したがって、結合モーメントは、次式により与えられる。

$$E[X_{j_1} \cdots X_{j_k}] = \frac{\partial}{\partial s_{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial s_{j_k}} \varphi(s) \Big|_{s=0} \quad (C.11)$$

また、 $X_1, \dots, X_N$  が互いに独立な確率変数ならば、多変数モーメント母関数は、それぞれのモーメント母関数の積で表される。

$$\varphi(s_1, \dots, s_N) = \varphi_1(s_1) \cdots \varphi_N(s_N) \quad (C.12)$$

多変数モーメント母関数  $\varphi(s)$  の対数をとれば、多変数キウムラント母関数  $\log \varphi(s)$  が得られ、そのべき展開を

$$\log \varphi(s) = \log \varphi(s_1, \dots, s_N) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_k}^N c[X_{j_1} \cdots X_{j_k}] s_{j_1} \cdots s_{j_k} \quad (C.13)$$

とする。この時、展開係数  $c[X_{j_1} \cdots X_{j_k}]$  を  $N$  変数の  $k$  次キウムラントと定義する。 $N$  変数が 2 つ以上の独立な確率変数の組に分かれるとき、それらの組にまたがる多変数キウムラントは 0 になるといった特徴がある。また、2 次キウムラントは共分散

$$c[X_1 X_2] = E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2] \quad (C.14)$$

になり、3 次キウムラントは

$$\begin{aligned} c[X_1 X_2 X_3] = & E[X_1 X_2 X_3] - E[X_1]E[X_2 X_3] - E[X_2]E[X_1 X_3] \\ & - E[X_3]E[X_1 X_2] + 2E[X_1]E[X_2]E[X_3] \end{aligned} \quad (C.15)$$

となる。したがって、高次のキウムラントは、多変数確率変数の高次相関を表す量と考えられる。

## C.2 pair-wise rule

確率変数  $X$  は、その確率密度分布  $f(x)$  が正規分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi P}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2P}\right] \quad (C.16)$$

で与えられるとき、正規 (Gaussian) 確率変数という。上式において、 $m$  は平均、 $P$  は分散を表し、 $m=0$ 、 $P=1$  のとき、 $f(x)$  を標準正規分布と呼ぶ。正規確率分布のモーメン



ト母関数 $\varphi(s)$ , キュムラント母関数 $\log \varphi(s)$ は, それぞれ

$$\varphi(s) = \exp\left[ms + \frac{P}{2}s^2\right] \quad (\text{C.17})$$

$$\log \varphi(s) = ms + \frac{P}{2}s^2 \quad (\text{C.18})$$

となる. キュムラントは, その微分係数を計算することにより,

$$c_1 = m, \quad c_2 = P, \quad c_3 = c_4 = \cdots = 0 \quad (\text{C.19})$$

となる. また, 中心モーメントは,  $m = 0$  とおいたモーメント母関数より,

$$E[(X - m)^n] = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)P, & n : \text{even} \\ 0, & n : \text{odd} \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

と計算される.

$N$ 個の正規確率変数を  $X_1, \dots, X_N$  とすれば, それらの結合確率密度分布  $f(\mathbf{x})$  は,  $N$ 次元正規分布

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{C}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m})}{2}\right] \quad (\text{C.21})$$

で表される. ここで,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$  を表し,  $\mathbf{m}$  は平均ベクトル  $\mathbf{m} = (m_{x_1}, \dots, m_{x_N})^T$ ,  $\mathbf{C}$  は共分散行列  $\{C_{ij}\} = E[(X_i - m_{x_i})(X_j - m_{x_j})]$  を表す.

平均ベクトルを  $\mathbf{m} = \mathbf{0}$  とすれば,  $\mathbf{C} = \mathbf{R}$  となるので, 式 (C.21) は,

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}}{2}\right] \quad (\text{C.22})$$

となり,  $N$ 変数キュムラント母関数  $\log \varphi(s)$  は,

$$\log \varphi(s) = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^N R_{lm} s_l s_m \quad (\text{C.22})$$

となる. 式 (C.22) を式 (C.11) に代入することにより,  $N$ 個の正規確率変数の積の平均が求められる.

$$\begin{aligned} E[X_{j_1} \cdots X_{j_N}] &= \frac{\partial}{\partial s_{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial s_{j_N}} \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^N R_{lm} s_l s_m\right\} \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} \\ &= \begin{cases} 0 & N : \text{odd} \\ \sum_{\text{all pairing } (l,m)} \prod R_{lm} & N : \text{even} \end{cases} \quad (\text{C.23}) \end{aligned}$$

上式は, 例えば  $N = 4$  の場合は

$$E[X_1 X_2 X_3 X_4] = R_{12} R_{34} + R_{13} R_{24} + R_{14} R_{23} \quad (\text{C.24})$$



となる. また, 可換則

$$\begin{cases} R_{ij} &= E[X_j X_i] \\ R_{ij} R_{kl} &= R_{kl} R_{ij} \end{cases} \quad (\text{C.25})$$

が成立することから, 式 (C.23) において  $N$  が偶数の場合, 展開項数  $K$  は,

$$K = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)! 2^{\frac{N}{2}}} \quad (\text{C.26})$$

となり, 最初の数項は,

$N$	$K$
2	1
4	3
6	15
8	105
10	945

となる.

各正規確率変数が互いに独立であり, 等しいパワーレベル (分散)  $P$  を持つならば, その自己相関行列  $\mathbf{R}$  は, 対角行列

$$\mathbf{R} = P \mathbf{I} \quad (\text{C.27})$$

となり, 式 (C.23) は

$$E[X_1 X_2 \cdots X_N] = \begin{cases} \sum \prod E[X_i X_j] = P^{N/2} \sum \prod \delta_{ij} & N : \text{even} \\ 0 & N : \text{odd} \end{cases} \quad (\text{C.28})$$

と表される. このように, 複数の正規確率変数の積の期待値の計算には, 各正規確率変数をペアにして展開すると便利である. こうした規則は, pair-wise rule と呼ばれている.



## 研究業績目録

### 学術論文

1. 横田康成, 戸田尚宏, 臼井支朗 : “相互相関法による非線形システムのウィナー核推定精度”, 電子情報通信学会論文誌 (A), **J75-A**, No.6, pp.1013-1020 (1992-06)
2. 横田康成, 戸田尚宏, 臼井支朗 : “ウィナー核推定における最適入力パワーレベルの高速決定法”, 電子情報通信学会論文誌 (A), **J75-A**, No.8, pp.1389-1396 (1992-08)
3. 横田康成, 戸田尚宏, 臼井支朗 : “入力パワーレベル可変ウィナー核推定法”, 電子情報通信学会論文誌 (A), **J76-A**, No.5, pp.728-735 (1993-05)
4. 長坂英一郎, 原督, 横田康成, 臼井支朗 : “ランダムドットパターン刺激による ERG の空間分布計測”, 電子情報通信学会論文誌 (D-II), **J76-D II**, No.5, pp.1066-1075 (1993-05)
5. 横田康成, 杉本充, 臼井支朗 : “相互相関法により推定された多入力汎関数級数モデルのウィナー核推定精度”, 電子情報通信学会論文誌 (A), **J76-A**, No.10, pp.1491-1495 (1993-10)

### 国際会議

1. Yasunari Yokota, Naohiro Toda, Shiro Usui : “Method for Determining the Optimum Input Power Level in Wiener Kernel Measurement”, *Proceedings of the 14th Annual International Conference on the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society* (Paris), **Vol.14**, No.5, pp.2598-2599 (1992-11)



## シンポジウム講演

1. 横田康成, 戸田尚宏, 臼井支朗: “相互相関法に基づく非線形システム同定法の同定精度改善法”, 第7回生体・生理シンポジウム論文集, pp.455-460 (1992-11)
2. 長坂英一郎, 工藤英貴, 横田康成, 臼井支朗: “ランダムドットパターン刺激による網膜電位図の空間分布計測と解析”, 第7回生体・生理シンポジウム論文集, pp.249-254 (1992-11)

## 学会研究会

1. 横田康成, 戸田尚宏, 臼井支朗: “汎関数級数表現における非線形システムの同定精度”, 信学技報 **DSP90-76**, pp.7-14 (1990-10)
2. 横田康成, 戸田尚宏, 臼井支朗: “汎関数級数表現による非線形システムの同定精度”, 統計数理研究所共同研究レポート, **Vol.32**, pp.25-33 (1991-12)
3. 横田康成, 戸田尚宏, 臼井支朗: “Wiener 核推定における最適入力パワーレベルの高速決定法”, 信学技報 **MBE91-113**, pp.41-48 (1992-03)
4. 原督, 横田康成, 長坂英一郎, 臼井支朗: “ランダムドットパターンフラッシュERGによる他覚的視野検査法の検討”, 信学技法 **MBE91-119**, pp.89-96 (1992-03)
5. Shiro Usui, Yasunari Yokota, Naohiro Toda: “Precision Analysis of Wiener Kernels Measured by Cross-correlation Method”, 5th Workshop on “Nonlinear Methods of Physiological System Modeling”, Biomedical Simulations Resource (1992-05)
6. 横田康成, 杉本充, 臼井支朗: “多入力汎関数級数モデルによる非線形システムの Wiener 核推定精度”, 信学技報 **MBE92-115**, pp.25-32 (1993-03)
7. 大栄陽子, 横田康成, 臼井支朗: “各種汎関数級数モデルによる非線形システム近似能力, 同定精度, 計算コストの比較”, 信学技報 **MBE93-93**, pp.1-8 (1993-12)



## 学会発表

1. 横田康成, 戸田尚宏, 臼井支朗: “汎関数級数表現における非線形システムの同定精度”, 1990 年電気関係学会東海支部連合大会講演論文集, p.556 (1990-10)
2. 横田康成, 臼井支朗: “パターン呈示モニタの Wiener 核”, 1991 年電気関係学会東海支部連合大会講演論文集, p.601 (1991-10)
3. 杉本充, 横田康成, 戸田尚宏, 臼井支朗: “入力パワーレベル可変 Wiener 核推定法の観測雑音に対するロバスト性”, 1992 年電気関係学会東海支部連合大会講演論文集, p.310 (1992-10)
4. 工藤英貴, 横田康成, 臼井支朗, 長坂英一郎: “空間特性を考慮した局所網膜電位の推定”, 平成 5 年度日本エム・イー学会東海支部学術集会, p.31 (1993-10)



