

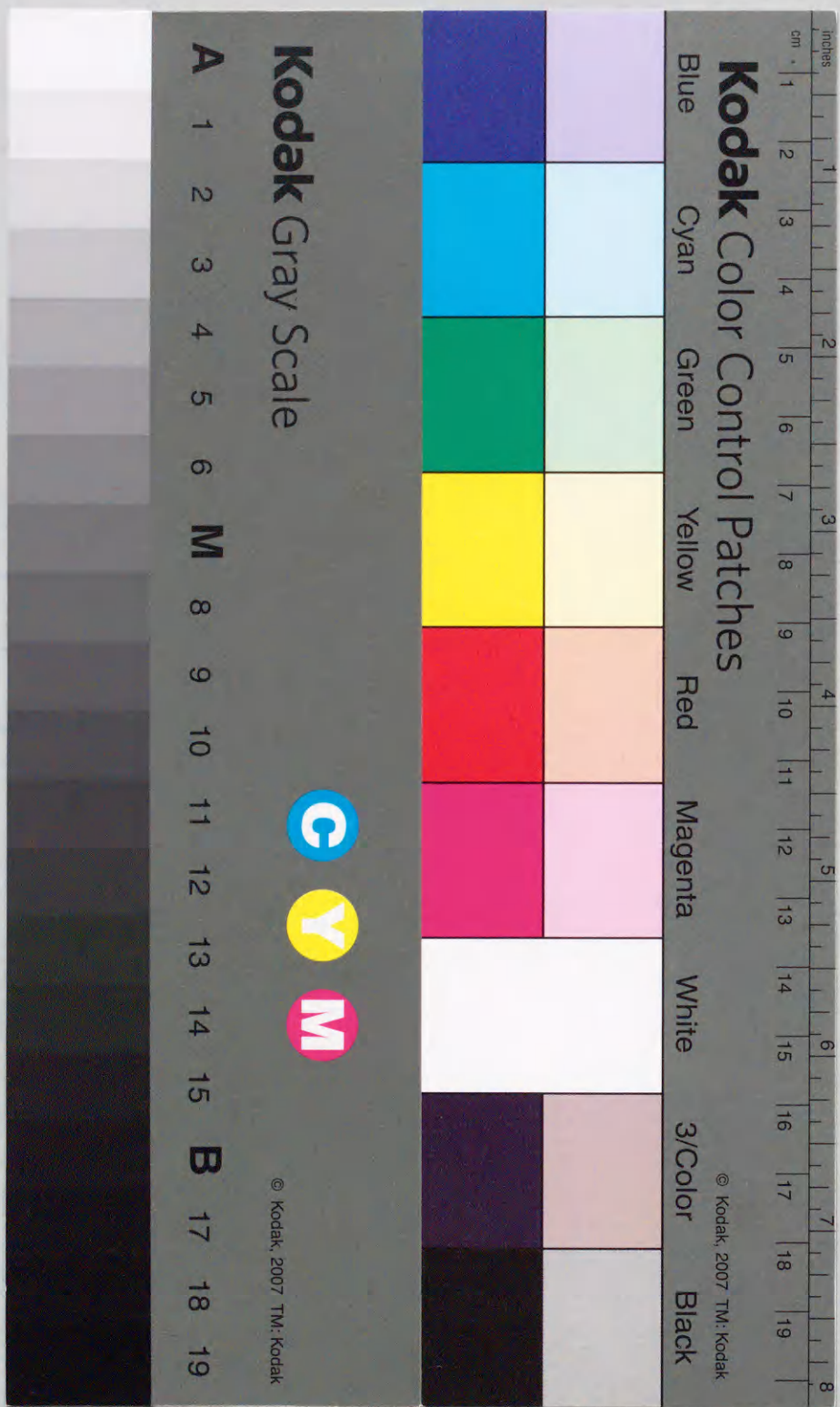
流体加熱を受ける回転対称殻の
熱応力と変形に関する研究

1997年1月

博士(工学)

稲村栄次郎

豊橋技術科学大学



流体加熱を受ける回転対称殻の
熱応力と変形に関する研究

1997年 1月

博士(工学)

稲村 栄次郎

豊橋技術科学大学

流体加熱を受ける回転対称殻の 熱応力と変形に関する研究

要旨

高温・高応力下の殻構造物の設計において、高い信頼性・安全性ならびに高性能・高経済性を追求する際に、大きな熱応力によって生じる構造材料の粘塑性の影響を無視することはできない。しかしながら、均質材料はもちろん多層複合材料から成る平板、円筒、円筒殻などを対象とした熱応力問題の解法は多数報告されているが、これらの研究のほとんどは弾性理論に基づくものであり、非定常熱伝導を考慮して熱弾/粘塑性応答問題を取り扱った研究は少ない。また、熱応力緩和材料として傾斜機能材料が近年注目されているが、傾斜機能材料からなる殻を取り扱った研究も少ない。

熱伝導を考慮した殻構造物の熱応力問題に関しては、円筒や球殻などの単純な形状のものに限らず、複雑な一般の軸対称殻の問題についても、解析がなされてきた。一般に殻の熱伝導問題を解析するには、力学的基礎方程式と同様に、幾何学的特徴を生かして三次元熱伝導方程式を二次元化近似することが数学的取り扱いの上で好ましい。そのために、いくつかの解析手法が提案され、それらの二次元化された熱伝導方程式を解いて、殻の熱弾性変形問題が解析されている。なかでも、殻厚方向に線形温度分布を仮定した解析手法は簡便であり、十分薄い殻が緩やかな温度変化を伴うような問題に対しては有効である。ところが、殻が周囲から厳しい温度負荷を受ける場合やセラミックスのような熱伝導率が非常に小さい材料からなる場合には、殻厚方向の温度分布を線形では十分近似できず、非定常解析における応答初期の解の精度に問題が生じる。

そこで本研究では、均質材料からなる薄い回転対称殻および中程度の厚さの回転対称殻に対して、殻厚方向に二次曲線の温度分布を仮定して熱伝導方程式を定式化し、熱弾/粘塑性変形問題における応答初期の解の精度の向上を図った。また、多層回転対称殻に対して、各層の厚さ方向の温度分布を薄肉殻では線形で、厚肉殻では二次曲線で近似し、熱弾/粘塑性変形問題の解法を示した。さらに、傾斜機能材料からなる回転対称殻において

要旨

は、熱伝導率の非常に小さい材料を用いた場合にも適用できるように、温度の殻厚方向分布を任意の高次曲線で近似し、熱弾性変形問題を解析した。回転対称殻の内力の平衡方程式ならびにひずみと中央面の変位・回転との関係は、薄肉殻には Sanders, Jr. の理論式を、厚肉殻には Reissner-Naghdi の理論式を用いた。粘塑性構成式には、温度の影響を考慮した Perzyna の式を採用した。また、導かれた基礎式の数値解法には、差分法を適用した。

数値解析例として、流体加熱を受ける両端単純支持の円筒殻の問題を取り上げた。その結果、殻の温度分布に関して、本解法による解と他の解法による解を比較することによって本解法の有効性が確認された。また、非定常状態における殻の変位、応力、内力などの分布および時間的変化や、多層殻および傾斜機能殻における材料組成の影響を把握することができた。

Thermal Stress and Deformation in shells of revolution under thermal loading due to fluid

Abstract

In design of shell structures subjected to high thermal and mechanical loads, the effect of visco-plasticity raised by thermal stresses should be taken into account. For thermal conduction and/or thermal stress in simple geometric structures, e.g. plates, cylinders and cylindrical shells, of homogeneous material or multi-layered composite materials, many investigations have been carried out. All most of them, however, are limited to be based on the elastic theory and it seems that, for thermal elasto/visco-plastic problems, few investigations are performed. Also for shells of functionally graded material which are utilized for thermal stress relaxation, few studies have been treated.

For thermal conduction problems of shell structures, not only simple geometries, such as cylindrical shells and spherical shells, but also complex ones have been dealt with. Reducing the equations of heat conduction of shell structures from three-dimension to two-dimension by taking advantage of the features of shell geometry is generally desirable in view of mathematical treatment. Up to now, analytical approaches for the dimensional reduction of shell have been proposed by many investigators. Particularly, the approximation that the temperature distribution through the thickness is assumed to be linear is simple and convenient. However, in the cases that the thermal load rapidly applies the shell or that the shell consists of low-conductivity materials, the first-order approximation of temperature distribution along the shell thickness could not give a desired accuracy of solutions.

In the present study, analytical formulations and numerical solutions of both thermal elasto/visco-plastic deformations of homogeneous or multi-layered shells of revolution and thermal elastic stresses in functionally graded material shells are developed. Each shell is

Abstract

either thin or moderately thick, and is subjected to thermal loads due to fluid.

The temperature distributions through the thickness of the homogeneous thin shell or the homogeneous thick shells are supposed to be a curve of the second order, considering the heat transfer on the shell surface. For the multi-layered thin shells, the temperature distribution in each layer is assumed to be linear because each layer is regarded to be very thin, whereas the temperature distribution in each layer of multi-layered moderately thick shells is approximated by a curve of the second order. For the functionally graded material shells, material parameters are given by functions in the shell thickness direction, and the temperature distribution through the thickness is supposed to be a curve of high order which can be chosen arbitrarily. The suitable order of the temperature distribution polynomial is found by evaluating the convergency of the solutions according to variation of the degree.

For each type of shells, the stresses and deformations are derived from the thermal stress equations with the temperature distributions obtained from the reduced heat conduction equations. The equations of equilibrium and the strain-displacement relations are derived from the Sanders shell theory for thin shells and the Reissner-Naghdi shell theory considering the effect of shear deformation for thick shells. As the constitutive relations, Hooke's law is used in the elastic range, and Perzyna's elasto/visco-plastic equations including the influence of temperature are employed in the plastic range. As a yield condition, the Von Mises yield theory is applied in the analyses.

After the variables are expanded into Fourier series in order to analyze the problem of shells under arbitrary asymmetrical loads, the derived fundamental equations are numerically solved by the finite difference method in both space and time. The usual central difference formulas are used for every mesh point except the ends of the shell, where forward and backward difference equations are employed. The derivatives with respect to time in heat conduction equations are treated by the Crank-Nicolson method. The integrations in the equations are carried out numerically with Simpson's 1/3 rule,

Abstract

and the solutions are obtained by integration of the incremental values.

As numerical examples, the simply supported cylindrical shells subjected to thermal loads due to fluid are analyzed. For the problems of homogeneous thin shells, temperature distributions in the shell obtained by the present method are compared with solutions where the temperature distribution through shell thickness is supposed to be linear. And a pressurized cylindrical shell made of aluminum subjected to locally distributed thermal loads is analyzed. For the problem of homogeneous thick shells, a cylindrical shell made of mild steel under axisymmetrical thermal loading is analyzed and the results are compared with those obtained from the thin shell theory. For the problems of multi-layered shells, two-layered cylindrical shells composed of mild steel and titanium subjected to locally distributed thermal loads are analyzed, and numerical computations are carried out for three cases of the ratio of the thickness of the titanium layer to the shell thickness. For the problems of functionally graded material shells, cylindrical shells composed of SUS304 and ZrO₂ subjected to axisymmetrical thermal loads are analyzed and the solutions for various compositional distribution profiles in functionally graded material are compared. From these results, it is found that the present methods are useful in the shell analyses, and it is possible to explain the behavior of these shells in transient and stationary states.

主要記号

a	殻の代表長さ
c	比熱
$[D]$	弾性マトリックス
E	縦弾性係数
$e_{\xi}, e_{\theta}, e_{\xi\theta}, e_{\xi\xi}, e_{\theta\theta}$	$\varepsilon_{\xi}, \varepsilon_{\theta}, \varepsilon_{\xi\theta}, \varepsilon_{\xi\xi}, \varepsilon_{\theta\theta}$ のフーリエ係数
$e_{\xi m}, e_{\theta m}, e_{\xi\theta m}, e_{\xi\xi m}, e_{\theta\theta m}$	$\varepsilon_{\xi m}, \varepsilon_{\theta m}, \varepsilon_{\xi\theta m}, \varepsilon_{\xi\xi m}, \varepsilon_{\theta\theta m}$ のフーリエ係数
h	殻厚
h^{\pm}	殻の内外表面に作用する荷重の殻厚による修正係数
K_{in}, K_{out}	殻の内外表面の熱伝達率
k_1, k_2	せん断剛性に関する修正係数
k_{in}, k_{out}	殻の内外表面の相対熱伝達率
$k_{\xi}, k_{\theta}, k_{\xi\theta}, k_{\theta\xi}$	$\kappa_{\xi}, \kappa_{\theta}, \kappa_{\xi\theta}, \kappa_{\theta\xi}$ のフーリエ係数
L	円筒殻の全長
L_{ξ}, L_{θ}	$1 + \zeta/R_s, 1 + \zeta/R_{\theta}$
$M_{\xi}, M_{\theta}, M_{\xi\theta}, M_{\theta\xi}$	合モーメント
$\bar{M}_{\xi\theta}$	修正ねじりモーメント
$m_{\xi}, m_{\theta}, m_{\xi\theta}, m_{\theta\xi}, \bar{m}_{\xi\theta}$	$M_{\xi}, M_{\theta}, M_{\xi\theta}, M_{\theta\xi}, \bar{M}_{\xi\theta}$ のフーリエ係数
N	総差分点数

主要記号

$N_\xi, N_\theta, N_{\xi\theta}, N_{\theta\xi}$	合応力
$\bar{N}_{\xi\theta}$	修正面内せん断力
$n_\xi, n_\theta, n_{\xi\theta}, n_{\theta\xi}, \bar{n}_{\xi\theta}$	$N_\xi, N_\theta, N_{\xi\theta}, N_{\theta\xi}, \bar{N}_{\xi\theta}$ のフーリエ係数
P_ξ, P_θ, P_ζ	殻の中央面に作用する分布荷重
$P_\xi^F, P_\theta^F, P_\zeta^F$	殻の内外面に作用する分布荷重
Q_ξ, Q_θ	横せん断力
q_ξ, q_θ	Q_ξ, Q_θ のフーリエ係数
Q_i	内部発熱に関する積分値
q_i	Q_i のフーリエ係数
R_s, R_θ	殻の主曲率半径
R	殻の中央面から対称軸までの距離
r	無次元半径 (= R/a)
s	殻の子午線方向の距離
$s_\xi, s_\theta, s_{\xi\theta}, s_{\xi\xi}, s_{\theta\xi}$	$\sigma_\xi, \sigma_\theta, \sigma_{\xi\theta}, \sigma_{\xi\xi}, \sigma_{\theta\xi}$ のフーリエ係数
T	殻の温度
T_j	温度の近似式の係数
T_e	基準温度からの温度変化
T_{in}, T_{out}	殻の内外面の温度
$t, \Delta t$	時間、時間増分
t_j	T_j のフーリエ係数

主要記号

U_ξ, U_θ, W	中央面における変位の ξ, θ, ζ 方向成分
u_ξ, u_θ, w	U_ξ, U_θ, W のフーリエ係数
ν	粘性定数
Y	$\{t_0, t_1, t_2\}^T$ (均質殻), $\{t_{0,1}, t_{1,1}\}^T$ (多層薄肉殻), $\{t_{0,1}, t_{1,1}, t_{2,1}, t_{0,2}, \dots, t_{2,n}\}^T$ (多層厚肉殻), $\{t_0, t_1, \dots, t_p\}^T$ (傾斜機能殻)
\bar{Y}	$\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}^T$
Z	$\{u_\xi, u_\theta, w, m_\xi\}^T$ (薄肉殻), $\{u_\xi, u_\theta, w, \varphi_\xi, \varphi_\theta\}^T$ (厚肉殻)
α	線膨張係数
γ	r'/r
Δ	ξ の増分
$\varepsilon_\xi, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{\xi\theta}, \varepsilon_{\xi\xi}, \varepsilon_{\theta\xi}$	ひずみ成分
$\varepsilon_\xi^{vp}, \varepsilon_\theta^{vp}, \varepsilon_{\xi\theta}^{vp}, \varepsilon_{\xi\xi}^{vp}, \varepsilon_{\theta\xi}^{vp}$	粘塑性ひずみ成分
ε^t	熱ひずみ成分
$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon_\xi, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{\xi\theta}\}^T$ (薄肉殻), $\{\varepsilon_\xi, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{\xi\theta}, \varepsilon_{\xi\xi}, \varepsilon_{\theta\xi}\}^T$ (厚肉殻)
$\varepsilon_{\xi m}, \varepsilon_{\theta m}, \varepsilon_{\xi\theta m}, \varepsilon_{\xi\xi m}, \varepsilon_{\theta\xi m}$	殻の中央面のひずみ成分
$\{\varepsilon_m\}$	$\{\varepsilon_{\xi m}, \varepsilon_{\theta m}, \varepsilon_{\xi\theta m}\}^T$ (薄肉殻), $\{\varepsilon_{\xi m}, \varepsilon_{\theta m}, \varepsilon_{\xi\theta m}, \varepsilon_{\xi\xi m}, \varepsilon_{\theta\xi m}\}^T$ (厚肉殻)
ζ	中央面の法線方向座標

主要記号

η	単位時間, 単位体積当たりの発熱量
θ	円周方向座標
$\theta_{in}, \theta_{out}$	殻の内外の周囲温度
$\theta_{in}, \theta_{out}$	$\theta_{in}, \theta_{out}$ のフーリエ係数
$\kappa_{\xi}, \kappa_{\theta}, \kappa_{\xi\theta}, \kappa_{\theta\xi}$	曲率の変化量
$\{\kappa\}$	$\{\kappa_{\xi}, \kappa_{\theta}, \kappa_{\xi\theta}, \kappa_{\theta\xi}\}^T$
λ	熱伝導率
ν	ポアソン比
ξ	子午線方向座標
ρ	密度
$\tau, \Delta\tau$	無次元時間, 無次元時間増分
$\sigma_{\xi}, \sigma_{\theta}, \sigma_{\xi\theta}, \sigma_{\xi\xi}, \sigma_{\theta\xi}$	応力成分
$\bar{\sigma}, \sigma^*$	相当応力, 静的降伏応力
$\Phi_{\xi}, \Phi_{\theta}, \Phi_n$	殻厚中央面の回転の成分
$\varphi_{\xi}, \varphi_{\theta}, \varphi_n$	$\Phi_{\xi}, \Phi_{\theta}, \Phi_n$ のフーリエ係数
χ	温度伝導率(熱拡散率)
$\omega_{\xi}, \omega_{\theta}$	無次元曲率
$()^t$	温度変化に関する量
$()^T$	転置マトリックス
$()^{vp}$	粘塑性に関する量

主要記号

$()'$	$d()/d\xi$
$(\dot{\ })$	時間または時間とともに単調に変化する量に関する微分量
$()_0$	代表値

目次

1.1 17世紀の歴史	1
1.2 18世紀の歴史	1
1.3 研究の目的と本書の構成	10
2 殻の形状及びその幾何学的関係式	15
3 平衡方程式	27
3.1 平衡方程式の導出と境界条件	27
3.2 熱伝導方程式の導出	30
3.2.1 殻厚内部	30
3.2.2 中間層内部	31
3.2.3 外部層内部	31
3.2.4 内部層内部	31
3.2.5 粘弾性層内部	31
3.3 熱伝導率の導出	37
4 平衡方程式	34
4.1 内力の平衡方程式	34
4.1.1 等向性	34
4.1.2 非等向性	34
4.2 外力と変位の関係式	34
4.2.1 等向性	34
4.2.2 非等向性	35
4.3 応力と変位の関係式	35
4.3.1 粘弾性層内部	35

目次

1 緒論	1
1.1 研究の背景	1
1.2 従来の研究	4
1.3 研究の目的と本論文の構成	10
2 殻の形状及びその幾何学的関係式	15
3 熱伝導方程式	17
3.1 熱伝導方程式および境界条件	17
3.2 熱伝導方程式の二次元化	19
3.2.1 均質薄肉殻	20
3.2.2 均質厚肉殻	21
3.2.3 多層薄肉殻	23
3.2.4 多層厚肉殻	24
3.2.5 傾斜機能薄肉殻	26
3.2.6 傾斜機能厚肉殻	27
4 熱変形方程式	31
4.1 内力の平衡方程式	31
4.1.1 薄肉殻	31
4.1.2 厚肉殻	33
4.2 ひずみと変位の関係式	34
4.2.1 薄肉殻	34
4.2.2 厚肉殻	35
4.3 応力とひずみの関係	35
4.3.1 粘塑性ひずみ	36

4.3.2 薄肉殻	36
4.3.3 厚肉殻	38
4.4 合応力および合モーメント	39
4.4.1 薄肉殻	39
4.4.2 厚肉殻	41
5 無次元方程式	51
5.1 フーリエ級数展開	51
5.2 熱伝導方程式	52
5.3 熱変形方程式	53
5.3.1 薄肉殻	53
5.3.2 厚肉殻	58
6 数値解析法	63
6.1 差分法	63
6.2 差分方程式	64
6.2.1 熱伝導方程式	64
6.2.2 熱変形方程式	65
6.3 計算手順	66
7 数値解析例	69
7.1 円筒殻の諸量	69
7.2 境界条件	69
7.3 材料定数および熱伝達率	74
7.4 均質薄肉円筒殻	75
7.4.1 例題 1. 殻厚方向温度分布の二次曲線近似と線形近似の比較	75
7.4.2 例題 2. アルミ円筒殻の熱弾/粘塑性変形	77
7.5 均質厚肉殻	87
7.6 多層薄肉殻	95

7.7 多層厚肉殻	105
7.7.1 例題 1. 温度分布解析および解法の評価	105
7.7.2 例題 2. 温度および熱応力解析	107
7.8 傾斜機能薄肉殻	114
7.8.1 例題 1. 温度分布解析および解法の評価	115
7.8.2 例題 2. 温度および熱応力解析	117
7.9 傾斜機能厚肉殻	125
7.9.1 例題 1. 温度分布解析および解法の評価	125
7.9.2 例題 2. 温度および熱応力解析	127
8 結論	135
謝辞	141
参考文献	143
論文目録	155
付録	
A 熱伝導方程式の導出	159
B 係数	163
B.1 熱伝導方程式	163
B.1.1 均質薄肉殻	163
B.1.2 均質厚肉殻	164
B.1.3 多層薄肉殻	167
B.1.4 多層厚肉殻	168
B.1.5 傾斜機能薄肉殻	170
B.1.6 傾斜機能厚肉殻	171

B.2 熱変形方程式	171
B.2.1 薄肉殻の平衡方程式	171
B.2.2 薄肉殻の境界条件	177
B.2.3 厚肉殻の平衡方程式	179
B.2.4 厚肉殻の境界条件	184

第1章 緒論

1.1 研究の背景

種々の工業分野において、機器や構造物を高温域で使用する機会が多くなっている。化学工業の分野では反応効率を高めるために高温化が促進され、機器・構造物が1000℃以上の高温にさらされることが多い。航空機用ガスタービンあるいは火力発電設備は、熱効率の観点から高温で使用されることが望ましく、航空機用ガスタービンでは1300℃もの高温ガスが用いられる場合もある。さらに、原子炉について見ても、現在500℃～1000℃で運転される高速増殖炉などの高温タイプの原子炉の研究開発が活発に行われている。航空宇宙の分野では、ロケットやスペースプレーンが帰還する際に、大気との摩擦により船体の表面温度は最高1500℃に加熱される。また大きな機器・構造物ばかりでなく、エレクトロニクス産業においても、コンピュータのチップの小型化にともない、チップの電気抵抗により発生する熱の除去は大きな問題となっている。このような高温域で使用される機器・構造物には、高温強度上の問題が起こる。すなわち温度分布が不均一であり、機器・構造物の一樣な膨張が妨げられる場合や、周囲の拘束を受ける場合に熱応力が生じる。原子炉やスペースプレーンのように安全性が極めて重視される機器・構造物では、設計の際に構造解析をおこない、応力、ひずみ、変形を求め、事前に強度評価を十分に行わなければならない。さらに、経済的な面から低安全率を確保するために、より厳密な解析および設計が重要となっている。

一般に、複雑な機器・構造物は単純な構成要素の組み合わせと考え、それらの構成要素ごとに強度計算される場合が多い。その中で、殻は薄板を三次元的な曲面に湾曲させて得られる構造体であり、容器類、ダム、建物の屋根、車体、船体、機体など機械や建築構造物および化学プラント等の重要な構成要素として、従来から多方面に用いられている。曲面板は曲面をなす基準面の形状を設定し、基準面の各点における板厚を指定すると、この幾何学的形状が定まる。この基準面として板厚の中央の点の軌跡を採用した場合、これを中央面という。さらに中央面のひろがりの方向の寸法に比べて、厚さが十分小さい場合

に、この曲面を殻と呼ぶ。殻理論は、殻という本質的に三次元性を有する立体構造の数式的取り扱いを容易にし、三次元空間における殻の巨視的挙動を理解するために、三次元弾性論から得られる基礎方程式を二次元化した近似理論である。

殻の力学的特徴の一つは、曲面の湾曲に由来する立体的なアーチ作用にあり、さまざまな形の分布荷重に対して面内方向の応力によって抵抗する、いわゆる膜応力状態が成立することである。膜応力状態は平面応力に類似した応力状態であり、膜理論を用いて解析することができる。しかしながら、殻の支持線や、殻同士が接する交差線、また、集中荷重を受ける場所や分布荷重の強度が急激に変化する部分などの近傍では、膜応力に加えて曲げモーメントを伴うことが、もう一つの殻の特徴である。このような膜応力と曲げ応力が連成した形で存在する応力状態を扱うのが、殻の曲げ理論であり、幾つかの異なった理論が提案されている [1]-[9]。また曲げ理論を拡張して、ある程度殻厚が厚い場合に無視できなくなる殻厚方向のせん断変形の影響を考慮に入れた理論も提案されている [10]-[12]。曲げ理論においては諸式を曲線座標に沿って記述する必要があり、また面内力の効果と曲げの効果が連成して現われるために、理論そのものが複雑であるばかりでなく、有効な解が得られる問題の範囲がきわめて限られてくる。殻理論は、狭い意味では、有限要素法などの数値解法ではなく、微分方程式を基調とする殻解析の分野を示すことが多いが、有限要素法や境界要素法においても、定式化の過程において殻理論の基礎式が用いられている。

固体中の熱伝導・熱応力問題においては、平板や円筒、球など単純な形状を対象とした研究はこれまで数多くあり、熱伝導方程式の解が明確に示されている [13, 14]。一方、殻を対象とした問題において、熱弾性カップリングを無視できる程度にゆるやかな温度変化を伴う通常の熱負荷では、殻の温度分布は変形・応力状態とは独立に決定される。つまり解析は、まず熱伝導方程式の初期値・境界値問題を解いて温度分布を決定し、次いでその温度分布に対応した熱応力を考慮して力学的支配方程式の境界値問題を解くという二段階を踏む。殻の熱伝導方程式も、やはり力学的基礎方程式と同様に、殻の幾何学的特徴を生かして二次元化近似を行うのが数式的取り扱い上好ましい。

次に、今日、高い信頼性、安全性と共に、高機能化、高経済性が要求されるにつれ、塑性変形を考慮しない弾性変形から、部分的に塑性変形を認める設計が必要になり、材料特

性を最大限生かして利用する非弾性設計が不可避となってきた。非弾性解析においては、これまで静的荷重が作用した場合の、クリープ変形問題や塑性変形問題の解法に関する多数の研究が行われている。クリープ変形はもっぱら時間に依存する変形で、与えられた応力の下で有限なひずみ速度で進行するクリープひずみに起因し、一方塑性変形は時間と無関係な永久ひずみによって生じるものと仮定されている。しかしながら、荷重が時間とともに変化するような場合には、応力が変形速度に依存することが知られており、材料の挙動に対して粘性を考慮した構成式が提案されている [15]-[19]。特に変形速度の速い場合には塑性領域に入ると常温においても材料の粘性の影響が現われ、塑性領域で材料の粘性を考慮した粘塑性解析が必要となる。材料の粘性は温度による変化が顕著であるため、不均一な温度場や温度変化を伴うような場合には、粘性に対する温度の影響を無視することはできない。

一方、構造物の設計において設計変数として取り扱われるのは、構造物の形状および材料である。一般には、双方を同時に変更することではなく、どちらか一方が規定される場合が多い。材料が規定された場合、構造物の寸法を連続的に変化させて形状を決定することが可能である。一方、形状が規定された場合は、材料特性を幾つかの異なる特性を持つ材料の組み合わせと考えると、その割合を決定することになる。その一つに、異なった材料から成る薄層を2層以上重ね合せて作られる多層材料や複合材料があり、層の重ね合せのパターンや各層の厚さを変えることにより設計を行う。しかしながら、多層材料や複合材料では、層と層の間で起こる応力の不連続性が層の剥離の原因となる。その問題を解消するために考案された傾斜機能材料が近年注目されている [20]。傾斜機能材料とは、セラミックス、金属等の複数の構成材料を用い、その空間的組成を連続的に変化、制御し、所要の性能を実現しようとする考えから生まれてきた比較的新しい材料である。特に熱応力緩和形傾斜機能材料は、高温側にセラミックス、低温側に金属を配し、熱応力を緩和し遮熱効果を高めることなどを目的として開発されている。

最後に、多くの問題に対して、支配方程式に初期条件および境界条件を与え厳密に解が得られる場合は極わずかであり、単純な形状や条件に限られる。実際の構造物のように複雑な要素が組み合わされた場合には、大型計算機を利用して数値計算により近似解を

得るのが主流となっている。現在一般性をもつ数値解法として、差分法、有限要素法、境界要素法が挙げられる。差分法は、領域(構造体)を適当な格子に分け、未知関数の微分係数を差分式で置き換えることにより、偏微分方程式を格子点での値に関する代数方程式に変換し、それを代数的に解く方法である。差分法は、歴史的にもっとも古く、考え方が比較的単純であるため偏微分方程式から差分方程式への変換が容易である。しかしながら、複雑な形状を取り扱う場合、格子分けを行うために境界形状を適切に表すことと境界条件の取り扱いに難点がある。有限要素法は、もとの微分方程式に関して変分原理に基づく関係式に基礎を置く。考える領域を有限個の部分領域に分け、その領域において値を代表する有限個の点に関連する代数方程式を誘導し、これを解く。有限要素法は数値解法として最もよく使用されている方法である。境界要素法は、もとの微分方程式を積分定理によって境界上の積分方程式に変換する。それを有限要素法と同様な有限個の部分領域に分け、代表点における値に関する代数方程式を導いて、これを解く方法である。境界要素法は、もともになる考え方は古くから知られていたが、比較的最近になって注目されるようになった方法で、考える物体あるいは領域の境界だけで記述されるので、領域全体を扱う方法に比べ、扱う空間の次元が一次元下がることになり、データしよりを軽減することができる。幸いにも、より大容量の記憶装置を持つ大型計算機や Work Station が容易に使用できるようになり、利用価値の高い汎用解析ソフトが普及してきたが、やはり複雑な形状を解析するには、膨大な要素分割や長時間の計算が必要となる。そのため、解の精度向上と同様に、要素数の削減も重要な課題の一つである。

1.2 従来の研究

これまで、回転対称殻および一般殻の弾/粘塑性応答問題の解法に関して、数多くの研究結果が報告されている。Nagarajan と Popov [21] は有限要素法を用いて軸対称殻の塑性および粘塑性の大変形解析を行っている。Kanchi ら [22] は、幾何学的非線形性を考慮して粘塑性モデルを塑性とクリープの問題へ適用した。また、Atkatsh ら [23] は、弾粘塑性変形を示す殻の動的応答問題を解析した。竹園、埜らによって、中程度の厚さの軸対称かくに非対称な荷重が作用する場合の弾/粘塑性変形問題 [24]、材料が直交異方性を有す

るやや肉厚の大きい回転対称殻の弾/粘塑性変形問題 [25, 26]、一般の非対称荷重を受ける多層軸対称殻の弾/粘塑性変形問題 [27]、一般の非対称な衝撃荷重を受ける多層複合軸対称殻の弾/粘塑性動的応答問題 [28]、中程度の厚さの多層回転対称殻に一般の非対称な荷重が作用する場合の弾/粘塑性変形問題 [29, 30] が取り扱われている。粘塑性の代わりに中程度の厚さの多層軸対称殻に一般の非対称な荷重が作用する場合のクリープ変形問題 [31] も取り扱われている。また弾/粘塑性 Overlay モデルを用いてバウシinger効果とひずみ速度依存性を表し、一般軸対称殻に非軸対称な動的荷重が作用した場合の弾/粘塑性問題の解法 [32, 33]、一般の形状を有する薄肉殻に動的荷重が作用する場合の比較的大きな変形まで考慮にいたった解法 [34] も提案されている。これらの研究は力学的な荷重のみを取り扱っているが、温度負荷を含めて取り扱った研究としては、荷重と温度負荷を受ける回転対称殻の弾/粘塑性動的応答問題 [35]-[37] が報告されている。また、Wojewódzki と Bukowski [38] は粘塑性円筒殻の動的座屈に対する降伏関数の非線形性と温度の影響を調べている。しかしながら、ここで取り扱われている熱負荷は予め規定された殻の温度分布によるもので、殻の熱伝導を考慮した解析を行ったものではない。

均質殻の熱伝導および熱応力を取り扱った研究の中では、簡便さの点から温度の殻厚方向分布を線形近似することによって、三次元熱伝導方程式を二次元化する方法がよく用いられる。Bolotin [39] は温度分布を肉厚方向に線形と仮定して、三次元熱伝導方程式を、肉厚方向の平均温度と温度勾配に関する独立な二つの二次元方程式で与えている。それらを用いて浅い殻の熱弾性たわみの式を示した。また、Shirakawa と Ochiai [40] は Bolotin により提案された殻の熱伝導問題の解法を用いて、円筒殻が面内熱源(殻厚方向の温度が一様に上昇する熱源)により局所的に加熱された場合の理論解析と曲げ熱源(殻厚方向に温度が勾配をもって上昇する熱源)の数値解析を行っている。Rubin [41] は、円錐殻を主体として、平板および殻の平均温度および温度勾配からなる二次元化された熱伝導方程式を導いている。また、Updike と Kalnins [42] は回転対称殻の三次元熱伝導問題を面内方向のみの二次元熱伝導問題と殻厚方向のみの一次元熱伝導問題に分けて解析する方法を開発した。一方、遠藤 [43] は、解析の目的が温度分布の決定のみに留まらず変形・応力状態の決定までおよぶシェル構造解析においては、三次元熱伝導方程式の二次元化近似は、

三次元弾性論からシェル理論の力学的基礎方程式を導く二次元化近似と同等の近似精度を備えていなければならないことを強調し、円筒シェルに関して、Kirchhoff-Love の仮定という同一の基礎の上にシェル理論の力学基礎方程式と熱伝導方程式の合理的な一次近似式を導いた。Eslami ら [44] は、同様に温度の殻厚方向分布の直線近似を用いて、薄い円筒殻が熱的機械的な衝撃荷重を受ける場合の温度と変位の連成問題を取り扱っている。

均質殻においても、殻厚がある程度厚くなると、温度の殻厚方向分布は直線近似で表現することが困難するほど局所的に変化するようになる。そのため、十分な精度の温度分布を得られるように三次元熱伝導方程式を二次元化する他の方法も提案されている。つまり、より一般性をもたせて多項式あるいは特殊関数を用いて温度分布を近似する方法である。Steele と Yang [45] は三次元熱伝導方程式における温度関数をルジャンドル多項式の無次元級数に展開し、その展開係数に対する相互にカップリングした無限個の二次元連立方程式を導いている。この方程式は、Bolotin の結果を包含し、さらに未知数の数を増すことによって近似精度を任意に向上できる特徴を持っている。また、有限要素法に基づいて、Surana と Orth [46] は温度の殻厚全体の分布を任意の多項式で近似することによって定常熱伝導に関する軸対称シェル要素の定式化を行った。さらに、Surana と Abusaleh [47] は温度の殻厚全体の分布を任意の多項式で近似した定常熱伝導に関する三次元曲面シェル要素の定式化を行った。

近年では、均質殻よりはむしろ多層積層複合材料から成る殻を対象とした研究が中心となっている。多層複合殻を取り扱った問題の解法は、各層の材料が均質であると仮定し、均質殻の解法を拡張した方法が取られている。多層複合殻においても、温度の殻厚方向分布を線形近似する方法は、簡便であることから多くの研究で採用されている。温度分布を規定して多層殻の熱応力・熱変形問題を取り扱った研究のほとんどは、内外表面の温度を線形に結んだ殻厚方向分布を与えている。その方法を用いて、Kamiya [48] は、サンドイッチシェルの大たわみ解析を行っており、数値解析例として、両表面の温度が異なる浅いサンドイッチシェルとサンドイッチ平板の結果を示している。Fettahlioglu と Wang [49] は材料特性が面内および厚さ方向に変化する直交異方性多層殻の熱応力と変形を解析した。ここで殻は厚さ方向に線形に変化する軸対称な温度分布を有すると仮定している。熱

座屈問題においても、温度の殻厚方向分布を線形と仮定して、殻の座屈温度を評価する方法が取られている。L.-W. Chen と L.-Y. Chen [50, 51] はその方法を用いて、有限要素法による平板および積層円筒パネルの熱座屈解析を行っている。Librescu ら [52] は熱的荷重および機械的荷重の組み合わせ荷重下における積層平板および曲面パネルの座屈後解析を行っている。なお、一様温度場であるが、回転対称殻を取り扱った問題として、バイメタルの浅い回転対称殻の非線形熱安定性問題が Lui [53] によって取り扱われている。熱伝導問題においては、複合シェル内の定常熱伝導、熱伝達、ふく射に関する多層複合三角形要素が Argyris ら [54] によってなされている。

しかしながら、多層殻のように材質の異なる材料が接している場合、その界面で温度分布は急変することが知られている。界面で接触熱抵抗がある場合には、温度は界面で不連続になり、また熱伝導率の異なる層が接している場合には、界面で温度勾配が屈折する。接触熱抵抗は、界面に作用する応力に依存すると考えられており、温度場と応力場の連成を考慮しなければならない。ところが、多層殻の理論においては層は完全に接着され層間で滑りは生じないこと、および応力の殻厚方向成分を零と仮定しているため、接触熱抵抗を無視するケースが多い。したがって、前述の温度の殻厚方向分布を全殻厚にわたって線形と仮定する代わりに、一般に界面における温度および熱流束の連続条件を考慮して、各層の温度の殻厚方向分布を線形近似する方法が取られている。遠藤 [55] は、単層殻の場合 [43] に得た結果を基礎に、各層の界面で温度ならびに熱流束の連続性が成立するものとして、多層複合円筒殻に対する非定常熱伝導方程式を導出した。それと共に三次元弾性論の基礎方程式に Kirchhoff-Love の仮定を適用することによって、外的荷重として温度変化と表面力の作用を同時に受ける多層積層円筒殻の弾性変形の支配方程式の一次近似式を、面外変位のみで表される微分方程式の形で導いた。また、Noor と Tenek [56] は、殻厚方向の温度分布を線形近似して非線形熱伝導を考慮した多層複合パネルの定常問題の解法を示した。

さらに多層殻のより高精度な解法として、温度の殻厚方向の高次近似が試みられている。有限要素法に基づいて、Surana と Orth は、殻厚全体の温度分布を任意の多項式で近似して、積層複合材料の定常熱伝導に関する軸対称シェル要素 [57]-[59] および三次元

シェル要素 [60] の定式化を行った。それに加えて、非線形定常熱伝導に関する軸対称シェル要素 [61] の定式化も報告している。Bose と Surana [62] は積層複合材料の定常熱伝導に関する軸対称シェル要素の定式化を行うにあたり、各層の温度分布を任意の多項式で近似し、各層の界面では温度が連続であるという条件を用いた。さらにその解法を用いて三次元曲面シェル要素の定式化を行った [63]。Noor と Burton [64] は、彼らが独自に開発した予測子-修正子法を用いて、多層複合平板およびシェルの定常熱伝導問題の解法を示し、取り扱った解析例に対する解の収束性を調べた。一方、松本ら [65] は、実用性を重視し、殻の熱伝導問題を、温度が殻厚方向に一定であるとして、ハイブリッド積層材料薄肉構造物の非定常熱伝導・熱応力解析プログラムを開発した。さらに彼らは積層複合材料シェルのガラス転移温度を考慮した非定常熱伝導・熱応力解析プログラムを開発し、対称および非対称積層複合材料におけるガラス転移温度が残留応力に及ぼす影響を明らかにした [66]。Blandford, Tauchert および Leigh [67] は直交異方性軸対称多層圧力容器の非線形熱伝導および非定常熱弾性解析に対する有限要素の定式化を行った。非線形性として材料の温度依存性と層の境界面の応力依存性を考慮した。またその理論を圧力と熱負荷を受ける多層圧力容器の定常状態の設計に適用した [68]。

以上に示した殻の熱応力を取り扱った研究は、弾性論に基づいており、塑性領域まで考慮した研究は少ない。また、殻の熱伝導問題と熱応力問題は、各々独立した課題として詳細に研究されているが、両者に関連づけた研究はほとんど行われていない。

殻構造物以外を対象とした熱伝導・熱応力を取り扱った研究も数多く研究されている。谷川と大多尾 [69] は、クロスプライ積層板が一様表面加熱される場合の曲げと非定常熱応力の一次元問題を取り扱っている。また谷川ら [70] は、繊維方向角の変化が、温度分布、面外せん断力を含む熱応力成分、および熱変形挙動に及ぼす影響を検討するため、熱的および力学的に直交異方性を有するラミナが、任意の配向角で積層されたアングルプライ積層長方形板を取り扱った。電気部品を扱った研究も報告されており、中村ら [71] は、一次元多層の積層モデルについて熱粘弾性応力に対する基礎式を誘導し、次いでLSIパッケージ形状を想定した三層積層モデルを対象として基礎式の誘導および解析を行っている。一方、保川 [72] は、接合層の非弾性挙動を考慮して熱弾塑性ひずみの簡易解析解を検討して

いる。

傾斜機能材料を対象とした熱応力問題の研究のほとんどは、三次元熱弾性論に基づいている。解を求める際に、如何にして材料の不均質性を任意に支配方程式に組み込むかが問題の一つとなっている。大多尾ら [73]-[77] は、物性値が半径方向に関して任意に変化する不均質中空円筒や中空球を、仮想的な多層体に分割し、この多層体の各層が均質であるという仮定を導入し、非定常熱応力問題を解析した。また谷川ら [78] は、任意の不均質な熱的および力学的材料特性を持つ平板の一次元非定常熱伝導問題における温度解を多層体の極限をとることによって任意関数で与えられる温度伝導率と熱伝導率の積分表示を含んだ形で表し、温度解の妥当性と不均質平板の熱弾性挙動について調べた。小畑と野田 [79] は傾斜機能材料の物性値を任意の位置の関数として処理する必要性を考え、適切な変数変換とラプラス変換および摂動法を用いて、任意の不均質平板に対する一次元非定常熱伝導問題の解法を提案した。さらに、傾斜機能材料からなる平板、厚肉円筒および厚肉球の定常熱応力に及ぼす組成の影響を調べ、平板、厚肉円筒および厚肉球の最適な材料組成配分を設計した [80, 81]。また、Tanaka ら [82, 83] は、熱応力を小さくするために傾斜機能材料の組成配分を設計する方法を提案している。動的熱応力問題としては、不均質材料からなる平板、円筒および球を対象とした解析が須見ら [84]-[88] によって報告されている。一方、傾斜機能材料の非弾性挙動を取り扱った研究が幾つか報告されている。荒居ら [89] は傾斜機能材料の定常熱応力、残留応力を弾塑性有限要素法により求め、焼結残留応力、熱負荷時の応力、冷却後の残留応力の統一的な解析の必要性を示した。さらに材料の組合せ、組成分布形状、拘束条件が応力分布に及ぼす影響を明らかにし、応力に関する最適設計の例を示した。石塚と若島 [90] は、傾斜組成制御したセラミックス-金属混合粉体のホットプレス焼結によって、平板状の傾斜機能材料成形体を得る場合を想定し、古典積層理論に準じて定式化した弾塑性解析法を用いて、熱応力問題を数値解析した。また高橋と坂木は [91] 球形第 2 相粒子を分散させた板状傾斜機能材料のクリープ変形による応力緩和の計算例を示した。

傾斜機能材料を対象とした単純な機械要素の解析手法は、以上に挙げた研究以外にも数多く報告されている。しかしながら、傾斜機能材料の製造方法に未開発な点が多く、解析

で取り扱っているような任意の組成分布をもった傾斜機能材料を作ることは難しい。さらに、現在の製造方法では製造できる傾斜機能材料の厚さが 10mm 程度限定される。また、塑性域における傾斜機能材料の構成関係はまだ十分に研究されていないようである。

1.3 研究の目的と本論文の構成

前節で述べたように、これまで粘塑性に関する温度依存性および殻の熱伝導を考慮して回転対称殻の熱弾/粘塑性応答問題、および傾斜機能材料から成る殻の熱伝導、熱応力を取り扱った研究は、まだないようである。

そこで、本研究では、周囲の流体により温度負荷を受ける非定常熱伝導を考慮した回転対称殻の熱弾/粘塑性変形問題および傾斜機能回転対称殻の熱弾性変形問題の解法を示す [92]–[97]。熱弾/粘塑性変形問題では、主曲率半径に対する殻厚の比が 1/20 以下である薄肉殻および主曲率半径に対する殻厚の比が 1/20 から 1/5 程度までの厚肉殻を取り扱い、さらにそれぞれの殻が均質材料および多層複合材料からなる場合を取り扱った。また、傾斜機能殻においても薄肉殻および厚肉殻を取り扱った。

殻構造物が外部から受ける加熱形態としては、熱流束、表面温度、ふく射などが考えられるが、本研究では、日常で起こる流体からの熱伝達を考慮し、また殻体内部の発熱も含める。殻の温度分布は、殻の幾何学的形状の特徴を考慮して二次元化された熱伝導方程式を導出し、それを解くことによって得られる。そして、得えられた温度分布をもとに回転対称殻の基礎式から、変位、応力などを求める。薄肉殻には Sanders, Jr. の殻理論式 [3] を、厚肉殻には殻厚方向のせん断変形を考慮した Reissner-Naghdi の理論式 [1, 10] を用いた。構成関係式には、弾性領域では Hooke の法則を、塑性領域では温度の影響を考慮した Perzyna の式 [15] を採用した。降伏条件には Von Mises の理論を用いる。ただし、傾斜機能材料は多く弾性範囲内で使用されるため、傾斜機能殻を取り扱った問題は弾性範囲内とする。

数値解析法には、空間および時間に対して差分法を用いた。空間に対して、連続部には中間差分式を、境界部には前進および後退三点差分式を用いた。また時間に対しては Crank-Nicolson 法を用いた。一方、基礎式に含まれる殻厚方向の積分には、Simpson の

1/3 則を適用した。そして、ある任意の計算段階における温度、変位および内力などは、各計算段階の増分を総和することにより得られる。数値解析例として、周囲の流体によりステップ状に加熱される円筒殻の問題を取り扱う。

本論文の構成は、第1章 緒論に続いて、第2章では、本研究で取り扱う回転対称殻の形状および幾何学的関係式を述べる。

第3章では、まず薄肉殻および厚肉殻の三次元非定常熱伝導方程式、殻の内外表面における熱伝達の境界条件、および多層殻における各層の界面の熱的接続条件を示す。次に、それぞれの殻に対し殻厚方向の温度分布を多項式で表わす。均質な薄肉殻および厚肉殻では、殻厚方向の温度分布を二次曲線で表わす。また多層薄肉殻では、各層が十分薄いと考える、各層の温度の殻厚方向分布を線形で近似する。一方、多層厚肉殻では、均質殻と同様に、温度の殻厚方向分布を二次曲線で表わす。さらに、傾斜機能材料から成る薄肉殻および厚肉殻は、熱伝導率が著しく小さい材料を使用するため温度の殻厚方向変化が大きくなることから、温度の殻厚方向分布を任意の多項式で表わし、その次数は、取り扱う問題に応じて解の収束状態により決定することにした。これらの温度の近似式を対応する三次元熱伝導方程式に適用し、それぞれの殻に対する二次元化された熱伝導方程式を導く。

第4章では、熱変形に関する基礎方程式を示す。薄肉殻は Sanders, Jr. の理論 [3]、厚肉殻はせん断変形を考慮した Reissner-Naghdi の理論 [1, 10] より、内力の平衡方程式およびひずみと変位の関係式が与えられる。構成関係式には、弾性領域には Hooke の法則を、塑性領域では温度の影響を考慮した Perzyna の式 [15] を採用した。降伏条件には Von Mises の理論を用いる。合応力および合モーメントは、均質殻、多層殻および傾斜機能殻のものをまとめて示すが、傾斜機能殻の解法は弾性範囲内としているので、特に別記せず、基礎式は塑性に関する項を除いた式を用いる。

第5章では、各変数を無次元表示し、非軸対称問題を解析するために円周方向にフーリエ級数で表わす。それらを基礎式に代入し、フーリエ係数に関する式をつくる。最終的に、熱伝導方程式から温度の近似式の係数に関する連立二階微分方程式を導く。一方、熱変形方程式から順次未知数を消去し、薄肉殻に関しては3つの変位成分と1つの合モーメント成分を未知数とする4元連立2階微分方程式を、厚肉殻に関しては3つの変位成分

と2つの回転成分を未知数とする5元連立2階微分方程式を導く。

第6章では、本研究で用いた数値計算法について述べる。ある任意の計算段階における解は第5章で示した連立微分方程式を解くことによって得られるが、それらの方程式を厳密に理論解析することは困難であるから、差分法によって数値的に解を求める。境界部では前進および後退三点差分式を、連続部では中間差分式を用いる。熱伝導方程式に含まれる時間微分項には、Crank-Nicolsonの差分式を用いる。これらを連立微分方程式および境界条件式に用いて、全体の代数方程式を導く。それらを解くことによって、ある任意段階の温度、変位および内力などの増分が得られ、各計算段階の増分を総和することにより任意の計算段階における諸量が得られる。

第7章では、これまで述べてきた解法を用いた数値解析例を示す。数値解析例として、周囲の流体により時間に対してステップ状に温度負荷を受ける回転対称殻の問題を取り扱う。まず、回転対称殻の幾何学的諸量を円筒殻の場合に適用する。また、円筒殻を両端で断熱し、回転可動支持するための境界条件を与える。次に、数値解析例で取り扱う材料の材料定数、降伏応力および粘塑性パラメータを示す。続いて、種々の殻に対する例題およびその結果を示す。均質薄肉殻の例題では、チタン製の円筒殻の中央部に軸対称加熱が作用する場合の解析を行い、本解法による解と殻厚方向温度分布を線形近似した解法による解を比較した。また、内圧が作用している両端単純支持のアルミ円筒殻に、非軸対称な流体加熱が局所的に作用する問題を取り上げた。均質厚肉殻の例題では、流体加熱を受ける両端単純支持の軟鋼製円筒殻の問題を取り上げ、本解法による結果と、せん断変形を無視した薄肉理論による結果とを比較検討した。多層薄肉殻の例題では、軟鋼およびチタンから成る二層構造の円筒殻に、非軸対称な流体加熱が局所的に作用する問題を取り上げ、軟鋼製の円筒殻と層の比の異なる二層円筒殻を解析した。また多層厚肉殻の場合には、同様に軟鋼およびチタンから成る二層円筒殻に、軸対称な流体加熱が作用する問題を二つ取り扱った。一つは、温度分布に関して本解法による解と他解法による解を比較した。もう一つは、円筒殻に局所的な流体加熱が作用する場合の熱弾/粘塑性応答問題を解析した。傾斜機能薄肉殻の例題では、SUS304とZrO₂で構成される傾斜機能円筒殻に、軸対称な流体加熱が作用する問題を二例とり上げた。一つは、円筒殻外表面に一様加熱を受ける問

題で、温度分布の近似次数を変えた解と他の解法[98]による解を比較し、本解法の妥当性を確認した。もう一つは、SUS304の均質殻を含めた組成分布の異なる四つの円筒殻に局所的な流体加熱が作用する問題で、熱応力と熱変形を解析した。また、傾斜機能厚肉殻の例題には、薄肉殻の場合と同様に、SUS304とZrO₂で構成される傾斜機能円筒殻に、軸対称な流体加熱が作用する問題を二例取り上げた。一つは、円筒殻の外表面に一様加熱を受ける場合で、温度分布の解を多層モデルの解析解[98]と比較し、本解法の妥当性を確認した。もう一つは、組成分布が異なる4つの円筒殻に局所的な流体加熱が作用する場合の熱応力と熱変形を解析した。

最後に、第8章では本研究で得られた成果の総括を行う。

第2章 殻の形状及びその幾何学的関係式

殻の任意形状と幾何学的諸量を図 2.1 に示す。ここで、殻の任意点の位置を示すのに直交座標 (s, θ, ζ) を使う。なお s は殻の中央面に沿って境界から測られた子午線方向の距離、 θ は円周方向の角度、 ζ は殻厚中央面から外向きに測った距離である。

殻厚中央面の形状が軸からの距離 $R(s)$ によって与えられると、主曲率半径は次式のようになる。

$$R_\theta = R \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}, \quad R_s = -\sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2} \left/ \left(\frac{d^2R}{ds^2}\right)\right. \quad (2.1)$$

上式に、無次元子午線座標 $\xi = s/a$ 、無次元半径 $r = R/a$ を導入する。ただし、 a は代表長さである。これらを上式に代入すると無次元曲率 $\omega_\xi = a/R_s$ 、 $\omega_\theta = a/R_\theta$ は次式のよ

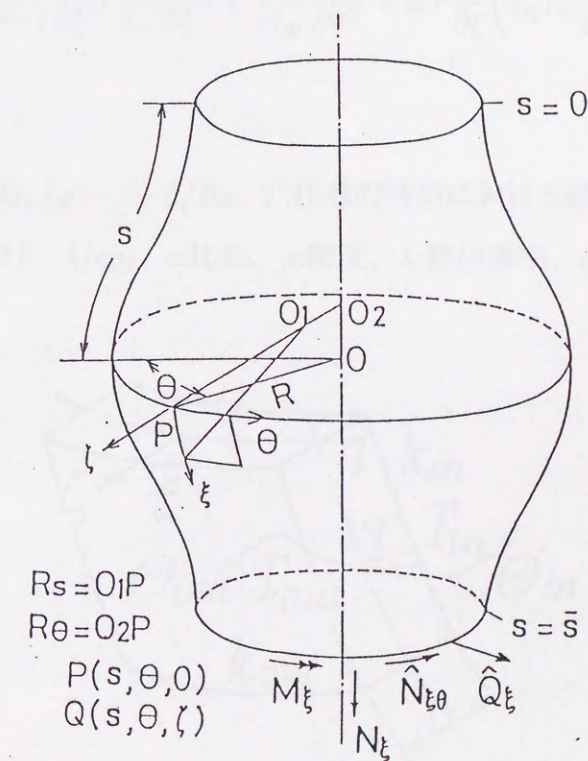


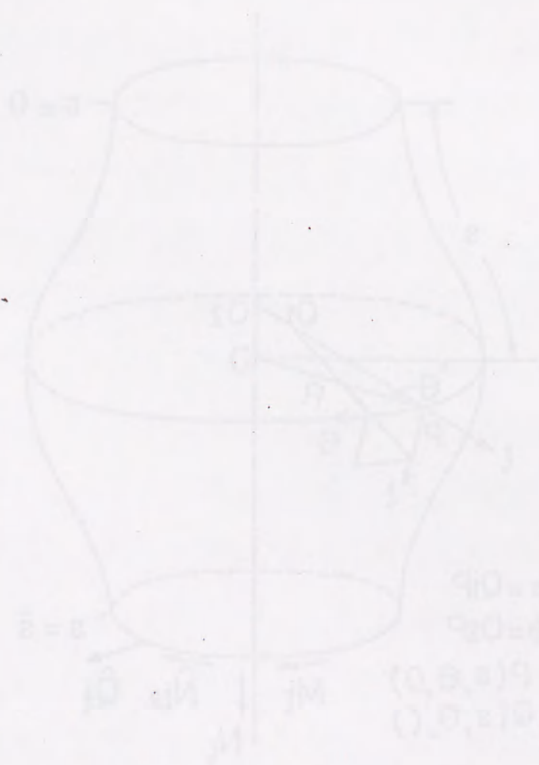
図 2.1 殻の形状と座標

うになる。

$$\omega_\theta = \frac{a}{R_\theta} = \frac{\sqrt{1-(r')^2}}{r}, \quad \omega_\xi = \frac{a}{R_\xi} = -\frac{\gamma' + \gamma^2}{\omega_\theta}, \quad \gamma = \frac{r'}{r} \quad (2.2)$$

ここで、()' は、 $d(\)/d\xi$ を示す。また、次の Codazzi の恒等式が得られる。

$$\omega'_\theta = \gamma(\omega_\xi - \omega_\theta), \quad \frac{r''}{r} = -\omega_\xi \omega_\theta \quad (2.3)$$



第3章 熱伝導方程式

3.1 熱伝導方程式および境界条件

使用されている材料が等方性かつ均質である薄肉殻および厚肉殻における殻体内の熱伝導方程式は、図 3.1 に示す ξ, θ, ζ 座標を用いると、次式で与えられる。

1) 薄肉殻

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\chi}{a^2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(r \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} \right\} - \frac{\eta}{c\rho} = 0 \quad (3.1)$$

2) 厚肉殻

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\chi}{L_\xi L_\theta a^2 r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(r \frac{L_\theta}{L_\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{L_\xi}{r L_\theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + a^2 r \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(L_\xi L_\theta \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \right\} - \frac{\eta}{c\rho} = 0 \quad (3.2)$$

ここで、 $L_\xi = 1 + \zeta/R_\xi$, $L_\theta = 1 + \zeta/R_\theta$, T : 任意の時刻における殻体内の任意の点 (ξ, θ, ζ) の温度、 χ : 温度伝導率 (= $\lambda/c\rho$)、 c : 比熱、 ρ : 密度、 λ : 熱伝導率、 η : 単位時間・単位体積当

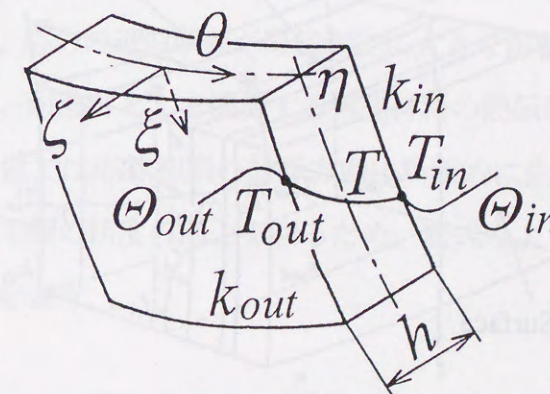


図 3.1 均質殻要素

たりの発熱量である。式(3.2)において、 $L_\xi, L_\theta \simeq 1$ とすると、式(3.1)に帰着する。 n 層からなる多層殻の場合(図3.2)には、 $T, \chi, c, \rho, \lambda, \eta$ に添字 i をつけることによって、内側から i 番目の層(任意の層)の諸量を表わす。

一方、材料物性値が殻厚方向に変化する傾斜機能殻の熱伝導方程式は、 ξ, θ, ζ 座標を用いて次式で与えられる。

3) 薄肉殻

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\chi}{a^2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(r \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right\} - \frac{1}{c\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) - \frac{\eta}{c\rho} = 0 \quad (3.3)$$

4) 厚肉殻

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{a^2 r L_\xi L_\theta} \left\{ \chi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(r \frac{L_\theta}{L_\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\chi L_\xi}{r L_\theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{a^2 r}{c\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(L_\xi L_\theta \lambda \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \right\} - \frac{\eta}{c\rho} = 0 \quad (3.4)$$

式(3.3), (3.4)の物性値 χ, λ, c, ρ は ζ の関数で表わされる。それらの物性値が一定値をもつ場合は各々式(3.1), (3.2)に帰着する。式(3.1), (3.3)および(3.4), (3.2)の詳細な導出を付録Aに記す。

殻が流体に接し、殻の内外表面で熱伝達が行われると考えると、フーリエの法則より殻

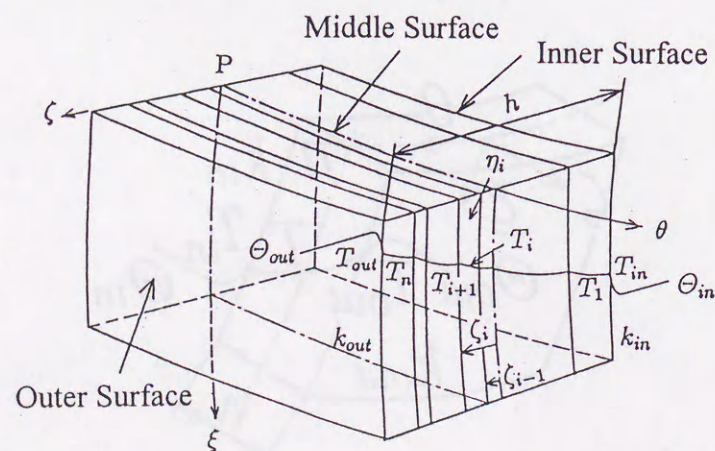


図 3.2 多層殻要素

の内外表面 ($\zeta = \pm h/2$) の温度境界条件は、次式で与えられる。

$$\left[\frac{\partial T}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=-h/2} = k_{in}(T_{in} - \Theta_{in}), \quad \left[\frac{\partial T}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=h/2} = -k_{out}(T_{out} - \Theta_{out}) \quad (3.5)$$

ここに、 k_{in}, k_{out} は殻の内外表面の相対熱伝達率 ($= K_{in}/(\lambda)_{in}, K_{out}/(\lambda)_{out}$ 、 K_{in}, K_{out} は殻の内外表面の熱伝達率) であり、 $()_{in}, ()_{out}$ は殻の内外表面の物性値を表わす。 $(\lambda)_{in}$ および $(\lambda)_{out}$ は、単層殻の場合 $(\lambda)_{in} = (\lambda)_{out} = \lambda$ 、多層殻の場合 $(\lambda)_{in} = \lambda_1, (\lambda)_{out} = \lambda_n$ となる。また、 T_{in}, T_{out} は殻の内外表面の温度、 $\Theta_{in}, \Theta_{out}$ は殻の内外の流体温度、 h は殻厚である。

多層殻において、隣接する各層の境界面(接着面)においては、接触熱抵抗がなく、温度ならびに熱流束に連続性が成立するものとする、次式が満足されなければならない。

$$T_i = T_{i+1}, \quad \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial \zeta} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial \zeta} \quad (\zeta = \zeta_i) \quad (3.6)$$

ここで、 ζ_i は内側から i 番目の層と $i+1$ 番目の層の間の境界面の ζ 座標値である。 ζ_0 は内表面 $\zeta = -h/2$ を、 ζ_n は外表面 $\zeta = h/2$ を表す。

3.2 熱伝導方程式の二次元化

従来、三次元熱伝導方程式を二次元化するために、簡便さを重視して殻厚方向の温度分布を直線近似する方法が多く採られてきた。しかしながら、殻の表面に急激な温度負荷が作用する場合には、この方法で応答初期の温度を十分に評価することができない。また塑性を考慮する場合には、応力の近似誤差が降伏判定に大きな影響を及ぼす。さらに傾斜機能材料から成る殻では、耐熱材として機能する構成材料の熱伝導率が非常に小さいため、低次の温度分布曲線近似では応答初期の殻厚方向に局部的に生じる勾配の急な温度分布を表現できない。そこで解の精度の向上を図るため、次式のように ζ に関する p 次曲線で殻厚方向の温度分布を表す。

$$T(\xi, \theta, \zeta, t) = \sum_{j=0}^p T_j(\xi, \theta, t) \zeta^j \quad (3.7)$$

ここで、 p は、殻によってそれぞれ適当な値を設け、式を展開することになる。また多層殻の場合、内側から i 番目の層における T および T_j は、添字 i をつけて T_i および $T_{j,i}$ で表す。まず均質殻の場合には $p = 2$ とする。多層薄肉殻の場合には各層が十分薄いとみなし、各層の温度分布に対し $p = 1$ とする。一方、多層厚肉殻の場合には単層殻と同様に各層で $p = 2$ とする。さらに精度が要求される場合には、層を仮想的に分割することにより、 p の値を増加させた場合と同じ効果を利用する。傾斜機能殻の場合には p を特定の値に定めず、任意に与えられるように式を展開し、解の収束状態を調べて最適な値を選択することになる。

次に、式(3.7)を用いて、各回転対称殻に対する熱伝導方程式の2次元化を行う。場の問題における近似解法である重みつき残差法には、重み関数によって選点法、最小二乗法、モーメント法、ガラーキン法、部分領域法がある[99]。本研究では、多層厚肉殻以外の殻に関する熱伝導方程式の2次元化の方法として、モーメント法を用いる。一方、多層厚肉殻の場合には、各層の厚さにわたって積分された熱伝導方程式、内外表面の境界条件、層の境界面の境界条件から、未知数と同数の方程式を得る。それらの詳細を後節で述べる。

3.2.1 均質薄肉殻

新たな未知数となる3つの変数 T_0, T_1, T_2 に対応する3つの方程式を得るために、熱伝導方程式(3.1)に殻厚方向温度分布の近似式(3.7)(2次曲線近似: $p = 2$)を代入したあと、それぞれ全殻厚にわたって積分を、両辺に ζ を掛けて積分を、さらに両辺に ζ^2 を掛けて積分を行い、殻の内外表面の温度境界条件式(3.5)を考慮すると、各々次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{\chi}{a^2} \left[\gamma \frac{\partial T_0}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_0}{\partial \theta^2} + \frac{h^2}{12} \left\{ \gamma \frac{\partial T_2}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2} \right\} \right] + \frac{\chi}{h} (k_{out} + k_{in}) T_0 + \frac{\chi}{2} (k_{out} - k_{in}) T_1 + \frac{\chi h}{4} (k_{out} + k_{in}) T_2 - \frac{\chi}{h} (k_{out} \Theta_{out} + k_{in} \Theta_{in}) - \frac{\chi Q_0}{\lambda h} = 0 \\ \frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{\chi}{a^2} \left[\gamma \frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \theta^2} \right] + \frac{6\chi}{h^2} (k_{out} - k_{in}) T_0 + \frac{3\chi}{h} (k_{out} + k_{in}) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} + \frac{4}{h} T_1 + \frac{3\chi}{2} (k_{out} - k_{in}) T_2 - \frac{6\chi}{h^2} (k_{out} \Theta_{out} - k_{in} \Theta_{in}) - \frac{12\chi Q_1}{\lambda h^3} = 0 \\ \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{3h^2}{20} \frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{\chi}{a^2} \left[\gamma \frac{\partial T_0}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_0}{\partial \theta^2} + \frac{3h^2}{20} \left\{ \gamma \frac{\partial T_2}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2} \right\} \right] + \frac{3\chi}{h} (k_{out} + k_{in}) T_0 + \frac{3\chi}{2} (k_{out} - k_{in}) T_1 + \frac{3\chi h}{4} (k_{out} + k_{in}) T_2 - \frac{3\chi}{h} (k_{out} \Theta_{out} + k_{in} \Theta_{in}) - \frac{12\chi Q_2}{\lambda h^3} = 0 \end{aligned} \right\}$$

ここに、 Q_0, Q_1, Q_2 は次式で表される。

$$Q_k = \int_{-h/2}^{h/2} \eta \zeta^k d\zeta \quad (k = 0, 1, 2) \quad (3.9)$$

以上3個の未知数 T_0, T_1, T_2 に対して3元連立2階微分方程式(3.8)が得られた。なお、回転対称殻の熱伝導問題に関する他の解法が、UpdikeとKalninsによって報告されている[42]。

3.2.2 均質厚肉殻

厚肉殻の熱伝導方程式(3.2)に幾何学的近似

$$\left. \begin{aligned} \frac{L_\theta}{L_\xi^2} &\cong 1 + (\omega_\theta - 2\omega_\xi) \frac{\zeta}{a} + (3\omega_\xi - 2\omega_\xi \omega_\theta) \frac{\zeta^2}{a^2} \\ \frac{L_\xi}{L_\theta} &\cong 1 + (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\zeta}{a} + \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{\zeta^2}{a^2} \\ \frac{L_\theta}{L_\xi} &\cong 1 + (\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{\zeta}{a} + \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\zeta^2}{a^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

を代入し、 ζ/a の3次以上の微小項を省略したあと、殻厚方向温度分布の近似式(3.7)(2次曲線近似: $p = 2$)を代入して、単層薄肉殻と同様に3通りの積分を行うと各々次の3式となる。

$$\left(1 + \frac{C_1}{12} \right) \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{h C_2}{12} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{h^2}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{C_1}{20} \right) \frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{\chi}{a^2} \left\{ \left(\gamma - \frac{C_3}{12} \right) \frac{\partial T_0}{\partial \xi} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{h^2\omega'_\xi}{12a}\left(1+\frac{3}{20}C_4\right)\frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{h^2C_5}{12}\frac{\partial T_2}{\partial \xi} + \left(1+\frac{C_{15}}{12}\right)\frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + \frac{hC_6}{12}\frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} \\
 & + \frac{h^2(1+C_7)}{12}\frac{\partial^2 T_2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{r^2}\left(1+\frac{h}{12a}\omega_\theta C_6\right)\frac{\partial^2 T_0}{\partial \theta^2} - \frac{hC_6}{12r^2}\frac{\partial^2 T_1}{\partial \theta^2} \\
 & + \frac{h^2C_8}{12r^2}\frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2} \left\} - \frac{C_{12}}{h}T_0 - \frac{C_{11}}{2}T_1 - \frac{hC_{12}}{4}T_2 - C_{13}k_{out}\theta_{out} \right. \\
 & \left. - C_{14}k_{in}\theta_{in} - C_{16}\left\{Q_0 + \frac{C_2}{h}Q_1 + \frac{C_1}{h^2}Q_2\right\} = 0 \right. \\
 & C_2\frac{\partial T_0}{\partial t} + h\left(1+\frac{3}{20}C_1\right)\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{3h^2C_2}{20}\frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{\chi}{a^2}\left\{-\frac{h}{a}\omega'_\xi\left(1+\frac{3}{20}C_4\right)\frac{\partial T_0}{\partial \xi} \right. \\
 & + hC_5\frac{\partial T_1}{\partial \xi} - \frac{3h^3\omega'_\xi}{20a}\left(1+\frac{5}{28}C_4\right)\frac{\partial T_2}{\partial \xi} + C_6\frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + h(1+C_7)\frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} \\
 & + \left.\frac{3h^2C_6}{20}\frac{\partial^2 T_2}{\partial \xi^2} - \frac{C_6}{r^2}\frac{\partial^2 T_0}{\partial \theta^2} + \frac{hC_8}{r^2}\frac{\partial^2 T_1}{\partial \theta^2} - \frac{3h^2C_6}{20r^2}\frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2}\right\} - \frac{6C_{11}}{h}T_0 \\
 & - \frac{12\chi}{h}\left(-\frac{C_1}{12} - 1 - \frac{h}{4}C_9 + \frac{h}{8}C_2C_{10} - \frac{h}{16}C_1C_9\right)T_1 - 6h\chi\left(-\frac{C_2}{3h} \right. \\
 & + \left.\frac{C_{10}}{4} - \frac{C_2C_9}{8} + \frac{C_1C_{10}}{16}\right)T_2 - 6C_{13}k_{out}\theta_{out} + 6C_{14}k_{in}\theta_{in} \\
 & \left. - \frac{12C_{16}}{h}\left(Q_1 + \frac{C_2}{h}Q_2 + \frac{C_1}{h^2}Q_3\right) = 0 \right. \\
 & \left(1+\frac{3C_1}{20}\right)\frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{3hC_2}{20}\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{3h^2}{20}\left(1+\frac{5C_1}{28}\right)\frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{\chi}{a^2}\left\{C_5\frac{\partial T_0}{\partial \xi} \right. \\
 & - \frac{3h^2\omega'_\xi}{20a}\left(1+\frac{5C_4}{28}\right)\frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{3h^2}{20}\left(\gamma - \frac{5C_3}{28}\right)\frac{\partial T_2}{\partial \xi} + (1+C_7)\frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} \\
 & + \frac{3hC_6}{20}\frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} + \frac{3h^2}{20}\left(1+\frac{5C_{15}}{28}\right)\frac{\partial^2 T_2}{\partial \xi^2} + \frac{C_8}{r^2}\frac{\partial^2 T_0}{\partial \theta^2} - \frac{3hC_6}{20r^2}\frac{\partial^2 T_1}{\partial \theta^2} \\
 & + \left.\frac{3h^2}{20r^2}\left(1+\frac{5h\omega_\theta C_6}{28a}\right)\frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2}\right\} - \frac{3\chi}{h}\left(-C_9 + \frac{C_2C_{10}}{2} - \frac{C_1C_9}{4}\right)T_0 \\
 & - 6\chi\left(-\frac{C_2}{3h} + \frac{C_{10}}{4} - \frac{C_2C_9}{8} + \frac{C_1C_{10}}{16}\right)T_1 - 12\chi\left(-\frac{1}{3} - \frac{C_1}{20} - \frac{hC_9}{16} \right. \\
 & + \left.\frac{hC_2C_{10}}{32} - \frac{hC_1C_9}{64}\right)T_2 - 3C_{13}k_{out}\theta_{out} - 3C_{14}k_{in}\theta_{in} - \frac{12C_{16}}{h^2}\left(Q_2 \right. \\
 & \left. + \frac{C_2}{h}Q_3 + \frac{C_1}{h^2}Q_4\right) = 0 \left. \right\} \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
 C_1 &= \frac{h^2}{a^2}\omega_\xi\omega_\theta, \quad C_2 = \frac{h}{a}(\omega_\xi + \omega_\theta), \quad C_3 = \frac{h^2}{a^2}\omega'_\xi(\omega_\theta - 2\omega_\xi), \\
 C_4 &= \frac{h^2}{a^2}\omega'_\xi(3\omega_\xi - 2\omega_\theta), \quad C_5 = \gamma - \frac{3}{20}C_3, \quad C_6 = \frac{h}{a}(\omega_\theta - \omega_\xi), \\
 C_7 &= -\frac{3h\omega_\xi C_6}{20a}, \quad C_8 = 1 + \frac{3hC_6}{20a}, \quad C_9 = k_{out} + k_{in}, \quad C_{10} = k_{in} - k_{out}, \\
 C_{11} &= \chi\left(C_{10} - \frac{C_2C_9}{2} + \frac{C_1C_{10}}{4}\right), \quad C_{12} = \chi\left(-C_9 + \frac{C_2C_{10}}{2} - \frac{C_1C_9}{4}\right), \\
 C_{13} &= \frac{\chi}{h}\left(1 + \frac{C_2}{2} + \frac{C_1}{4}\right), \quad C_{14} = \frac{\chi}{h}\left(1 - \frac{C_2}{2} + \frac{C_1}{4}\right), \quad C_{15} = -\frac{h}{a}\omega_\xi C_6, \\
 C_{16} &= \frac{\chi}{\lambda h}, \quad Q_k = \int_{-h/2}^{h/2} \eta \zeta^k d\zeta \quad (k=0,1,2,3,4)
 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

以上3個の未知数 T_0, T_1, T_2 に対して3元連立2階微分方程式(3.11)が得られた。

3.2.3 多層薄肉殻

境界面(接着面)の温度境界条件式(3.6)を用いると、殻厚方向温度分布の近似式(3.7)(線形近似; $p=1$)は第1層の $T_{0,1}$ および $T_{1,1}$ を用いて次式のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned}
 T_1 &= T_{0,1} + \zeta T_{1,1}, \quad T_2 = T_{0,1} + \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\zeta - \zeta_1) + \zeta_1 \right\} T_{1,1} \\
 T_i &= T_{0,1} + \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_i}(\zeta - \zeta_{i-1}) + \zeta_1 + \lambda_1 \sum_{l=2}^{i-1} \frac{\zeta_l - \zeta_{l-1}}{\lambda_l} \right\} T_{1,1} \\
 & \quad (i=3,4,\dots,n)
 \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

式(3.1)に式(3.13)を代入し、全殻厚にわたって積分した式、ならびに両辺に ζ を掛けて積分した式は、内外表面の温度境界条件式(3.5)を考慮すると、 $T_{0,1}$ と $T_{1,1}$ に関する次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n c_i \rho_i \zeta_{1,i} \frac{\partial T_{0,1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n c_i \rho_i \zeta_{1,i} \left\{ \zeta_1 + \lambda_1 \sum_{l=2}^{i-1} \frac{\zeta_{1,l}}{\lambda_l} + \frac{\zeta_{1,i} \lambda_1}{2 \lambda_i} \right\} \frac{\partial T_{1,1}}{\partial t}
 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a^2} \zeta_{1,i} \left[\gamma \frac{\partial T_{0,1}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 T_{0,1}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_{0,1}}{\partial \theta^2} \right] - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a^2} \zeta_{1,i} \left[\zeta_1 \right. \\
 & + \lambda_1 \sum_{l=2}^{i-1} \frac{\zeta_{1,l}}{\lambda_l} + \frac{\zeta_{1,i} \lambda_1}{2 \lambda_i} \left. \left[\gamma \frac{\partial T_{1,1}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 T_{1,1}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T_{1,1}}{\partial \theta^2} \right] + (K_{out} + K_{in}) T_{0,1} \right. \\
 & + \left(K_{out} \zeta_1 + K_{in} \zeta_0 + K_{out} \lambda_1 \sum_{l=2}^n \frac{\zeta_{1,l}}{\lambda_l} \right) T_{1,1} - Q_0 - K_{out} \Theta_{out} \\
 & \left. - K_{in} \Theta_{in} = 0 \right. \\
 & \left. \sum_{i=1}^n c_i \rho_i \zeta_{2,i} \frac{\partial T_{0,1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n c_i \rho_i \left[\zeta_{2,i} \left\{ \zeta_1 + \lambda_1 \sum_{l=2}^{i-1} \frac{\zeta_{1,l}}{\lambda_l} - \zeta_{i-1} \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right\} \right. \right. \\
 & + \zeta_{3,i} \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \left. \left. \frac{\partial T_{1,1}}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a^2} \zeta_{2,i} \left[\gamma \frac{\partial T_{0,1}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 T_{0,1}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_{0,1}}{\partial \theta^2} \right] \right. \right. \\
 & - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a^2} \left[\zeta_{2,i} \left\{ \zeta_1 + \lambda_1 \sum_{l=2}^{i-1} \frac{\zeta_{1,l}}{\lambda_l} - \zeta_{i-1} \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right\} + \zeta_{3,i} \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right] \left[\gamma \frac{\partial T_{1,1}}{\partial \xi} \right. \\
 & + \frac{\partial^2 T_{1,1}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_{1,1}}{\partial \theta^2} \left. \right] + \frac{h}{2} (K_{out} - K_{in}) T_{0,1} + \frac{h}{2} \left(2\lambda_1 + K_{out} \zeta_1 - K_{in} \zeta_0 \right. \\
 & \left. + K_{out} \lambda_1 \sum_{l=2}^n \frac{\zeta_{1,l}}{\lambda_l} \right) T_{1,1} - Q_1 - \frac{K_{out} h}{2} \Theta_{out} + \frac{K_{in} h}{2} \Theta_{in} = 0 \left. \right\} (3.14)
 \end{aligned}$$

ただし、上式中の総和記号 $\sum_{l=2}^{i-1}$ は $i < 3$ のとき零を与える。同様に $\sum_{l=2}^n$ は $n < 2$ のとき零を与える。また、

$$\zeta_{j,i} = \frac{1}{j} (\zeta_i^j - \zeta_{i-1}^j), \quad Q_k = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \eta_i \zeta^k d\zeta \quad (j=1, 2, 3; k=0, 1) \quad (3.15)$$

以上2個の未知数 $T_{0,1}, T_{1,1}$ に対して2元連立2階微分方程式(3.14)が得られた。

3.2.4 多層厚肉殻

熱伝導方程式を2次元化するために、式(3.10)を用いて幾何学的近似を行い、殻厚方向温度分布の近似式(3.7)(2次曲線近似: $p=2$)を熱伝導方程式(3.2)に代入して、 ζ_{i-1} から ζ_i

まで積分した式は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 & \sum_{l=1}^3 \left(C_{1,l,i} \frac{\partial T_{l-1,i}}{\partial t} + C_{2,l,i} \frac{\partial T_{l-1,i}}{\partial \xi} + C_{3,l,i} \frac{\partial^2 T_{l-1,i}}{\partial \xi^2} + C_{4,l,i} \frac{\partial^2 T_{l-1,i}}{\partial \theta^2} \right) \\
 & - C_{5,l,i} Q_{l-1,i} + C_{6,i} T_{1,i} + C_{7,i} T_{2,i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)
 \end{aligned} \right\} (3.16)$$

また、境界面(接着面)の温度境界条件式(3.6)と内外表面の温度境界条件式(3.5)に、殻厚方向温度分布の近似式(3.7)をそれぞれ代入すると、各々次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 & T_{0,1} + C_{8,1} T_{1,1} + C_{8,2} T_{2,1} - \Theta_{in} = 0 \\
 & T_{0,n} + C_{9,1} T_{1,n} + C_{9,2} T_{2,n} - \Theta_{out} = 0 \\
 & \sum_{l=0}^2 \zeta^l (T_{l,j} - T_{l,j+1}) = 0 \\
 & T_{1,j} + 2\zeta_j T_{2,j} + C_{10,1,j} T_{1,j+1} + C_{10,2,j} T_{2,j+1} = 0 \\
 & (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n-1)
 \end{aligned} \right\} (3.17)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
 & C_{1,l,i} = \sum_{k=1}^3 \frac{C_{11,l} \zeta_{k+l-1,i}}{\chi_i}, \quad C_{2,l,i} = - \left[\zeta_{l,i} \gamma - \omega'_\xi \left\{ \frac{\zeta_{l+1,i}}{a} + \frac{\zeta_{l+2,i}}{a^2} (\omega_\theta - 2\omega_\xi) \right\} \right] \\
 & C_{3,l,i} = - \left\{ \zeta_{l,i} + \frac{\zeta_{l+1,i}}{a} (\omega_\theta - \omega_\xi) + \frac{\zeta_{l+2,i}}{a^2} \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta) \right\} \\
 & C_{4,l,i} = - \frac{1}{r^2} \left\{ \zeta_{l,i} + \frac{\zeta_{l+1,i}}{a} (\omega_\xi - \omega_\theta) + \frac{\zeta_{l+2,i}}{a^2} \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi) \right\} \\
 & C_{5,l,i} = \frac{C_{11,l}}{\lambda_i}, \quad C_{6,i} = - \sum_{k=1}^2 k C_{11,k+1} \zeta_{k,i}, \quad C_{7,i} = - 2 \sum_{k=1}^3 k C_{11,k} \zeta_{k,i} \\
 & C_{8,z} = \zeta_0^z - \frac{z \zeta_0^{z-1}}{k_{in}}, \quad C_{9,z} = \zeta_n^z + \frac{z \zeta_n^{z-1}}{k_{out}}, \quad C_{10,z,j} = - \frac{z \zeta_j^{z-1} \lambda_{j+1}}{\lambda_j}
 \end{aligned} \right\} (3.18)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{11,1} &= a^2, \quad C_{11,2} = a(\omega_\xi + \omega_\theta), \quad C_{11,3} = \omega_\xi \omega_\theta \\ \zeta_{m,i} &= \frac{1}{m}(\zeta_i^m - \zeta_{i-1}^m), \quad Q_{l-1,i} = \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \eta_i \zeta^{l-1} d\zeta \\ (i &= 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n-1; l = 1, 2, 3; m = 1, 2, \dots, 5; z = 1, 2) \end{aligned} \right\}$$

以上で、 $3n$ 個の未知数 $T_{0,i}, T_{1,i}, T_{2,i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) に対して、 $3n$ 元連立 2 階微分方程式 (3.16), (3.17) が得られた。

前述したように、さらに精度が要求される場合には、層を仮想的に分割することにより、 p の値を増加させた場合と同じ効果を利用する。この効果は、境界面の温度境界条件が 2 つであるのに対し、温度の未知数として各層で 3 つ得られるため、層を 2 つに仮想分割するごとに殻厚方向温度分布の近似式 (3.7) の自由度が一つ増えるからである。温度の殻厚方向分布を線形に近似した多層薄肉殻の場合には、境界面の温度境界条件および温度の未知数は 2 つであるため、この効果は得られない。仮に層を仮想分割しても折れ線ではなく一つの直線で分布が示され、仮想分割しない場合と同じ結果となる。多層厚肉殻の定式化にこの方法を用いた理由として、他の殻と同様に多層厚肉殻の定式化にガラーキンを法を用いた場合、境界面の温度境界条件は自由境界として組み込まれ、定常解は得られるが、非定常時の収束性に問題が生じ、解が得られないためである。

3.2.5 傾斜機能薄肉殻

式 (3.7) を式 (3.3) に代入し、両辺に ζ^i ($i = 0, 1, 2, \dots, p$) を掛けて全殻厚にわたって積分した $(p+1)$ 個の式は、温度境界条件式 (3.5) を考慮すると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=0}^p \left[\alpha_{(i,j)} \frac{\partial T_j}{\partial t} - \frac{\beta_{(i,j)}}{a^2} \left(\gamma \frac{\partial T_j}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 T_j}{\partial \xi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_j}{\partial \theta^2} \right) \right. \\ \left. - (\gamma_{(i,j)} + \delta_{(i,j)} + \varepsilon_{(i,j)}) T_j \right] - (\chi)_{out} \left(\frac{h}{2} \right)^i k_{out} \Theta_{out} \\ - (\chi)_{in} \left(-\frac{h}{2} \right)^i k_{in} \Theta_{in} - Q_i = 0 \\ (i = 0, 1, 2, \dots, p) \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{(i,j)} &= \frac{1 + (-1)^{i+j}}{i+j+1} \left(\frac{h}{2} \right)^{i+j+1} \\ \beta_{(i,j)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \chi \zeta^{i+j} d\zeta \\ \gamma_{(i,j)} &= -(\chi)_{out} \left(\frac{h}{2} \right)^{i+j} k_{out} - (\chi)_{in} \left(-\frac{h}{2} \right)^{i+j} k_{in} \\ \delta_{(i,j)} &= \left\{ \left(\frac{1}{c\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} \right)_{out} \left(\frac{h}{2} \right)^i - \left(\frac{\partial(\chi \zeta^i)}{\partial \zeta} \right)_{out} \right\} \left(\frac{h}{2} \right)^j \\ &\quad - \left\{ \left(\frac{1}{c\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} \right)_{in} \left(-\frac{h}{2} \right)^i - \left(\frac{\partial(\chi \zeta^i)}{\partial \zeta} \right)_{in} \right\} \left(-\frac{h}{2} \right)^j \\ \varepsilon_{(i,j)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{\partial^2(\chi \zeta^i)}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta^i}{c\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} \right) \right\} \zeta^j d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

また、

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\eta}{c\rho} \zeta^i d\zeta \quad (3.21)$$

以上で $(p+1)$ 個の未知数 T_j ($j = 0, 1, 2, \dots, p$) に対して、式 (3.19) が得られた。

3.2.6 傾斜機能厚肉殻

式 (3.10) を用いて熱伝導方程式 (3.4) の幾何学的近似を行った後、式 (3.7) を代入し、両辺に ζ^i ($i = 0, 1, 2, \dots, p$) を掛けて全殻厚にわたって積分した $(p+1)$ 個の式は、温度境界条件式 (3.5) を考慮すると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=0}^p \left\{ \alpha_{(i,j)} \frac{\partial T_j}{\partial t} - \left(\beta_{(i,j)} \frac{\partial T_j}{\partial \xi} + \gamma_{(i,j)} \frac{\partial^2 T_j}{\partial \xi^2} + \delta_{(i,j)} \frac{\partial^2 T_j}{\partial \theta^2} \right) \right. \\ \left. - \varepsilon_{(i,j)} T_j \right\} - \mu_{(i)} \Theta_{out} - \nu_{(i)} \Theta_{in} - Q_i = 0 \\ (i = 0, 1, 2, \dots, p) \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \alpha_{(i,j)} &= \left[\{1 + (-1)^{i+j}\} \left(\frac{1}{i+j+1} + \frac{h^2 \omega_\xi \omega_\theta}{4a^2(i+j+3)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \{1 - (-1)^{i+j}\} \frac{h(\omega_\xi + \omega_\theta)}{2a(i+j+2)} \right] \left(\frac{h}{2} \right)^{i+j+1} \\
 \beta_{(i,j)} &= \frac{1}{a^2} \int_{-h/2}^{h/2} \chi \zeta^{i+j} \left\{ \gamma - \frac{\omega'_\xi}{a} \left(\zeta + \frac{\omega_\theta - 2\omega_\xi \zeta^2}{a} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3\omega_\xi^3 - 2\omega_\xi \omega_\theta}{a^2} \zeta^3 \right\} d\zeta \\
 \gamma_{(i,j)} &= \frac{1}{a^2} \int_{-h/2}^{h/2} \chi \zeta^{i+j} \left(1 + \frac{\omega_\theta - \omega_\xi \zeta}{a} + \frac{\omega_\xi(\omega_\xi - \omega_\theta)}{a^2} \zeta^2 \right) d\zeta \\
 \delta_{(i,j)} &= \frac{1}{a^2 r^2} \int_{-h/2}^{h/2} \chi \zeta^{i+j} \left(1 + \frac{\omega_\xi - \omega_\theta \zeta}{a} + \frac{\omega_\theta(\omega_\theta - \omega_\xi)}{a^2} \zeta^2 \right) d\zeta \\
 \varepsilon_{(i,j)} &= \bar{\alpha}_{(i,j)} + \frac{\omega_\xi + \omega_\theta}{a} (\bar{\alpha}_{(i+1,j)} + \bar{\beta}_{(i,j)}) \\
 &\quad + \frac{\omega_\xi \omega_\theta}{a^2} (\bar{\alpha}_{(i+2,j)} + 2\bar{\beta}_{(i+1,j)}) \\
 \bar{\alpha}_{(i,j)} &= -(\chi)_{out} \left(\frac{h}{2} \right)^{i+j} k_{out} - (\chi)_{in} \left(-\frac{h}{2} \right)^{i+j} k_{in} \\
 &\quad + \left\{ \left(\frac{1}{c\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} \right)_{out} \left(\frac{h}{2} \right)^i - \left(\frac{\partial(\chi \zeta^i)}{\partial \zeta} \right)_{out} \right\} \left(\frac{h}{2} \right)^j \\
 &\quad - \left\{ \left(\frac{1}{c\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} \right)_{in} \left(-\frac{h}{2} \right)^i - \left(\frac{\partial(\chi \zeta^i)}{\partial \zeta} \right)_{in} \right\} \left(-\frac{h}{2} \right)^j \\
 &\quad + \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{\partial^2(\chi \zeta^i)}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta^i}{c\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} \right) \right\} \zeta^j d\zeta \\
 \bar{\beta}_{(i,j)} &= \left\{ (\chi)_{out} \left(\frac{h}{2} \right)^{i+j} - (\chi)_{in} \left(-\frac{h}{2} \right)^{i+j} \right\} \\
 &\quad - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial(\chi \zeta^i)}{\partial \zeta} \zeta^j d\zeta \\
 \mu_{(i)} &= (\chi)_{out} \left(\frac{h}{2} \right)^i \left\{ 1 + \frac{h(\omega_\xi + \omega_\theta)}{2a} + \frac{h^2 \omega_\xi \omega_\theta}{4a^2} \right\} k_{out}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\nu_{(i)} = (\chi)_{in} \left(-\frac{h}{2} \right)^i \left\{ 1 - \frac{h(\omega_\xi + \omega_\theta)}{2a} + \frac{h^2 \omega_\xi \omega_\theta}{4a^2} \right\} k_{in}$$

また、

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\eta}{c\rho} \zeta^i \left(1 + \frac{\omega_\xi + \omega_\theta}{a} \zeta + \frac{\omega_\xi \omega_\theta}{a^2} \zeta^2 \right) d\zeta \tag{3.24}$$

以上、 $(p+1)$ 個の $T_j (j=0, 1, \dots, p)$ に対し $(p+1)$ 個の方程式(3.22) が得られた。

第4章 熱変形方程式

本章では、粘塑性まで考慮して回転対称殻基礎式を展開していく。しかしながら、傾斜機能殻の場合には弾性変形のみを取り扱うため、展開した各基礎式において塑性に関する項を除いた式を用いることになる。薄肉回転対称殻の非軸対称曲げに対する数値解法が、Budiansky と Radkowsky [100]により提案されており、本章ではその解法を拡張して本理論に適用する。

4.1 内力の平衡方程式

単位長さあたりの合応力 $N_\xi, N_\theta, N_{\xi\theta}, N_{\theta\xi}$ 、合モーメント $M_\xi, M_\theta, M_{\xi\theta}, M_{\theta\xi}$ 、横せん断力 Q_ξ, Q_θ 、そして殻厚中央面に作用する単位面積当たりの分布荷重 P_ξ, P_θ, P_ζ を、図 4.1 に示すように定義する。

4.1.1 薄肉殻

Sanders, Jr. の殻理論 [3] では、せん断応力の対称性 ($\sigma_{\xi\theta} = \sigma_{\theta\xi}$) を考慮し、 $N_{\xi\theta}, N_{\theta\xi}$ とねじりモーメント $M_{\xi\theta}, M_{\theta\xi}$ の代わりに、修正面内せん断力 $\bar{N}_{\xi\theta}$ 、修正ねじりモーメント

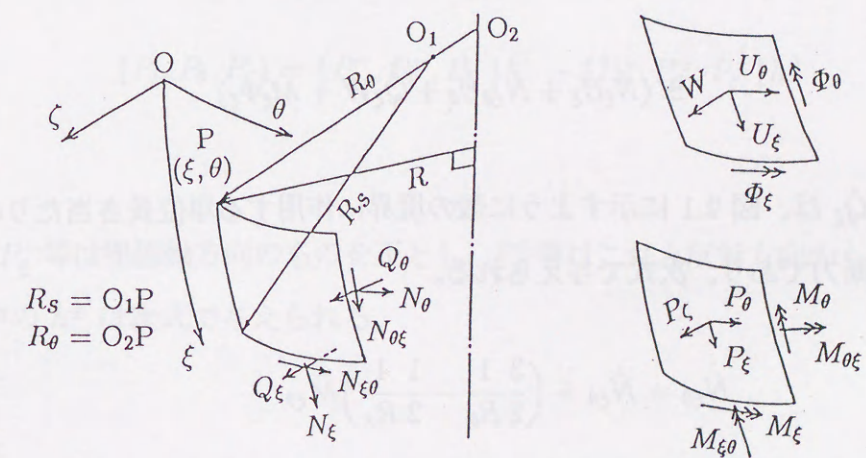


図 4.1 内力と変位

$\bar{M}_{\xi\theta}$ を用いる。Sanders, Jr. の理論による平衡方程式から、横せん断力 Q_ξ, Q_θ を消去し、時間または時間とともに単調に変化する量に関して微分すると、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & a \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (r \dot{N}_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{N}_{\xi\theta}) - r' \dot{N}_\theta \right] + \omega_\xi \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (r \dot{M}_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_{\xi\theta}) - r' \dot{M}_\theta \right] \\ & + \frac{1}{2} (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_{\xi\theta}) + r a^2 \dot{P}_\xi = 0 \\ & a \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{N}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (r \dot{N}_{\xi\theta}) + r' \dot{M}_{\xi\theta} \right] + \omega_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (r \dot{M}_{\xi\theta}) + r' \dot{M}_{\xi\theta} \right] \\ & + \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial \xi} [(\omega_\theta - \omega_\xi) \dot{M}_{\xi\theta}] + r a^2 \dot{P}_\theta = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (r \dot{M}_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_{\xi\theta}) - r' \dot{M}_\theta \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (r \dot{M}_{\xi\theta}) + r' \dot{M}_{\xi\theta} \right] \\ & - ar (\omega_\xi \dot{N}_\xi + \omega_\theta \dot{N}_\theta) + r a^2 \dot{P}_\zeta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

ここで、修正面内せん断力 $\bar{N}_{\xi\theta}$ と修正ねじりモーメント $\bar{M}_{\xi\theta}$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{N}}_{\xi\theta} &= \frac{1}{2} (\dot{N}_{\xi\theta} + \dot{N}_{\theta\xi}) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s} \right) (\dot{M}_{\xi\theta} - \dot{M}_{\theta\xi}) \\ \dot{\bar{M}}_{\xi\theta} &= \frac{1}{2} (\dot{M}_{\xi\theta} + \dot{M}_{\theta\xi}) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Sanders, Jr. の殻理論によれば境界 $s = 0$ または $s = \bar{s}$ における単位長さ当たりの仮想仕事は、次式により与えられる。

$$\pm (\dot{N}_\xi \dot{U}_\xi + \dot{N}_{\xi\theta} \dot{U}_\theta + \dot{Q}_\xi \dot{W} + \dot{M}_\xi \dot{\Phi}_\xi) \quad (4.3)$$

ここで、 $\hat{N}_{\xi\theta}, \hat{Q}_\xi$ は、図 2.1 に示すように殻の境界に作用する単位長さ当たりの有効膜力と有効横せん断力であり、次式で与えられる。

$$\hat{N}_{\xi\theta} = \dot{N}_{\xi\theta} + \left(\frac{3}{2} \frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{2} \frac{1}{R_s} \right) \dot{M}_{\xi\theta} \quad (4.4)$$

$$\hat{Q}_\xi = \frac{1}{ar} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (r \dot{M}_\xi) + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_{\xi\theta}) - r' \dot{M}_\theta \right] \quad (4.5)$$

4.1.2 厚肉殻

E. Reissner の殻理論による力の平衡方程式を軸対称殻に適用し、時間または時間とともに単調に変化する量についての微分形で示すと、力の平衡方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \dot{N}_\xi}{\partial \xi} + \gamma (\dot{N}_\xi - \dot{N}_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{N}_{\theta\xi}}{\partial \theta} + \omega_\xi \dot{Q}_\xi + a \dot{P}_\xi = 0 \\ & \frac{\partial \dot{N}_{\xi\theta}}{\partial \xi} + \gamma (\dot{N}_{\xi\theta} + \dot{N}_{\theta\xi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{N}_\theta}{\partial \theta} + \omega_\theta \dot{Q}_\theta + a \dot{P}_\theta = 0 \\ & \frac{\partial \dot{Q}_\xi}{\partial \xi} + \gamma \dot{Q}_\xi + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{Q}_\theta}{\partial \theta} - (\omega_\xi \dot{N}_\xi + \omega_\theta \dot{N}_\theta) + a \dot{P}_\zeta = 0 \\ & \dot{Q}_\xi - \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \dot{M}_\xi}{\partial \xi} + \gamma (\dot{M}_\xi - \dot{M}_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{M}_{\theta\xi}}{\partial \theta} \right] = 0 \\ & \dot{Q}_\theta - \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \dot{M}_{\xi\theta}}{\partial \xi} + \gamma (\dot{M}_{\xi\theta} + \dot{M}_{\theta\xi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{M}_\theta}{\partial \theta} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

分布荷重 P_ξ, P_θ, P_ζ は、殻の内外面に作用する分布荷重 $\{P_\xi^-, P_\theta^-, P_\zeta^-\}, \{P_\xi^+, P_\theta^+, P_\zeta^+\}$ と次の関係にある。

$$\{P_\xi, P_\theta, P_\zeta\} = \{P_\xi^-, P_\theta^-, P_\zeta^-\} h^- - \{P_\xi^+, P_\theta^+, P_\zeta^+\} h^+ \quad (4.7)$$

ただし P_ξ, P_ξ^- 等は座標軸方向のものを正とし、 P_ξ^+ 等はこれと反対方向のものを正とする。また、式中の h^\pm は次式で与えられる。

$$h^\pm = 1 \pm \frac{h}{2} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{1}{R_s R_\theta} \quad (4.8)$$

4.2 ひずみと変位の関係式

4.2.1 薄肉殻

殻厚中央面のひずみ $\varepsilon_{\xi m}, \varepsilon_{\theta m}$ および $\varepsilon_{\xi\theta m}$ を変位で表すと、次式になる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\xi m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \dot{U}_{\xi}}{\partial \xi} + \omega_{\xi} \dot{W} \right], & \dot{\varepsilon}_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{U}_{\theta}}{\partial \theta} + \gamma \dot{U}_{\xi} + \omega_{\theta} \dot{W} \right] \\ \dot{\varepsilon}_{\xi\theta m} &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{U}_{\xi}}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{U}_{\theta}}{\partial \xi} - \gamma \dot{U}_{\theta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

ここに、 $\varepsilon_{\xi\theta m}$ は、工学上のせん断ひずみの1/2である。

また、曲率の変化量 $\kappa_{\xi}, \kappa_{\theta}, \kappa_{\xi\theta}$ と変位との関係は、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\kappa}_{\xi} &= \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{\Phi}_{\xi}}{\partial \xi}, & \dot{\kappa}_{\theta} &= \frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\Phi}_{\theta}}{\partial \theta} + \gamma \dot{\Phi}_{\xi} \right\} \\ \dot{\kappa}_{\xi\theta} &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\Phi}_{\xi}}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{\Phi}_{\theta}}{\partial \xi} - \gamma \dot{\Phi}_{\theta} + \frac{1}{2a} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{U}_{\xi}}{\partial \theta} - \frac{\partial \dot{U}_{\theta}}{\partial \xi} - \gamma \dot{U}_{\theta} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

ここに、 $\Phi_{\xi}, \Phi_{\theta}$ は図 4.1 に示すように、中央面の回転を示し、次式となる。

$$\dot{\Phi}_{\xi} = \frac{1}{a} \left[-\frac{\partial \dot{W}}{\partial \xi} + \omega_{\xi} \dot{U}_{\xi} \right], \quad \dot{\Phi}_{\theta} = \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{W}}{\partial \theta} + \omega_{\theta} \dot{U}_{\theta} \right] \quad (4.11)$$

Kirchhoff-Love の仮定を用いると、殻体内の任意点におけるひずみ $\{\varepsilon\}$ を中央面のひずみ $\{\varepsilon_m\}$ および曲率の変化率 $\{\kappa\}$ で表すことができる。即ち、

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}_m\} + \zeta \{\dot{\kappa}\} \quad (4.12)$$

ただし、 $\{\dot{\varepsilon}\}, \{\dot{\varepsilon}_m\}$ および $\{\dot{\kappa}\}$ は、

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}_{\xi}, \dot{\varepsilon}_{\theta}, \dot{\varepsilon}_{\xi\theta}\}^T, \quad \{\dot{\varepsilon}_m\} = \{\dot{\varepsilon}_{\xi m}, \dot{\varepsilon}_{\theta m}, \dot{\varepsilon}_{\xi\theta m}\}^T, \quad \{\dot{\kappa}\} = \{\dot{\kappa}_{\xi}, \dot{\kappa}_{\theta}, \dot{\kappa}_{\xi\theta}\}^T \quad (4.13)$$

ここで、 $\{\quad\}^T$ は転置行列を表す。

4.2.2 厚肉殻

ひずみと変位の関係式には、Naghdi[10] が導入した微小変形理論に基づく Love の式 [2] を用いる。中央面のひずみ $\varepsilon_{\xi m}, \varepsilon_{\theta m}, \varepsilon_{\xi\theta m}$ と中央面の変位成分 U_{ξ}, U_{θ}, W の関係は、式 (4.9) で表される [10]。また、曲率の変化量 $\kappa_{\xi}, \kappa_{\theta}, \kappa_{\xi\theta}, \kappa_{\theta\xi}$ は、中央面の変位成分を用いて次のように表される [10]。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\kappa}_{\xi} &= \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{\Phi}_{\xi}}{\partial \xi}, & \dot{\kappa}_{\theta} &= \frac{1}{a} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\Phi}_{\theta}}{\partial \theta} + \gamma \dot{\Phi}_{\xi} \right), & \dot{\kappa}_{\xi\theta} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{\partial \dot{\Phi}_{\theta}}{\partial \xi} - 2\omega_{\xi} \dot{\Phi}_n \right) \\ \dot{\kappa}_{\theta\xi} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\Phi}_{\xi}}{\partial \theta} - \gamma \dot{\Phi}_{\theta} + 2\omega_{\theta} \dot{\Phi}_n \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

ここに、 $\Phi_{\xi}, \Phi_{\theta}, \Phi_n$ は中央面の回転を示し、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}_{\xi} &= \frac{1}{a} \left(-\frac{\partial \dot{W}}{\partial \xi} + \omega_{\xi} \dot{U}_{\xi} \right) + 2\dot{\varepsilon}_{\xi\theta m}, & \dot{\Phi}_{\theta} &= \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{W}}{\partial \theta} + \omega_{\theta} \dot{U}_{\theta} \right) + 2\dot{\varepsilon}_{\theta\xi m} \\ \dot{\Phi}_n &= \frac{1}{2a} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{U}_{\xi}}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{U}_{\theta}}{\partial \xi} + \gamma \dot{U}_{\theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

殻厚中央面から ζ の距離にある点のひずみ成分は、次式で表される [10]。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\xi} &= \frac{\dot{\varepsilon}_{\xi m} + \zeta \dot{\kappa}_{\xi}}{L_{\xi}}, & \dot{\varepsilon}_{\theta} &= \frac{\dot{\varepsilon}_{\theta m} + \zeta \dot{\kappa}_{\theta}}{L_{\theta}} \\ \dot{\varepsilon}_{\xi\theta} &= \frac{1}{L_{\xi}} \left\{ \frac{\dot{\varepsilon}_{\xi\theta m} + \dot{\Phi}_n}{2} + \left(\dot{\kappa}_{\xi\theta} + \frac{\dot{\Phi}_n}{R_s} \right) \zeta \right\} \\ &+ \frac{1}{L_{\theta}} \left\{ \frac{\dot{\varepsilon}_{\xi\theta m} - \dot{\Phi}_n}{2} + \left(\dot{\kappa}_{\theta\xi} - \frac{\dot{\Phi}_n}{R_{\theta}} \right) \zeta \right\} \\ \dot{\varepsilon}_{\xi\xi} &= \frac{\dot{\varepsilon}_{\xi\xi m}}{L_{\xi}}, & \dot{\varepsilon}_{\theta\zeta} &= \frac{\dot{\varepsilon}_{\theta\zeta m}}{L_{\theta}} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

4.3 応力とひずみの関係

全ひずみ速度が、弾性ひずみ速度と粘塑性ひずみ速度および熱ひずみ速度の和で表せると仮定する。弾性ひずみは Hooke の法則に従い、粘塑性ひずみは節 4.3.1 に記載の

Perzyna の構成式(4.17)[15]より求める。ただし、傾斜機能殻の場合には変形を弾性範囲内に止める。

4.3.1 粘塑性ひずみ

降伏応力および粘塑性パラメータを温度の関数で表わすことにより、Perzynaの弾/粘塑性構成式[15]に温度の影響を与えると、粘塑性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ は次式のようなになる。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = v(T) \langle \Psi(f) \rangle S_{ij} J_2^{-1/2} \quad (4.17)$$

ここで、 $(\dot{\quad})$ は時間に関する微分を示し、 S_{ij} と J_2 はそれぞれ偏差応力と偏差応力の第2不変量である。そして、 v は材料の粘性を表す定数であり、温度 T の関数である。また、 $\langle \quad \rangle$ はMcAulerの括弧であり、 $\langle \Psi(f) \rangle$ は次のように定義される。

$$\langle \Psi(f) \rangle = \begin{cases} 0 & f \leq 0 \\ \Psi(f) & f > 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

ここに、 f は応力の超過率を表し、次式で与えられる。

$$f = \frac{\bar{\sigma} - \sigma^*(T)}{\sigma^*(T)} \quad (4.19)$$

なお $f = 0$ はミーゼスの降伏曲面を表す。 $\bar{\sigma}$ はミーゼスの相当応力($=\sqrt{3J_2}$)であり、 σ^* は単純応力状態におけるひずみ速度が十分小さい場合の降伏応力で、温度 T の関数である。

4.3.2 薄肉殻

平面応力状態において全ひずみ速度は次式のようなになる。

$$\{\dot{\varepsilon}\} = [D]^{-1}\{\dot{\sigma}\} + \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} + \{\dot{\varepsilon}^t\} \quad (4.20)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{\sigma}\} &= \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_\xi \\ \dot{\sigma}_\theta \\ \dot{\sigma}_{\xi\theta} \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{\varepsilon}^t\} = \begin{Bmatrix} \alpha \dot{T}_e \\ \alpha \dot{T}_e \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad [D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \\ \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} &= \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_\xi^{vp} \\ \dot{\varepsilon}_\theta^{vp} \\ \dot{\varepsilon}_{\xi\theta}^{vp} \end{Bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} v(T) \langle \Psi(f) \rangle \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \{\sigma\} \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

ここに、 E, ν および α は、縦弾性係数、ポアソン比および線膨張係数である。また、 T_e は、基準温度 \bar{T}_0 からの温度変化を表し、

$$T_e(\xi, \theta, \zeta, t) = T(\xi, \theta, \zeta, t) - \bar{T}_0 \quad (4.22)$$

となる。

式(4.20)に式(4.12)を代入し、を $\{\dot{\sigma}\}$ について解くと、次のようになる。

$$\{\dot{\sigma}\} = [D](\{\dot{\varepsilon}_m\} + \zeta\{\dot{\kappa}\}) - \{\dot{\sigma}^{vp}\} - \{\dot{\sigma}^t\} \quad (4.23)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{\sigma}^{vp}\} &= \{\dot{\sigma}_\xi^{vp}, \dot{\sigma}_\theta^{vp}, \dot{\sigma}_{\xi\theta}^{vp}\}^T = [D]\{\dot{\varepsilon}^{vp}\} \\ \{\dot{\sigma}^t\} &= \{\dot{\sigma}^t, \dot{\sigma}^t, 0\}^T = [D]\{\dot{\varepsilon}^t\} = \frac{\alpha E}{1-\nu} \{\dot{T}_e, \dot{T}_e, 0\}^T \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

傾斜機能殻の場合には、弾性変形のみを考慮するため、式(4.20)の $\{\dot{\varepsilon}^{vp}\}$ と、式(4.23)の $\{\dot{\sigma}^{vp}\}$ を除いた式を用いる。

4.3.3 厚肉殻

殻の応力状態(殻厚方向の垂直応力 $\sigma_\zeta = 0$)において、ひずみ速度は次のようになる。

$$\{\dot{\epsilon}\} = [D]^{-1}\{\dot{\sigma}\} + \{\dot{\epsilon}^{vp}\} + \{\dot{\epsilon}^t\} \quad (4.25)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{\epsilon}\} &= \{\dot{\epsilon}_\xi, \dot{\epsilon}_\theta, \dot{\epsilon}_{\xi\theta}, \dot{\epsilon}_{\xi\zeta}, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta}\}^T, & \{\dot{\sigma}\} &= \{\dot{\sigma}_\xi, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_{\xi\theta}, \dot{\sigma}_{\xi\zeta}, \dot{\sigma}_{\theta\zeta}\}^T \\ \{\dot{\epsilon}^t\} &= \{\alpha\dot{T}_e, \alpha\dot{T}_e, 0, 0, 0\}^T \\ \{\dot{\epsilon}^{vp}\} &= \{\dot{\epsilon}_\xi^{vp}, \dot{\epsilon}_\theta^{vp}, \dot{\epsilon}_{\xi\theta}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\xi\zeta}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta}^{vp}\}^T \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}v(T) \langle \Psi(f) \rangle \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \{\sigma\} \\ [D] &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

式(4.25)を応力について解くと、

$$\{\dot{\sigma}\} = [D]\{\dot{\epsilon}\} - \{\dot{\sigma}^{vp}\} - \{\dot{\sigma}^t\} \quad (4.27)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{\sigma}^{vp}\} &= \{\dot{\sigma}_\xi^{vp}, \dot{\sigma}_\theta^{vp}, \dot{\sigma}_{\xi\theta}^{vp}, \dot{\sigma}_{\xi\zeta}^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\zeta}^{vp}\}^T = [D]\{\dot{\epsilon}^{vp}\} \\ \{\dot{\sigma}^t\} &= \{\dot{\sigma}^t, \dot{\sigma}^t, 0, 0, 0\}^T = [D]\{\dot{\epsilon}^t\} = \frac{\alpha E}{1-\nu} \{\dot{T}_e, \dot{T}_e, 0, 0, 0\}^T \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

傾斜機能殻の場合には、弾性変形のみを考慮するため、式(4.25)の $\{\dot{\epsilon}^{vp}\}$ と、式(4.27)の $\{\dot{\sigma}^{vp}\}$ を除いた式を用いる。

4.4 合応力および合モーメント

4.4.1 薄肉殻

殻の単位長さ当たりの合応力および合モーメントの変化率は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{N}\} &= \{\dot{N}_\xi, \dot{N}_\theta, \dot{N}_{\xi\theta}\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}\} d\zeta \\ \{\dot{M}\} &= \{\dot{M}_\xi, \dot{M}_\theta, \dot{M}_{\xi\theta}\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}\} \zeta d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

式(4.23)および式(4.12)を用いると、合応力および合モーメントは次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{N} \\ \dot{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_m \\ \dot{\kappa} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{N}^{vp} \\ \dot{M}^{vp} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{N}^t \\ \dot{M}^t \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{N}^{vp}\} &= \{\dot{N}_\xi^{vp}, \dot{N}_\theta^{vp}, \dot{N}_{\xi\theta}^{vp}\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}^{vp}\} d\zeta = \int_{-h/2}^{h/2} [D]\{\dot{\epsilon}^{vp}\} d\zeta \\ \{\dot{M}^{vp}\} &= \{\dot{M}_\xi^{vp}, \dot{M}_\theta^{vp}, \dot{M}_{\xi\theta}^{vp}\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}^{vp}\} \zeta d\zeta = \int_{-h/2}^{h/2} [D]\{\dot{\epsilon}^{vp}\} \zeta d\zeta \\ \{\dot{N}^t\} &= \{\dot{N}^t, \dot{N}^t, 0\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}^t\} d\zeta = \int_{-h/2}^{h/2} [D]\{\dot{\epsilon}^t\} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

$$\left. \begin{aligned} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha E}{1-\nu} \{\dot{T}_e, \dot{T}_e, 0\}^T d\zeta \\ \{\dot{M}^t\} &= \{\dot{M}^t, \dot{M}^t, 0\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}^t\} \zeta d\zeta = \int_{-h/2}^{h/2} [D] \{\dot{\varepsilon}^t\} \zeta d\zeta \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha E}{1-\nu} \{\dot{T}_e, \dot{T}_e, 0\}^T \zeta d\zeta \end{aligned} \right\}$$

また、 \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} は次式で与えられる。

$$\bar{A} = \int_{-h/2}^{h/2} [D] d\zeta, \quad \bar{B} = \int_{-h/2}^{h/2} [D] \zeta d\zeta, \quad \bar{C} = \int_{-h/2}^{h/2} [D] \zeta^2 d\zeta \quad (4.32)$$

均質殻の場合には、 \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} の積分は次のようになる。

$$\bar{A} = h[D] \quad \bar{B} = 0, \quad \bar{C} = \frac{h^3}{12}[D] \quad (4.33)$$

また、多層殻の場合には \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} および $\{\dot{N}^{vp}\}$, $\{\dot{M}^{vp}\}$, $\{\dot{N}^t\}$, $\{\dot{M}^t\}$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= \sum_{i=1}^n [D]_i \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} d\zeta = \sum_{i=1}^n [D]_i \zeta_{1,i} \\ \bar{B} &= \sum_{i=1}^n [D]_i \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \zeta d\zeta = \sum_{i=1}^n [D]_i \zeta_{2,i} \\ \bar{C} &= \sum_{i=1}^n [D]_i \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \zeta^2 d\zeta = \sum_{i=1}^n [D]_i \zeta_{3,i} \\ [D]_i &= \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu_i \end{bmatrix} \\ \{\dot{N}^{vp}\} &= \sum_{i=1}^n [D]_i \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \{\dot{\varepsilon}^{vp}\}_i d\zeta, \quad \{\dot{M}^{vp}\} = \sum_{i=1}^n [D]_i \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \{\dot{\varepsilon}^{vp}\}_i \zeta d\zeta \\ \{\dot{N}^t\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\alpha E_i}{1-\nu_i} \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \{\dot{T}_e, \dot{T}_e, 0\} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{M}^t\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\alpha E_i}{1-\nu_i} \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \{\dot{T}_e, \dot{T}_e, 0\} \zeta d\zeta \\ \zeta_{j,i} &= \frac{1}{j} (\zeta_i^j - \zeta_{i-1}^j) \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\}$$

ここで、 E_i, ν_i は殻内面から、 i 番目の層の縦弾性係数、ポアソン比である。

以上で、36 個の未知数 $\{\dot{N}\}$, $\{\dot{M}\}$, $\{\dot{N}^{vp}\}$, $\{\dot{M}^{vp}\}$, $\{\dot{N}^t\}$, $\{\dot{M}^t\}$, $\{\dot{\sigma}\}$, $\{\dot{\sigma}^{vp}\}$, $\{\dot{\sigma}^t\}$, $\{\dot{\varepsilon}_m\}$, $\{\dot{\varepsilon}^{vp}\}$, $\{\dot{\varepsilon}^t\}$, $\dot{U}_\xi, \dot{U}_\theta, \dot{W}$, $\{\dot{\kappa}\}$, $\dot{\Phi}_\xi, \dot{\Phi}_\theta$ に対し、式(4.1)、(4.9)、(4.10)、(4.11)、(4.21)、(4.23)、(4.24)、(4.30)、(4.34) の36個の式が得られたことになる。傾斜機能殻の場合には、23 個の未知数 $\{\dot{N}\}$, $\{\dot{M}\}$, $\{\dot{N}^t\}$, $\{\dot{M}^t\}$, $\{\dot{\sigma}\}$, $\{\dot{\sigma}^t\}$, $\{\dot{\varepsilon}_m\}$, $\{\dot{\varepsilon}^t\}$, $\dot{U}_\xi, \dot{U}_\theta, \dot{W}$, $\{\dot{\kappa}\}$, $\dot{\Phi}_\xi, \dot{\Phi}_\theta$ に対し、式(4.1)、(4.9)、(4.10)、(4.11)、(4.23)、(4.24)、(4.30)、(4.34) から粘塑性に関する項および式を除いた23個の式が得られたことになる。

4.4.2 厚肉殻

殻の単位長さ当たりの合応力 $\{N\}$ および合モーメント $\{M\}$ は、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{N}\} &= \{\dot{N}_\xi, \dot{N}_\theta, \dot{N}_{\xi\theta}, \dot{N}_{\theta\xi}, \dot{Q}_\xi, \dot{Q}_\theta\} \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}_\xi L_\theta, \dot{\sigma}_\theta L_\xi, \dot{\sigma}_{\xi\theta} L_\theta, \dot{\sigma}_{\theta\xi} L_\xi, \dot{\sigma}_{\xi\xi} L_\theta, \dot{\sigma}_{\theta\theta} L_\xi\} d\zeta \\ \{\dot{M}\} &= \{\dot{M}_\xi, \dot{M}_\theta, \dot{M}_{\xi\theta}, \dot{M}_{\theta\xi}\} \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}_\xi L_\theta, \dot{\sigma}_\theta L_\xi, \dot{\sigma}_{\xi\theta} L_\theta, \dot{\sigma}_{\theta\xi} L_\xi\} \zeta d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

式(4.16) および(4.27) より、上式は次式的ように表示できる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}_\xi &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\dot{\varepsilon}_{\xi m} + \zeta \dot{\kappa}_\xi) \frac{L_\theta}{L_\xi} + \nu (\dot{\varepsilon}_{\theta m} + \zeta \dot{\kappa}_\theta) \right\} d\zeta - \dot{N}_\xi^{vp} - \dot{N}_\xi^t \\ \dot{N}_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\dot{\varepsilon}_{\theta m} + \zeta \dot{\kappa}_\theta) \frac{L_\xi}{L_\theta} + \nu (\dot{\varepsilon}_{\xi m} + \zeta \dot{\kappa}_\xi) \right\} d\zeta - \dot{N}_\theta^{vp} - \dot{N}_\theta^t \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{N}_{\xi 0} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \left[\left\{ \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_{\xi 0m} + \dot{\Phi}_n) + \zeta \left(\dot{\kappa}_{\xi 0} + \frac{\dot{\Phi}_n}{R_s} \right) \right\} \frac{L_0}{L_\xi} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_{\xi 0m} - \dot{\Phi}_n) + \zeta \left(\dot{\kappa}_{0\xi} - \frac{\dot{\Phi}_n}{R_0} \right) \right\} d\zeta - \dot{N}_{\xi 0}^{vp} \right] \\
 \dot{N}_{0\xi} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_{\xi 0m} + \dot{\Phi}_n) + \zeta \left(\dot{\kappa}_{\xi 0} + \frac{\dot{\Phi}_n}{R_s} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_{\xi 0m} - \dot{\Phi}_n) + \zeta \left(\dot{\kappa}_{0\xi} - \frac{\dot{\Phi}_n}{R_0} \right) \right\} \frac{L_\xi}{L_0} \right] d\zeta - \dot{N}_{0\xi}^{vp} \\
 \dot{Q}_\xi &= k_1 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \dot{\varepsilon}_{\xi \zeta m} \frac{L_0}{L_\xi} d\zeta - \dot{Q}_\xi^{vp} \\
 \dot{Q}_0 &= k_2 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \dot{\varepsilon}_{0\zeta m} \frac{L_\xi}{L_0} d\zeta - \dot{Q}_0^{vp} \\
 \dot{M}_\xi &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\dot{\varepsilon}_{\xi m} + \zeta \dot{\kappa}_\xi) \frac{L_0}{L_\xi} + \nu(\dot{\varepsilon}_{0m} + \zeta \dot{\kappa}_0) \right\} \zeta d\zeta - \dot{M}_\xi^{vp} - \dot{M}_\xi^t \\
 \dot{M}_0 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\dot{\varepsilon}_{0m} + \zeta \dot{\kappa}_0) \frac{L_\xi}{L_0} + \nu(\dot{\varepsilon}_{\xi m} + \zeta \dot{\kappa}_\xi) \right\} \zeta d\zeta - \dot{M}_0^{vp} - \dot{M}_0^t \\
 \dot{M}_{\xi 0} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \left[\left\{ \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_{\xi 0m} + \dot{\Phi}_n) + \zeta \left(\dot{\kappa}_{\xi 0} + \frac{\dot{\Phi}_n}{R_s} \right) \right\} \frac{L_0}{L_\xi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_{\xi 0m} - \dot{\Phi}_n) + \zeta \left(\dot{\kappa}_{0\xi} - \frac{\dot{\Phi}_n}{R_0} \right) \right] \zeta d\zeta - \dot{M}_{\xi 0}^{vp} \\
 \dot{M}_{0\xi} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_{\xi 0m} + \dot{\Phi}_n) + \zeta \left(\dot{\kappa}_{\xi 0} + \frac{\dot{\Phi}_n}{R_s} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_{\xi 0m} - \dot{\Phi}_n) + \zeta \left(\dot{\kappa}_{0\xi} - \frac{\dot{\Phi}_n}{R_0} \right) \right\} \frac{L_\xi}{L_0} \right] \zeta d\zeta - \dot{M}_{0\xi}^{vp}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

あるいは、

$$\begin{aligned}
 \dot{N}_\xi &= \bar{A}_1 \dot{\varepsilon}_{\xi m} + \bar{B}_1 \dot{\varepsilon}_{0m} + \bar{A}_2 \dot{\kappa}_\xi + \bar{B}_2 \dot{\kappa}_0 - \dot{N}_\xi^{vp} - \dot{N}_\xi^t \\
 \dot{N}_0 &= \bar{B}_1 \dot{\varepsilon}_{\xi m} + \bar{C}_1 \dot{\varepsilon}_{0m} + \bar{B}_2 \dot{\kappa}_\xi + \bar{C}_2 \dot{\kappa}_0 - \dot{N}_0^{vp} - \dot{N}_0^t \\
 \dot{N}_{\xi 0} &= \bar{D}_1 \dot{\varepsilon}_{\xi 0m} + \bar{F}_2 \dot{\kappa}_{\xi 0} + \bar{H}_2 \dot{\kappa}_{0\xi} + \bar{I}_1 \dot{\Phi}_n - \dot{N}_{\xi 0}^{vp}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{N}_{0\xi} &= \bar{E}_1 \dot{\varepsilon}_{\xi 0m} + \bar{H}_2 \dot{\kappa}_{\xi 0} + \bar{G}_2 \dot{\kappa}_{0\xi} + \bar{J}_1 \dot{\Phi}_n - \dot{N}_{0\xi}^{vp} \\
 \dot{Q}_\xi &= k_1 \bar{F}_1 \dot{\varepsilon}_{\xi \zeta m} - \dot{Q}_\xi^{vp}, \quad \dot{Q}_0 = k_2 \bar{G}_1 \dot{\varepsilon}_{0\zeta m} - \dot{Q}_0^{vp} \\
 \dot{M}_\xi &= \bar{A}_2 \dot{\varepsilon}_{\xi m} + \bar{B}_2 \dot{\varepsilon}_{0m} + \bar{A}_3 \dot{\kappa}_\xi + \bar{B}_3 \dot{\kappa}_0 - \dot{M}_\xi^{vp} - \dot{M}_\xi^t \\
 \dot{M}_0 &= \bar{B}_2 \dot{\varepsilon}_{\xi m} + \bar{C}_2 \dot{\varepsilon}_{0m} + \bar{B}_3 \dot{\kappa}_\xi + \bar{C}_3 \dot{\kappa}_0 - \dot{M}_0^{vp} - \dot{M}_0^t \\
 \dot{M}_{\xi 0} &= \bar{D}_2 \dot{\varepsilon}_{\xi 0m} + \bar{F}_3 \dot{\kappa}_{\xi 0} + \bar{H}_3 \dot{\kappa}_{0\xi} + \bar{I}_2 \dot{\Phi}_n - \dot{M}_{\xi 0}^{vp} \\
 \dot{M}_{0\xi} &= \bar{E}_2 \dot{\varepsilon}_{\xi 0m} + \bar{H}_3 \dot{\kappa}_{\xi 0} + \bar{G}_3 \dot{\kappa}_{0\xi} + \bar{J}_2 \dot{\Phi}_n - \dot{M}_{0\xi}^{vp}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \{\dot{N}^{vp}\} &= \{\dot{N}_\xi^{vp}, \dot{N}_0^{vp}, \dot{N}_{\xi 0}^{vp}, \dot{N}_{0\xi}^{vp}, \dot{Q}_\xi^{vp}, \dot{Q}_0^{vp}\} \\
 &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}_\xi^{vp} L_0, \dot{\sigma}_0^{vp} L_\xi, \dot{\sigma}_{\xi 0}^{vp} L_0, \dot{\sigma}_{0\xi}^{vp} L_\xi, \dot{\sigma}_{\xi \zeta}^{vp} L_0, \dot{\sigma}_{0\zeta}^{vp} L_\xi\} d\zeta \\
 \{\dot{M}^{vp}\} &= \{\dot{M}_\xi^{vp}, \dot{M}_0^{vp}, \dot{M}_{\xi 0}^{vp}, \dot{M}_{0\xi}^{vp}\} \\
 &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}_\xi^{vp} L_0, \dot{\sigma}_0^{vp} L_\xi, \dot{\sigma}_{\xi 0}^{vp} L_0, \dot{\sigma}_{0\xi}^{vp} L_\xi\} \zeta d\zeta \\
 \{\dot{N}^t\} &= \{\dot{N}_\xi^t, \dot{N}_0^t, 0, 0, 0, 0\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}^t L_0, \dot{\sigma}^t L_\xi, 0, 0, 0, 0\}^T d\zeta \\
 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha E}{1-\nu} \{\dot{T}_e L_0, \dot{T}_e L_\xi, 0, 0, 0, 0\}^T d\zeta \\
 \{\dot{M}^t\} &= \{\dot{M}_\xi^t, \dot{M}_0^t, 0, 0\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}^t L_0, \dot{\sigma}^t L_\xi, 0, 0\} \zeta d\zeta \\
 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha E}{1-\nu} \{\dot{T}_e L_0, \dot{T}_e L_\xi, 0, 0\}^T \zeta d\zeta
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

また、各係数は次式となる。

$$\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3\} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{L_0}{L_\xi} \{1, \zeta, \zeta^2\} d\zeta$$

$$\begin{aligned}
 \{\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E\nu}{1-\nu^2} \{1, \zeta, \zeta^2\} d\zeta \\
 \{\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{L_\xi}{L_\theta} \{1, \zeta, \zeta^2\} d\zeta \\
 \{\bar{D}_1, \bar{D}_2\} &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{L_\theta}{L_\xi} + 1 \right) \{1, \zeta\} d\zeta \\
 \{\bar{E}_1, \bar{E}_2\} &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{L_\xi}{L_\theta} + 1 \right) \{1, \zeta\} d\zeta \\
 \{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \frac{L_\theta}{L_\xi} \{1, \zeta, \zeta^2\} d\zeta \\
 \{\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \frac{L_\xi}{L_\theta} \{1, \zeta, \zeta^2\} d\zeta \\
 \{\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \{1, \zeta, \zeta^2\} d\zeta \\
 \{\bar{I}_1, \bar{I}_2\} &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{L_\theta}{L_\xi} + 2 \frac{L_\theta \omega_\xi}{L_\xi a} \zeta - 2 \frac{\omega_\theta}{a} \zeta - 1 \right) \{1, \zeta\} d\zeta \\
 \{\bar{J}_1, \bar{J}_2\} &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \left(-\frac{L_\xi}{L_\theta} - 2 \frac{L_\xi \omega_\theta}{L_\theta a} \zeta + 2 \frac{\omega_\xi}{a} \zeta + 1 \right) \{1, \zeta\} d\zeta
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

上式に、近似式(3.10)を適用すると次式となる。

$$\begin{aligned}
 \{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ 1 + (\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{\zeta}{a} + \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\zeta^2}{a^2} \right\} \{1, \zeta, \zeta^2\} d\zeta \\
 \{\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E\nu}{1-\nu^2} \{1, \zeta, \zeta^2\} d\zeta \\
 \{\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ 1 + (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\zeta}{a} + \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{\zeta^2}{a^2} \right\} \{1, \zeta, \zeta^2\} d\zeta \\
 \{\bar{D}_1, \bar{D}_2\} &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \left\{ 2 + (\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{\zeta}{a} + \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\zeta^2}{a^2} \right\} \{1, \zeta\} d\zeta \\
 \{\bar{E}_1, \bar{E}_2\} &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \left\{ 2 + (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\zeta}{a} + \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{\zeta^2}{a^2} \right\} \{1, \zeta\} d\zeta
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
 \{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \left\{ 1 + (\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{\zeta}{a} + \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\zeta^2}{a^2} \right\} \{1, \zeta, \zeta^2\} d\zeta \\
 \{\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \left\{ 1 + (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\zeta}{a} + \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{\zeta^2}{a^2} \right\} \{1, \zeta, \zeta^2\} d\zeta \\
 \{\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \{1, \zeta, \zeta^2\} d\zeta \\
 \{\bar{I}_1, \bar{I}_2\} &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \left\{ (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\zeta}{a} - \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\zeta^2}{a^2} \right\} \{1, \zeta\} d\zeta \\
 \{\bar{J}_1, \bar{J}_2\} &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \left\{ (\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{\zeta}{a} + \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{\zeta^2}{a^2} \right\} \{1, \zeta\} d\zeta
 \end{aligned}$$

なお、 k_1, k_2 はせん断に関する修正係数であり、本研究では、その値を 5/6 とする。傾斜機能殻の場合には、式(4.40)の積分を数値的に実行する。均質殻の場合には、式(4.39)の各係数に積分に関する近似

$$\left. \begin{aligned}
 \int_{-h/2}^{h/2} L_\theta/L_\xi d\zeta &\cong h \left[1 + \frac{h^2}{12R_s} \left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \right] \\
 \int_{-h/2}^{h/2} L_\theta/L_\xi \zeta d\zeta &\cong -\frac{h^3}{12} \left[\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right] \\
 \int_{-h/2}^{h/2} L_\theta/L_\xi \zeta^2 d\zeta &\cong \frac{h^3}{12} \left[1 + \frac{3}{20} \frac{h^2}{R_s} \left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \right]
 \end{aligned} \right\} \tag{4.41}$$

を行うと、次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ 1 + \frac{h^2 \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta)}{12a^2} \right\} & \bar{A}_2 &= \frac{Eh^3 (\omega_\theta - \omega_\xi)}{12a(1-\nu^2)} \\
 \bar{A}_3 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ 1 + \frac{3h^2 \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta)}{20a^2} \right\} & \bar{B}_1 &= \frac{Eh\nu}{1-\nu^2} \\
 \bar{B}_2 &= 0 & \bar{B}_3 &= \frac{Eh^3 \nu}{12(1-\nu^2)} \\
 \bar{C}_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ 1 + \frac{h^2 \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi)}{12a^2} \right\} & \bar{C}_2 &= \frac{Eh^3 (\omega_\xi - \omega_\theta)}{12a(1-\nu^2)}
 \end{aligned}$$

そして、式(4.40)は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 \{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3\} &= \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \{\zeta_{1,i}^*, \zeta_{2,i}^*, \zeta_{3,i}^*\} \\
 \{\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3\} &= \sum_{i=1}^n \frac{E_i \nu_i}{1-\nu_i^2} \{\zeta_{1,i}^*, \zeta_{2,i}^*, \zeta_{3,i}^*\} \\
 \{\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3\} &= \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \{\zeta_{1,i}^{**}, \zeta_{2,i}^{**}, \zeta_{3,i}^{**}\} \\
 \{\bar{D}_1, \bar{D}_2\} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{E_i}{1+\nu_i} \{\zeta_{1,i}^* + \zeta_{1,i}, \zeta_{2,i}^* + \zeta_{2,i}\} \\
 \{\bar{E}_1, \bar{E}_2\} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{E_i}{1+\nu_i} \{\zeta_{1,i}^{**} + \zeta_{1,i}, \zeta_{2,i}^{**} + \zeta_{2,i}\} \\
 \{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3\} &= \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{1+\nu_i} \{\zeta_{1,i}^*, \zeta_{2,i}^*, \zeta_{3,i}^*\} \\
 \{\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3\} &= \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{1+\nu_i} \{\zeta_{1,i}^{**}, \zeta_{2,i}^{**}, \zeta_{3,i}^{**}\} \\
 \{\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3\} &= \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{1+\nu_i} \{\zeta_{1,i}, \zeta_{2,i}, \zeta_{3,i}\} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{array} \right\} &= \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{1+\nu_i} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\zeta_{1,i}^* - \zeta_{1,i}) + \frac{\omega_\xi}{a} \zeta_{2,i}^* - \frac{\omega_\theta}{a} \zeta_{2,i} \\ \frac{1}{2}(\zeta_{2,i}^* - \zeta_{2,i}) + \frac{\omega_\xi}{a} \zeta_{3,i}^* - \frac{\omega_\theta}{a} \zeta_{3,i} \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \bar{J}_1 \\ \bar{J}_2 \end{array} \right\} &= \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{1+\nu_i} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\zeta_{1,i} - \zeta_{1,i}^{**}) + \frac{\omega_\xi}{a} \zeta_{2,i} - \frac{\omega_\theta}{a} \zeta_{2,i}^{**} \\ \frac{1}{2}(\zeta_{2,i} - \zeta_{2,i}^{**}) + \frac{\omega_\xi}{a} \zeta_{3,i} - \frac{\omega_\theta}{a} \zeta_{3,i}^{**} \end{array} \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

ただし、上式に含まれる $\zeta_{j,i}, \zeta_{k,i}^*, \zeta_{k,i}^{**} (j=1, 2, \dots, 5; k=1, 2, 3)$ は以下に示す。

$$\left. \begin{aligned}
 \zeta_{j,i} &= \frac{1}{j} (\zeta_i^j - \zeta_{i-1}^j) \\
 \zeta_{k,i}^* &= \zeta_{k,i} - \frac{1}{a} (\omega_\xi - \omega_\theta) \zeta_{k+1,i} + \frac{\omega_\xi}{a^2} (\omega_\xi - \omega_\theta) \zeta_{k+2,i}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

$$\zeta_{k,i}^{**} = \zeta_{k,i} - \frac{1}{a} (\omega_\theta - \omega_\xi) \zeta_{k+1,i} + \frac{\omega_\theta}{a^2} (\omega_\theta - \omega_\xi) \zeta_{k+2,i}$$

以上で、56個の独立変数 $\{N\}, \{M\}, \{N^{vp}\}, \{M^{vp}\}, \{N^t\}, \{M^t\}, \{\sigma\}, \{\sigma^{vp}\}, \{\sigma^t\}, \dot{U}_\xi, \dot{U}_\theta, \dot{W}, \dot{\Phi}_\xi, \dot{\Phi}_\theta, \dot{\Phi}_n, \{\dot{\epsilon}^{vp}\}, \{\dot{\epsilon}^t\}, \{\dot{\epsilon}_m\}, \{\dot{\kappa}\}$ に対して、式(4.6)、式(4.9)、式(4.14)、式(4.15)、式(4.26)、式(4.27)、式(4.28)、式(4.36)または式(4.37)、式(4.38)の56個の式が得られたことになる。傾斜機能殻の場合には、30個の未知数 $\dot{N}_\xi, \dot{N}_\theta, \dot{N}_{\xi\theta}, \dot{N}_{\theta\xi}, \dot{M}_\xi, \dot{M}_\theta, \dot{M}_{\xi\theta}, \dot{M}_{\theta\xi}, \dot{U}_\xi, \dot{U}_\theta, \dot{W}, \dot{Q}_\xi, \dot{Q}_\theta, \dot{\epsilon}_{\xi m}, \dot{\epsilon}_{\theta m}, \dot{\epsilon}_{\xi\theta m}, \dot{\epsilon}_{\theta\xi m}, \dot{\epsilon}_{\theta\xi m}, \dot{\kappa}_\xi, \dot{\kappa}_\theta, \dot{\kappa}_{\xi\theta}, \dot{\kappa}_{\theta\xi}, \dot{\Phi}_\xi, \dot{\Phi}_\theta, \dot{\Phi}_n, \dot{\sigma}^t, \dot{N}_\xi^t, \dot{M}_\xi^t, \dot{N}_\theta^t, \dot{M}_\theta^t$ に対し、式(4.6)、(4.9)、(4.14)、(4.15)、(4.28)、(4.37)、(4.38)から粘塑性に関する項および式を除いた30個の式が得られたことになる。

第5章 無次元方程式

5.1 フーリエ級数展開

一般に非軸対称問題を解析するには、各変数を θ 方向にフーリエ級数で表し、その係数を定めればよい。そこで上に示した変数のうち、粘塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_\xi^{vp}$, $\dot{\epsilon}_\theta^{vp}$, $\dot{\epsilon}_{\xi\theta}^{vp}$, $\dot{\epsilon}_{\xi\xi}^{vp}$, $\dot{\epsilon}_{\theta\zeta}^{vp}$ ならびに熱ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^t$ を除く変数を次のようにフーリエ級数で表す。

$$\begin{aligned}
 T_j &= \frac{\sigma_0}{E_0 \alpha_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{h^j} t_j^{(m)} \cos m\theta \\
 &\quad \{ \dot{N}_\xi, \dot{N}_\xi^{vp}, \dot{N}_\xi^t, \dot{N}_\theta, \dot{N}_\theta^{vp}, \dot{N}_\theta^t, \dot{Q}_\xi, \dot{Q}_\xi^{vp}, \dot{Q}_\xi^t \} \\
 &= \sigma_0 h \sum_{m=0}^{\infty} \{ \dot{n}_\xi^{(m)}, \dot{n}_\xi^{vp(m)}, \dot{n}_\xi^t(m), \dot{n}_\theta^{(m)}, \dot{n}_\theta^{vp(m)}, \dot{n}_\theta^t(m), \dot{q}_\xi^{(m)}, \dot{q}_\xi^{vp(m)}, \dot{q}_\xi^t(m) \} \cos m\theta \\
 &\quad \{ \dot{N}_{\xi\theta}, \dot{N}_{\xi\theta}^{vp}, \dot{N}_{\xi\theta}^t, \dot{N}_{\theta\xi}, \dot{N}_{\theta\xi}^{vp}, \dot{N}_{\theta\xi}^t, \dot{Q}_\theta, \dot{Q}_\theta^{vp} \} \\
 &= \sigma_0 h \sum_{m=1}^{\infty} \{ \dot{n}_{\xi\theta}^{(m)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{vp(m)}, \dot{n}_{\xi\theta}^t(m), \dot{n}_{\theta\xi}^{(m)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{vp(m)}, \dot{n}_{\theta\xi}^t(m), \dot{q}_\theta^{(m)}, \dot{q}_\theta^{vp(m)} \} \sin m\theta \\
 &\quad \{ \dot{M}_\xi, \dot{M}_\xi^{vp}, \dot{M}_\xi^t, \dot{M}_\theta, \dot{M}_\theta^{vp}, \dot{M}_\theta^t \} \\
 &= \frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \{ \dot{m}_\xi^{(m)}, \dot{m}_\xi^{vp(m)}, \dot{m}_\xi^t(m), \dot{m}_\theta^{(m)}, \dot{m}_\theta^{vp(m)}, \dot{m}_\theta^t(m) \} \cos m\theta \\
 &\quad \{ \dot{M}_{\xi\theta}, \dot{M}_{\xi\theta}^{vp}, \dot{M}_{\xi\theta}^t, \dot{M}_{\theta\xi}, \dot{M}_{\theta\xi}^{vp} \} \\
 &= \frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \{ \dot{m}_{\xi\theta}^{(m)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{vp(m)}, \dot{m}_{\xi\theta}^t(m), \dot{m}_{\theta\xi}^{(m)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{vp(m)} \} \sin m\theta \\
 &\quad \{ \dot{U}_\xi, \dot{W}, \dot{\epsilon}_{\xi m}, \dot{\epsilon}_{\theta m}, \dot{\epsilon}_{\xi\zeta m}, \dot{k}_\xi, \dot{k}_\theta, \dot{\Phi}_\xi \} \\
 &= \frac{\sigma_0}{E_0} \sum_{m=0}^{\infty} \{ a \dot{u}_\xi^{(m)}, a \dot{w}^{(m)}, \dot{\epsilon}_{\xi m}^{(m)}, \dot{\epsilon}_{\theta m}^{(m)}, \dot{\epsilon}_{\xi\zeta m}^{(m)}, \frac{\dot{k}_\xi^{(m)}}{a}, \frac{\dot{k}_\theta^{(m)}}{a}, \dot{\varphi}_\xi^{(m)} \} \cos m\theta \\
 &\quad \{ \dot{U}_\theta, \dot{\epsilon}_{\xi\theta m}, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta m}, \dot{k}_{\xi\theta}, \dot{k}_{\theta\xi}, \dot{\Phi}_\theta, \dot{\Phi}_n \} \\
 &= \frac{\sigma_0}{E_0} \sum_{m=1}^{\infty} \{ a \dot{u}_\theta^{(m)}, \dot{\epsilon}_{\xi\theta m}^{(m)}, \dot{\epsilon}_{\theta\zeta m}^{(m)}, \frac{\dot{k}_{\xi\theta}^{(m)}}{a}, \frac{\dot{k}_{\theta\xi}^{(m)}}{a}, \dot{\varphi}_\theta^{(m)}, \dot{\varphi}_n^{(m)} \} \sin m\theta
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\left. \begin{aligned} & \{\dot{\sigma}_\xi, \dot{\sigma}_\xi^{vp}, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_\theta^{vp}, \dot{\sigma}_{\xi\xi}, \dot{\sigma}_{\xi\xi}^{vp}, \dot{\sigma}^t\} \\ & = \sigma_0 \sum_{m=0}^{\infty} \{\dot{s}_\xi^{(m)}, \dot{s}_\xi^{vp(m)}, \dot{s}_\theta^{(m)}, \dot{s}_\theta^{vp(m)}, \dot{s}_{\xi\xi}^{(m)}, \dot{s}_{\xi\xi}^{vp(m)}, \dot{s}^t(m)\} \cos m\theta \\ & \{\dot{\sigma}_{\xi\theta}, \dot{\sigma}_{\xi\theta}^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\xi}, \dot{\sigma}_{\theta\xi}^{vp}\} = \sigma_0 \sum_{m=1}^{\infty} \{\dot{s}_{\xi\theta}^{(m)}, \dot{s}_{\xi\theta}^{vp(m)}, \dot{s}_{\theta\xi}^{(m)}, \dot{s}_{\theta\xi}^{vp(m)}\} \sin m\theta \end{aligned} \right\}$$

また、殻の内外の周囲温度、発熱量および分布荷重もフーリエ級数に展開する。

$$\left. \begin{aligned} \{\Theta_{out}, \Theta_{in}, Q_k\} & = \frac{\sigma_0}{E_0 \alpha_0} \sum_{m=0}^{\infty} \{\theta_{out}^{(m)}, \theta_{in}^{(m)}, \frac{\lambda_0 h^k}{a} q_k^{(m)}\} \cos m\theta \quad (k=0, 1, 2) \\ \{\dot{P}_\xi, \dot{P}_\zeta\} & = \frac{\sigma_0 h}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \{\dot{p}_\xi^{(m)}, \dot{p}_\zeta^{(m)}\} \cos m\theta, \quad \dot{P}_\theta = \frac{\sigma_0 h}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{p}_\theta^{(m)} \sin m\theta \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

傾斜機能殻の場合には Q_i の定義が他の殻の場合と異なるため、次式を用いて展開する。

$$Q_i = \frac{\chi_0 \sigma_0}{a E_0 \alpha_0} \sum_{m=0}^{\infty} h^i q_i^{(m)} \cos m\theta \quad (i=0, 1, \dots, p) \quad (5.3)$$

ただし、 $\sigma_0, E_0, \alpha_0, \lambda_0, \chi_0$ はそれぞれ代表応力、代表縦弾性係数、代表線膨張係数、代表熱伝導率、代表温度伝導率である。なお、式(5.1), (5.2), (5.3)は、 $\theta=0$ の子午線面に対して面対称な荷重が作用する場合であるが、一般性を持たせるためには、各フーリエ展開式において \sin で表されているものには \cos の級数を、 \cos で表されているものには \sin の級数を付加する。

次に、基礎式にフーリエ級数に展開された各変数を代入する。均質殻の場合には、殻に用いられる材料が一つであるため、その材料定数を代表値に採用する。また、便宜上、フーリエ級数の添字 (m) が以下の方程式では省略されている。

5.2 熱伝導方程式

一般に、熱伝導方程式は次のように無次元化される。

$$A_1 Y'' + A_2 Y' + A_3 Y = A_4 + A_5 \frac{\partial Y}{\partial \tau} \quad (5.4)$$

ここで、 Y は方程式の解を表わし、 τ は無次元時間 $(\chi_0/a^2)t$ である。また A_1, A_2, A_3 および A_5 は殻の形状および殻の内外表面の相対熱伝達率から定まる定数行列であり、 A_4 は殻の形状、殻の内外の周囲温度、相対熱伝達率ならびに発熱量から定まる定数行列である。解 Y および定数行列 A_1, A_2, \dots, A_5 は、殻の種類により異なり、解 Y は次式で、定数行列 A_1, A_2, \dots, A_5 は付録B.1でそれぞれ与える。

$$Y = \begin{cases} \{t_0, t_1, t_2\}^T & \dots \text{均質殻} \\ \{t_{0,1}, t_{1,1}\}^T & \dots \text{多層薄肉殻} \\ \{t_{0,1}, t_{1,1}, t_{2,1}, t_{0,2}, \dots, t_{2,n}\}^T & \dots \text{多層厚肉殻} \\ \{t_0, t_1, \dots, t_p\}^T & \dots \text{傾斜機能殻} \end{cases} \quad (5.5)$$

5.3 熱変形方程式

5.3.1 薄肉殻

薄肉殻の平衡方程式(4.1)をフーリエ級数展開すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{n}'_\xi + \gamma(\dot{n}_\xi - \dot{n}_\theta) + \frac{m}{r} \dot{n}_{\xi\theta} + \frac{h^2}{a^2} \left\{ \omega_\xi \dot{m}'_\xi + \gamma \omega_\xi (\dot{m}_\xi - \dot{m}_\theta) \right. \\ \left. + \frac{m}{2r} (3\omega_\xi - \omega_\theta) \dot{m}_{\xi\theta} \right\} + \dot{p}_\xi & = 0 \\ \dot{n}'_{\xi\theta} + 2\gamma \dot{n}_{\xi\theta} - \frac{m}{r} \dot{n}_\theta + \frac{h^2}{a^2} \left\{ -\frac{m}{r} \omega_\theta \dot{m}_\theta + \frac{1}{2} (3\omega_\theta - \omega_\xi) \dot{m}'_{\xi\theta} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [\gamma (3\omega_\theta + \omega_\xi) - \omega'_\xi] \dot{m}_{\xi\theta} \right\} + \dot{p}_\theta & = 0 \\ -\omega_\xi \dot{n}_\xi - \omega_\theta \dot{n}_\theta + \frac{h^2}{a^2} \left\{ \dot{m}''_\xi + 2\gamma \dot{m}'_\xi - \omega_\xi \omega_\theta \dot{m}_\xi + \left(\omega_\xi \omega_\theta - \frac{m^2}{r^2} \right) \dot{m}_\theta \right. \\ \left. - \gamma \dot{m}'_\theta + \frac{2m}{r} \dot{m}'_{\xi\theta} + \frac{2\gamma m}{r} \dot{m}_{\xi\theta} \right\} + \dot{p}_\zeta & = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

中央面のひずみ:式(4.9), 曲率の変化量:式(4.10), 回転:式(4.11) にフーリエ級数の各係数:式(5.1)を導入すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_{\xi m} &= \dot{u}'_{\xi} + \omega_{\xi} \dot{w}, & \dot{e}_{\theta m} &= \frac{m}{r} \dot{u}_{\theta} + \gamma \dot{u}_{\xi} + \omega_{\theta} \dot{w} \\ \dot{e}_{\xi \theta m} &= \frac{1}{2} (\dot{u}'_{\theta} - \gamma \dot{u}_{\theta} - \frac{m}{r} \dot{u}_{\xi}) \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{k}_{\xi} &= \dot{\varphi}'_{\xi}, & \dot{k}_{\theta} &= \frac{m}{r} \dot{\varphi}_{\theta} + \gamma \dot{\varphi}_{\xi} \\ \dot{k}_{\xi \theta} &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{m}{r} \dot{\varphi}_{\xi} + \dot{\varphi}'_{\theta} - \gamma \dot{\varphi}_{\theta} + \frac{1}{2} (\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) \left(\frac{m}{r} \dot{u}_{\xi} + \dot{u}'_{\theta} + \gamma \dot{u}_{\theta} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

$$\dot{\varphi}_{\xi} = -\dot{w}' + \omega_{\xi} \dot{u}_{\xi}, \quad \dot{\varphi}_{\theta} = \frac{m}{r} \dot{w} + \omega_{\theta} \dot{u}_{\theta} \quad (5.9)$$

合応力、合モーメントは、式(4.30)より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{n}_{\xi} &= A_1 \dot{e}_{\xi m} + A_2 \dot{e}_{\theta m} + B_1 \dot{k}_{\xi} + B_2 \dot{k}_{\theta} - \dot{n}_{\xi}^{vp} - \dot{n}^t \\ \dot{n}_{\theta} &= A_1 \dot{e}_{\theta m} + A_2 \dot{e}_{\xi m} + B_1 \dot{k}_{\theta} + B_2 \dot{k}_{\xi} - \dot{n}_{\theta}^{vp} - \dot{n}^t \\ \dot{n}_{\xi \theta} &= A_3 \dot{e}_{\xi \theta m} + B_3 \dot{k}_{\xi \theta} - \dot{n}_{\xi \theta}^{vp} \\ \dot{m}_{\xi} &= \frac{a^2}{h^2} B_1 \dot{e}_{\xi m} + \frac{a^2}{h^2} B_2 \dot{e}_{\theta m} + C_1 \dot{k}_{\xi} + C_2 \dot{k}_{\theta} - \dot{m}_{\xi}^{vp} - \dot{m}^t \\ \dot{m}_{\theta} &= \frac{a^2}{h^2} B_1 \dot{e}_{\theta m} + \frac{a^2}{h^2} B_2 \dot{e}_{\xi m} + C_1 \dot{k}_{\theta} + C_2 \dot{k}_{\xi} - \dot{m}_{\theta}^{vp} - \dot{m}^t \\ \dot{m}_{\xi \theta} &= \frac{a^2}{h^2} B_3 \dot{e}_{\xi \theta m} + C_3 \dot{k}_{\xi \theta} - \dot{m}_{\xi \theta}^{vp} \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

ここで、上式に含まれる係数 $A_i, B_i, C_i (i=1, 2, 3)$ は、式(4.32), (4.33), (4.34) の定数行列 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ から次式で得られる。

$$\left[\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & 0 \\ A_2 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{array} \right] = \frac{\bar{A}}{hE_0}, \quad \left[\begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & 0 \\ B_2 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{array} \right] = \frac{\bar{B}}{ahE_0} \quad (5.11)$$

$$\left[\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & 0 \\ C_2 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{array} \right] = \frac{\bar{C}}{h^3 E_0}$$

式(5.7)~(5.10)を式(5.6)に代入すると、 $\dot{u}_{\xi}, \dot{u}_{\theta}, \dot{w}$ の3変数に関する3元連立微分方程式を導出することができる。しかし、 \dot{w} の4階の導関数が現われ、差分法による計算では、精度上好ましくない。そこで \dot{w} の4階微分の増分形を避けるために \dot{m}_{ξ} を残す必要がある。まず、式(5.10)の第4, 5式から \dot{k}_{ξ} を消去すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \dot{m}_{\theta} &= \frac{C_2}{C_1} \dot{m}_{\xi} + \frac{a^2}{h^2} \left(B_2 - \frac{B_1 C_2}{C_1} \right) \dot{e}_{\xi m} + \frac{a^2}{h^2} \left(B_1 - \frac{B_2 C_2}{C_1} \right) \dot{e}_{\theta m} \\ &+ \left(C_1 - \frac{C_2^2}{C_1} \right) \dot{k}_{\theta} - \dot{m}_{\theta}^{vp} + \frac{C_2}{C_1} \dot{m}_{\xi}^{vp} - \left(1 - \frac{C_2}{C_1} \right) \dot{m}^t \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

式(5.6)に式(5.10), (5.12)を代入し、式(5.7), (5.8), (5.9)を用いると3つの方程式が得られる。残り1つは、式(5.10)の \dot{m}_{ξ} を $\dot{u}_{\xi}, \dot{u}_{\theta}, \dot{w}$ で表すことより得られる[27]。したがって、

$$B_1 \dot{Z}'' + B_2 \dot{Z}' + B_3 \dot{Z} = B_4 \{\dot{n}\}' + B_5 \{\dot{n}\} + B_6 \{\dot{m}\}' + B_7 \{\dot{m}\} + B_8 \{\dot{p}\} \quad (5.13)$$

ここで、 $\dot{Z}, \{\dot{n}\}, \{\dot{m}\}, \{\dot{p}\}$ は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{Z} &= \{\dot{u}_{\xi}, \dot{u}_{\theta}, \dot{w}, \dot{m}_{\xi}\}^T & \{\dot{n}\} &= \{\dot{n}_{\xi}^{vp}, \dot{n}_{\theta}^{vp}, \dot{n}_{\xi \theta}^{vp}, \dot{n}^t\}^T \\ \{\dot{m}\} &= \{\dot{m}_{\xi}^{vp}, \dot{m}_{\theta}^{vp}, \dot{m}_{\xi \theta}^{vp}, \dot{m}^t\}^T & \{\dot{p}\} &= \{\dot{p}_{\xi}, \dot{p}_{\theta}, \dot{p}_{\xi}\}^T \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

であり、 B_1, \dots, B_7 は 4×4 の行列、 B_8 は 4×3 の行列であり、殻の形状と材質によって定まる(付録B.2.1)。

粘塑性および温度変化に関する内力成分は式(4.31), 式(5.1)からそれぞれ次のようになる。

$$\sigma_0 h \sum_{m=0}^{\infty} \dot{n}_{\xi}^{vp(m)} \cos m\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{\epsilon}_{\xi}^{vp} + \nu \dot{\epsilon}_{\theta}^{vp}) d\zeta$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_0 h \sum_{m=0}^{\infty} \dot{n}_{\theta}^{vp(m)} \cos m\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{\varepsilon}_{\theta}^{vp} + \nu \dot{\varepsilon}_{\xi}^{vp}) d\zeta \\
 \sigma_0 h \sum_{m=1}^{\infty} \dot{n}_{\xi\theta}^{vp(m)} \sin m\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \dot{\varepsilon}_{\xi\theta}^{vp} d\zeta \\
 \sigma_0 h \sum_{m=0}^{\infty} \dot{n}^{t(m)} \cos m\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha E}{1-\nu} \dot{T}_e d\zeta \\
 \frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \dot{m}_{\xi}^{vp(m)} \cos m\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{\varepsilon}_{\xi}^{vp} + \nu \dot{\varepsilon}_{\theta}^{vp}) \zeta d\zeta \\
 \frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \dot{m}_{\theta}^{vp(m)} \cos m\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{\varepsilon}_{\theta}^{vp} + \nu \dot{\varepsilon}_{\xi}^{vp}) \zeta d\zeta \\
 \frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{m}_{\xi\theta}^{vp(m)} \sin m\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \dot{\varepsilon}_{\xi\theta}^{vp} \zeta d\zeta \\
 \frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \dot{m}^{t(m)} \cos m\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha E}{1-\nu} \dot{T}_e \zeta d\zeta
 \end{aligned} \right\} (5.15)$$

多層殻の場合には

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_0 h \sum_{m=0}^{\infty} \dot{n}_{\xi}^{vp(m)} \cos m\theta &= \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\dot{\varepsilon}_{\xi}^{vp} + \nu_i \dot{\varepsilon}_{\theta}^{vp}) d\zeta \\
 \sigma_0 h \sum_{m=0}^{\infty} \dot{n}_{\theta}^{vp(m)} \cos m\theta &= \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\dot{\varepsilon}_{\theta}^{vp} + \nu_i \dot{\varepsilon}_{\xi}^{vp}) d\zeta \\
 \sigma_0 h \sum_{m=1}^{\infty} \dot{n}_{\xi\theta}^{vp(m)} \sin m\theta &= \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \frac{E_i}{1+\nu_i} \dot{\varepsilon}_{\xi\theta}^{vp} d\zeta \\
 \sigma_0 h \sum_{m=0}^{\infty} \dot{n}^{t(m)} \cos m\theta &= \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \frac{\alpha_i E_i}{1-\nu_i} \dot{T}_e d\zeta \\
 \frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \dot{m}_{\xi}^{vp(m)} \cos m\theta &= \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\dot{\varepsilon}_{\xi}^{vp} + \nu_i \dot{\varepsilon}_{\theta}^{vp}) \zeta d\zeta \\
 \frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \dot{m}_{\theta}^{vp(m)} \cos m\theta &= \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\dot{\varepsilon}_{\theta}^{vp} + \nu_i \dot{\varepsilon}_{\xi}^{vp}) \zeta d\zeta
 \end{aligned} \right\} (5.16)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{m}_{\xi\theta}^{vp(m)} \sin m\theta &= \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \frac{E_i}{1+\nu_i} \dot{\varepsilon}_{\xi\theta}^{vp} \zeta d\zeta \\
 \frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \dot{m}^{t(m)} \cos m\theta &= \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \frac{\alpha_i E_i}{1-\nu_i} \dot{T}_e \zeta d\zeta
 \end{aligned} \right\}$$

また、式(4.24)および式(5.1)を用いれば粘塑性および温度変化に関する応力の変化率は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_0 \sum_{m=0}^{\infty} \dot{s}_{\xi}^{vp(m)} \cos m\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{\varepsilon}_{\xi}^{vp} + \nu \dot{\varepsilon}_{\theta}^{vp}) \\
 \sigma_0 \sum_{m=0}^{\infty} \dot{s}_{\theta}^{vp(m)} \cos m\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{\varepsilon}_{\theta}^{vp} + \nu \dot{\varepsilon}_{\xi}^{vp}) \\
 \sigma_0 \sum_{m=1}^{\infty} \dot{s}_{\xi\theta}^{vp(m)} \cos m\theta &= \frac{E}{1+\nu} \dot{\varepsilon}_{\xi\theta}^{vp} \\
 \sigma_0 \sum_{m=0}^{\infty} \dot{s}^{t(n)} \cos m\theta &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \dot{T}_e
 \end{aligned} \right\} (5.17)$$

境界で式(5.13)の解 Z の値が直接与えられる場合には問題ないが、式(4.3)に含まれる \dot{N}_{ξ} , $\dot{N}_{\xi\theta}$, \dot{Q}_{ξ} , $\dot{\phi}_{\xi}$ で与えられるときには、これを Z で表されなければならない。まず、 $\dot{N}_{\xi\theta}$: 式(4.4), \dot{Q}_{ξ} : (4.5) に対応したフーリエ級数展開式(5.1)を代入すれば、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{n}_{\xi\theta} &= \dot{n}_{\xi\theta} + \frac{h^2}{2a^2} (3\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) \dot{m}_{\xi\theta} \\
 \dot{q}_{\xi} &= \frac{h^2}{a^2} \left\{ \dot{m}'_{\xi} + \gamma(\dot{m}_{\xi} - \dot{m}_{\theta}) + \frac{2m}{r} \dot{m}_{\xi\theta} \right\}
 \end{aligned} \right\} (5.18)$$

つぎに、 $\dot{n}_{\xi\theta}$, \dot{q}_{ξ} を式(5.13)の解 Z で表し、 \dot{n}_{ξ} , $\dot{\phi}_{\xi}$ の式を追加すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{n}_{\xi} \\ \dot{n}_{\xi\theta} \\ \dot{q}_{\xi} \\ \dot{\phi}_{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & b_8 & b_{10} & 0 \\ b_{12} & b_{14} & b_{16} & b_{18} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} Z' + \begin{bmatrix} b_2 & b_3 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_9 & b_{11} & 0 \\ b_{13} & b_{15} & b_{17} & b_{19} \\ \omega_{\xi} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

上式の各係数 $b_1 \sim b_{19}$ は殻の形状と材料定数の値から定まる係数であり、 d_1, d_2, d_3 は殻の形状のほか、分布荷重、粘塑性および温度変化による見かけの内力成分から定まる定数である (付録B.2.2)。

5.3.2 厚肉殻

平衡方程式(4.6)にフーリエ級数展開式(5.1)を代入すると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{n}'_\xi + \gamma(\dot{n}_\xi - \dot{n}_\theta) + \frac{m}{r}\dot{n}_{\theta\xi} + \omega_\xi \dot{q}_\xi + \dot{p}_\xi &= 0 \\ \dot{n}'_{\xi\theta} + \gamma(\dot{n}_{\xi\theta} + \dot{n}_{\theta\xi}) - \frac{m}{r}\dot{n}_\theta + \omega_\theta \dot{q}_\theta + \dot{p}_\theta &= 0 \\ \dot{q}'_\xi + \gamma \dot{q}_\xi + \frac{m}{r}\dot{q}_\theta - \omega_\xi \dot{n}_\xi - \omega_\theta \dot{n}_\theta + \dot{p}_\xi &= 0 \\ \dot{q}_\xi - \frac{h^2}{a^2} \left\{ \dot{m}'_\xi + \gamma(\dot{m}_\xi - \dot{m}_\theta) + \frac{m}{r}\dot{m}_{\theta\xi} \right\} &= 0 \\ \dot{q}_\theta - \frac{h^2}{a^2} \left\{ \dot{m}'_{\xi\theta} + \gamma(\dot{m}_{\xi\theta} + \dot{m}_{\theta\xi}) - \frac{m}{r}\dot{m}_\theta \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

また、中央面のひずみ:式(4.9), 曲率の変化量:式(4.14), 回転:式(4.15)にフーリエ級数展開式(5.1)を代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\xi m} = \dot{u}'_\xi + \omega_\xi \dot{w}, \quad \dot{\epsilon}_{\theta m} = \frac{m}{r}\dot{u}_\theta + \gamma \dot{u}_\xi + \omega_\theta \dot{w} \\ \dot{\epsilon}_{\xi\theta m} = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{m}{r}\dot{u}_\xi + \dot{u}'_\theta - \gamma \dot{u}_\theta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{k}_\xi = \dot{\varphi}'_\xi, \quad \dot{k}_\theta = \frac{m}{r}\dot{\varphi}_\theta + \gamma \dot{\varphi}_\xi, \quad \dot{k}_{\xi\theta} = \frac{1}{2} \left[\dot{\varphi}'_\theta - \omega_\xi \left\{ \frac{m}{r}\dot{u}_\xi + \dot{u}'_\theta + \gamma \dot{u}_\theta \right\} \right] \\ \dot{k}_{\theta\xi} = \frac{1}{2} \left[-\frac{m}{r}\dot{\varphi}_\xi - \gamma \dot{\varphi}_\theta + \omega_\theta \left\{ \frac{m}{r}\dot{u}_\xi + \dot{u}'_\theta + \gamma \dot{u}_\theta \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_\xi = -\dot{w}' + \omega_\xi \dot{u}_\xi + 2\dot{\epsilon}_{\xi\theta m}, \quad \dot{\varphi}_\theta = \frac{m}{r}\dot{w} + \omega_\theta \dot{u}_\theta + 2\dot{\epsilon}_{\theta\xi m} \\ \dot{\varphi}_n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m}{r}\dot{u}_\xi + \dot{u}'_\theta + \gamma \dot{u}_\theta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

次に、合応力、合モーメントは式(4.37)にフーリエ級数展開式(5.1)を代入して、式(5.21), (5.22), (5.23)を用いると、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{n}_\xi &= A_{11}\dot{u}'_\xi + \gamma D_{12}\dot{u}_\xi + \frac{m}{r}D_{12}\dot{u}_\theta + B_{11}\dot{\varphi}'_\xi + \gamma E_{12}\dot{\varphi}_\xi + \frac{m}{r}E_{12}\dot{\varphi}_\theta \\ &\quad + (\omega_\xi A_{11} + \omega_\theta D_{12})\dot{w} - \dot{n}_\xi^{vp} - \dot{n}_\xi^t \\ \dot{n}_\theta &= D_{12}\dot{u}'_\xi + \gamma A_{22}\dot{u}_\xi + \frac{m}{r}A_{22}\dot{u}_\theta + (\omega_\theta A_{22} + \omega_\xi D_{12})\dot{w} + E_{12}\dot{\varphi}'_\xi \\ &\quad + \gamma B_{22}\dot{\varphi}_\xi + \frac{m}{r}B_{22}\dot{\varphi}_\theta - \dot{n}_\theta^{vp} - \dot{n}_\theta^t \\ \dot{n}_{\xi\theta} &= -\frac{m}{2r}D_{33}\dot{u}_\xi + \frac{A_{33}}{2}\dot{u}'_\theta - \frac{\gamma}{2}D_{33}\dot{u}_\theta - \frac{m}{2r}E_{33}\dot{\varphi}_\xi + \frac{B_{33}}{2}\dot{\varphi}'_\theta \\ &\quad - \gamma E_{33}\dot{\varphi}_\theta - \dot{n}_{\xi\theta}^{vp} \\ \dot{n}_{\theta\xi} &= -\frac{m}{2r}\bar{A}_{33}\dot{u}_\xi + \frac{D_{33}}{2}\dot{u}'_\theta - \frac{\gamma}{2}\bar{A}_{33}\dot{u}_\theta - \frac{m}{2r}\bar{B}_{33}\dot{\varphi}_\xi + \frac{E_{33}}{2}\dot{\varphi}'_\theta \\ &\quad - \gamma \bar{B}_{33}\dot{\varphi}_\theta - \dot{n}_{\theta\xi}^{vp} \\ \dot{q}_\xi &= \frac{A_{44}}{2}(-\omega_\xi \dot{u}_\xi + \dot{w}' + \dot{\varphi}_\xi) - \dot{q}_\xi^{vp} \\ \dot{q}_\theta &= \frac{A_{55}}{2} \left(-\omega_\theta \dot{u}_\theta - \frac{m}{r}\dot{w} + \dot{\varphi}_\theta \right) - \dot{q}_\theta^{vp} \\ \dot{m}_\xi &= \frac{a^2}{h^2} B_{11}\dot{u}'_\xi + \frac{a^2}{h^2} \gamma E_{13}\dot{u}_\xi + \frac{a^2 m}{h^2 r} E_{12}\dot{u}_\theta + \frac{a^2}{h^2} (\omega_\xi B_{11} + \omega_\theta E_{12})\dot{w} \\ &\quad + C_{11}\dot{\varphi}'_\xi + \gamma F_{12}\dot{\varphi}_\xi + \frac{m}{r}F_{12}\dot{\varphi}_\theta - \dot{m}_\xi^{vp} - \dot{m}_\xi^t \\ \dot{m}_\theta &= \frac{a^2}{h^2} E_{12}\dot{u}'_\xi + \frac{a^2}{h^2} \gamma B_{22}\dot{u}_\xi + \frac{a^2 m}{h^2 r} B_{22}\dot{u}_\theta + F_{12}\dot{\varphi}'_\xi + \gamma C_{22}\dot{\varphi}_\xi \\ &\quad + \frac{m}{r}C_{22}\dot{\varphi}_\theta + \frac{a^2}{h^2} (\omega_\theta B_{22} + \omega_\xi E_{12})\dot{w} - \dot{m}_\theta^{vp} - \dot{m}_\theta^t \\ \dot{m}_{\xi\theta} &= -\frac{a^2 m}{2h^2 r} E_{33}\dot{u}_\xi + \frac{a^2}{2h^2} B_{33}\dot{u}'_\theta - \frac{a^2}{2h^2} \gamma E_{33}\dot{u}_\theta - \frac{m}{2r} F_{33}\dot{\varphi}_\xi \\ &\quad + \frac{C_{33}}{2}\dot{\varphi}'_\theta - \frac{\gamma}{2} F_{33}\dot{\varphi}_\theta - \dot{m}_{\xi\theta}^{vp} \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{m}_{0\xi} &= -\frac{a^2 m}{2h^2 r} \bar{B}_{33} \dot{u}_\xi + \frac{a^2}{2h^2} E_{33} \dot{u}'_0 - \frac{a^2}{2h^2} \gamma \bar{B}_{33} \dot{u}_0 - \frac{m}{2r} \bar{C}_{33} \dot{\varphi}_\xi \\ &+ \frac{F_{33}}{2} \dot{\varphi}'_0 - \frac{\gamma}{2} \bar{C}_{33} \dot{\varphi}_0 - \dot{m}_{0\xi}^{vp} \end{aligned} \right\}$$

ここに、 A_i, B_i, C_i ($i = 11, 22, 33$), $A_{44}, A_{55}, \bar{A}_{33}, \bar{B}_{33}, \bar{C}_{33}, D_i, E_i, F_i$ ($i = 12, 33$) は、殻の材質および形状により定まる定数であり、式(4.40), (4.42), (4.44)の定数を用いて次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{\bar{A}_1}{hE_0} & A_{22} &= \frac{\bar{C}_1}{hE_0} & A_{33} &= \frac{\bar{F}_1}{hE_0} \\ \bar{A}_{33} &= \frac{\bar{G}_1}{hE_0} & A_{44} &= \frac{k_1 \bar{F}_1}{hE_0} & A_{55} &= \frac{k_2 \bar{G}_1}{hE_0} \\ B_{11} &= \frac{\bar{A}_2}{ahE_0} & B_{22} &= \frac{\bar{C}_2}{ahE_0} & B_{33} &= \frac{\bar{F}_2}{ahE_0} \\ \bar{B}_{33} &= \frac{\bar{G}_2}{ahE_0} & C_{11} &= \frac{\bar{A}_3}{h^3 E_0} & C_{22} &= \frac{\bar{C}_3}{h^3 E_0} \\ C_{33} &= \frac{\bar{F}_3}{h^3 E_0} & \bar{C}_{33} &= \frac{\bar{G}_3}{h^3 E_0} & D_{12} &= \frac{\bar{B}_1}{hE_0} \\ D_{33} &= \frac{\bar{H}_1}{hE_0} & E_{12} &= \frac{\bar{B}_2}{ahE_0} & E_{33} &= \frac{\bar{H}_2}{ahE_0} \\ F_{12} &= \frac{\bar{B}_3}{h^3 E_0} & F_{33} &= \frac{\bar{H}_3}{h^3 E_0} \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

合応力、合モーメントの式(5.24)を平衡方程式(5.20)に代入すると、変位 $\dot{u}_\xi, \dot{u}_0, \dot{w}$, 回転 $\dot{\varphi}_\xi, \dot{\varphi}_0$ に関する5元連立2階微分方程式が得られ、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} B_1 \dot{Z}'' + B_2 \dot{Z}' + B_3 \dot{Z} &= B_4 \{\dot{n}\}' + B_5 \{\dot{n}\} + B_6 \{\dot{q}\}' + B_7 \{\dot{q}\} + B_8 \{\dot{m}\}' \\ &+ B_9 \{\dot{m}\} + B_{10} \{\dot{p}\} \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

ここで、 $Z, \{\dot{n}\}, \{\dot{q}\}, \{\dot{m}\}, \{\dot{p}\}$ は、

$$\left. \begin{aligned} Z &= \{\dot{u}_\xi, \dot{u}_0, \dot{w}, \dot{\varphi}_\xi, \dot{\varphi}_0\}^T & \{\dot{n}\} &= \{\dot{n}_\xi^{vp}, \dot{n}_\theta^{vp}, \dot{n}_{\xi\theta}^{vp}, \dot{n}_{\theta\xi}^{vp}, \dot{n}_\xi^t, \dot{n}_\theta^t\}^T \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{q}\} &= \{\dot{q}_\xi^{vp}, \dot{q}_\theta^{vp}\}^T & \{\dot{m}\} &= \{\dot{m}_\xi^{vp}, \dot{m}_\theta^{vp}, \dot{m}_{\xi\theta}^{vp}, \dot{m}_{\theta\xi}^{vp}, \dot{m}_\xi^t, \dot{m}_\theta^t\}^T \\ \{\dot{p}\} &= \{\dot{p}_\xi, \dot{p}_0, \dot{p}_\zeta\}^T \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

であり、 B_1, B_2, B_3 は 5×5 の行列、 B_4, B_5, B_8, B_9 は 5×6 の行列、 B_6, B_7 は 5×2 の行列、 B_{10} は 5×3 の行列であり、殻の形状と材質によって定まる(付録B.2.3)。

合応力、合モーメントの式(5.24)に含まれる粘塑性と温度変化に関する内力成分の変化率の各フーリエ係数は、式(4.28), (4.38), (5.1)からそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} &\sigma_0 h \sum_{m=0}^{\infty} [A_m] \{\dot{n}_\xi^{vp(m)}, \dot{n}_\theta^{vp(m)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{vp(m)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{vp(m)}, \dot{q}_\xi^{vp(m)}, \dot{q}_\theta^{vp(m)}\}^T \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} [L_1] [D] \{\dot{\epsilon}^{vp}\} d\zeta \\ &\frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{m=0}^{\infty} [B_m] \{\dot{m}_\xi^{vp(m)}, \dot{m}_\theta^{vp(m)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{vp(m)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{vp(m)}\}^T \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} [L_2] [\bar{D}] \{\dot{\epsilon}^{vp}\}^* \zeta d\zeta \\ &\sigma_0 h \sum_{m=0}^{\infty} \{\dot{n}_\xi^{t(m)}, \dot{n}_\theta^{t(m)}, \frac{h^2}{a} \dot{m}_\xi^{t(m)}, \frac{h^2}{a} \dot{m}_\theta^{t(m)}\}^T \cos m\theta \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha E}{1-\nu} \{L_\theta, L_\xi, L_\theta \zeta, L_\xi \zeta\}^T \dot{T} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

多層殻の場合には、式(4.43)を用いて次式で与える。

$$\left. \begin{aligned} &\sigma_0 h \sum_{m=0}^{\infty} [A_m] \{\dot{n}_\xi^{vp(m)}, \dot{n}_\theta^{vp(m)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{vp(m)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{vp(m)}, \dot{q}_\xi^{vp(m)}, \dot{q}_\theta^{vp(m)}\}^T \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_1] [D_i] \{\dot{\epsilon}^{vp}\} d\zeta \\ &\frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{m=0}^{\infty} [B_m] \{\dot{m}_\xi^{vp(m)}, \dot{m}_\theta^{vp(m)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{vp(m)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{vp(m)}\}^T \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} [L_2] [\bar{D}_i] \{\dot{\epsilon}^{vp}\}^* \zeta d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sigma_0 h \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \dot{n}_{\xi}^{t(m)}, \dot{n}_{\theta}^{t(m)}, \frac{h^2}{a} \dot{n}_{\xi}^{t(m)}, \frac{h^2}{a} \dot{n}_{\theta}^{t(m)} \right\}^T \cos m\theta \\ & = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i E_i}{1 - \nu_i} \int_{-\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \{L_{\theta}, L_{\xi}, L_{\theta\zeta}, L_{\xi\zeta}\}^T \dot{T}_e d\zeta \end{aligned} \right\}$$

ここに、 $[A_m], [B_m]$ は対角行列で次式で与える。

$$\left. \begin{aligned} [A_m] &= [\cos m\theta, \cos m\theta, \sin m\theta, \sin m\theta, \cos m\theta, \sin m\theta] \\ [B_m] &= [\cos m\theta, \cos m\theta, \sin m\theta, \sin m\theta] \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

また、粘塑性と温度変化に関する応力成分の変化率の各フーリエ係数は、式(4.28)、(5.1)からそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \sigma_0 \sum_{m=0}^{\infty} [c_m] \{ \dot{s}_{\xi}^{vp(m)}, \dot{s}_{\theta}^{vp(m)}, \dot{s}_{\xi\theta}^{vp(m)}, \dot{s}_{\xi\zeta}^{vp(m)}, \dot{s}_{\theta\zeta}^{vp(m)} \} = [D] \{ \dot{\epsilon}^{vp} \} \\ & \sigma_0 \sum_{m=1}^{\infty} \dot{s}^{t(m)} \cos m\theta = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \dot{T}_e \\ & [c_m] = [\cos m\theta, \cos m\theta, \sin m\theta, \cos m\theta, \sin m\theta] \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

式(5.28)、(5.29)および(5.31)の右辺の粘塑性ひずみ速度は、応力値から式(4.26)によって計算できる。

第6章 数値解析法

実際には、基礎微分方程式の解を厳密に求めることは困難である。そこで、基礎微分方程式を解くために差分法を適用する。空間に関して、連続部では中間差分式を用い、境界点では前進および後退三点差分式を用いる。また、時間に関しては、Crank-Nicolson法を用いる。

6.1 差分法

まず、空間に関する離散化を示す。子午線方向の座標 s の領域 $(0, \bar{s})$ (図2.1) を $N-1$ 個に等分割し、これらの分割点(差分点)に $s=0$ を $j=1$ として順番に通し番号をつける。この場合、 s の無次元量 ξ の増分 Δ は次のようになる。

$$\Delta = \frac{s}{a(N-1)} \quad (6.1)$$

差分点 j および時間ステップ k における熱伝導方程式(5.4)の解 Y を $Y_{j,k}$ で表すと、境界点($j=1, N$)を除く差分点においては、 ξ に関する $Y_{j,k}$ の導関数として次の差分式を用いる。

$$Y'_{j,k} = \frac{Y_{j+1,k} - Y_{j-1,k}}{2\Delta}, \quad Y''_{j,k} = \frac{Y_{j+1,k} - 2Y_{j,k} + Y_{j-1,k}}{\Delta^2} \quad (6.2)$$

境界点($j=1, N$)においても、その誤差が式(6.2)と同程度になるようにするため、前部境界点($j=1$)では前進差分式を用い、後部境界点では後退差分式を用いる。

$$Y'_{1,k} = \frac{-3Y_{1,k} + 4Y_{2,k} - Y_{3,k}}{2\Delta}, \quad Y'_{N,k} = \frac{3Y_{N,k} - 4Y_{N-1,k} + Y_{N-2,k}}{2\Delta} \quad (6.3)$$

また、時間微分項に対してCrank-Nicolson法を用いると、次の差分式が与えられる。

$$Y_{j,k-1/2} = \frac{Y_{j,k} + Y_{j,k-1}}{2}, \quad \frac{\partial Y_{j,k-1/2}}{\partial \tau} = \frac{Y_{j,k} - Y_{j,k-1}}{\Delta\tau} \quad (6.4)$$

第7章 数値解析例

本章では、両端が断熱され単純可動支持された円筒殻を解析対象とし、その円筒殻に流体加熱が時間に対しステップ状に作用する問題を取り扱う。

7.1 円筒殻の諸量

代表長さ a には円筒殻の半径 R をとると、幾何学的関係式(2.2), (2.3), (6.1) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} r = 1, \quad r' = 0, \quad \gamma = 0, \quad \omega_\xi = 0 \\ \omega'_\xi = 0, \quad \omega_\theta = 1, \quad \Delta = \frac{L}{R(N-1)} \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

ここで、 L は円筒殻の長さである。

7.2 境界条件

殻の両端では断熱とするため、差分式(6.3)を用いると式(6.8)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} -3Y_{1,k} + 4Y_{2,k} - Y_{3,k} = 0 \\ Y_{N-2,k} - 4Y_{N-1,k} + 3Y_{N,k} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

薄肉殻の場合、殻が前部境界($j = 1$)で可動回転支持され、鏡板が取り付けられているとすると、境界条件は式のようなになる。

$$\dot{U}_\theta = \dot{W} = \dot{M}_\xi = 0, \quad \dot{N}_\xi = \frac{1}{2} \dot{P}_\xi R \quad (7.3)$$

式(5.1)より $\dot{U}_\theta, \dot{W}, \dot{M}_\xi$ をフーリエ級数展開し、 \dot{N}_ξ に式(5.19)を用いると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_\theta = \dot{w} = \dot{m}_\xi = 0 \\ \dot{n}_\xi = b_1 \dot{u}'_\xi + b_2 \dot{u}_\xi + b_3 \dot{u}_\theta + b_4 \dot{w}' + b_5 \dot{w} + b_6 \dot{m}_\xi + d_1 = \frac{R}{2a} \dot{p}_\zeta \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

また後部境界 ($j = N$) には、次の対称条件を用いる。

$$\dot{U}_\xi = \dot{N}_{\xi\theta} = \dot{Q}_\xi = \dot{\Phi}_\xi = 0 \quad (7.5)$$

同様に、式(5.1)より $\dot{U}_{\xi,N}$ をフーリエ級数展開し、 $\dot{N}_{\xi\theta,N}, \dot{Q}_{\xi,N}, \dot{\Phi}_{\xi,N}$ に式(5.19)を用いると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_\xi = 0 \\ \dot{n}_{\xi,\theta} = b_7 \dot{u}_\xi + b_8 \dot{u}'_\theta + b_9 \dot{u}_\theta + b_{10} \dot{w}' + b_{11} \dot{w} + d_2 = 0 \\ \dot{q}_\xi = b_{12} \dot{u}'_\xi + b_{13} \dot{u}_\xi + b_{14} \dot{u}'_\theta + b_{15} \dot{u}_\theta + b_{16} \dot{w}' \\ \quad + b_{17} \dot{w} + b_{18} \dot{m}'_\xi + b_{19} \dot{m}_\xi + d_3 = 0 \\ \dot{\varphi}_\xi = -\dot{w}' + \omega_\xi \dot{u}_\xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

前部境界条件式(7.4)、後部境界条件式(7.6)を差分式に置き換えると、式(6.12)の係数マトリックス $A_1 \sim D_N$ は次のようになる。

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2\Delta} b_1 + b_2 & b_3 & -\frac{3}{2\Delta} b_4 + b_5 & b_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta} b_1 & 0 & \frac{2}{\Delta} b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\Delta} b_1 & 0 & -\frac{1}{2\Delta} b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ D_1 &= \left[-d_1 + \frac{R}{2a} \dot{p}_\zeta \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \\ A_N &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\Delta} b_8 & \frac{1}{2\Delta} b_{10} & 0 \\ \frac{1}{2\Delta} b_{12} & \frac{1}{2\Delta} b_{14} & \frac{1}{2\Delta} b_{16} & \frac{1}{2\Delta} b_{18} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\Delta} & 0 \end{bmatrix} \\ B_N &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\Delta} b_8 & -\frac{2}{\Delta} b_{10} & 0 \\ -\frac{2}{\Delta} b_{12} & -\frac{2}{\Delta} b_{14} & -\frac{2}{\Delta} b_{16} & -\frac{2}{\Delta} b_{18} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\Delta} & 0 \end{bmatrix} \\ C_N &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_7 & b_9 + \frac{3}{2\Delta} b_8 & b_{11} + \frac{3}{2\Delta} b_{10} & 0 \\ b_{13} + \frac{3}{2\Delta} b_{12} & b_{15} + \frac{3}{2\Delta} b_{14} & b_{17} + \frac{3}{2\Delta} b_{16} & b_{19} + \frac{3}{2\Delta} b_{18} \\ \omega_\xi & 0 & -\frac{3}{2\Delta} & 0 \end{bmatrix} \\ D_N &= \left[0 \quad -d_2 \quad -d_3 \quad 0 \right]^T \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

続いて、厚肉殻の場合には、円筒殻が前部境界 ($j = 1$) で可動回転支持されているとすると、境界条件は次のようになる。

$$\dot{U}_\theta = \dot{W} = \dot{\Phi}_\theta = \dot{M}_\xi = 0, \quad \dot{N}_\xi = \frac{R}{2} \dot{p}_\xi \quad (7.8)$$

一方、後部境界 ($j = N$) には、次の対称条件を用いる。

$$\dot{U}_\xi = \dot{\Phi}_\xi = \dot{Q}_\xi = \dot{N}_{\xi\theta} = \dot{M}_{\xi\theta} = 0 \quad (7.9)$$

以上、前部境界条件式(7.8)、後部境界条件式(7.9)を差分式に置き換えると、式(6.12)の係数マトリックスは次のようになる。

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} b_2 - \frac{3}{2\Delta}b_1 & b_3 & b_4 & b_6 - \frac{3}{2\Delta}b_5 & b_7 \\ b_9 - \frac{3}{2\Delta}b_8 & b_{10} & b_{11} & b_{13} - \frac{3}{2\Delta}b_{12} & b_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta}b_1 & 0 & 0 & \frac{2}{\Delta}b_5 & 0 \\ \frac{2}{\Delta}b_8 & 0 & 0 & \frac{2}{\Delta}b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\Delta}b_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\Delta}b_5 & 0 \\ -\frac{1}{2\Delta}b_8 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\Delta}b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D}_1 = \left[d_1 + \frac{R}{2a}p_\xi \quad d_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

$$\bar{A}_N = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2\Delta}b_{16} & 0 & 0 & \frac{1}{2\Delta}b_{19} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\Delta}b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\Delta}b_{25} & 0 & 0 & \frac{1}{2\Delta}b_{28} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

$$\bar{B}_N = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{\Delta}b_{16} & 0 & 0 & -\frac{2}{\Delta}b_{19} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\Delta}b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\Delta}b_{25} & 0 & 0 & -\frac{2}{\Delta}b_{28} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_N = \begin{bmatrix} b_{15} & b_{17} + \frac{3}{2\Delta}b_{16} & 0 & b_{18} & b_{20} + \frac{3}{2\Delta}b_{19} \\ b_{21} & 0 & \frac{3}{2\Delta}b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{24} & b_{26} + \frac{3}{2\Delta}b_{25} & 0 & b_{27} & b_{29} + \frac{3}{2\Delta}b_{28} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D}_N = \left[d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

ここで、 $b_1 \sim b_{29}$ は殻の形状と弾性定数 E, ν とから定まる係数である。また、 $d_1 \sim d_5$ は、粘塑性によるみかけの内力成分および温度変化による内力成分から定まる定数である(付録B.2.4)。

7.3 材料定数および熱伝達率

計算で用いたアルミ、軟鋼、チタン、SUS304 および ZrO₂ の材料定数を表7.1に示す。また、Perzynaの式に用いられるアルミ、軟鋼およびチタンのΨ、粘性定数ν、降伏応力σ*を以下に示す。

1) アルミ 1100[15, 101]

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \left(\frac{\bar{\sigma} - \sigma^*}{\sigma^*} \right)^{10}, & \nu &= \exp\left(-\frac{T - 575.5}{15.4}\right) \text{ s}^{-1} \\ \sigma^* &= -0.011 \left(\frac{T}{100} \right)^4 + 0.22 \left(\frac{T}{100} \right)^3 + 0.6 \left(\frac{T}{100} \right)^2 \\ &\quad - 25.6 \left(\frac{T}{100} \right) + 154 \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

2) 軟鋼[15]

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \left(\frac{\bar{\sigma} - \sigma^*}{\sigma^*} \right)^5, & \nu &= 30.12 \left\{ 1 + 2.6 \left(\frac{220 - T}{273} \right)^2 \right\} \text{ s}^{-1} \\ \sigma^* &= 207 \exp\left\{ 0.45 \left(\frac{288}{T} - 1 \right) \right\} \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

3) チタン

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \left(\frac{\bar{\sigma} - \sigma^*}{\sigma^*} \right)^{7.4}, & \nu &= 800 \left\{ 1 + 5 \left(\frac{273 - T}{273} \right)^2 \right\} \text{ s}^{-1} \\ \sigma^* &= 160 \exp\left\{ 0.6 \left(\frac{273}{T} - 1 \right) \right\} \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

ここで、Tは、絶対温度(K)である。これらの材料定数を用いて計算した各温度での応力-ひずみ線図を図7.1に示す。

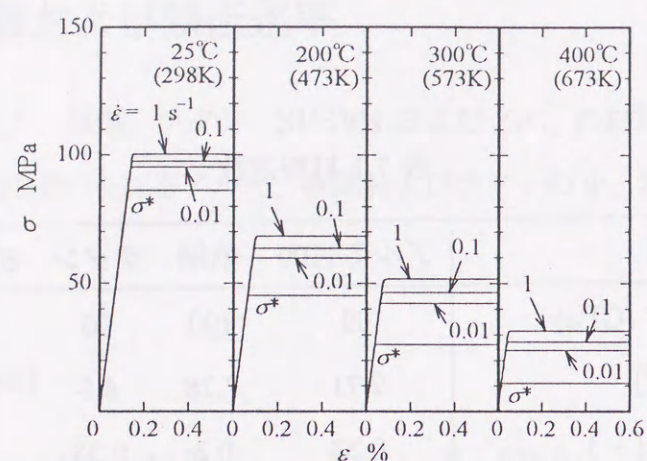
熱伝達率は、流体の物質のみでは定まらず、流れの状態にも依存する。通常の条件下では、ほぼ表7.2に示す値をとる[99, 102]。なお、1 W/(m²·K)は0.8592 kcal/(m²·hr·°C)である。

表 7.1 材料定数

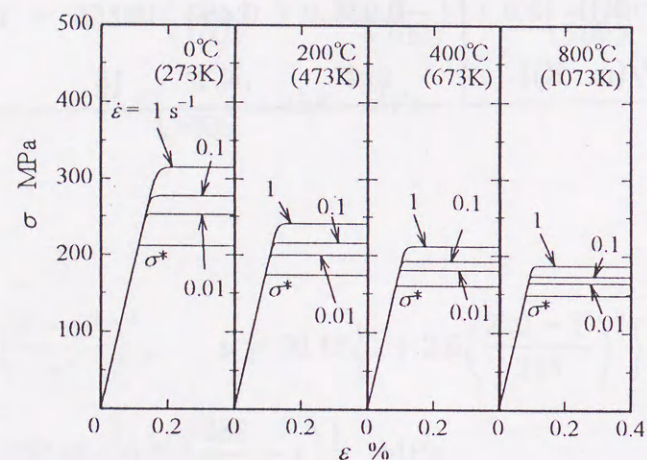
項目	アルミ 1100	軟鋼	チタン	SUS304	ZrO ₂
縦弾性係数 E (GPa)	69	190	90	170	210
密度 ρ (g/cm ³)	2.71	7.78	4.5	7.8	5.9
ポアソン比 ν (-)	0.33	0.3	0.33	0.3	0.32
線膨張係数 α (×10 ⁻⁶ K ⁻¹)	23.6	11.7	8.95	18	10
比熱 c (kJ/(kg·K))	0.904	0.460	0.555	0.56	0.3
熱伝導率 λ (W/(m·K))	222	50.1	15	19	3

表 7.2 熱伝達率

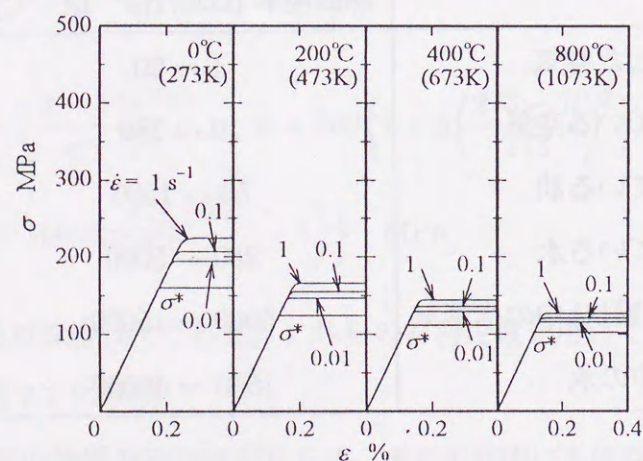
項目	熱伝達率 (kcal/(m ² ·hr·°C))
静止した空気	1 ~ 20
流れている空気	10 ~ 250
流れている油	50 ~ 1500
流れている水	250 ~ 5000
凝縮(膜状)中の水蒸気	5000 ~ 15000
沸騰中の水	1500 ~ 45000



(a) アルミ 1100



(b) 軟鋼



(c) チタン

図 7.1 応力-ひずみ線図

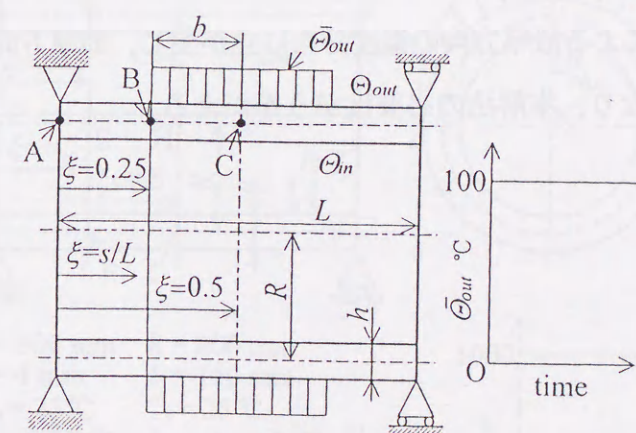
7.4 均質薄肉円筒殻

7.4.1 例題 1. 殻厚方向温度分布の二次曲線近似と線形近似の比較

殻厚方向の温度分布を二次曲線で仮定した本解法と、線形で仮定した解法の差異を調べるため、図 7.2 に示すようなチタン製円筒殻の中央部に、外側の流体から軸対称な温度負荷が時間に対してステップ状に作用する熱伝導問題を取り扱った。円筒殻の基準温度は 0°C とし、殻の両端は断熱とした。本解析例では、円筒殻の内外表面の相対熱伝達率 k_{in}, k_{out} を $0.07 \text{ m}^{-1}, 700 \text{ m}^{-1}$ とした。熱伝達率 K_{in}, K_{out} で表すとそれぞれ 1.2, 12000 $\text{W/m}^2\text{°C}$ であり、これは円筒殻が外側に凝縮 (膜状) 中の水蒸気 ($5800 \sim 17000 \text{ W/m}^2\text{°C}$) あるいは沸騰中の水 ($1700 \sim 52000 \text{ W/m}^2\text{°C}$) に、内側が静止した空気 ($1 \sim 20 \text{ W/m}^2\text{°C}$) に接している状況に相当する。差分点数 N は AC 間 ($= L/2$) で 101, 殻厚方向の差分点数は 19, 時間間隔 Δt は 0.1s, 式(5.1) の σ_0 は 1 とした。

次に計算結果について考察する。

図 7.3 は円筒殻中央部の点 B ($\xi=0.25$), C ($\xi=0.5$) における殻厚方向の温度分布を示す。実線は殻厚方向の温度分布を二次曲線で近似した本解法による結果であり、破線は線形で



$$\begin{aligned}
 L &= 600 \text{ mm} & R &= 200 \text{ mm} \\
 h &= 4 \text{ mm} & b &= 150 \text{ mm} \\
 \Theta_{in} &= 0 \text{ °C} & \bar{T}_0 &= 0 \text{ °C} \\
 k_{out} &= 700 \text{ m}^{-1} & k_{in} &= 0.07 \text{ m}^{-1}
 \end{aligned}
 \quad
 \Theta_{out} = \begin{cases} 0 \text{ °C} & (0 \leq \xi < 0.25) \\ \bar{\Theta}_{out} & (0.25 \leq \xi \leq 0.5) \end{cases}$$

図 7.2 例題 1.

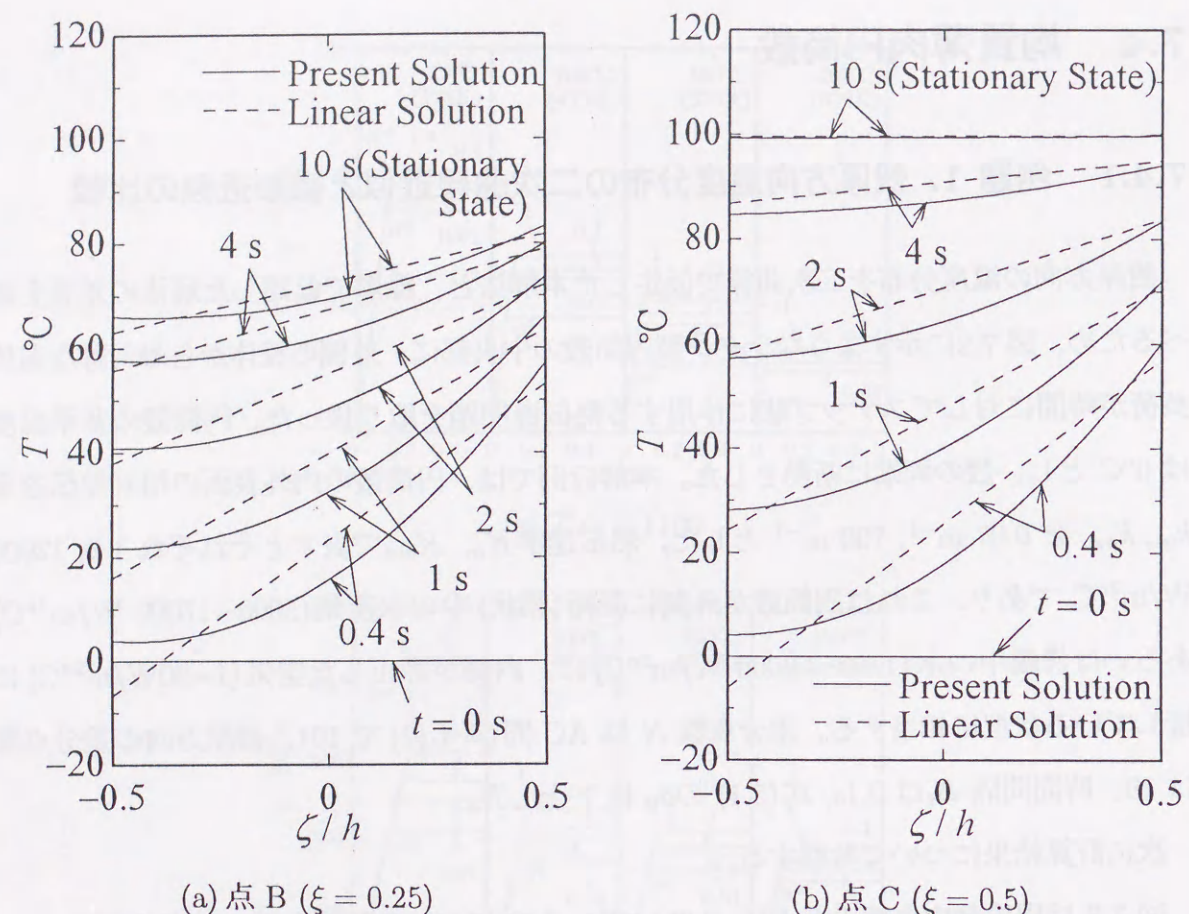


図 7.3 殻厚方向の温度分布

近似した解法による結果である。このように円筒殻の両表面で相対熱伝導率に大きな差を持たせると、両解法による殻厚方向の温度分布に差が生じ、殻厚方向の温度分布を線形では十分近似できなくなり、本解法の必要性がうかがえる。

7.4.2 例題 2. アルミ円筒殻の熱弾/粘塑性変形

次に、内圧が作用している両端単純可動支持のアルミ円筒殻に、局所的な流体加熱が時間に対してステップ状に作用する問題を取り扱った(図 7.4)。基準温度および円筒殻の初期温度は 25°C とし、殻の両端は断熱とした。温度負荷は中央部 $2b = 300\text{mm}$ の外表面に作用し、子午線方向に一定で円周方向に余弦波状に分布する。そして円筒殻内外面での相対熱伝達率 k_{in}, k_{out} は、円筒殻が流れている水あるいは油の中に置かれた場合に相当する値 $k_{in} = k_{out} = 0.23 \text{ m}^{-1}$ を与えた。本数値例の場合、温度負荷のみでは円筒殻に降伏域が生じないため、初期降伏が生ずる 25% の内圧 $P_{\zeta} = 0.5 \text{ MPa}$ を負荷した。式(5.1)の σ_0 は、 $\sigma_0 = 1$ とした。差分点数 N は 101, 殻厚方向の格子点数は 19 とし、フーリエ級数の項数は $n = 20$ とした。また、時間間隔 Δt は 0.1s とした。これらの値は、解の収束性と利用した計算機の容量および計算時間を考慮して決定した。

計算結果について考察する。

図 7.5 は点 G における殻厚方向の温度分布の時間的変化を示す。図中、実線は本解法によるものであり、破線は殻厚方向に直線分布を仮定した場合である。両者を比較すると、

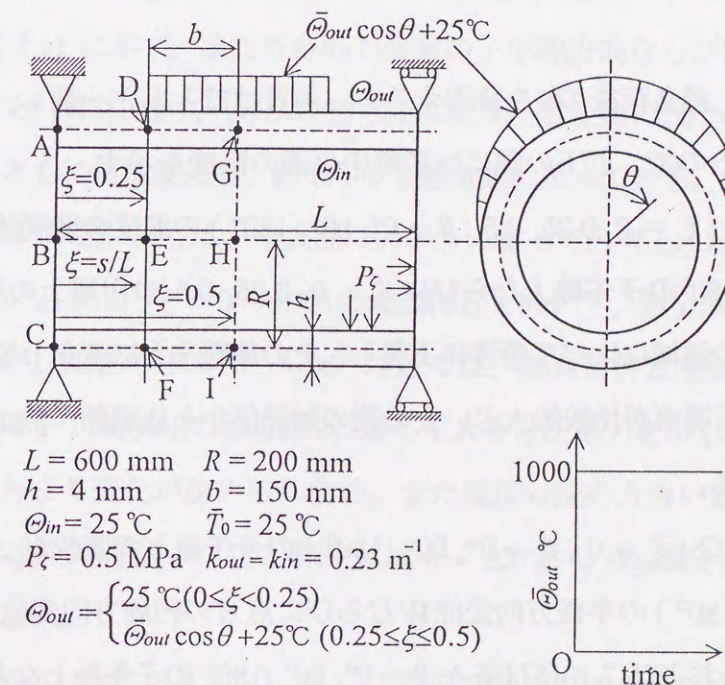


図 7.4 例題 2.

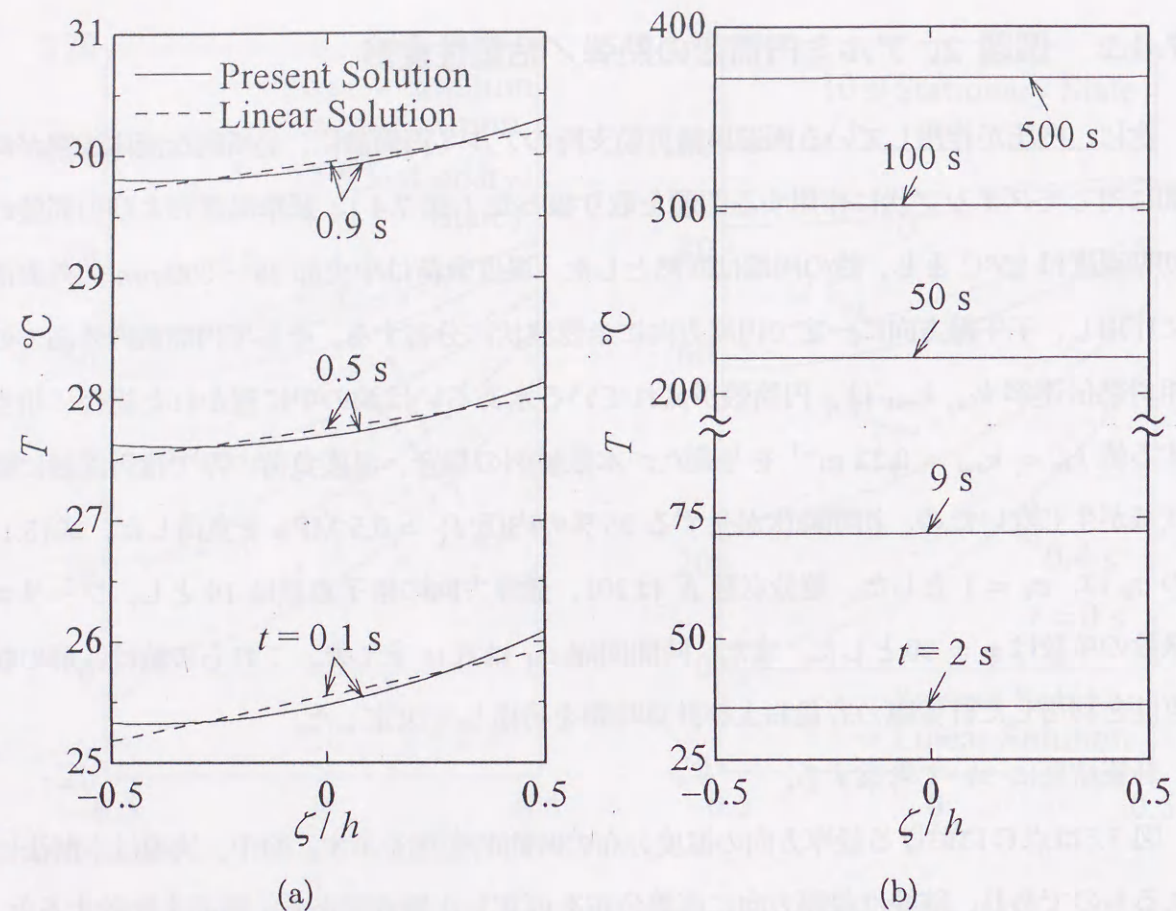


図 7.5 点 G ($\xi = 0.5, \theta = 0^\circ$) の殻厚方向の温度分布

本例題の場合には、熱負荷後2秒を経過すると、両者はほとんど一致し、さらに厚さ方向の分布も一樣になるので、以下の図には殻厚中央面の温度を示す。

図 7.6 は点 A ~ I ($\xi = 0, 0.25, 0.5; \theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$) の温度の時間的変化を、また図 7.7 は $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ の子午線上ならびに $\xi = 0, 0.25, 0.5$ の円周上の温度分布を表す。加熱部で温度は他の領域に比べて急速に上昇し、その後緩やかに変化して定常値に至っている。アルミは熱伝導率が比較的大きいため殻の加熱部から放熱部へ熱が移動し放熱部の温度が上昇している。

図 7.8 は点 A ~ C ($\xi = 0; \theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$) の子午線方向変位 U_ξ 、点 G ~ I ($\xi = 0.5; \theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$) の半径方向変位 W ならびに点 H の円周方向変位 U_θ の時間的変化を示す。また図 7.9 および 7.10 には各々 $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ の子午線上ならびに $\xi = 0, 0.5$ の円周上の変位分布を表す。内圧は初期降伏を生じる弾性限の25%程度の大きさを負荷し

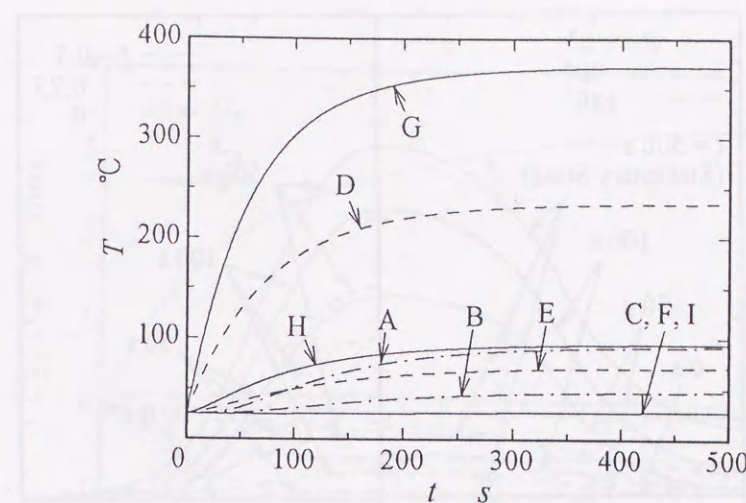


図 7.6 温度 T の時間的変化

ているが、内圧による殻の軸対称変形は、熱変形に比べて極めて小さく、変位 W が図中でようやく確認できる程度である。図 7.9 および 7.10 より、直接熱負荷を受ける高温部で大きく外側に変形し、その影響で中央部の $\theta = 90^\circ$ 付近の U_θ および W 、ならびに可動支持端付近の U_ξ は、やや大きな負の値を示すことがわかる。

次に点 G ~ I の合応力 N_ξ 、点 A ~ C, G ~ I の合応力 N_θ ならびに点 B, E の合応力 $\bar{N}_{\xi\theta}$ の時間的変化を図 7.11 に示す。また各合応力成分の子午線方向ならびに円周方向の分布を各々図 7.12 および 7.13 に表す。 N_ξ は最初内圧により、殻全体に 50 N/mm の引張りを示すが、熱負荷とともに値は変化し、約 100 秒で定常値に至っている。分布を見ると、子午線方向には ξ と共に単調に変化し、中央部に向かうに従って円周上には波状を呈してくる。一方 N_θ は、初め内圧により $\xi = 0 \sim 0.06$ の端部付近を除いて、殻全体に一様に 100 N/mm の引張りであるが、端部の $\theta = 0^\circ \sim 90^\circ$ 付近では、熱負荷後 20 秒経過すると、熱伝導により時間と共に子午線方向には局所的に著しく大きな圧縮力を示し、降伏を生じる $t = 150$ 秒以降は、あまり変化が認められない。また温度勾配の大きい点 D 付近の加熱境界で、子午線方向に多少変化している。図中には $t = 300$ 秒の $\bar{N}_{\xi\theta}$ 成分も示したが、 N_ξ, N_θ に比べて値は小さい。

図 7.14 は点 D ~ I の合モーメント M_ξ, M_θ ならびに点 B, E の合モーメント $\bar{M}_{\xi\theta}$ の時間的変化を、また図 7.15, 7.16 は、 $M_\xi, M_\theta, \bar{M}_{\xi\theta}$ の子午線方向分布ならびに円周方向分布を

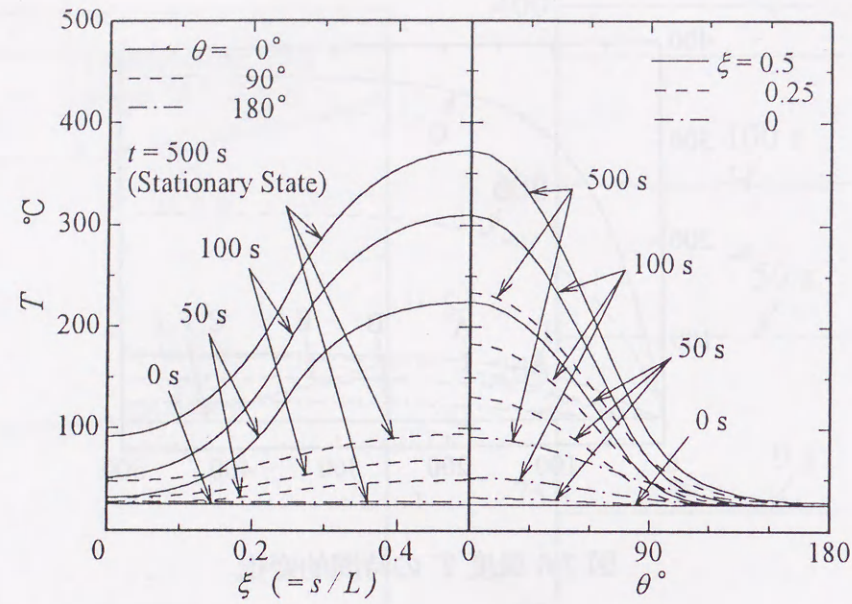


図 7.7 温度 T の子午線方向ならびに円周方向分布

示したものである。 M_ξ と M_θ は時間的変化も空間的分布も類似した形を示すが、点A付近($\xi = 0.03$)で M_ξ は大きな値になる。両者とも点D付近で、子午線方向にやや大きく変動している。また点G近傍で、塑性域の広がりと共に緩和が顕著になる。 $\bar{M}_{\xi\theta}$ 成分は、端部の $\theta = 50^\circ$ 付近で大きな値を示している。

最後に図 7.17 は、塑性域の進展の様子を示したものである。点Gの外表面において、 $t = 70.4$ 秒のとき初めて降伏し、時間の経過と共に、塑性域は厚さ方向、子午線方向および円周方向に広がる。支持端の一部にも塑性域が生じるが、殻の内表面での塑性域の広がり、外表面に比べて小さい。

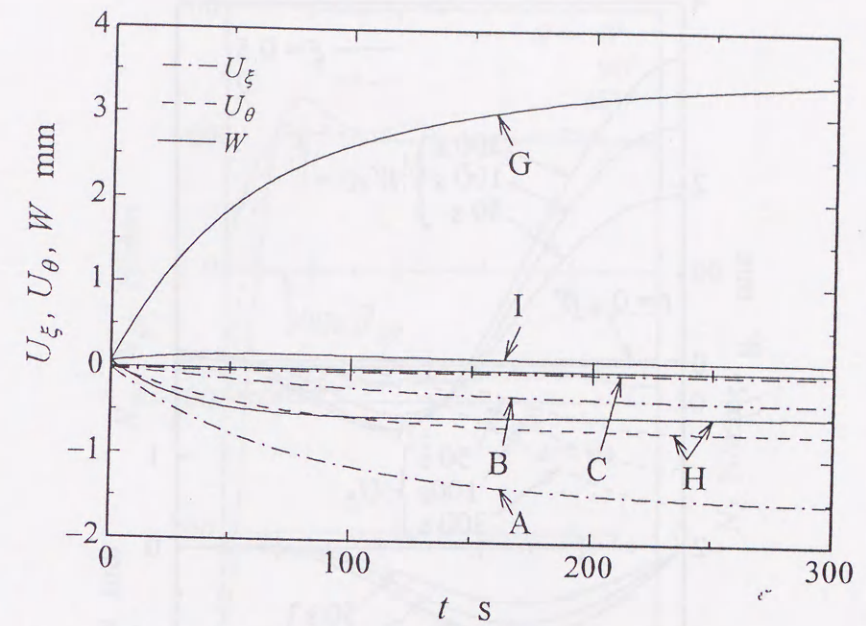


図 7.8 変位の時間的变化

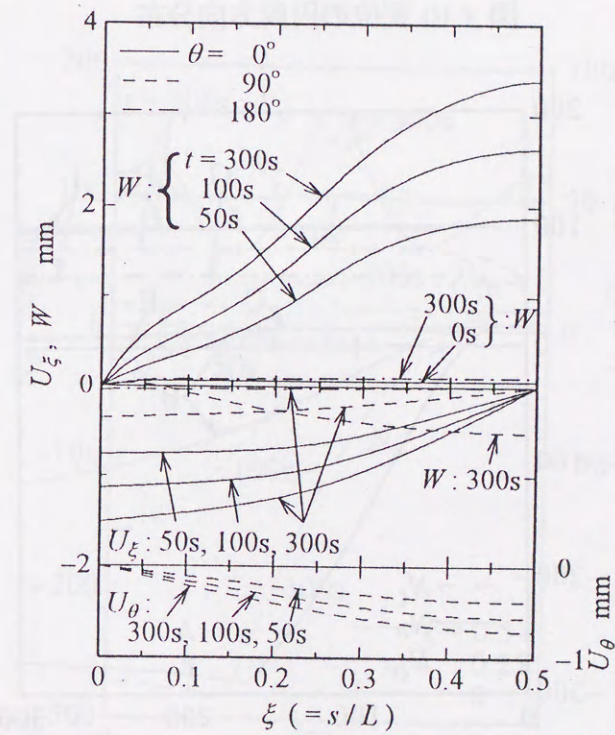


図 7.9 変位の子午線方向分布

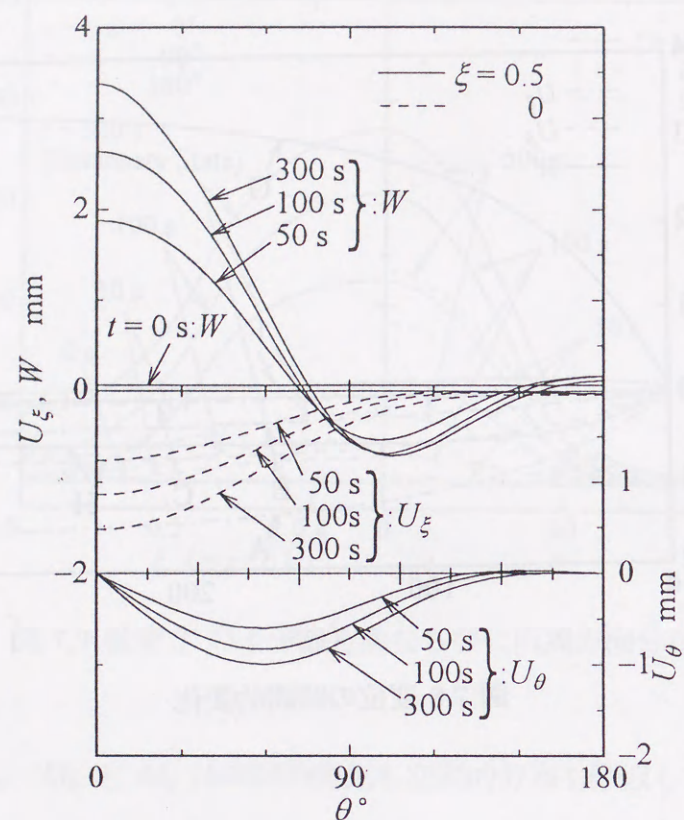


図 7.10 変位の円周方向分布

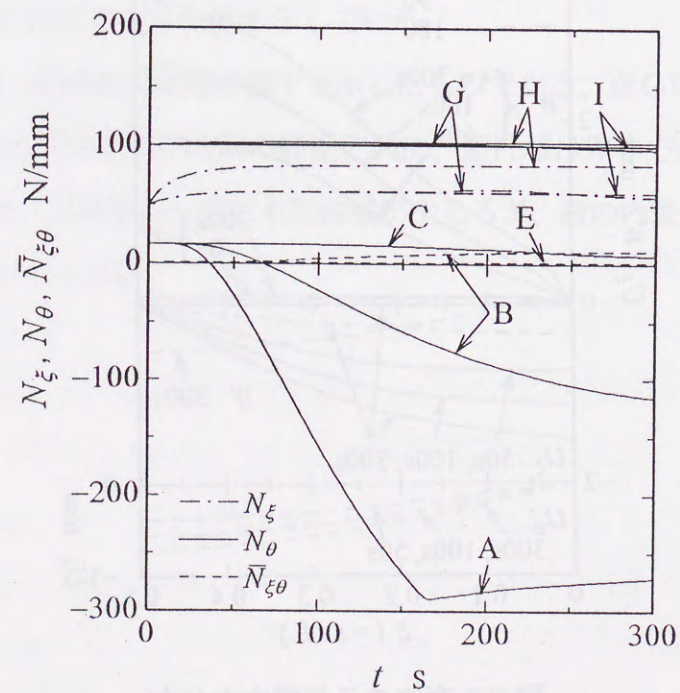


図 7.11 合応力の時間的変化

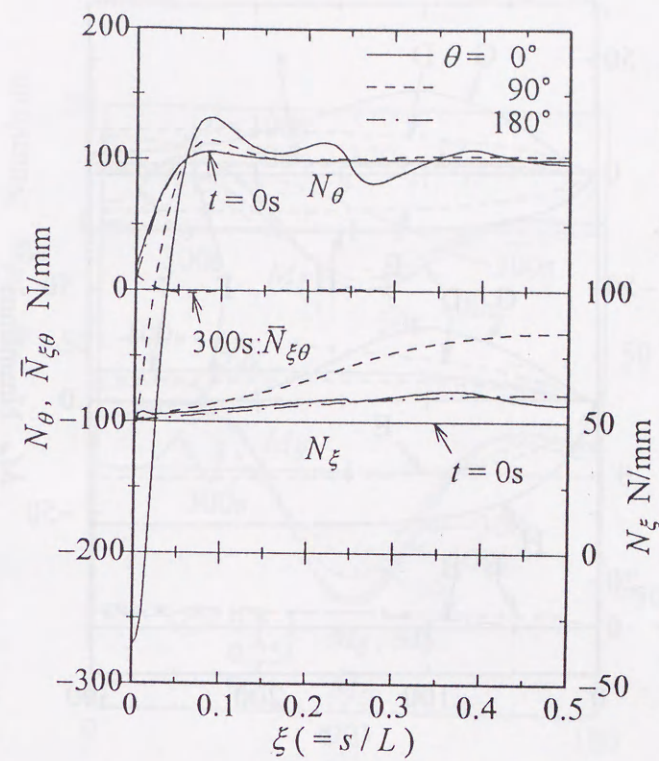


図 7.12 合応力の子午線方向分布 ($t = 0, 300s$)

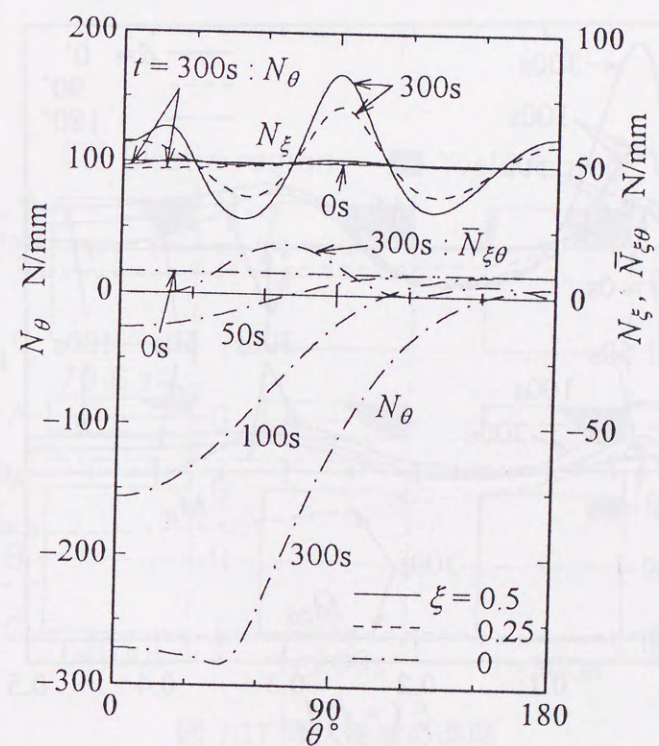


図 7.13 合応力の円周方向分布

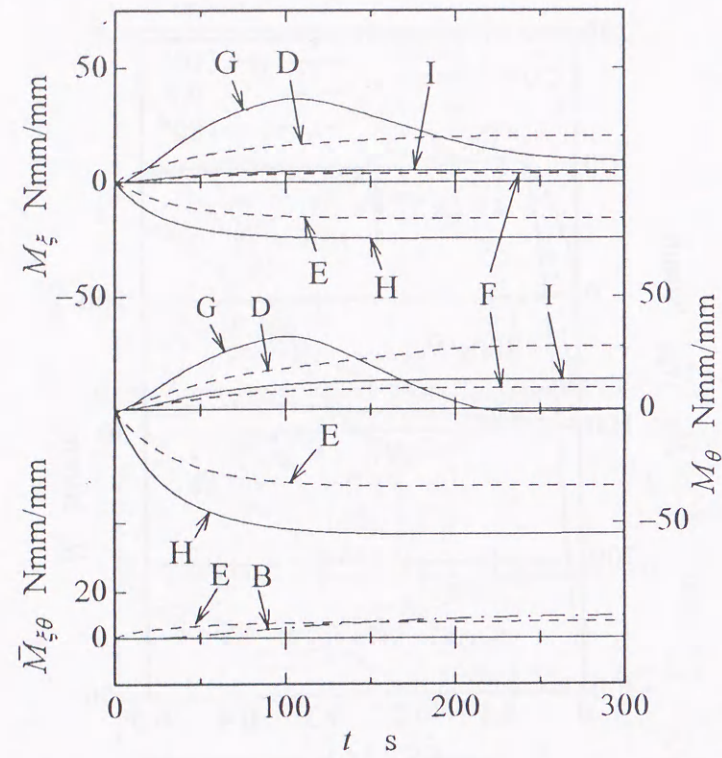


図 7.14 合モーメントの時間的变化

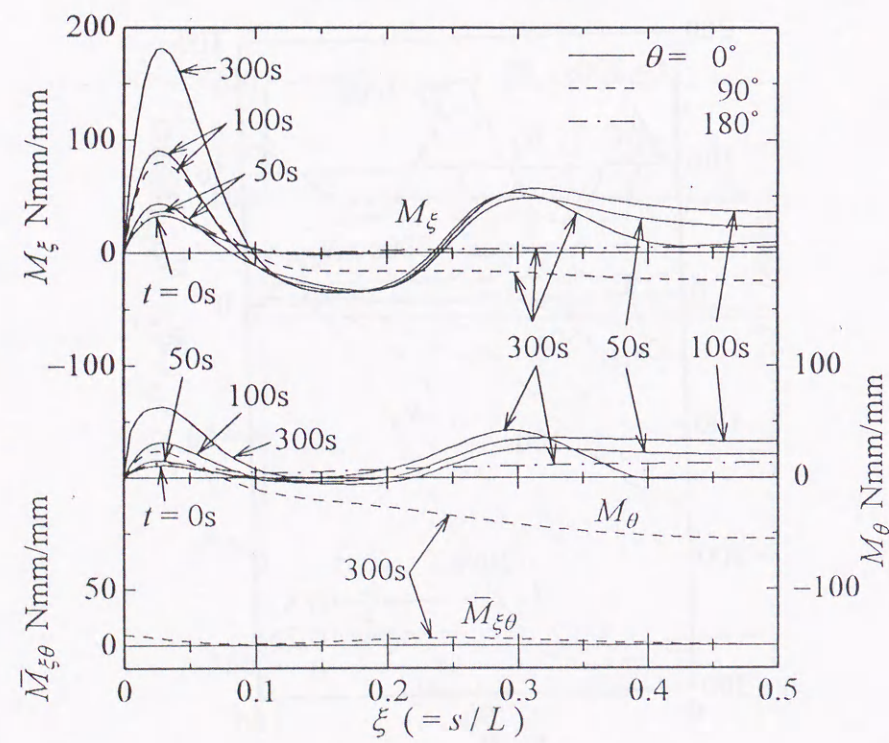


図 7.15 合モーメントの子午線方向分布

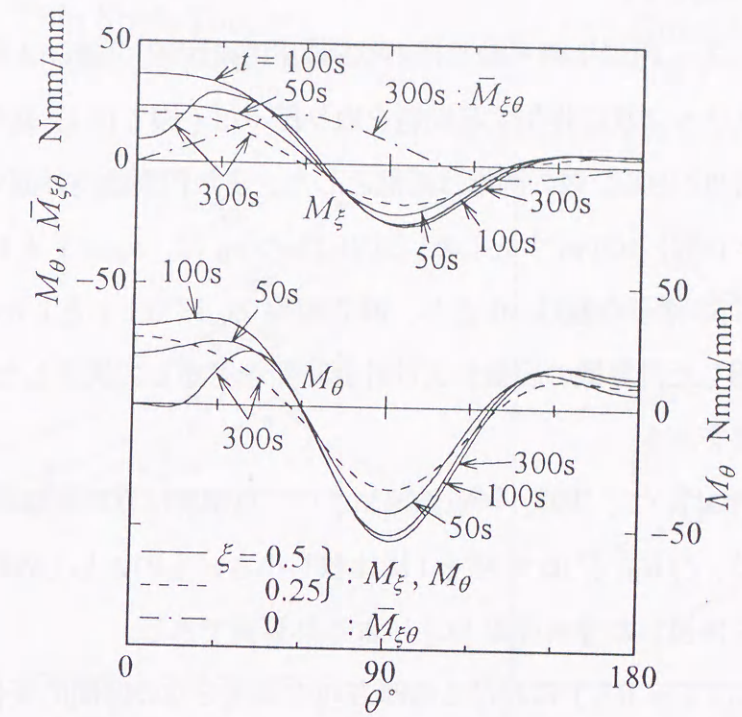


図 7.16 合モーメントの円周方向分布

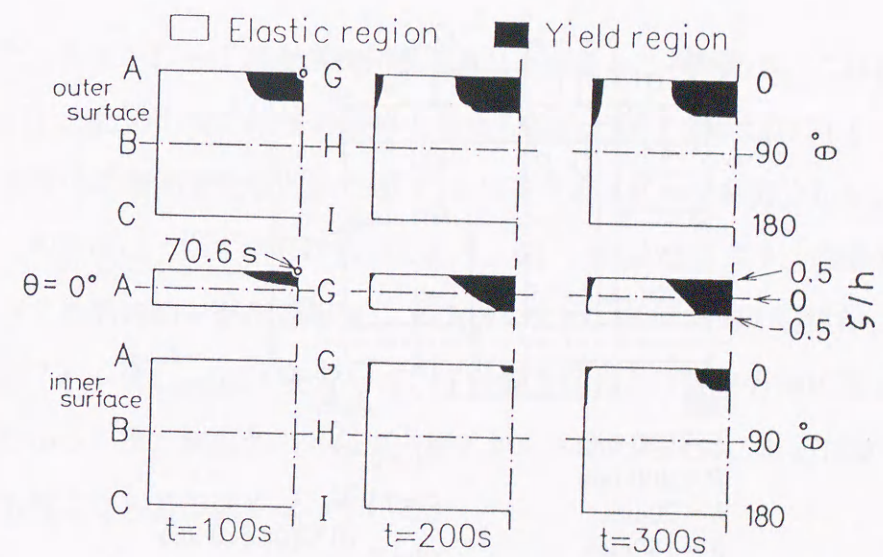


図 7.17 降伏領域の進展

7.5 均質厚肉殻

数値解析例として、両端単純可動支持の軟鋼製円筒殻の中央部に、軸対称な流体加熱が時間に対してステップ状に作用する問題を取り扱った(図7.18)。基準温度および円筒殻の初期温度は 0°C とし、殻の両端は断熱とした。また円筒殻内外面での相対熱伝達率 k_{in}, k_{out} は、各々 $0.02, 100\text{ m}^{-1}$ とした。式(5.1)の σ_0 は、 $\sigma_0 = 1$ とした。差分点数 N は101, 殻厚方向の格子点数は19とし、時間間隔 Δt は 0.1 s とした。これらの値は、解の収束性と利用した計算機の容量および計算時間を考慮して決定した。

次に、計算結果を示す。

図7.19~7.27において、実線、一点鎖線および二点鎖線は厚肉理論による結果であり、破線および点線は、 $\zeta/R_s, \zeta/R_0$ の項を1と比較し小さいものとして省略し、かつ殻厚方向のせん断変形を無視した薄肉理論[92]による計算値である。

図7.19は、点E($\xi = 0.5$)における殻厚方向の温度分布の時間的変化を示す。図中黒丸は、石田・竹内の解析解[103]であり、本解法による数値結果と、応答初期を除いてよく一致している。図7.19から、温度負荷後、数秒では殻厚方向を二次曲線で近似した場

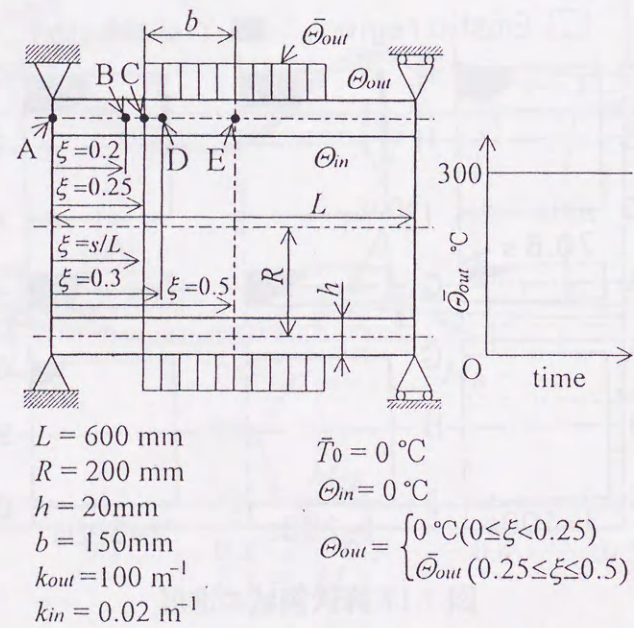


図7.18 数値解析例

7.5. 均質厚肉殻

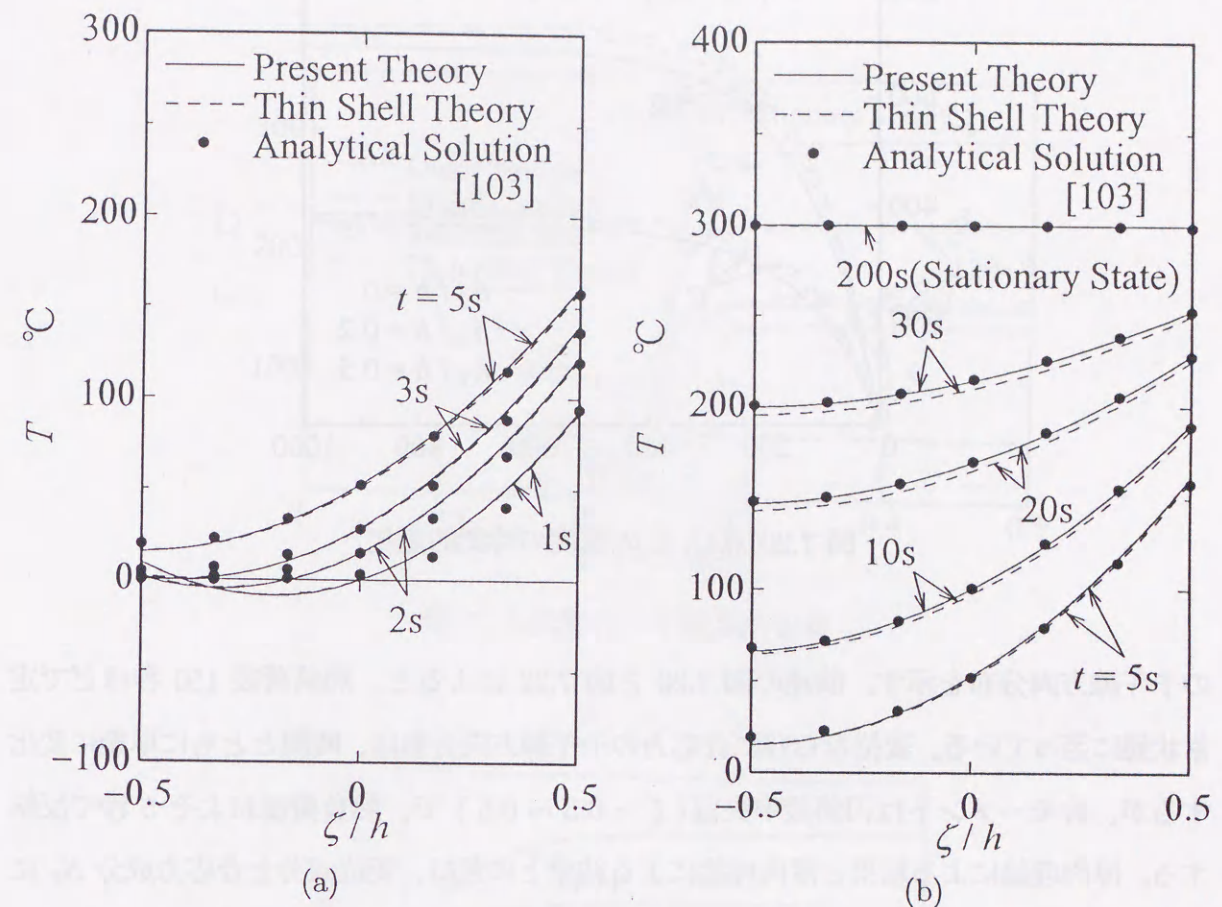


図7.19 点E($\xi = 0.5$)の殻厚方向の温度分布

合、加熱したにもかかわらず温度が初期温度より下がる場所がある。これは温度分布を二次曲線近似したための解の精度の限界と考えられる。図7.20は点C($\xi = 0.25$)ならびに点Eの温度の時間的変化を、また図7.21は子午線AE上の温度分布を、ともに外表面、中央面、内表面について示したものである。図7.19~7.21より、内面の相対熱伝達率 k_{in} に比べて外面の相対熱伝達率 k_{out} が大きいため、殻厚方向の温度は、定常状態の円筒殻中央部($\xi = 0.4 \sim 0.5$)を除いて、子午線方向および殻厚方向に著しく変化していることがわかる。また薄肉殻の熱伝導方程式から求めた結果は、非定常状態において、本理論による解よりも若干低くなっている。

図7.22は、点A($\xi = 0$)、Cの子午線方向変位 U_ξ 、点C、Eの半径方向変位 W ならびに点B、D($\xi = 0.2, 0.3$)の曲げモーメント M_ξ, M_θ の時間的変化を表す。また図7.23~7.26には、各々熱負荷後5, 20, 200秒での W と U_ξ 、合応力 N_θ ならびに M_ξ, M_θ

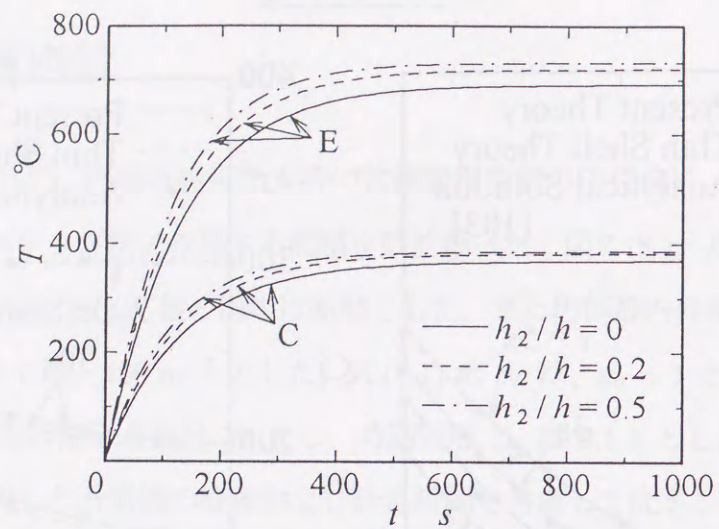


図 7.20 点 C, E の温度の時間的変化

の子午線方向分布を示す。前述の図 7.20 と図 7.22 によると、熱負荷後 150 秒ほどで定常状態に至っている。変位ならびに合応力の子午線方向分布は、時間とともに単調に変化するが、合モーメントは円筒殻中央部 ($\xi = 0.3 \sim 0.5$) で、熱負荷後およそ 5 秒で反転する。厚肉理論による結果と薄肉理論による結果との差は、変位成分と合応力成分 N_θ については共に極めて小さいが、合モーメント成分については、円筒殻中央部 ($\xi = 0.3 \sim 0.5$) で顕著である。

次に、図 7.27 に点 D における応力 σ_ξ と σ_θ の殻厚方向分布を、また図 7.28 に本理論による塑性域の進展の様子を示す。図 7.28 で除荷域とは、一度以上降伏を経験した後、応力が降伏点以下になっている領域のことである。ここには示さなかったが、薄肉理論の場合も降伏域の広がり方はほぼ同様である。両図より直接熱負荷を受ける領域 ($\xi = 0.25 \sim 0.5$) では、負荷直後の殻厚方向の大きな温度差により、外表面近傍で大きな圧縮熱応力を生じて降伏すると共に、負の大きな曲げモーメントを生じる。その後、熱伝導による変形の進行と共に、応力が緩和し除荷域となるが、やがて曲げモーメント M_ξ が大きくなる点 D 近傍の外表面付近で、再降伏域が生じている。

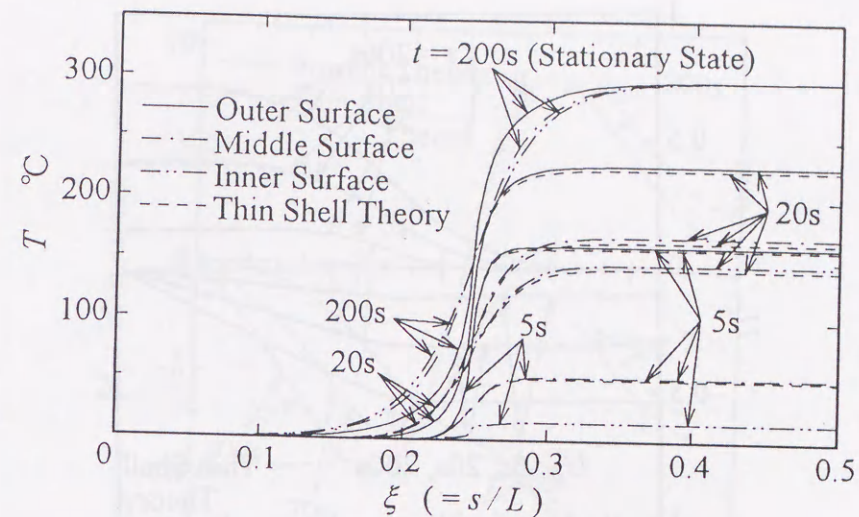


図 7.21 温度の子午線方向分布

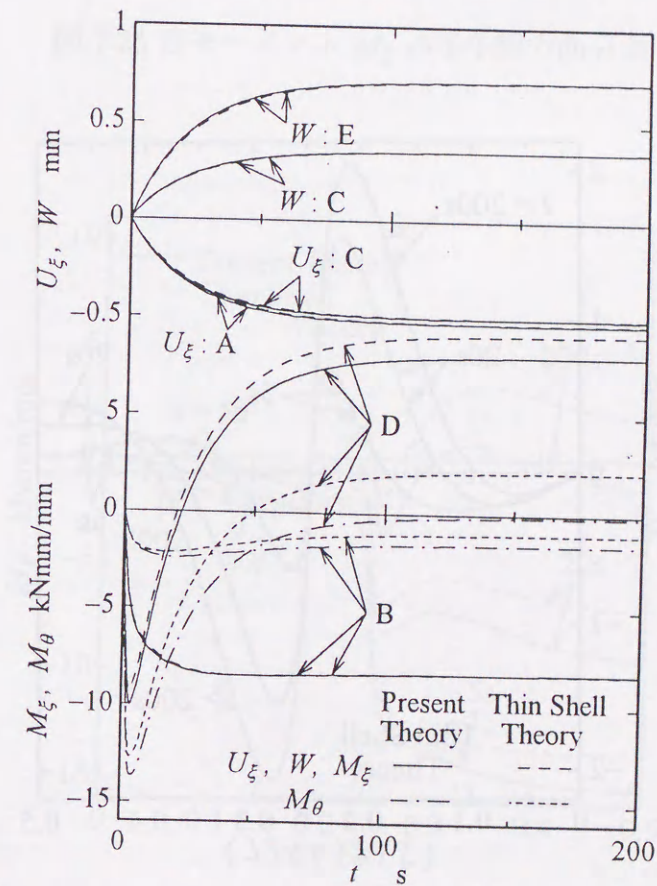


図 7.22 変位, 合モーメントの時間的変化

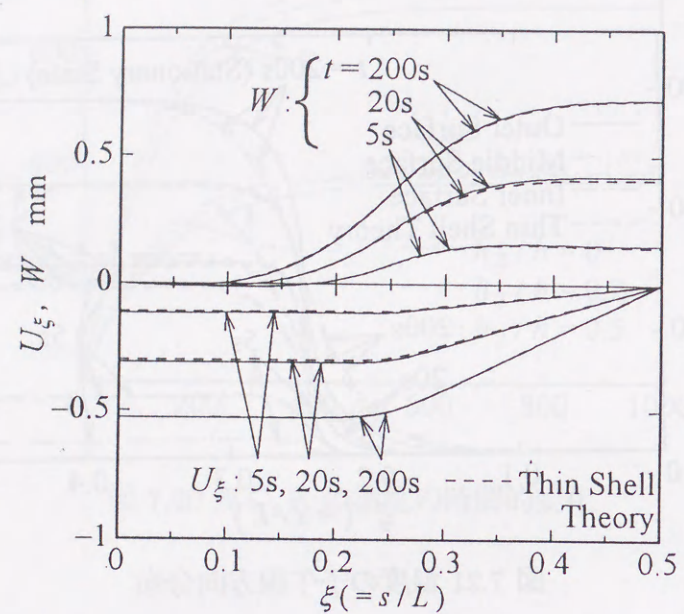


図 7.23 変位の子午線方向分布

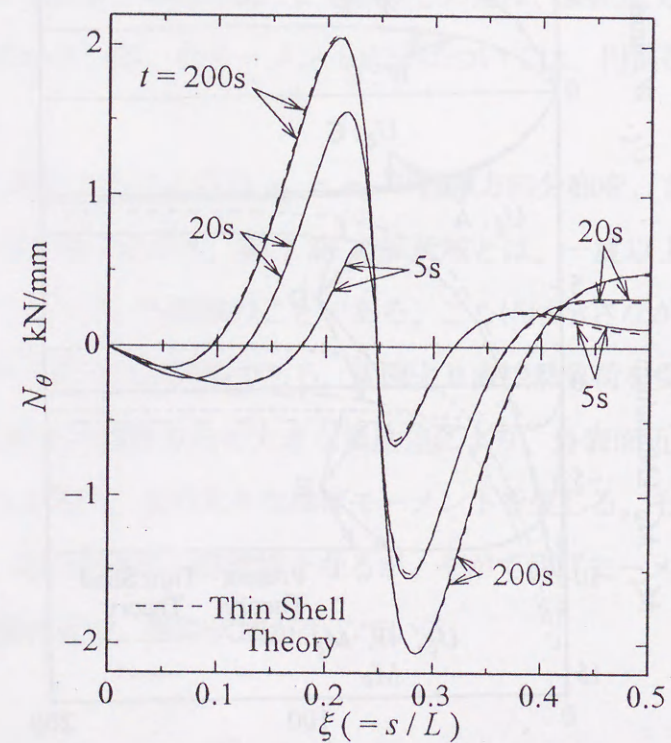


図 7.24 合応力 N_θ の子午線方向分布

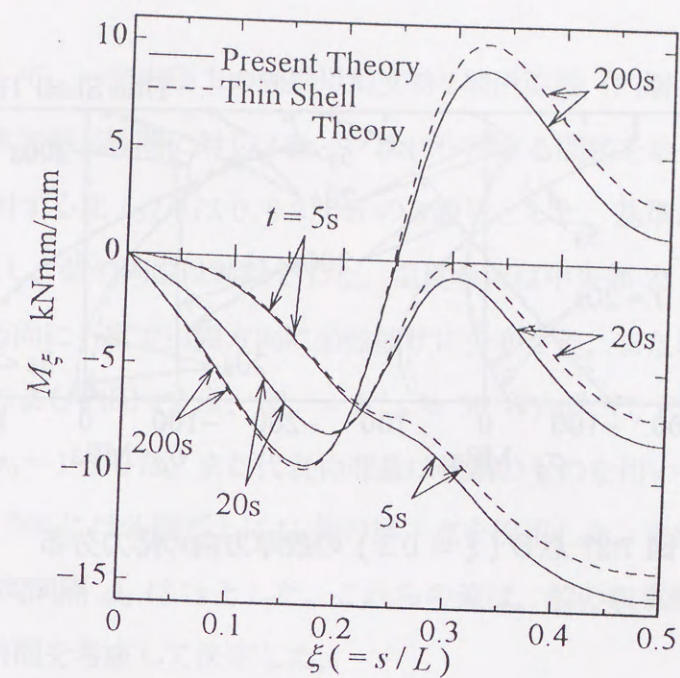


図 7.25 合モーメント M_ξ の子午線方向分布

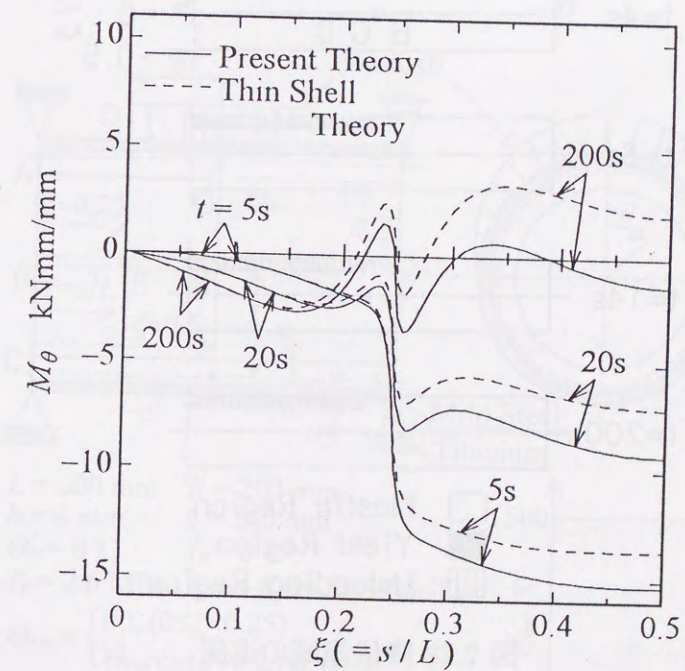


図 7.26 合モーメント M_θ の子午線方向分布

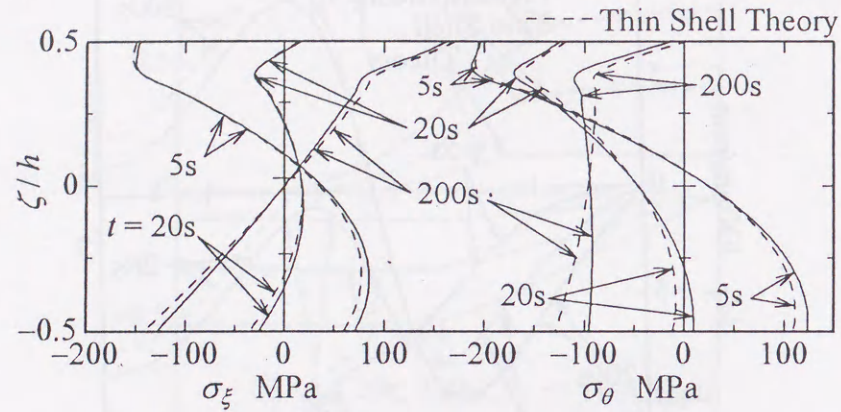


図 7.27 点D ($\xi = 0.3$) の殻厚方向の応力分布

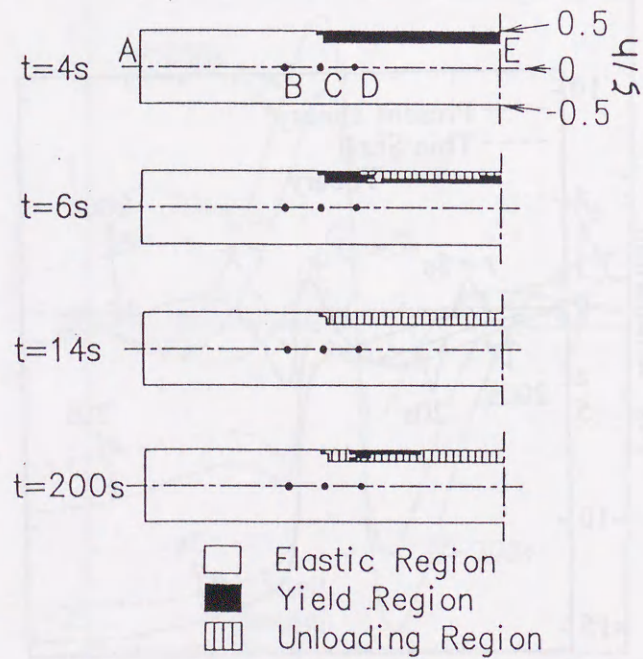


図 7.28 降伏領域の進展

7.6 多層薄肉殻

数値解析例として、一定内圧下の両端単純支持2層円筒殻（内層：軟鋼、外層：チタン）に、局所的な流体加熱が時間に対しステップ状に作用する問題を取り扱った(図 7.29)。チタン層の殻厚に対する比 h_2/h は 0, 0.2, 0.5 の3通りとした。基準温度および円筒殻の初期温度は 0°C とし、殻の両端は断熱とした。温度負荷は中央部 $2b = 300\text{mm}$ の外表面に作用し、子午線方向に一定で円周方向に余弦波状に分布する。また円筒殻内外面での熱伝達率 K_{in}, K_{out} および内圧 P_ζ は、 $K_{in} = K_{out} = 50 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$, $P_\zeta = 2.6 \text{ MPa}$ とし、 σ_0 は、本計算では $\sigma_0 = 1$ とした。また代表物理量は軟鋼のものを用いた。差分点はAG間に101個とり、殻厚方向には各層ごとに11個の格子点を採用した。またフーリエ級数の項数 m は20とし、時間間隔 Δt は1sとした。これらの値は、解の収束性と利用した計算機の容量および計算時間を考慮して決定した。

次に計算結果について考察する。

図 7.30 は点G ($\xi = 0.5, \theta = 0^\circ$) における殻厚方向の温度分布の時間的変化を示す。

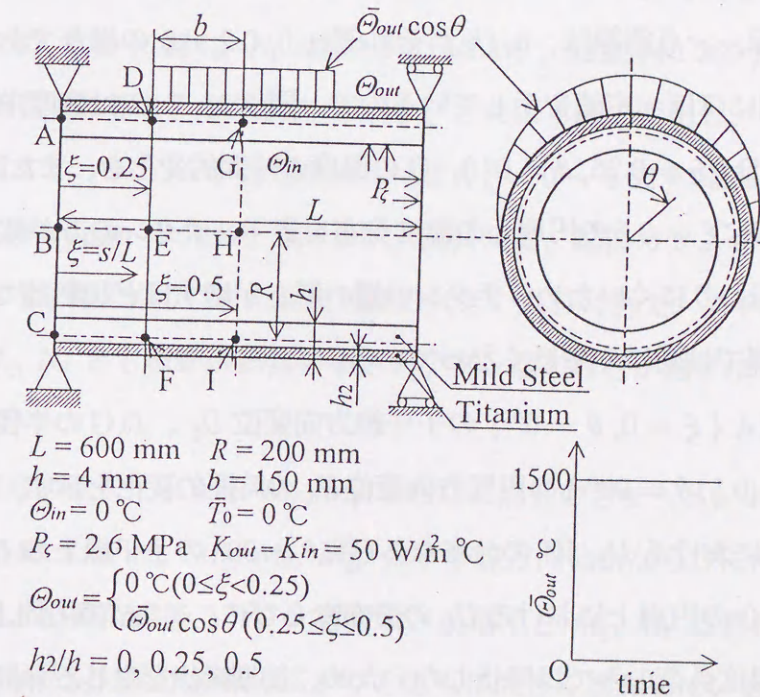


図 7.29 数値解析例

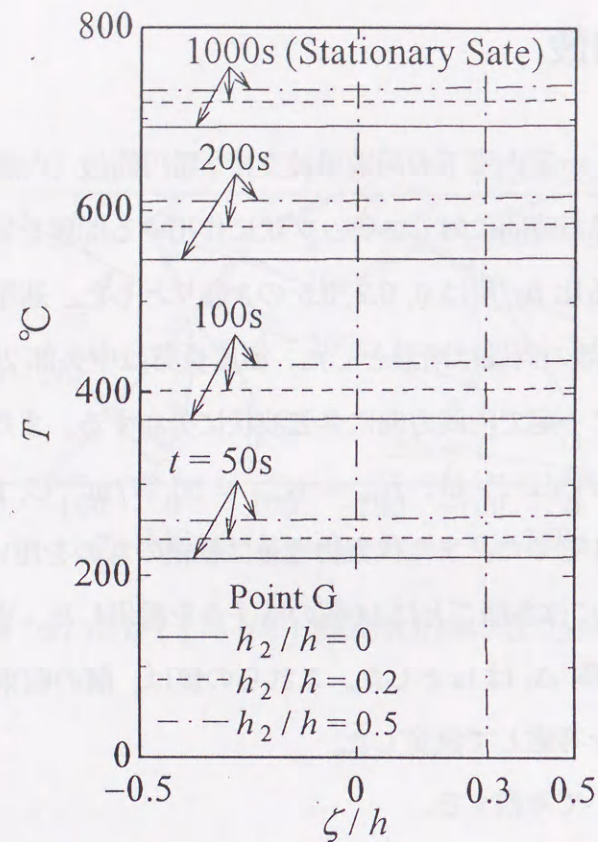


図 7.30 点 G ($\xi = 0.5, \theta = 0^\circ$) の殻厚方向の温度分布

図中、実線、破線、一点鎖線は、 h_2/h がそれぞれ 0, 0.2, 0.5 の場合である。温度分布は 3 者とも殻厚方向にほぼ一定値を示しているので、図 7.31, 7.32 は殻厚中央面の温度を示す。図 7.31 は点 D ($\xi = 0.25, \theta = 0^\circ$)、G の温度の時間的変化を、また図 7.32 は $\theta = 0^\circ$ の子午線上ならびに $\xi = 0.5$ の円周上の温度分布を表す。チタンの方が軟鋼よりも熱伝導率が小さく熱が伝わりにくいため、チタンの層の厚さが増すほど加熱部で温度は高くなっているが、放熱部では逆にやや低くなっている。

図 7.33 は、点 A ($\xi = 0, \theta = 0^\circ$) の子午線方向変位 U_ξ 、点 G の半径方向変位 W ならびに点 H ($\xi = 0.5, \theta = 90^\circ$) の円周方向変位 U_θ の時間的変化を示す。また図 7.34 は $\theta = 0^\circ$ の子午線上における U_ξ, W の分布ならびに $\theta = 90^\circ$ の子午線上の U_θ の分布を、また図 7.35 は $\xi = 0$ の円周上における U_ξ の分布ならびに $\xi = 0.5$ の円周上の U_θ, W の分布を示す。殻は温度負荷のみでは降伏しないため、初期降伏を生じる弾性限の 80% 程度の内圧を負荷しているが、内圧による殻の軸対称変形は、熱変形に比べて小さい。チタン

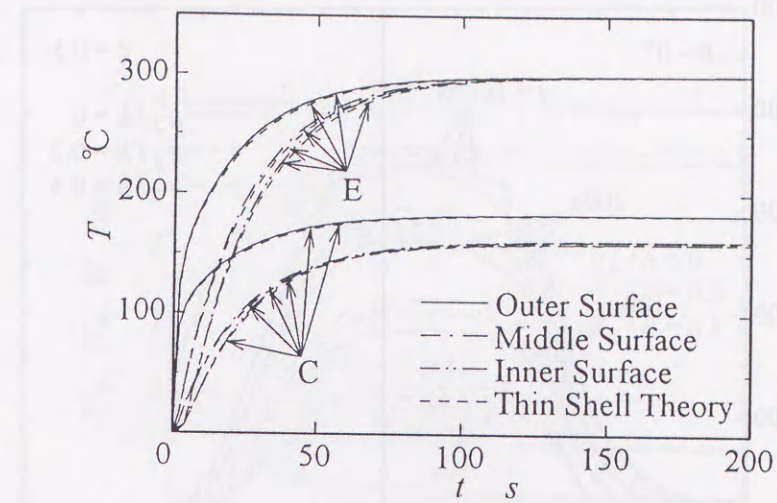


図 7.31 温度 T の時間的変化

は軟鋼より熱線膨張率が小さいが、図 7.32 よりチタンの層の厚さが増すほど殻の温度は高くなるため、 W は大きくなり、その差異は U_ξ, U_θ より顕著である。

次に点 H の合応力 N_ξ 、点 A の合応力 N_θ ならびに点 E ($\xi = 0.25, \theta = 90^\circ$) の合応力 $\bar{N}_{\xi\theta}$ の時間的変化を図 7.36 に示す。また各合応力成分の子午線方向ならびに円周方向の分布を各々図 7.37, 7.38 に表す。 N_ξ は最初内圧により、殻全体に 260 N/mm の引張りを示すが、熱負荷を受けると、子午線方向には ξ と共に単調に変化し、中央部では円周上に波状を呈してくる。一方、 N_θ は初め内圧により $\xi = 0 \sim 0.06$ の端部付近を除いて、殻全体に一樣に 520 N/mm の引張りであるが、熱負荷後、端部の $\theta = 0^\circ \sim 90^\circ$ 付近では、時間と共に大きな圧縮となり、また温度勾配の大きい点 D 付近で、子午線方向に大きく変化している。 N_ξ, N_θ とも線膨張係数の小さいチタン層の厚さが増すほど変動量は小さくなっている。

図 7.39 は、点 G の合モーメント M_ξ, M_θ ならびに点 E の合モーメント $\bar{M}_{\xi\theta}$ の時間的変化を、また図 7.40, 7.41 は、 $M_\xi, M_\theta, \bar{M}_{\xi\theta}$ の子午線方向分布ならびに円周方向分布を示したものである。熱負荷直後、チタン層の厚さが増すと M_ξ, M_θ は著しい時間的変化を示し、その後 M_θ 成分は降伏領域の広がりとともに大きく緩和している。

最後に図 7.42 は、降伏領域の進展の様子を示したものである。初期降伏はいずれの

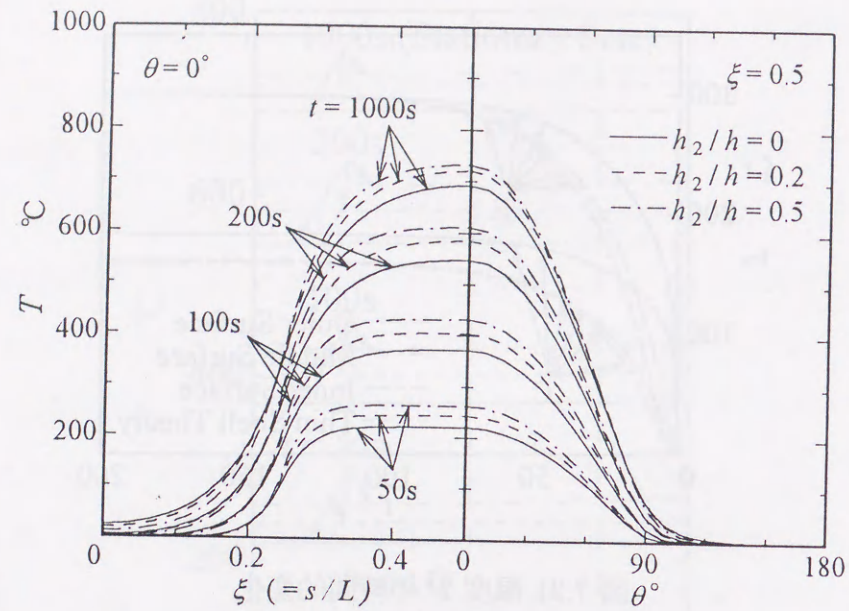


図 7.32 温度 T の子午線方向ならびに円周方向分布

h_2/h の場合も点Dの外表面付近で発生する。それは点D付近で子午線方向および円周方向の温度変化に伴って大きな応力が発生するためと考えられる。その後時間の経過とともに降伏領域は広がるが、結局、チタンは軟鋼より降伏応力、縦弾性率、熱線膨張率が低いため、チタン層が軟鋼層に引っ張られる形になり、2層殻の降伏領域はチタン層の加熱部のほぼ全体に広がる。力学的な観点から見れば、軟鋼とチタンから成る二層殻は、チタン層で降伏が生じ、変形も大きいので、このような温度負荷に対して必ずしも好ましいとはいえない。

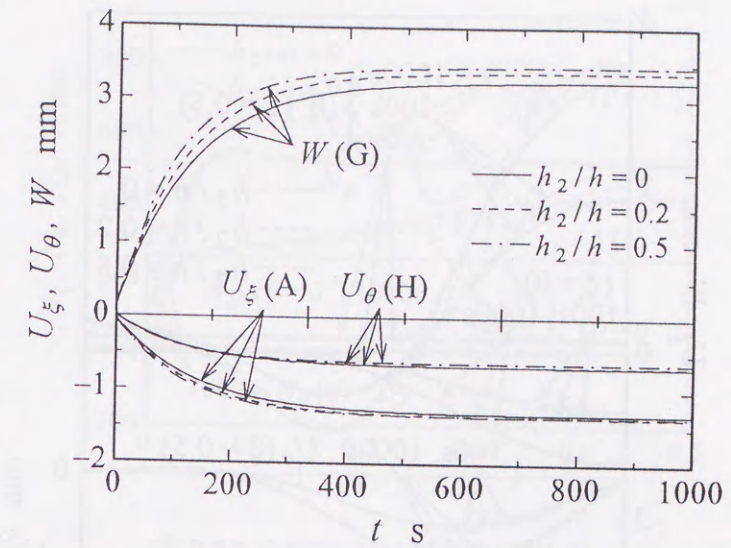


図 7.33 変位の時間的变化

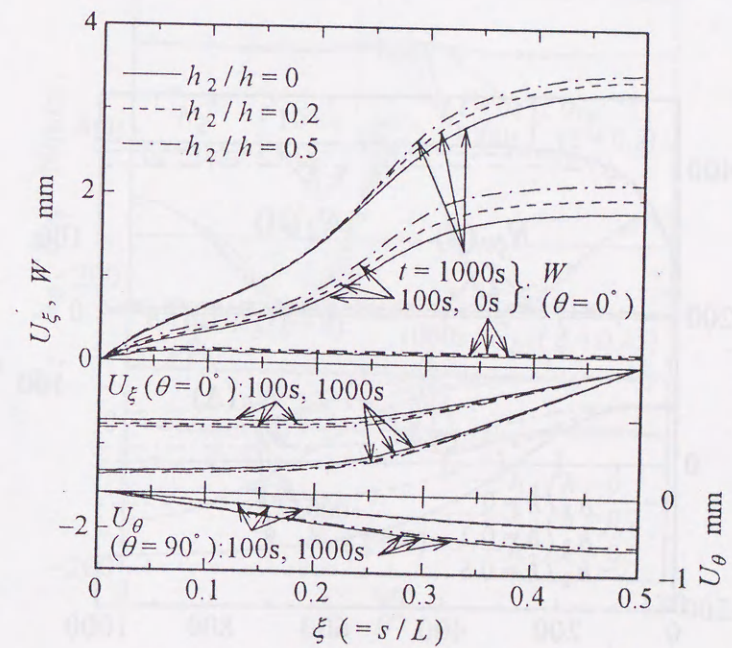


図 7.34 変位の子午線方向分布

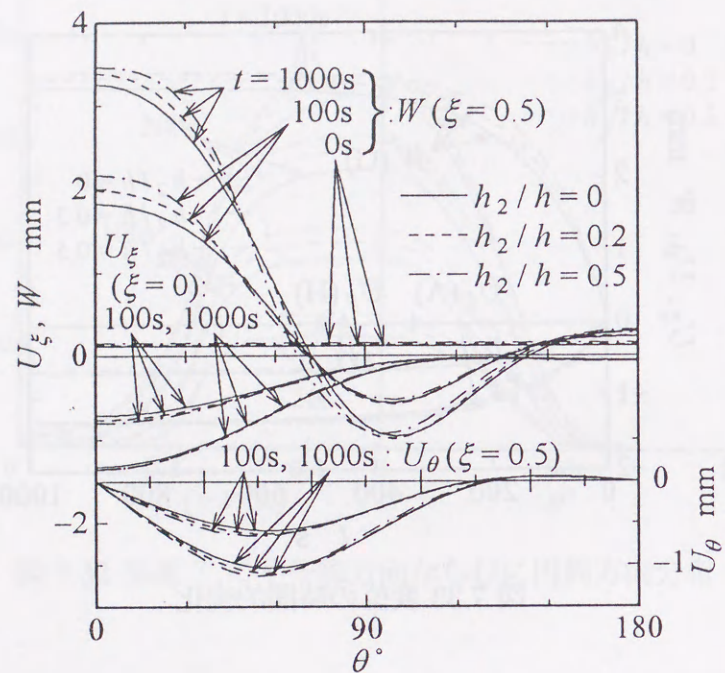


図 7.35 変位の円周方向分布

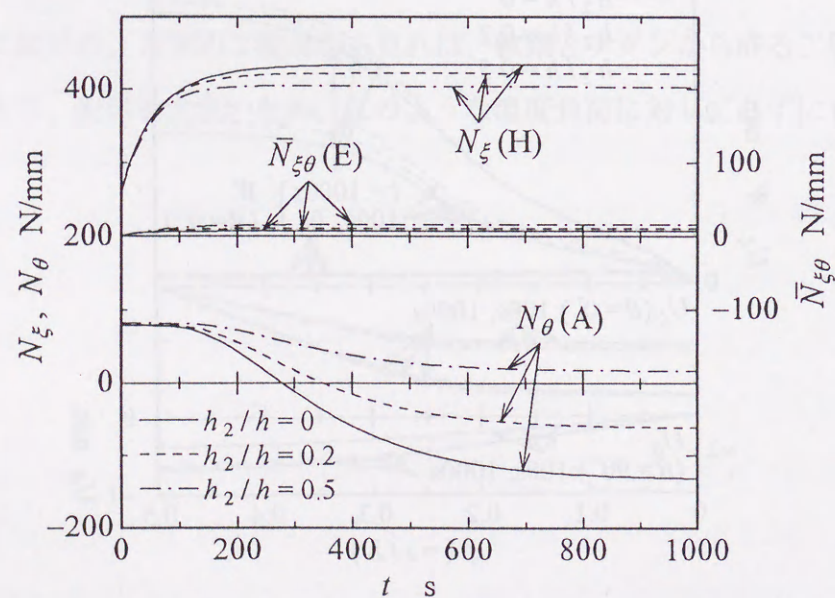


図 7.36 合応力の時間的変化

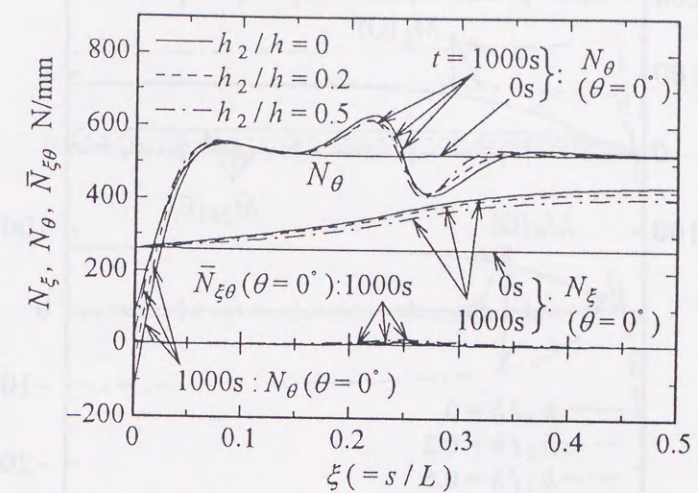


図 7.37 合応力の子午線方向分布

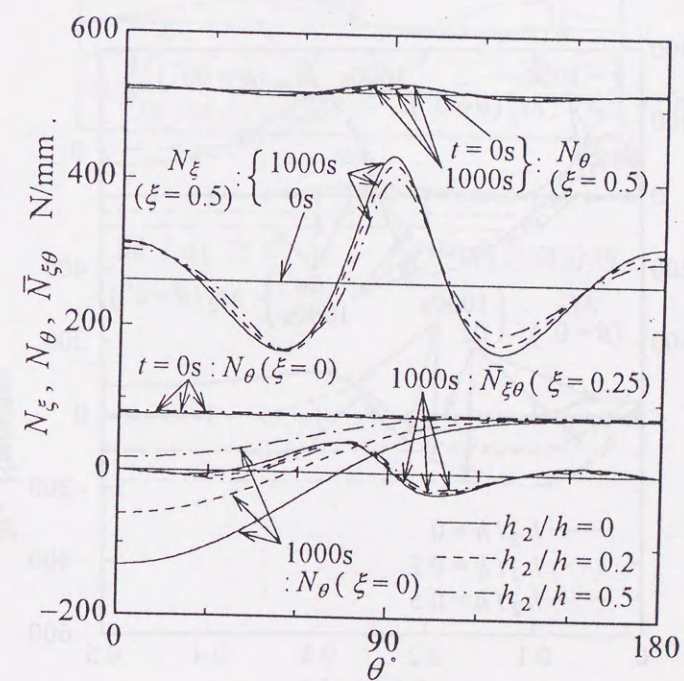


図 7.38 合応力の円周方向分布

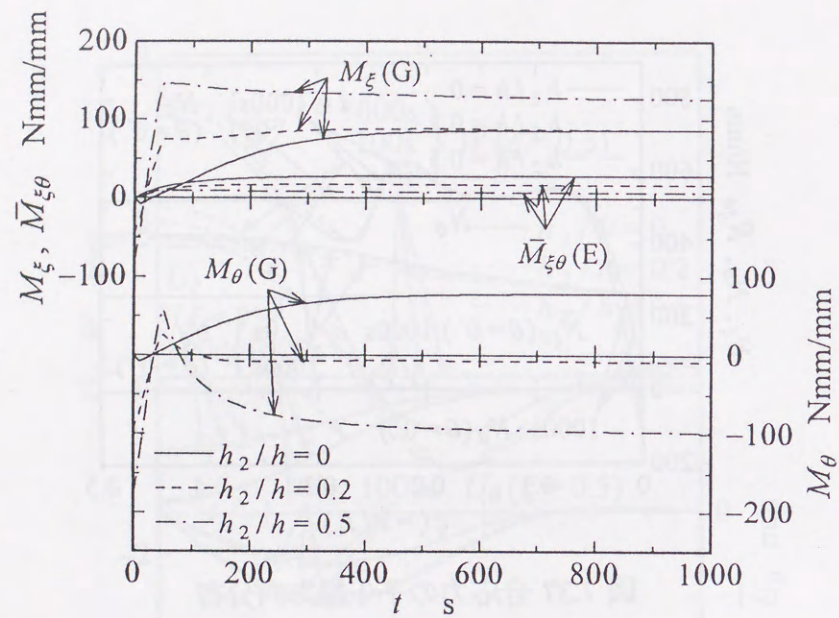


図 7.39 合モーメントの時間的变化

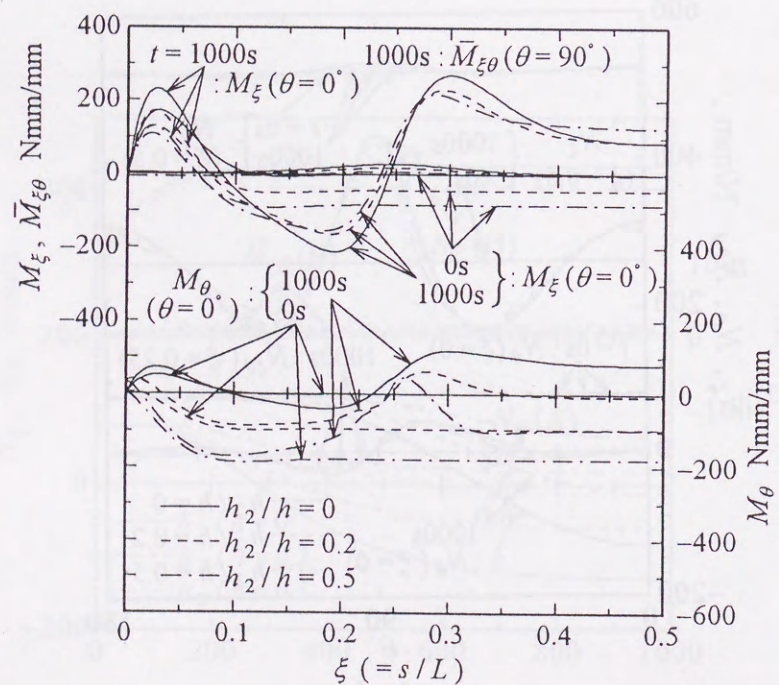


図 7.40 合モーメントの子午線方向分布

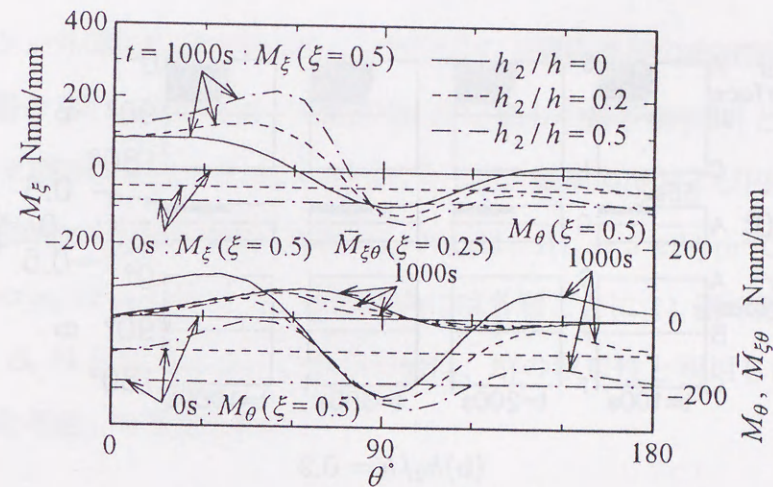
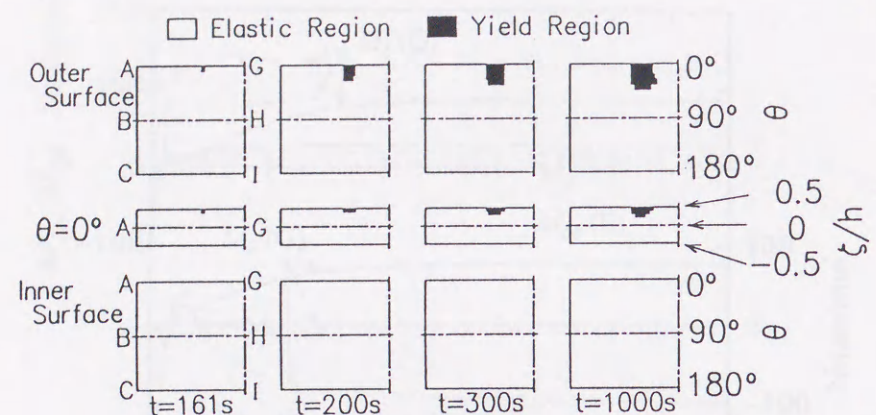
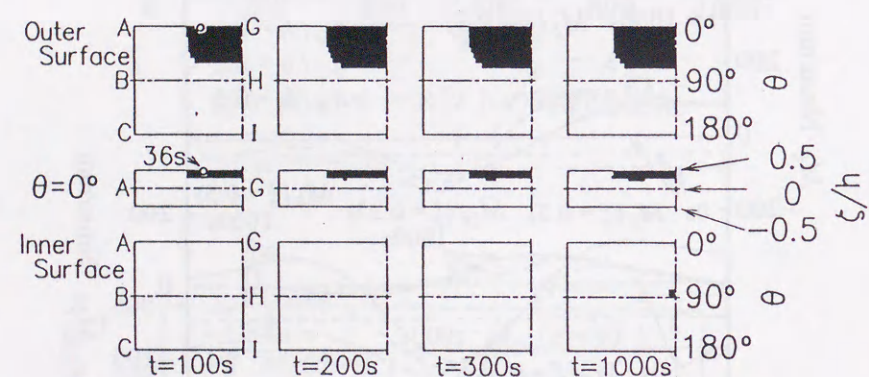


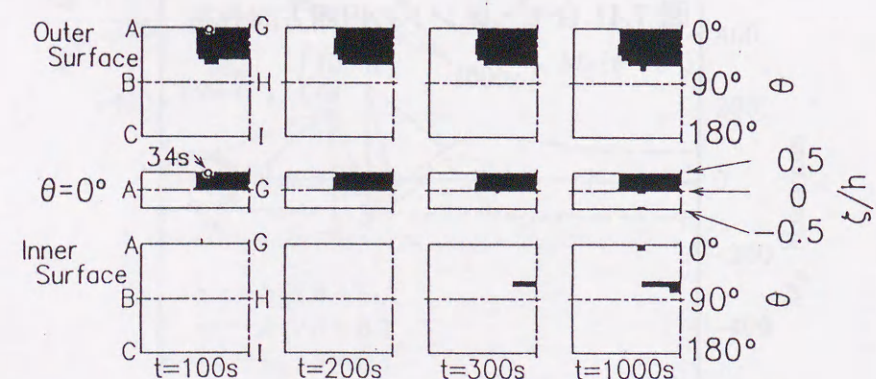
図 7.41 合モーメントの円周方向分布



(a) $h_2/h = 0$



(b) $h_2/h = 0.2$



(c) $h_2/h = 0.5$

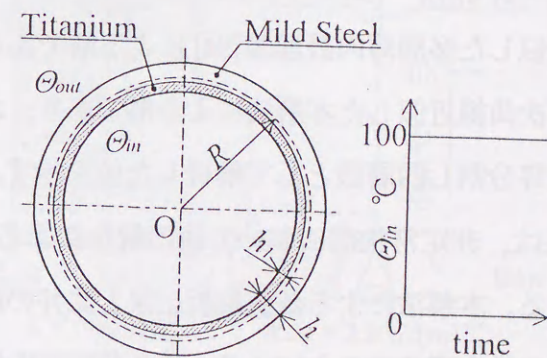
図 7.42 降伏領域の進展

7.7 多層厚肉殻

数値例として、軟鋼とチタンの層から成る二層円筒殻に、流体加熱が時間に対してステップ状に作用する問題を二例取り上げた。まず初めに、無限長の円筒殻内表面に一様に熱負荷を与えた場合の殻の温度分布解析を行い、解の精度の評価を行った。続いて、両端単純支持の円筒殻外表面の中央部に軸対称熱負荷を加えた場合の熱弾/粘塑性変形問題を解析した。

7.7.1 例題 1. 温度分布解析および解法の評価

内側にチタン、外側に軟鋼の層を配した無限長の二層円筒殻の内表面に、一様な流体加熱が作用した場合(図7.43)の温度分布解析を行い、武井の解析解[104]と比較した。チタンの層(厚さ h_1)の殻厚に対する比 h_1/h は0.5とした。基準温度および円筒殻の初期温度は 0°C とした。円筒殻内外面での熱伝達率 K_{in}, K_{out} は、 $K_{in} = 5 \text{ kW/m}^2\text{C}$, $K_{out} = 1 \text{ W/m}^2\text{C}$ 、式(5.1)の σ_0 は $\sigma_0 = 1$ とし、殻厚方向には各層ごとに11個の格子点を採用した。また時間間隔 Δt は0.1sとした。これらの値は、解の収束性と利用した計算機の容量および計算時間を考慮して決定した。



$h = 20 \text{ mm}$ $R = 200 \text{ mm}$
 $\theta_{out} = 0^\circ\text{C}$ $T_0 = 0^\circ\text{C}$
 $K_{out} = 1 \text{ W/(m}^2\text{C)}$ $K_{in} = 5 \text{ kW/(m}^2\text{C)}$
 $h_1/h = 0.5$

図 7.43 数値解析例 1.

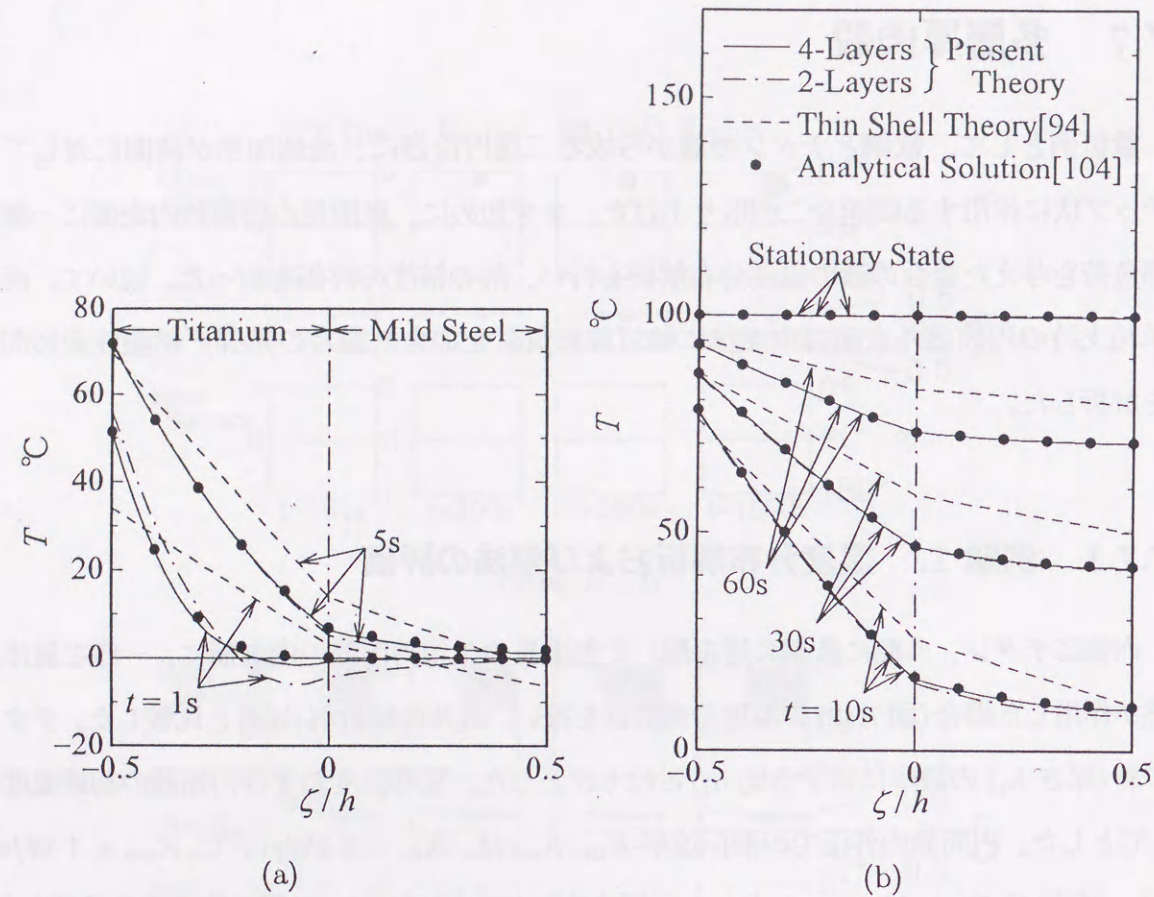


図 7.44 温度 T の殻厚方向分布

図7.44に、得られた殻厚方向の温度分布を示す。図中、黒丸は武井の解析解であり、破線は熱伝導方程式中の $\zeta/R_s, \zeta/R_\theta$ の項を1に比較し小さいものとして省略し、各層の殻厚方向温度分布を直線近似した多層薄肉殻理論 [94] による解である。また一点鎖線は各層の殻厚方向温度分布を二次曲線近似した本解法による解であり、さらに実線は本解法を用いて、各層を仮想的に二等分割し四層殻として解析した値を示す。図より、薄肉殻の熱伝導方程式から求めた結果は、非定常状態において他の解法による結果との差異が大きく、高い温度分布を示している。本解法による数値解析結果と武井の解析結果はよく一致しており、さらに仮想的に層の数を増やすことにより、熱負荷直後の解の精度の向上が期待できる。

7.7.2 例題 2. 温度および熱応力解析

外側にチタン、内側に軟鋼の層を配した二層円筒殻の中央部外表面に、軸対称な流体加熱が作用する問題(図7.45)を取り扱った。チタン層(厚さ h_2)の殻厚に対する比 h_2/h は、 $h_2/h = 0, 0.2, 0.5$ の三通りとした。基準温度および円筒殻の初期温度は 0°C とし、殻の両端は断熱とした。また円筒殻内外面での熱伝達率 K_{in}, K_{out} は、 $K_{in} = 1 \text{ W/m}^2\text{C}$, $K_{out} = 2 \text{ kW/m}^2\text{C}$ とした。殻厚方向の温度分布は各層を仮想的に二等分し四層殻として解析した。差分点数は AE 間に 101 個とり、 σ_0 、格子点数および時間間隔 Δt は前述の例題 1. と同じ値を用いた。

次に計算結果について考察する。

図7.46は点E($\xi = 0.5$)における殻厚方向の温度分布の時間的变化を示す。図中、実線、破線、一点鎖線は、 h_2/h がそれぞれ 0, 0.2, 0.5 の場合である。図7.47は点Eの温度の時間的变化を、また図7.48は $h_2/h = 0.5$ の場合の子午線方向の温度分布を、ともに外表面、境界面、内表面について示したものである。チタンのほうが軟鋼よりも熱伝導率が小さく熱が伝わりにくいため、加熱部($\xi = 0.25 \sim 0.5$)では、チタンの層の厚さが増すほど、加

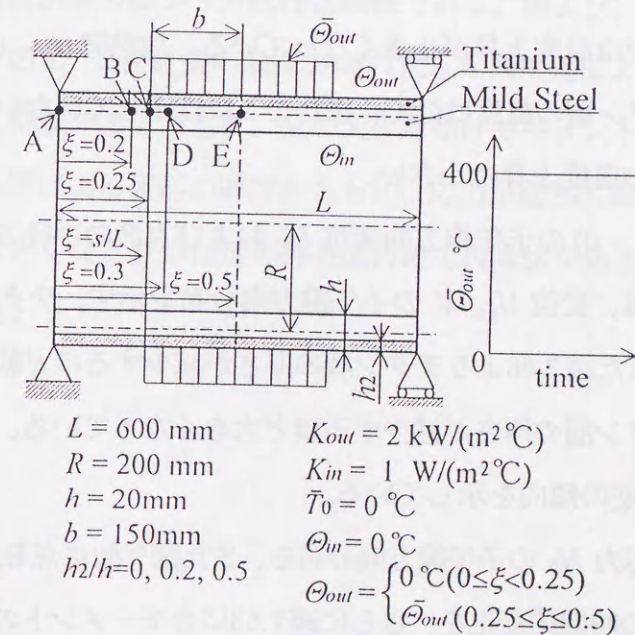


図 7.45 数値解析例 2.

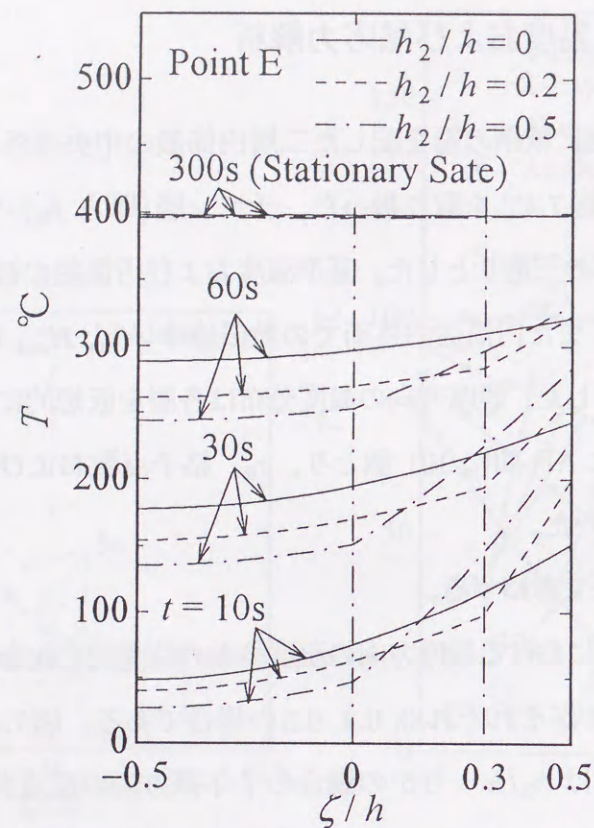


図 7.46 点 E ($\xi = 0.5$) の温度 T の殻厚方向分布

熱表面の温度上昇が大きく、またチタン層内では殻厚方向の温度差が大きくなり、温度勾配の小さい軟鋼層内では温度上昇が小さくなっている。放熱部 ($\xi = 0 \sim 0.25$) では、軟鋼層内の温度に比べチタン層の温度は低く、またここには示していないが、チタン層の厚さが増すほど、外表面の温度上昇は小さい。

図 7.49 は、点 A ($\xi = 0$) の子午線方向変位 U_ξ および点 E の半径方向変位 W の時間的变化を、また図 7.50 は、変位 U_ξ, W の子午線方向分布を示す。チタンに比べて軟鋼の線膨張係数が大きく、また図 7.46 よりチタン層の厚さが減少するほど軟鋼層内の温度は高くなるため、変形はチタン層の厚さが減少するほど大きくなっている。この減少は多層薄肉殻の結果 (図 7.34) と逆の傾向を示している。

次に、図 7.51 に合応力 N_θ の子午線方向分布を、また図 7.52 に点 B, D ($\xi = 0.2, 0.3$) の合モーメント M_ξ, M_θ の時間的变化を、さらに図 7.53 に合モーメントの子午線方向分布を表す。合応力 N_θ は、子午線方向の温度勾配の大きい点 C 付近で子午線方向に大きく変動し、

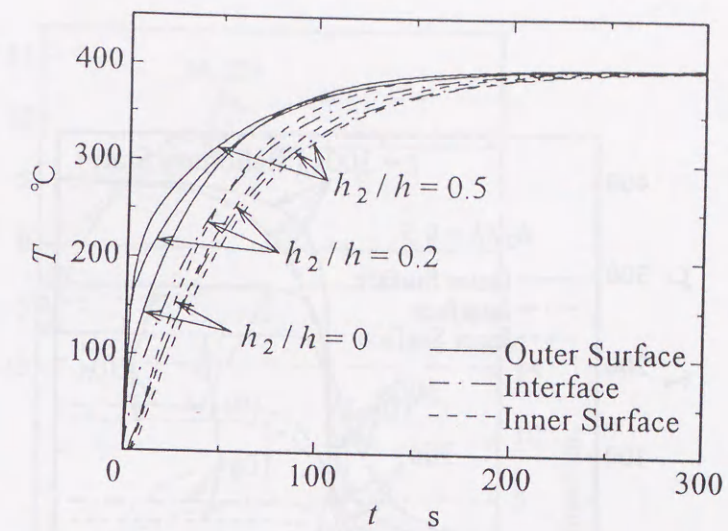


図 7.47 点 E ($\xi = 0.5$) の温度 T の時間的变化

その変動量はチタン層の厚さが減少するほど大きい。また N_θ は変位の子午線方向分布と同様に、時間とともに単調に変化するが、合モーメントは円筒殻中央部 ($\xi = 0.3 \sim 0.5$) で、熱負荷後およそ 5 秒で反転する。合モーメント成分については、チタン層の厚さによる差異が、円筒殻加熱部において特に顕著である。

図 7.54 は $h_2/h = 0.5$ の場合の塑性域の進展の様子を示す。ここには示さなかったが、他の h_2/h の場合も降伏域の広がり方はほぼ同様である。図より、直接熱負荷を受ける領域 ($\xi = 0.25 \sim 0.5$) では、負荷直後の殻厚方向の大きな温度差により、外表面近傍で大きな圧縮応力を生じて降伏するとともに、負の大きな曲げモーメントを生じていることが分かる。その後、熱伝導による変形の進行とともに、応力が緩和し除荷域となるが、やがて曲げモーメントが大きくなる点 D 付近の外表面付近で再降伏が始まり、さらに内表面からも降伏が生じている。

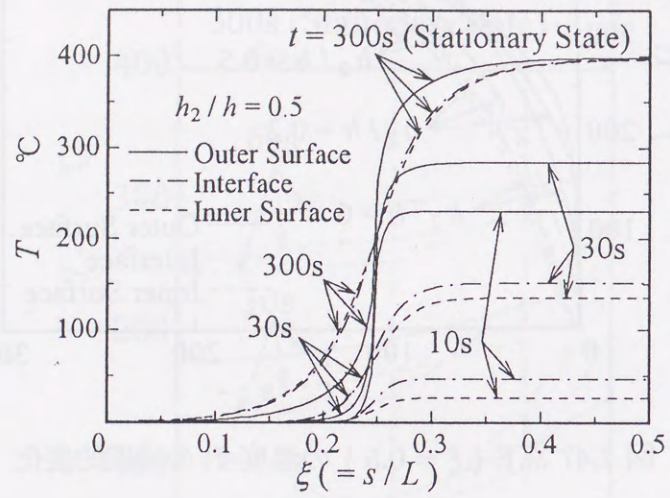


図 7.48 温度 T の子午線方向分布 ($h_2/h = 0.5$)

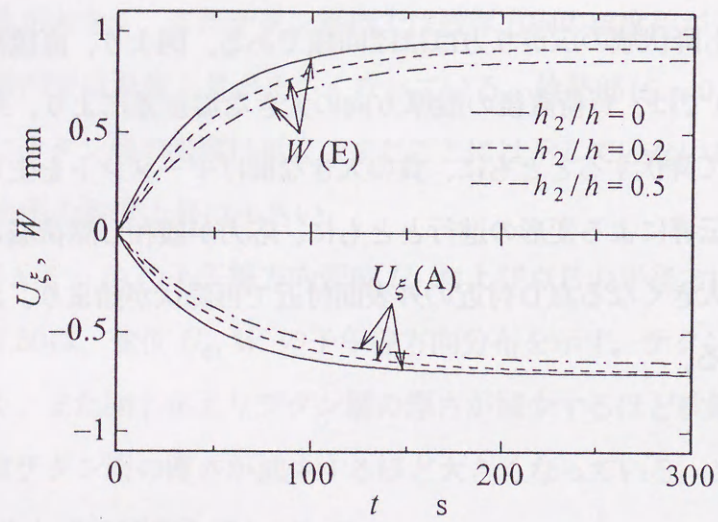


図 7.49 変位 U_ξ, W の時間的変化

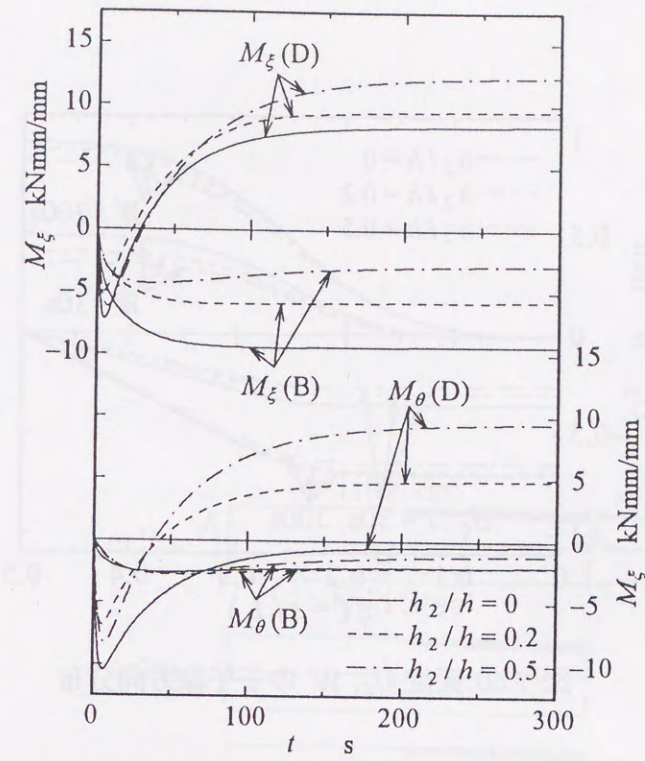


図 7.52 合モーメント M_ξ, M_θ の時間的変化

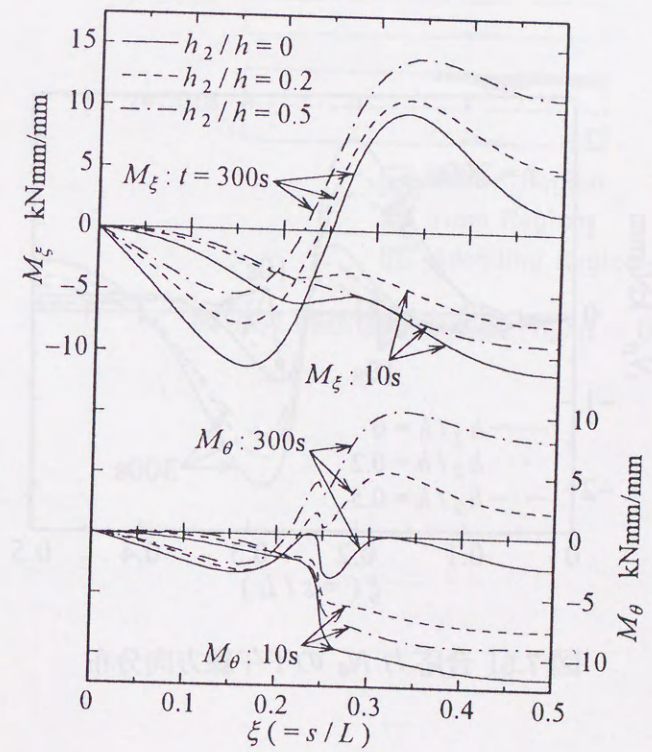


図 7.53 合モーメント M_ξ, M_θ の子午線方向分布

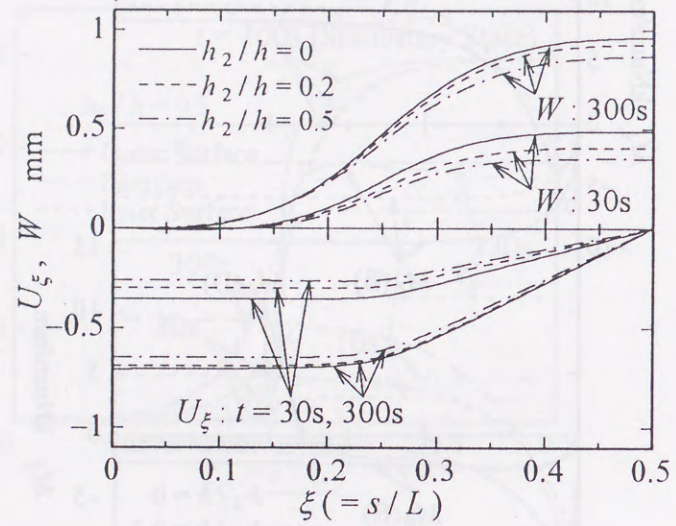


図 7.50 変位 U_ξ, W の子午線方向分布

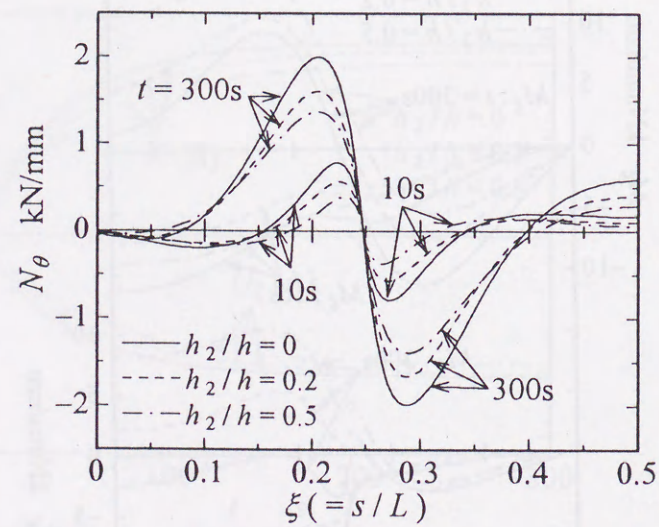


図 7.51 合応力 N_θ の子午線方向分布

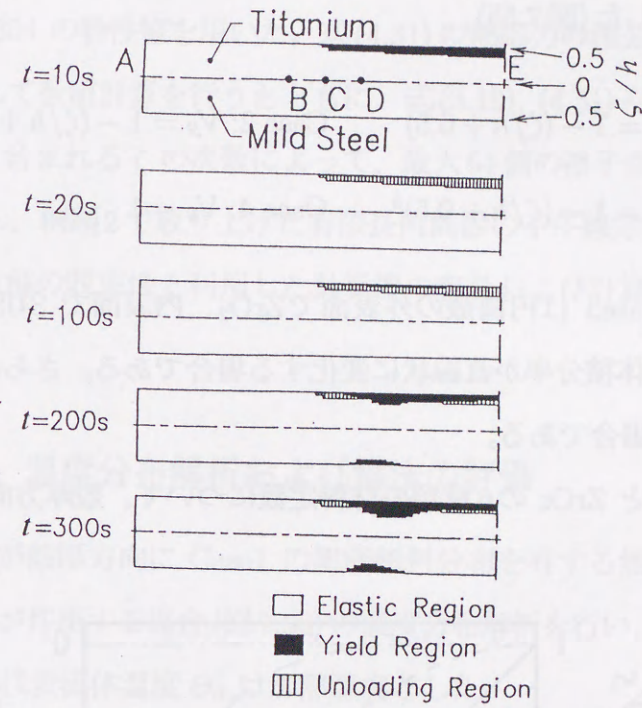


図 7.54 降伏領域の進展 ($h_2/h = 0.5$)

7.8 傾斜機能薄肉殻

数値解析例として、SUS304 と ZrO₂ を構成要素とし、殻厚方向に組成傾斜を持つ円筒殻に、流体加熱が時間に対してステップ状に作用する問題を2例取り上げた。まず初めに、無限長円筒殻の外表面に一樣に熱負荷を与えた場合の殻の温度分布解析を行い、解の妥当性の評価を行った。続いて、両端単純可動支持された有限長の円筒殻中央部の外表面に、軸対称熱負荷を加えた場合の熱応力・熱変形問題を解析した。

組成傾斜を示すパラメータとして、SUS304 の体積分率 V_S を用いて、以下の4種類の殻厚方向の傾斜を表した(図7.55)。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Case 1: } V_S = 1 - (\zeta/h + 0.5) & \text{Case 2: } V_S = 1 - (\zeta/h + 0.5)^2 \\ \text{Case 3: } V_S = 1 - (\zeta/h + 0.5)^5 & \text{Case 4: } V_S = 1 \end{array} \right\} \quad (7.14)$$

すなわち、Case1~Case3 は円筒殻の外表面でZrO₂、内表面で SUS304 のみからなり、Case1 は SUS304 の体積分率が直線状に変化する場合である。さらに Case4 は SUS304 のみの均質円筒殻の場合である。

表 7.1 の SUS304 と ZrO₂ の6種類の材料定数について、殻厚方向における物性値を、

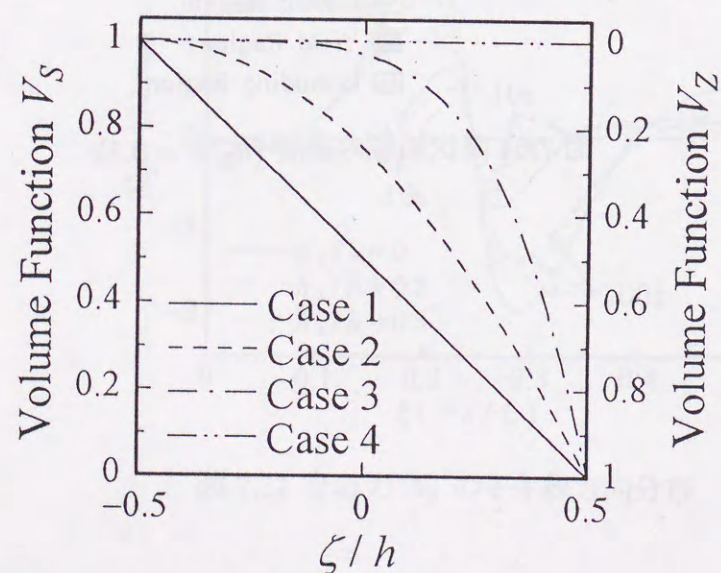


図 7.55 体積分率

その位置における SUS304 の体積分率 V_S を用いて複合則で表現すると、例えば縦弾性係数 $E(\zeta)$ は次式で表される。

$$E(\zeta) = E_Z\{1 - V_S(\zeta)\} + E_S V_S(\zeta) \quad (7.15)$$

ここで添字 S および Z は各々 SUS304 と ZrO₂ の物性値を意味する。

二つの例題とも殻の内外表面の相対熱伝達率は、傾斜機能殻 (Case 1, 2, 3) では $k_{in} = 31.6/R$, $k_{out} = 200/R$ 、SUS 304 の均質殻 (Case 4) では $k_{in} = k_{out} = 31.6/R$ とした。代表物性値には SUS 304 の物性値を用いた。式(4.31)の熱応力の積分には、殻厚方向に19個の格子点を採用して数値計算を行うとともに、式(3.19), (4.31)などの材料定数の殻厚方向数値積分には、含まれる ζ の次数によって、最大64個の格子点を用いた。時間増分 $\Delta\tau$ は 1×10^{-6} とし、例題2で取り上げた有限長円筒殻の子午線方向の差分点数は51とした。これらの値は解の収束性と利用した計算機の容量および計算時間を考慮して決定した。

7.8.1 例題 1. 温度分布解析および解法の評価

SUS304 の体積分率が殻厚方向に Case1 の組成傾斜分布を有する無限長の円筒殻外表面に、一樣な流体加熱が作用する場合(図7.56)の温度分布解析を行い、谷川らの解析解[98]と比較した。図中、代表流体温度 θ_0 は加熱温度とした。

図7.57に、基準温度からの温度変化 t_e の殻厚方向分布を示す。図中、黒丸は、谷川らの層状複合円筒(20層)に対する解析解である。また一点鎖線、破線および実線は、本解法を用いて各々 ζ に関する2, 3, 6次の曲線で殻厚方向の温度分布を近似した解である。図より、特に熱負荷直後 ($\tau = 1 \times 10^{-4}$) においても、温度分布曲線の次数 p を増やすことにより、解は急速に収束して谷川らの解析解によく一致し、本解法の妥当性が確認できる。

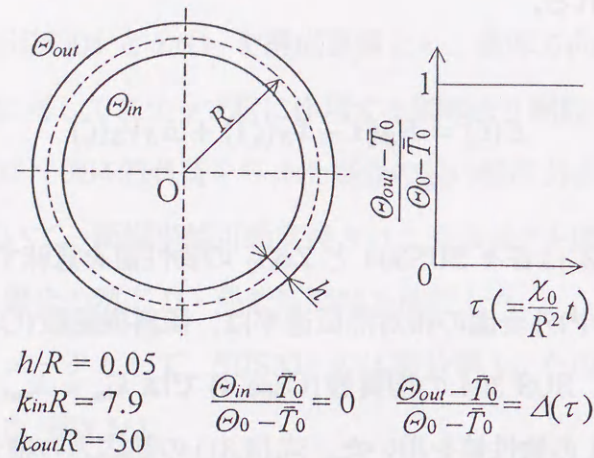


図 7.56 数値解析例 1

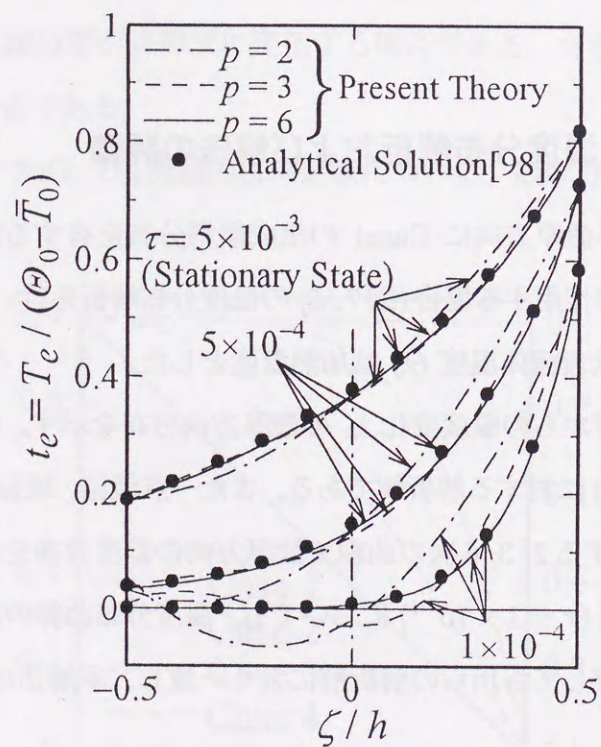


図 7.57 t_e の殻厚方向分布

7.8.2 例題 2. 温度および熱応力解析

殻の両端を断熱とし、単純可動支持された円筒殻の中央部外表面に、軸対称な流体加熱が作用する問題(図7.58)を取り扱った。SUS304 の体積分率は Case1~Case4 の4通りとし、殻厚方向の温度分布曲線を表す多項式の次数 p は、解の収束性を考慮して、Case1~Case4 について各々6, 8, 10, 4とした。

次に計算結果について考察する。図7.59以下、図7.61と図7.64を除いて、実線、破線、一点鎖線および二点鎖線は、それぞれCase1~Case4の結果である。

図7.59は基準温度からの温度変化 t_e について点C($\xi = 0.5$)における殻厚方向分布の時間的变化を示す。図7.60は点Cの t_e の時間的变化を、図7.61は Case 1 の場合の t_e の子午線方向分布の時間的变化を、ともに外表面と内表面について示したものである。熱負荷直後、殻の外表面付近の温度は急激に上昇し、遅れて内表面付近の温度が徐々に上昇する。負荷後およそ $\tau = 5 \times 10^{-3}$ で定常状態に至るが、外表面と内表面の温度差は大きい。この傾向は SUS304 より熱伝導率の小さい ZrO_2 を多く含む円筒殻ほど顕著である。SUS304 のみの均質殻は、定常状態で傾斜機能殻の場合に比べて外表面付近を除いて高温になり、直線状の分布を示す。温度の子午線方向分布は組成傾斜分布の相違に関わら

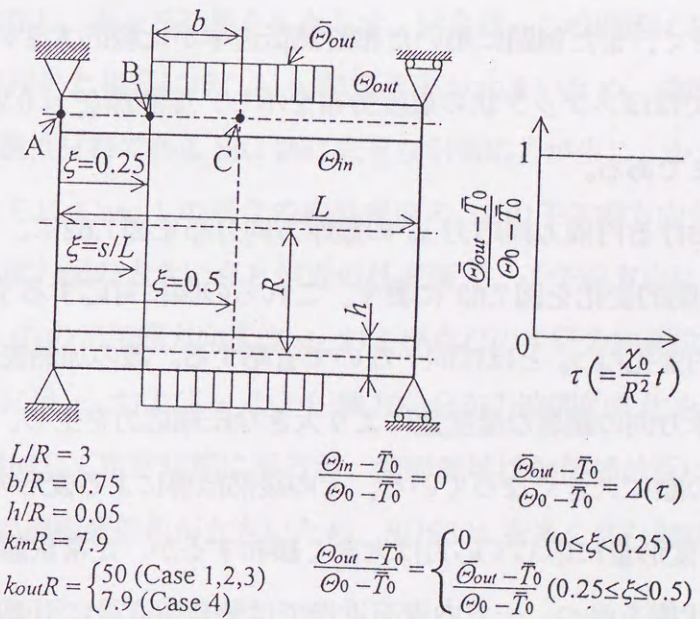


図 7.58 数値解析例 2

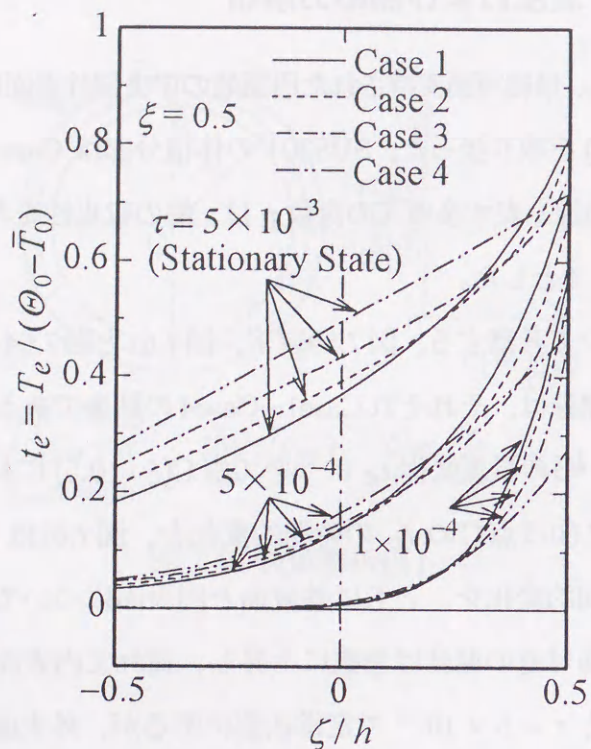


図 7.59 点Cの t_e の殻厚方向分布

ず、いずれの場合もほぼ同様の傾向となるので、Case1のみ図示した。殻は、厚さが他の寸法に比べて小さく、また例題に用いた相対熱伝達率が比較的大きいので、加熱境界(点B: $\xi = 0.25$)付近でほぼステップ状の温度分布を示し、加熱部($\xi = 0.25 \sim 0.5$)付近を除いて初期温度のままである。

次に、点Cにおける円周方向応力 s_θ の殻厚方向分布を図7.62に、また点Cの内外表面における s_θ の時間的変化を図7.63に表す。これらの図に対応する子午線方向応力 s_ξ の分布および時間的変化は s_θ とほぼ同一なので省略する。殻の加熱表面近傍では、熱負荷直後に生ずる殻厚方向の顕著な温度差により大きな圧縮応力を生じ、その値は ZrO_2 の体積分率の大きさの順に大きくなっている。その後熱伝導による変形の進行(後述の図7.65参照)とともに、変形量に応じて応力は大きく緩和するが、定常状態ではいずれの傾斜機能殻も圧縮応力状態を保つ。一方内表面近傍では熱負荷直後に引張応力を示した後漸増し、その増加量は SUS304 の体積分率の大きい傾斜機能殻ほど大きい。Case4 の SUS304

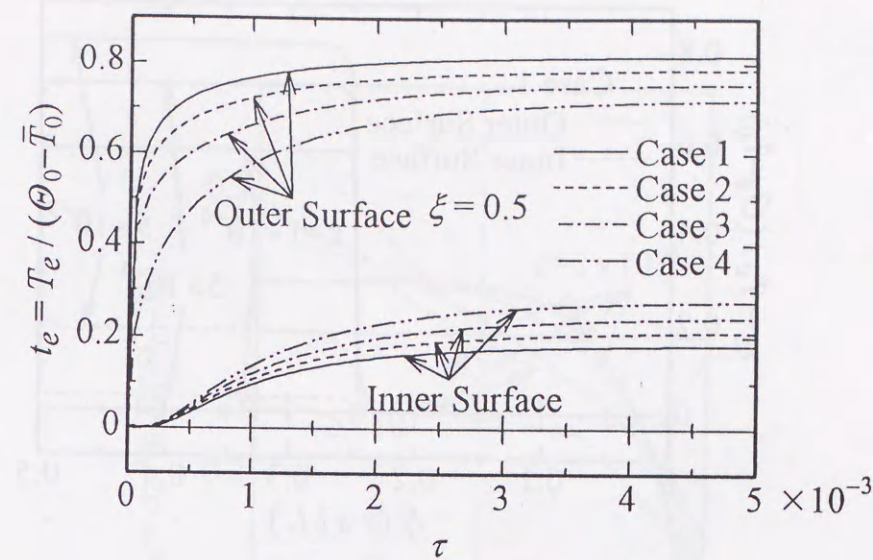


図 7.60 点Cの t_e の時間的変化

のみからなる均質殻では、傾斜機能殻に比べて殻の内表面側の引張応力は大きい。定常時における傾斜機能殻の外表面近傍が圧縮応力状態を維持することを併せ考えると、一般に高温側にセラミックス等の耐熱性に優れた脆性材料を、また低温側に延性材料の金属を配した傾斜機能殻の利点がうなずける。しかしながら、これらの傾向は選定された傾斜機能材料および例題に依存し、異なる結果をもたらす。例えば、この例題においてSiCとAlから成る傾斜機能殻を用いた場合には、Alの熱伝導率が大きいため、殻厚方向に適切な温度勾配が得られず、脆性材料であるSiC側に大きな引張応力が生じ、かえって円筒殻が破壊しやすくなる。さらにCase1の場合の内外表面の s_θ の子午線方向分布を図7.64に示す。子午線方向に温度勾配の大きい点B付近の外表面で、子午線方向に大きく変動する。

図7.65は点A($\xi = 0$)の子午線方向変位 u_ξ および点Cの半径方向変位 w の時間的変化を示す。また図7.66には u_ξ および w の子午線方向分布の時間的変化を表す。熱負荷後、両変位は緩やかに増加して定常状態に至るが、変形領域は加熱部付近に限られる。また ZrO_2 より SUS304 の線膨張係数が大きいため、SUS304 を多く含む殻ほど変形量は大きくなる。

最後に合応力 n_θ と合モーメント m_ξ の子午線方向分布を各々図7.67, 図7.68に表す。 n_θ

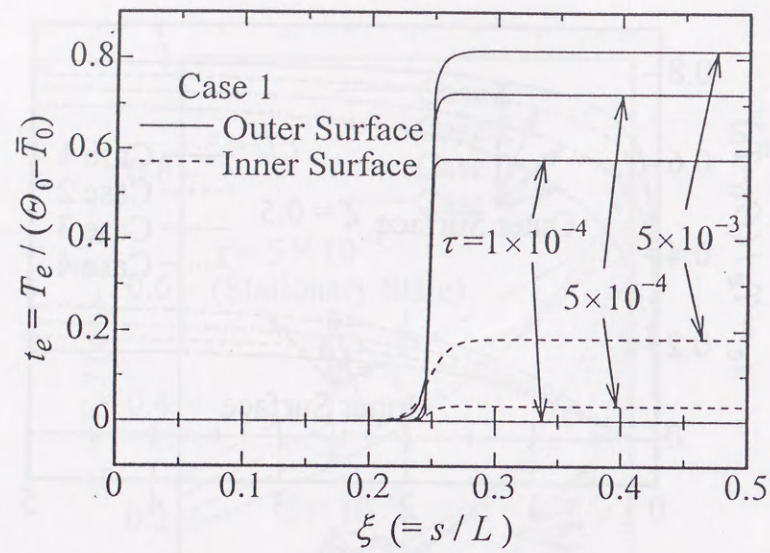


図 7.61 t_e の子午線方向分布 (Case 1)

は子午線方向の温度勾配の極めて大きい点B付近で子午線方向に著しく変動し、その変動量は SUS304 を多く含む殻ほど大きい。また n_θ は、変位 w の子午線方向分布の時間的变化と同様に、時間とともに単調に増大する。一方 m_ξ は、加熱部で傾斜機能殻の場合には熱負荷後 $\tau = 5 \times 10^{-4}$ より $\tau = 5 \times 10^{-3}$ の時の方が小さくなるが、SUS304 の均質殻ではあまり緩和しない。

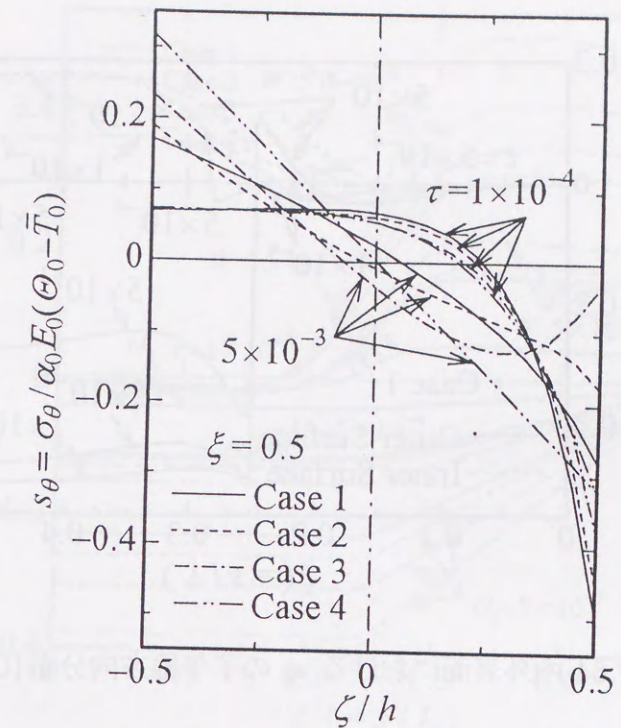


図 7.62 点Cの s_θ の殻厚方向分布

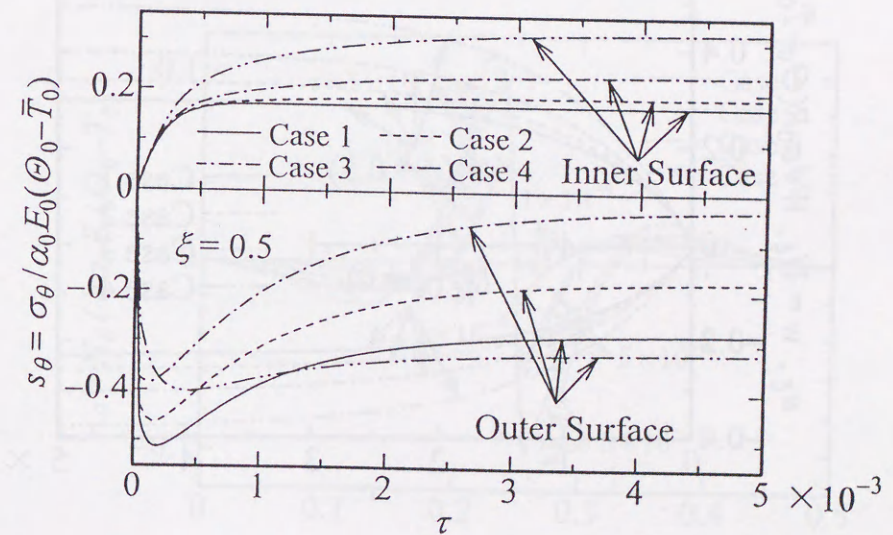


図 7.63 点Cの内外表面における s_θ の時間的变化

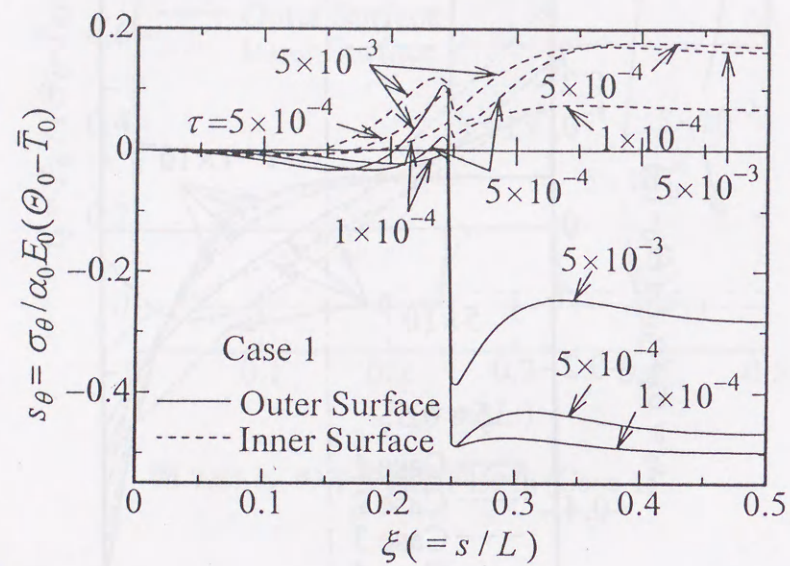


図 7.64 内外表面における s_θ の子午線方向分布 (Case1)

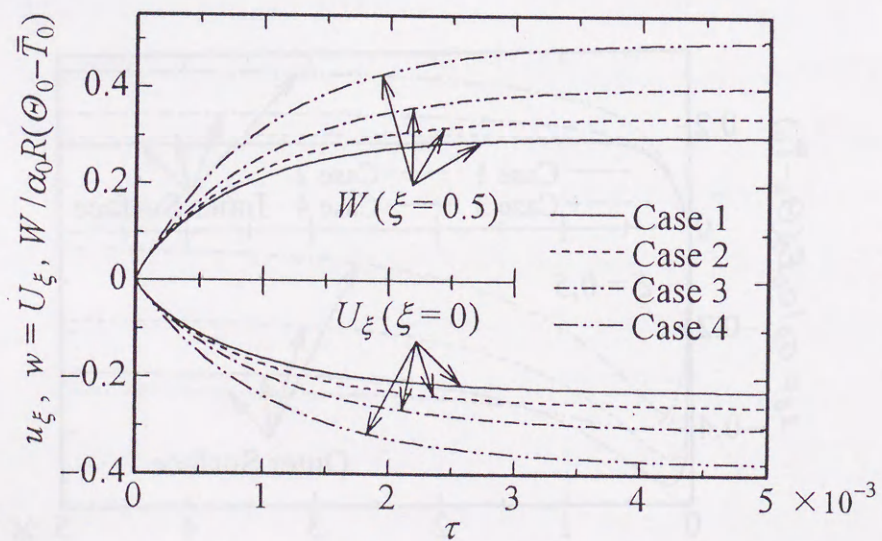


図 7.65 u_ξ, w の時間的变化

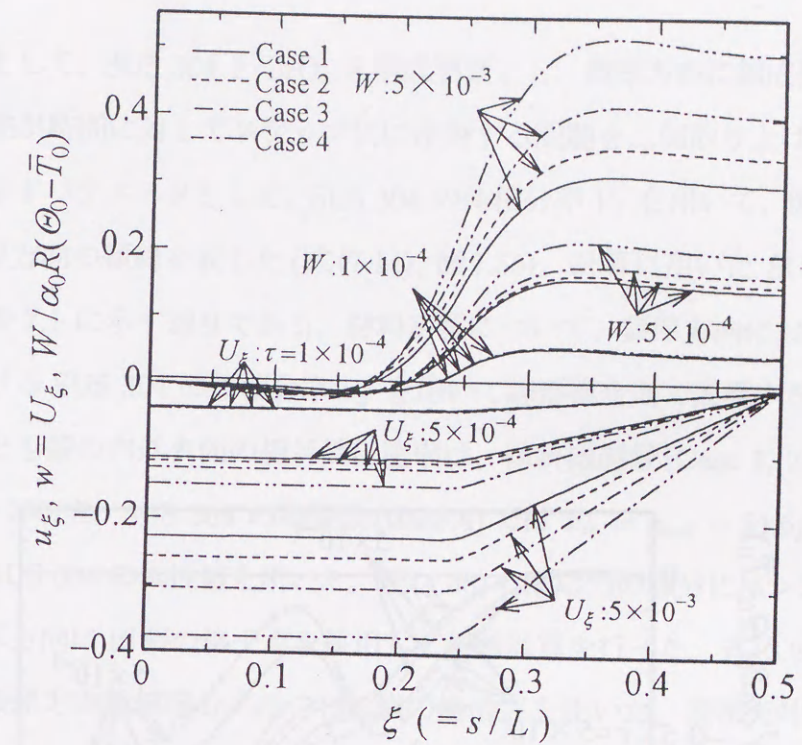


図 7.66 u_ξ, w の子午線方向分布

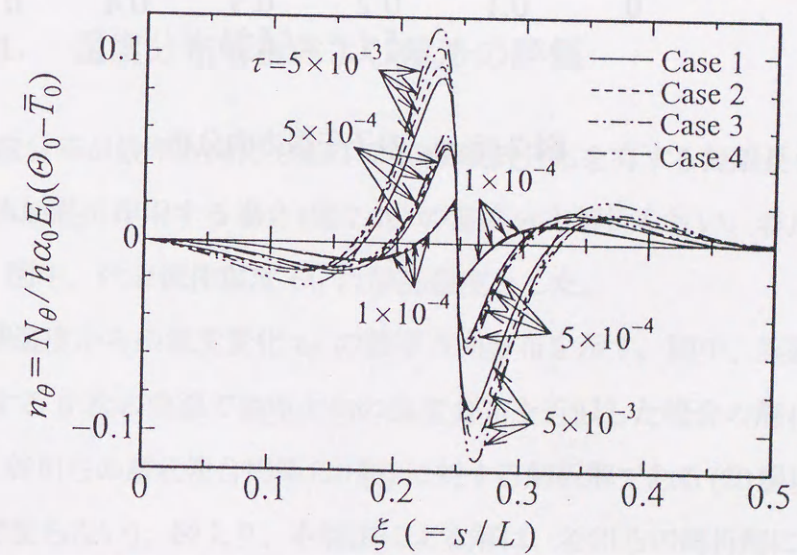


図 7.67 n_θ の子午線方向分布

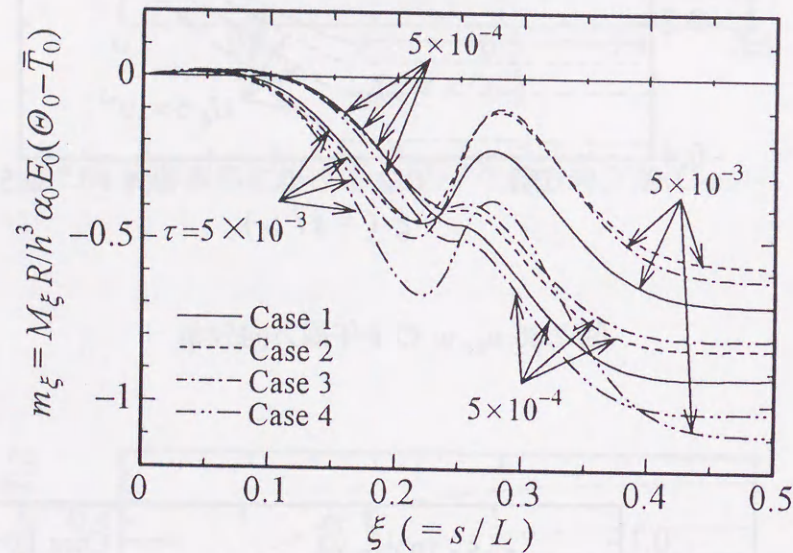


図 7.68 m_ξ の子午線方向分布

7.9 傾斜機能厚肉殻

数値解析例として、SUS 304 と ZrO_2 を構成要素とし、殻厚方向に組成傾斜を持つ円筒殻に、流体加熱が時間に対してステップ状に作用する問題を二例取り上げた。

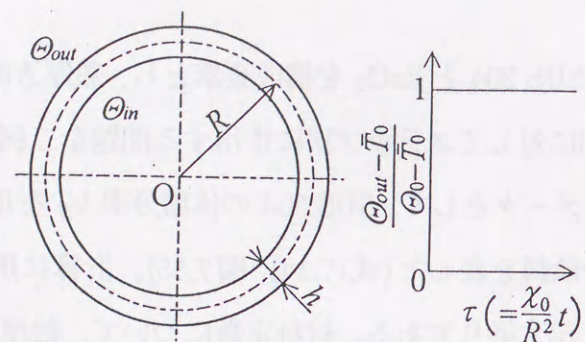
組成傾斜を示すパラメータとして、SUS 304 の体積分率 V_S を用いて、第 7.8 節と同じく 4 種類の殻厚方向の傾斜を表した (式 (7.14), 図 7.55)。計算に用いた SUS 304 と ZrO_2 の材料定数は表 7.1 に示す通りである。材料定数について、殻厚方向における物性値を、その位置における SUS 304 の体積分率 V_S を用いて線形複合則で表現する (式 7.15)。

二つの例題とも殻の内外表面の相対熱伝達率は、傾斜機能殻 (Case 1, 2, 3) では $k_{in} = 31.6/R$, $k_{out} = 200/R$, SUS 304 の均質殻 (Case 4) では $k_{in} = k_{out} = 31.6/R$ とした。代表物性値には SUS 304 の物性値を用いた。式 (4.38) の熱応力の積分にはシンプソンの 1/3 則を用い、殻厚方向に 19 個の格子点を採用して数値計算を行った。式 (3.23), (4.39) などの材料定数の殻厚方向数値積分には、128 個の格子点を用いた。無次元時間増分 $\Delta\tau$ は 10^{-5} とした。これらの値は解の収束性と利用した計算機の容量および計算時間を考慮して決定した。

7.9.1 例題 1. 温度分布解析および解法の評価

SUS 304 の体積分率が殻厚方向に Case 1 の組成傾斜分布を有する無限長の円筒殻外表面に、一様な流体加熱が作用する場合 (図 7.69) の温度分布解析を行い、谷川らの解析解 [98] と比較した。図中、代表流体温度 θ_0 は加熱温度とした。

図 7.70 に、基準温度からの温度変化 t_e の殻厚方向分布を示す。図中、実線は、本解法を用いて ζ に関する 6 次の曲線で殻厚方向の温度分布を近似した場合の解 (収束解) を示す。また黒丸は、谷川らの層状複合円筒 (20 層) に対する解析解である (20 層以上の場合も解の値はほとんど変わらない)。図より、本解法による解は、谷川らの解析解によく一致し、本解法の妥当性が確認できる。参考までに、薄肉殻理論 [96] による結果を破線で示す。特に定常状態 ($\tau = 0.04$) において、本理論による結果よりも若干低い値を示している。



$$\begin{aligned} h/R &= 0.2 \\ k_{in}R &= 31.6 & \frac{\theta_{in} - \bar{T}_0}{\theta_0 - \bar{T}_0} &= 0 & \frac{\theta_{out} - \bar{T}_0}{\theta_0 - \bar{T}_0} &= \Delta(\tau) \\ k_{out}R &= 200 \end{aligned}$$

図 7.69 数値解析例 1

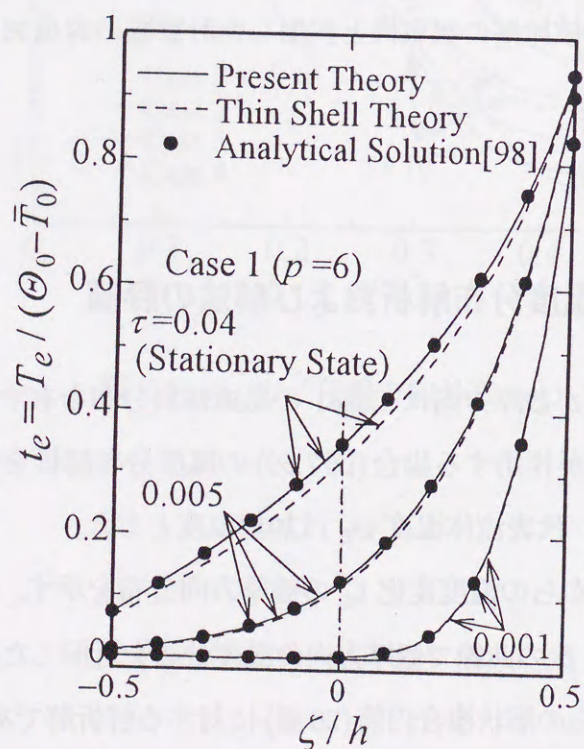


図 7.70 t_e の殻厚方向分布

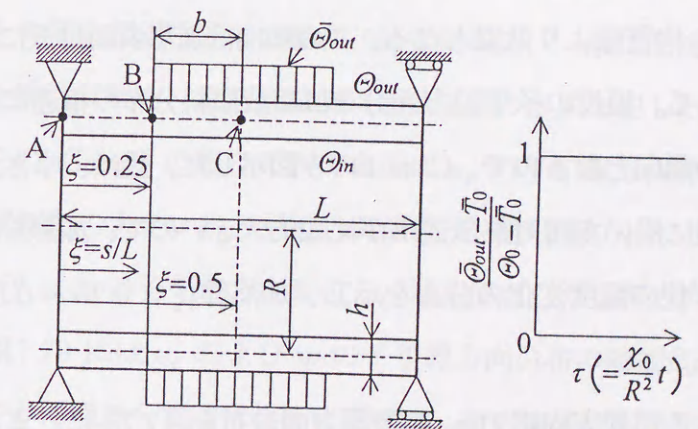
7.9.2 例題 2. 温度および熱応力解析

殻の両端を断熱とし、単純可動支持された円筒殻の中央部外表面に、軸対称な流体加熱が作用する問題(図7.71)を取り扱った。SUS 304 の体積分率は Case 1~Case 4 の 4 通りとした。解の収束性を考慮して、殻厚方向の温度分布曲線を表す多項式の次数 p は、Case 1~Case 4 について各々 6, 8, 10, 4 とし、円筒殻の子午線方向(AC間)の差分点数は 101 とした。例題 1 と同様に、代表流体温度 θ_0 は最大加熱温度とした。

次に計算結果について考察する。

図7.72以下、図7.74と図7.77を除いて、実線、破線、一点鎖線および二点鎖線は、それぞれ Case1~Case4 の結果である。

図7.72は基準温度からの温度変化 t_e について点 C($\xi = 0.5$) における殻厚方向分布の時間的变化を示す。図7.73は点 C の t_e の時間的变化を、図7.74は Case 1 の場合の t_e の子午線方向分布の時間的变化を、ともに外表面と内表面について示したものである。熱負荷直後、殻の外表面付近の温度は急激に上昇し、遅れて内表面付近の温度が徐々に上昇する。負荷後およそ $\tau = 0.04$ で定常状態に至るが、外表面と内表面の温度差はかなり大き



$$\begin{aligned} L/R &= 3 \\ b/R &= 0.75 \\ h/R &= 0.2 \\ k_{in}R &= 31.6 \\ k_{out}R &= \begin{cases} 200 & (\text{Case 1, 2, 3}) \\ 31.6 & (\text{Case 4}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{\theta_{in} - \bar{T}_0}{\theta_0 - \bar{T}_0} = 0 \quad \frac{\bar{\theta}_{out} - \bar{T}_0}{\theta_0 - \bar{T}_0} = \Delta(\tau)$$

$$\frac{\theta_{out} - \bar{T}_0}{\theta_0 - \bar{T}_0} = \begin{cases} 0 & (0 \leq \xi < 0.25) \\ \frac{\bar{\theta}_{out} - \bar{T}_0}{\theta_0 - \bar{T}_0} & (0.25 \leq \xi \leq 0.5) \end{cases}$$

図 7.71 数値解析例 2

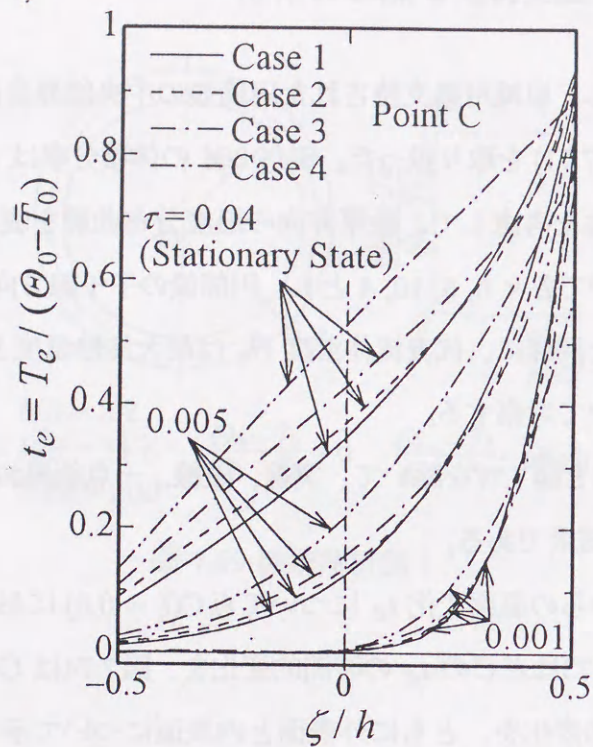


図 7.72 点 C の t_e の殻厚方向分布

い。傾斜機能殻は、比較的熱伝導率の小さい ZrO_2 が断熱効果を示し、加熱表面近傍を除いて SUS 304 のみの均質殻より低温となる。この傾向は加熱表面付近に ZrO_2 を多く含む円筒殻ほど顕著である。温度の子午線方向分布は組成傾斜分布の相違に関わらず、いずれの場合もほぼ同様の傾向となるので、Case 1 のみ図示した。殻は、厚さが他の寸法に比べて小さく、また例題に用いた相対熱伝達率が比較的大きいので、加熱境界(点 B: $\xi = 0.25$)付近ではほぼステップ状の温度変化の分布を示し、加熱部 ($\xi = 0.25 \sim 0.5$) 付近を除いて初期温度のままである。

次に、点 C における円周方向応力 s_θ の殻厚方向分布を図 7.75 に、また点 C の内外表面における s_θ の時間的変化を図 7.76 に表す。これらの図に対応する子午線方向応力 s_ξ の分布および時間的変化は s_θ とほぼ同一の傾向を示すので省略する。殻の加熱表面近傍では、熱負荷直後に生ずる殻厚方向の顕著な温度差により大きな圧縮応力を生じ、その値は ZrO_2 の体積分率の大きさの順に大きくなっている。その後熱伝導による変形の進行(後

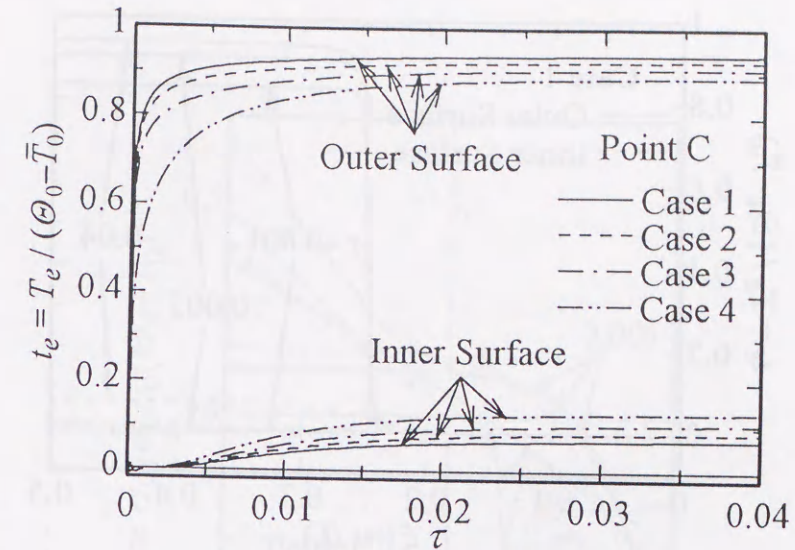


図 7.73 点 C の t_e の時間的変化

述の図 7.78, 7.79 参照) とともに、変形量に応じて加熱表面近傍の圧縮応力は大きく緩和するが、定常状態ではいずれの殻も圧縮応力状態を保つ。一方内表面近傍では熱負荷直後に引張応力を示した後漸増する。傾斜機能殻では、SUS 304 のみからなる均質殻に比べて殻の内表面側の引張応力は小さく、その差は熱負荷直後より生じて時間の経過と共に大きくなる。定常時における傾斜機能殻の外表面近傍が圧縮応力状態を維持することを併せ考えると、節 7.8 の薄肉傾斜機能殻の場合 [96] と同様に、一般に高温側にセラミックス等の耐熱性に優れた脆性材料を、また低温側に延性材料の金属を配した傾斜機能殻の利点がある。さらに Case 1 の場合の内外表面の s_θ の子午線方向分布を図 7.77 に示す。子午線方向に温度勾配の大きい点 B 付近の外表面で、子午線方向に大きく変動する。

図 7.78 は点 A ($\xi = 0$) の子午線方向変位 u_ξ および点 C の半径方向変位 w の時間的変化を示す。また図 7.79 には u_ξ および w の子午線方向分布の時間的変化を表す。熱負荷後、両変位は緩やかに増加して定常状態に至るが、変形領域は加熱部付近に限られる。また ZrO_2 より SUS 304 の線膨張係数が大きいため、SUS 304 を多く含む円筒殻ほど変形量は大きくなる。

最後に合応力 n_θ と合モーメント m_ξ の子午線方向分布を各々図 7.80, 図 7.81 に表す。 n_θ は子午線方向の温度勾配の極めて大きい点 B 付近で子午線方向に著しく変動し、その変動

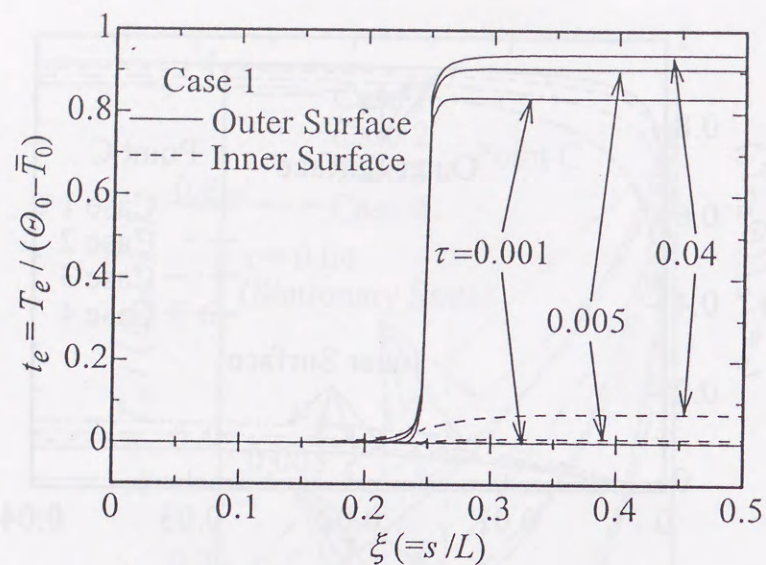


図 7.74 t_e の子午線方向分布 (Case 1)

量は SUS 304 を多く含む円筒殻ほど大きい。定常状態では、いずれの円筒殻も中央部で引張応力状態を示し、均質殻では顕著である。また n_θ は、変位 w の子午線方向分布の時間的变化と同様に、時間とともに単調に増大する。一方 m_ξ は、加熱部で $\tau = 0.005$ のときより定常状態 ($\tau = 0.04$) での値の方が小さくなる。SUS 304 の均質殻では、殻全体にわたって傾斜機能殻より大きな値を示す。

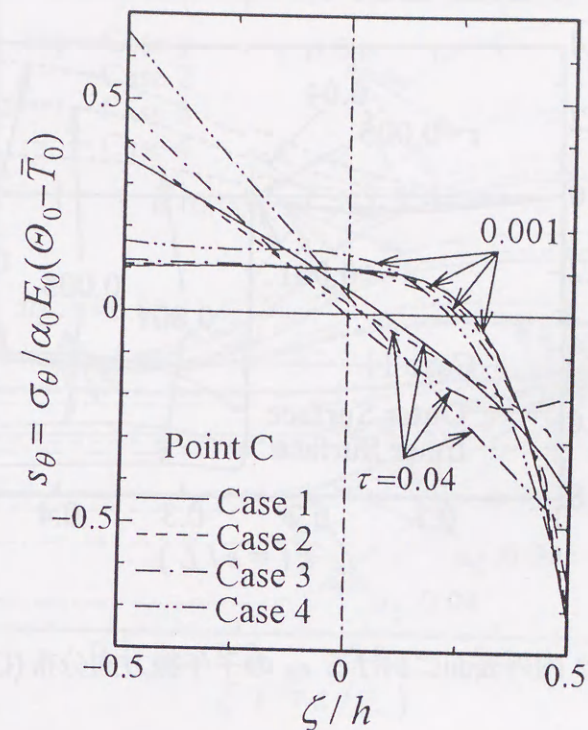


図 7.75 点 C の s_θ の殻厚方向分布

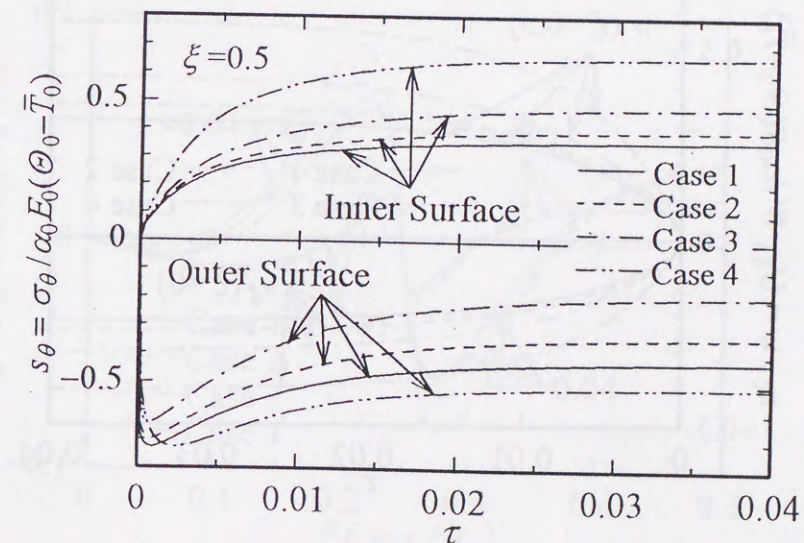


図 7.76 点 C の内外表面における s_θ の時間的变化

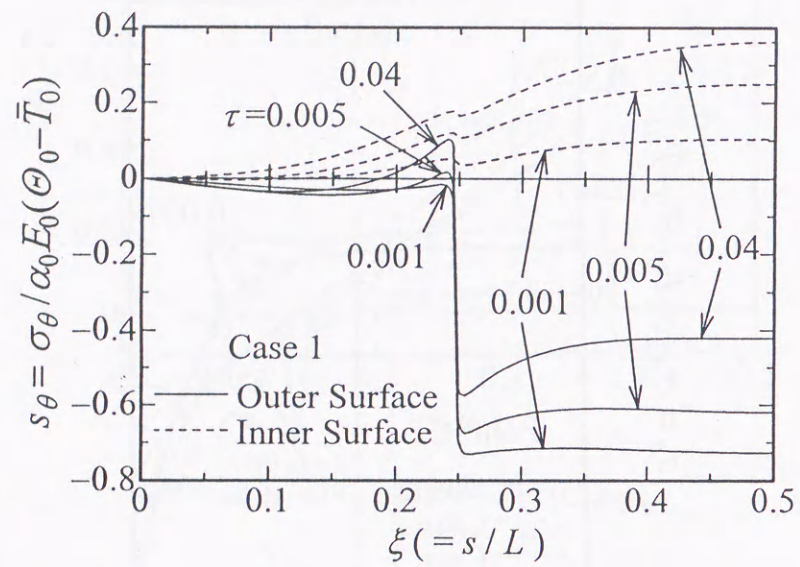


図 7.77 内外表面における s_θ の子午線方向分布 (Case 1).

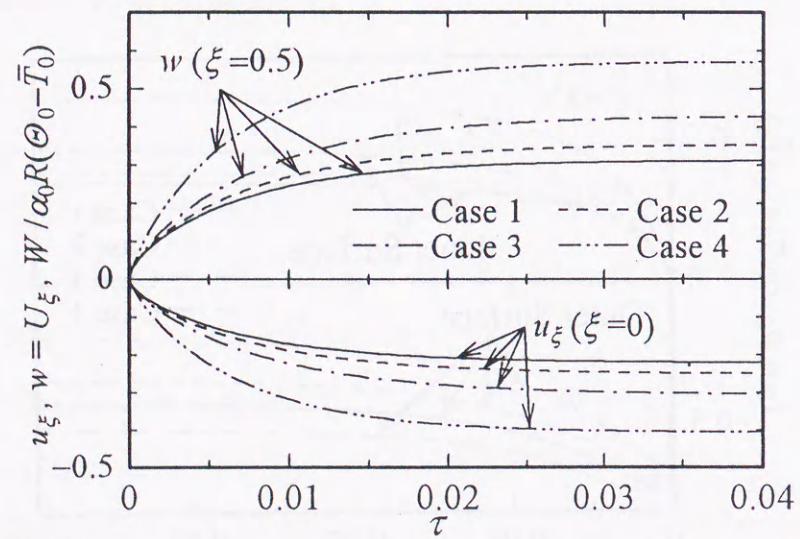


図 7.78 u_ξ と w の時間的变化

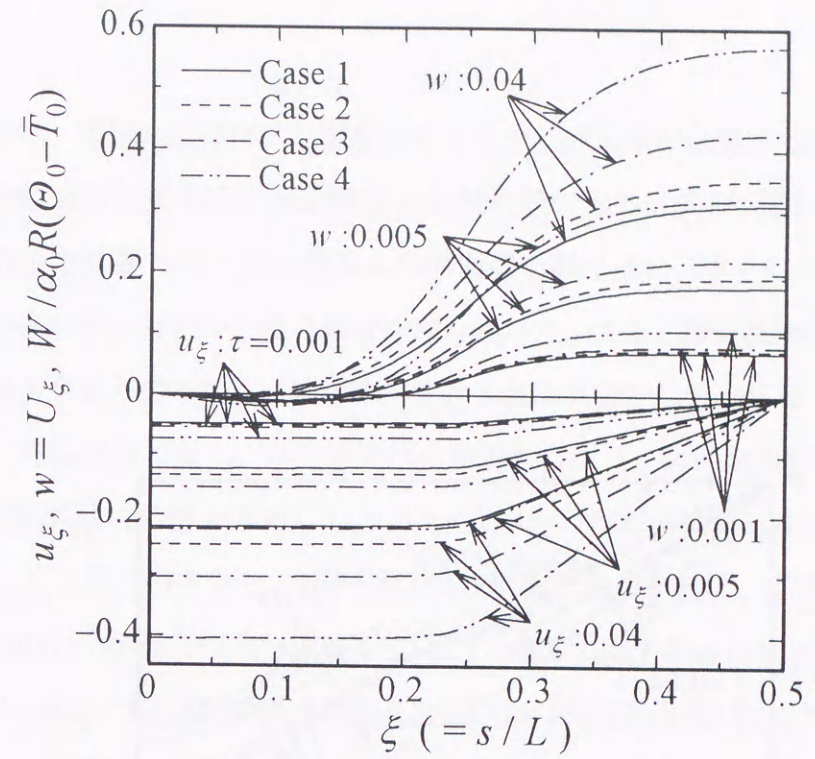


図 7.79 u_ξ と w の子午線方向分布

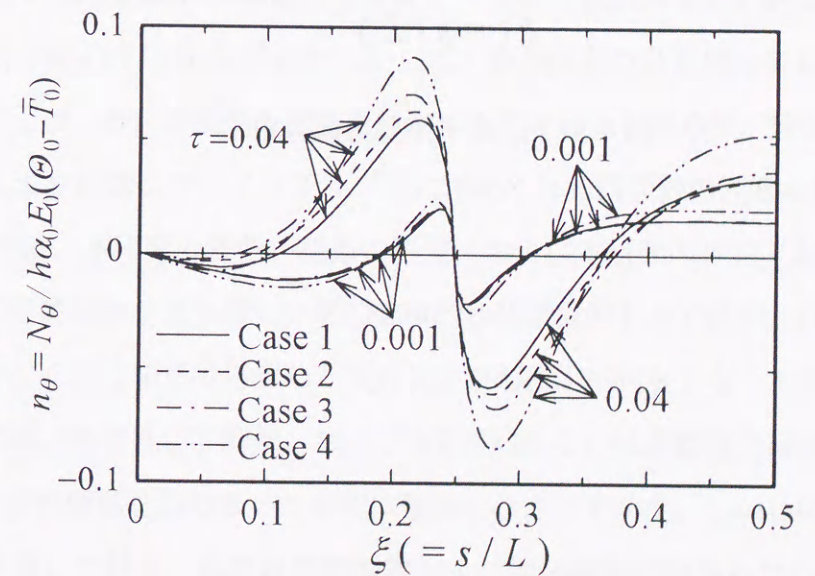


図 7.80 n_θ の子午線方向分布

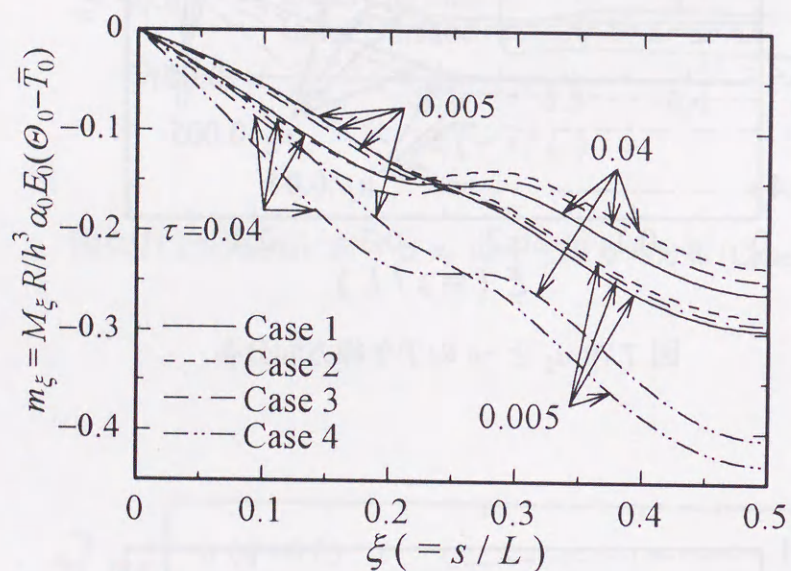


図 7.81 m_ξ の子午線方向分布

第8章 結論

本論文では、周囲の流体により温度負荷を受ける非定常熱伝導を考慮した回転対称殻の熱弾/粘塑性変形問題および傾斜機能回転対称殻の熱弾性変形問題の解法を示した。熱弾/粘塑性変形問題では、薄肉殻および厚肉殻を取り扱い、さらにそれぞれの殻が均質材料および多層複合材料からなる場合を取り扱った。また、傾斜機能殻においても薄肉殻および厚肉殻を取り扱った。殻構造物が受ける温度負荷として、日常で頻繁に起こり得る流体からの熱伝達を考慮し、また殻体内の発熱も含めた。殻の温度分布を求めるために、殻の幾何学的形状の特徴を考慮して、二次元化された熱伝導方程式を導出した。そして解いて得られた温度分布をもとに回転対称殻の基礎式から、変位、応力などを求めた。回転対称殻の内力の平衡方程式および変位-ひずみ関係には、Sanders, Jr.[3](薄肉殻) および Reissner-Naghdi[1, 10](厚肉殻)の理論式を用いた。構成関係式には、弾性領域には Hooke の法則を、塑性領域では温度の影響を考慮した Perzyna の式[15]を採用した。その降伏条件には Von Mises の理論を用いた。ただし、傾斜機能殻を取り扱った問題は弾性範囲内とした。数値解析法では、空間に対して中間差分式および前進・後退3点差分式を用い、空間に対して Crank-Nicolson 法を用いた。一方、方程式の係数に含まれる殻厚方向の積分は、Simpson の 1/3 則を用いた。そして、ある任意の計算段階における温度、変位および内力などは、各計算段階の増分を総和することにより求めた。数値解析例として、周囲の流体により時間に対してステップ状に加熱される円筒殻の問題を取り扱った。

第1章では、本研究の背景、従来の研究、および本研究の目的と本論文の構成を述べた。近年、殻構造物がより厳しい熱的機械的負荷環境のもとで使用されるようになり、弾性域だけでなく塑性域まで考慮した設計および解析が不可欠となってきた。これまで、回転対称殻の弾/粘塑性応答問題、および均質材料あるいは多層複合材料からなる殻の熱伝導・熱弾性変形問題を取り扱った研究は数多くなされてきた。しかしながら、殻の非定常熱伝導を考慮して熱弾/粘塑性変形問題および傾斜機能材料からなる殻の熱弾性変形問題を取り扱った研究はあまり行われていなかった。また、傾斜機能材料は熱応力緩和材料として近年注目されており、傾斜機能材料からなる単純な機械要素を対象とした熱伝導・

熱応力の解析結果が多数報告されているが、傾斜機能殻を取り扱った研究は少ないようである。

第2章では、本研究で取り扱う回転対称殻の形状、幾何学的関係式を述べた。

第3章では、薄肉殻および厚肉殻の三次元非定常熱伝導方程式、殻の内外表面における熱伝達を考慮した境界条件、および多層殻における各層の界面の熱的接続条件を示し、それぞれの殻に対し殻厚方向の温度分布を多項式で表した。均質な薄肉殻および厚肉殻では、殻厚方向の温度分布を二次曲線で表した。また多層薄肉殻では、各層が十分薄いと見え、各層の殻厚方向の温度分布を線形で近似した。一方、多層厚肉殻では、均質殻と同様に、各層の殻厚方向の温度分布を二次曲線で表した。また、傾斜機能材料からなる薄肉殻および厚肉殻は、使用される材料の熱伝導率が著しく小さいため、殻厚方向の温度変化が大きくなることから、温度の殻厚方向分布を任意の多項式で表わし、その次数は、解の収束状態により決定することにした。これらの温度の近似多項式を対応する三次元熱伝導方程式に適用し、それぞれの殻に対する二次元化された熱伝導方程式を導いた。

第4章では、熱変形に関する基礎方程式を示した。薄肉殻では Sanders, Jr. の理論 [3] を、厚肉殻にはせん断変形を考慮した Reissner-Naghdi の理論 [1, 10] より、内力の平衡方程式およびひずみと変位の関係式を与えた。構成関係式には、弾性領域では Hooke の法則を、塑性領域では温度の影響を考慮した Perzyna の式 [15] を採用した。降伏条件には Von Mises の理論を用いた。合応力および合モーメントは、均質殻、多層殻および傾斜機能殻のものをまとめて示した。ただし、傾斜機能殻の解法は弾性範囲内とし、基礎式は塑性に関する項を除いた式を用いた。

第5章では、各変数を無次元表示し、非軸対称問題を解析するために円周方向にフーリエ級数で表した。それらを基礎式に代入し、フーリエ係数に関する式をつくった。最終的に、熱伝導方程式から温度の近似式の係数に関する連立2階微分方程式を導いた。一方、熱変形方程式から順次未知数を消去し、薄肉殻に関しては3つの変位成分と1つの合モーメント成分を未知数とする4元連立2階微分方程式を、厚肉殻に関しては3つの変位成分と2つの回転成分を未知数とする5元連立2階微分方程式を導いた。

第6章では、本研究で用いた数値計算法を述べた。ある任意の計算段階における解は

第5章で示した連立微分方程式を解くことによって得られるが、それらの方程式を厳密に理論解析することは困難であるから差分法によって数値的に解を求めた。境界部では前進および後退3点差分式を、連続部では中間差分式を用いた。熱伝導方程式に含まれる時間に関する微分項には、Crank-Nicolson の差分式を用いた。これらを連立微分方程式および境界条件式に用いて、代数方程式を導いた。それらを解くことにより、ある任意の計算段階の温度、変位および内力などの増分が得られ、各計算段階の増分を総和することにより任意の計算段階における諸量を得た。

第7章では、これまで述べてきた解法を用いた数値解析例およびその結果を示した。数値解析例として、周囲の流体により時間に対してステップ状に温度負荷を受ける回転対称殻の問題を取り扱った。まず、回転対称殻の幾何学的諸量を円筒殻の場合に適用した。また、円筒殻を両端で断熱とし、回転可動支持するための境界条件を与えた。次に、数値解析例で取り扱う材料の材料定数、降伏応力および粘塑性パラメータを示した。

続いて、各種類の殻に対する例題およびその解析結果を示した。

均質薄肉殻の例題では、チタン製円筒殻の中央部に軸対称な流体加熱が作用する熱伝導問題を取扱った。その結果、円筒殻の両表面で相対熱伝達率に大きな差があると、殻厚方向の温度分布を線形では十分近似できず、2次曲線で近似する必要性が示された。また、内圧が作用している両端単純支持のアルミ円筒殻に流体加熱が作用する問題も取り扱った。その結果、殻体内の温度の上昇と共に、変位および内力成分は緩やかに変化して定常値に至り、降伏を生じた領域では、変形の戻りや内力の緩和が見られた。円筒殻が両端で拘束されていることから、合応力 N_θ は殻の端部で、合モーメント M_ξ, M_θ は端部付近で、局所的に大きな値を示し、また熱負荷境界で子午線方向にやや大きく変化することがわかった。

均質厚肉殻の例題では、両端単純可動支持の軟鋼円筒殻に、流体加熱が作用する問題を取扱った。その結果、得られた温度分布が理論解析による温度分布とほぼ一致したことから、殻厚方向に二次曲線の温度分布を仮定した本解法は、かなり精度良く殻体内の温度分布を求めることができ、伝熱による殻の熱変形問題の解析に極めて有効であることがわかった。また、本理論による結果と、せん断変形の影響を無視した薄肉理論による結果と

の差は、変位、合応力成分において小さく、合モーメント成分において顕著であることがわかった。

多層薄肉殻の例題では、内側に軟鋼、外側にチタンの層を配した両端単純可動支持の二層構造の内圧負荷円筒殻に、非軸対称な流体加熱が外側から、時間に対してステップ状に作用する問題を取り扱った。解析には、層の厚さが異なる二つの二層円筒殻および SUS304 製の円筒殻を対象とした。その結果、チタンの層の厚が増すと加熱部の温度は高くなり、半径方向変位と合モーメントの時間的変化は大きくなるが、合応力の時間的変化は小さくなる傾向があることが分かった。さらに、降伏領域の進展の様子にも層の厚さの比により顕著な差異が認められた。

多層厚肉殻の例題として、軟鋼およびチタンから成る両端単純可動支持の二層円筒殻に、流体加熱が作用する問題を取り扱った。まず円筒殻内表面に一樣に熱負荷を与えた場合の殻の温度分布解析を行い、解の精度の評価を行った。その結果、殻厚方向に二次曲線の温度分布を各層に仮定した本解法は、かなり精度良く殻体内の温度分布を求めることができ、伝熱による多層厚肉殻の熱変形問題の解析に極めて有効であることがわかった。さらに各層を仮想的に分割して層の数を増やすことにより、熱負荷直後の解の精度がさらに向上できることがわかった。続いて、多層薄肉殻を対象とした解析に用いた3種類の二層円筒殻の外表面に局所的に軸対称加熱を与えた場合の熱弾/粘塑性応力問題を解析し、チタン層の厚さの殻厚に対する比を変えてその差異を調べた。その結果、チタン層の厚が増すと加熱部表面の温度は高くなり、またチタン層内部の殻厚方向温度勾配は大きくなること、さらに変形および内力にも層の厚さの比による顕著な差異が認められた。

傾斜機能薄肉殻の例題では、SUS304 と ZrO_2 から成る傾斜機能円筒殻に、流体加熱が時間に対してステップ状に作用する問題を取り扱った。まず無限長円筒殻の外表面に一樣に熱負荷を与えた場合の殻の温度分布解析を行い、解の精度の評価を行った。その結果、温度分布曲線の次数を増やすことにより、傾斜機能殻に見られるような殻厚方向に局所的に勾配の急な温度分布を生ずる問題に対しても、本解法はかなり精度良く殻体内の温度分布を求めることができ、傾斜機能殻の熱応力問題の解析に極めて有効であることがわかった。続いて、両端単純可動支持の円筒殻外表面に、局所的に軸対称加熱を与えた場合の熱

応力問題を解析し、SUS304 のみの均質殻を含む4種類の組成傾斜殻の応答の差異を調べた。その結果、熱伝導率の小さい ZrO_2 を多く含む殻ほど、加熱表面近傍でより高温に、また内部では低温となり、定常状態での殻厚方向温度分布の勾配が大きくなる。 ZrO_2 は線膨張係数が SUS304 に比べて小さいため、 ZrO_2 を多く含む殻ほど、変形は小さい。また SUS304 のみの均質殻の結果と比較すると、傾斜機能殻は定常状態において、加熱部の内外表面付近でより小さい応力を示し、傾斜機能殻の特性が見られた。

傾斜機能厚肉殻の例題には、薄肉殻と同様に、SUS304 と ZrO_2 から成る傾斜機能円筒殻に、流体加熱が時間に対してステップ状に作用する問題を取り扱った。まず無限長円筒殻の外表面に一樣に熱負荷を与えた場合の殻の温度分布解析を行い、解の精度の評価を行った。その結果、比較的厚い傾斜機能殻の問題に対して、本解法はかなり精度良く殻体内の温度分布を求めることができ、傾斜機能厚肉殻の熱応力問題を解析するのに極めて有効であることがわかった。続いて、両端単純可動支持の円筒殻外表面に、局所的に軸対称加熱を与えた場合の熱応力問題を解析し、SUS304 のみの均質殻を含む4種類の組成傾斜殻の殻の応答を調べた。その結果、傾斜機能殻は、 ZrO_2 が断熱効果を示し、加熱表面近傍を除いて、SUS304 のみの均質殻より低温となり、 ZrO_2 を多く含む円筒殻ほど内外表面の温度差は大きくなる。また、定常状態において傾斜機能殻が加熱部の内外表面付近で SUS304 のみの均質殻より小さい応力を示し、熱応力が緩和されることが確認された。

以上より、本研究によって、周囲の流体により温度負荷を受ける非定常熱伝導を考慮した回転対称殻の熱弾/粘塑性変形問題および傾斜機能回転対称殻の熱弾性変形問題の一解法が確立された。さらに、本理論は、傾斜機能殻の塑性を考慮した解析、動的問題への適用などへの発展性をもっている。また、本研究では微小変形理論にとどまったが、大変形および熱座屈現象を取り扱った問題の解析も重要であり、今後の研究が期待される。

謝 辞

本論文は、著者が豊橋技術科学大学学部4年次から同学大学院修士課程を経て、同学大学院博士課程3年次に至るまでに行った研究成果をまとめたものです。この研究成果は、多くの方から御指導、御助言、御協力、御援助いただいた結果に達成されたものです。ここに記して感謝の意を示したいと思います。

本論文に関する研究の遂行ならびに本論文の作成にあたり、終始懇切なる御指導、ご鞭撻を賜った、指導教官である本学機械システム工学系 竹園茂 男 教授、埜 克己 助教授、ならびに元本学機械システム工学系 陳 建橋 助教授には、心から感謝を申し上げます。また、本学機械システム工学系 感本 広文 助手には、研究室および博士課程の先輩として、研究以外にも多くのご助言をいただき、心からここに御礼申し上げます。

本論文を完成させるにあたり、本学機械システム工学系 上村 正雄 教授、関東 康祐 助教授には、有益な御指導、御助言をいただき、心から感謝申し上げます。

研究を進めていく上で、同研究室の先輩方、および後輩諸君に大変お世話になり、感謝致します。特に、直属の先輩である青木 隆 氏、および共同で研究を進めた三井 裕次 氏、中出 顕司 氏、井上 雅弘 氏、小澤 義央 氏、中津 顕 氏には、心より深く感謝致します。

また、苦楽を伴にした同級生の檜山 武士 氏、佐藤 克明 氏、猶木 圭三 氏、伴 昌亮 氏、後藤 幸市 氏、そして同じ博士課程を過ごした野田 玲治 氏には、精神的な面からも支えになっていただき、心から感謝致します。

最後に、研究の機会と援助をいただき、終始見守っていただいた祖父母、両親、兄、妹には本論文の完成をもってお礼とさせていただきます。

- [1] Reissner, E., "A New Derivation of the Equations for the Deformation of Elastic Shells," *American Journal of Mathematics*, Vol. 63, No. 1, pp. 177-184, 1941.
- [2] Love, A. E. H., *Treatise on the Mathematical Theory for Thin Shells*, Cambridge University Press, Fourth Edition, 1927.
- [3] Sanders, J. L., J., "An Improved First-Approximation Theory for Thin Shells," *NASA Report R-24*, National Aeronautics and Space Administration, pp. 1-11, 1959.
- [4] Flügge, W., *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, 1960.
- [5] Novozhilov, V. V., *The Theory of Thin Shells*, Wolters-Nordhoff, 1959.
- [6] Timoshenko, S. and Krieger, S. W., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, Second Edition, 1959.
- [7] Kraus, H., *Thin Elastic Shells*, John Wiley & Sons, 1967.
- [8] Green, A. E. and Zerna, W., *Theoretical Elasticity*, Oxford University Press, 1968.
- [9] Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, Second Edition, 1975.
- [10] Naghdi, P. M., "On the Theory of Thin Elastic Shells," *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 14, No. 4, pp. 369-380, 1957.
- [11] Naghdi, P. M., "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Shells of Revolution," *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 15, No. 1, pp. 41-52, 1957.

- [12] Reissner, E., "On the Equations for Finite Symmetrical Deflections of Thin Shells of Revolution," *Progress in Applied Mechanics*, The Preger Anniversary Volume, pp. 171-178, 1963.
- [13] Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, Second Edition, 1958.
- [14] 竹内 洋一郎, 『熱応力』, 日新出版, 1975.
- [15] Perzyna, P., "Fundamental Problems in Viscoplasticity," *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 9, pp. 243-377, 1966.
- [16] Chaboche, J. L. and Rousselier, G., "On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations-Part I: Rules Developed with Internal Variable Concept," *Transaction of ASME, Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 105, No. 2, pp. 153-158, May 1983.
- [17] Chaboche, J. L. and Rousselier, G., "On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations-Part II: Application of Internal Variable Concepts to the 316 Strainless Steel," *Transaction of ASME, Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 105, No. 2, pp. 159-164, May 1983.
- [18] Chaboche, J.-L., "Cyclic Viscoplastic Constitutive Equations, PartI: Thermodynamically Consistent Formulation," *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 813-821, December 1993.
- [19] Chaboche, J.-L., "Cyclic Viscoplastic Constitutive Equations, PartI: Stored Energy-Comparison Between Models and Experiments," *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 822-828, December 1993.
- [20] 小泉 光恵, "傾斜機能材料-現状と将来-", 機械の研究, 第 44 卷, 第 9 号, pp. 930-936, 1992.

- [21] Nagarajan, S. and Povov, E. P., "Viscoplastic Analysis of Axisymmetric Shells," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 11, pp. 1-16, 1975.
- [22] Kanchi, M. B., Zienkiewicz, O. C., and Owen, D. R. J., "The Visco-Plastic Approach to Problems of Plasticity and Creep Involving Geometric Non-Linear Effects," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, pp. 169-181, 1978.
- [23] Atkatsch, R. S., Bieniek, M. P., and Sandler, I. S., "Theory of Visco-Plastic Shells for Dynamic Response of General Thin Shells by Means of Overlay Model," *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 1, pp. 131-136, 1978.
- [24] 竹園 茂男, 埜 克己, 長野 卓, "非対称荷重を受ける厚肉軸対称かくの弾/粘塑性解析," 日本機械学会論文集 (A 編), 第 51 卷, 第 472 号, pp. 2829-2837, 1985-12.
- [25] 竹園 茂男, 埜 克己, 白石 博文, "非対称荷重を受ける直交異方性厚肉回転対称殻の弾/粘塑性解析," 日本機械学会論文集 (A 編), 第 53 卷, 第 495 号, pp. 2166-2174, 1987-11.
- [26] Takezono, S. and Tao, K., "Elasto/Visco-Plastic Analysis of Orthotropic Moderately Thick Shells of Revolution," *Res Mechanica*, Vol. 27, pp. 335-352, 1989.
- [27] 竹園 茂男, 右田 康治, 平河 昭久, "多層回転対称殻の弾/粘塑性変形," 日本機械学会論文集 (A 編), 第 54 卷, 第 498 号, pp. 405-412, 1988-2.
- [28] 竹園 茂男, 埜 克己, 田口 智弘, 増子 卓哉, "多層複合軸対称殻の弾/粘塑性動的応答," 日本機械学会論文集 (A 編), 第 55 卷, 第 518 号, pp. 2065-2072, 1989-10.
- [29] 竹園 茂男, 埜 克己, 谷 清之, "多層厚肉回転対称殻の弾/粘塑性変形," 日本機械学会論文集 (A 編), 第 56 卷, 第 522 号, pp. 317-325, 1990-2.
- [30] Takezono, S., Tao, K., and Tani, K., "Elasto/Visco-Plastic Deformation of Multi-Layered Moderately Thick Shells of Revolution," *JSME International Journal*, Se-

- ries I, Vol. 34, No. 1, pp. 13-22, 1991.
- [31] 竹園 茂男, 右田 康治, “非対称荷重を受ける多層厚肉回転対称殻のクリープ変形,” 日本機械学会論文集(A編), 第53巻, 第548号, pp. 97-105, 1987-1.
- [32] 埜 克己, 竹園 茂男, 大坪 一三, 持留 裕之, 松岡 展伸, “Overlay モデルによる回転対称殻の弾/粘塑性動的応答,” 日本機械学会論文集(A編), 第55巻, 第513号, pp. 1135-1142, 1989-5.
- [33] Tao, K. and Takezono, S., “Analysis of Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of General Thin Shells by Means of Overlay Model,” *JSME International Journal*, Series I, Vol. 33, No. 3, pp. 326-333, 1990.
- [34] 埜 克己, 竹園 茂男, “Overlay モデルによる薄肉殻の弾/粘塑性動的応答の解法,” 日本機械学会論文集(A編), 第55巻, 第514号, pp. 1453-1461, 1989-6.
- [35] 埜 克己, 竹園 茂男, 田口 智弘, 穂多田 一男, “回転対称殻の弾/粘塑性動的応答(荷重と温度負荷を受ける場合),” 日本機械学会論文集(A編), 第54巻, 第503号, pp. 1457-1464, 1988-7.
- [36] Tao, K., Takezono, S., Taguchi, T., and Hotada, K., “Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of Axisymmetrical Shells under Mechanical and/or Thermal Loading,” *JSME International Journal*, Series I, Vol. 32, No. 3, pp. 341-347, 1990.
- [37] Takezono, S. and Tao, K., “Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of Thin Shells of Revolution Subjected to Mechanical or Thermal Load or Both,” *International Journal of Pressure Vessels & Piping*, Vol. 44, pp. 309-327, 1990.
- [38] Wojewódzki, W. and Bukowski, R., “Influence of the Yield Function Nonlinearity and Temperature in Dynamic Buckling of Viscoplastic Cylindrical Shells,” *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, No. 1, pp. 114-120, 1984.

- [39] Bolotin, V. V., “Equations for the Non-Stationary Temperature Fields in Thin Shells in the Presence of Sources of Heat,” *PMM, Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 24, No. 2, pp. 515-519, 1960.
- [40] Shirakawa, K. and Ochiai, Y., “Transient Response of Cylindrical Shells to Localized Heat Sources,” *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 54, pp. 337-347, 1987.
- [41] Rubin, M. B., “Heat Conduction in Plates and Shells with Emphasis on Conical Shell,” *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 22, No. 5, pp. 527-551, 1986.
- [42] Updike, D. P. and Kalnins, A., “Heat Conduction in Shells of Revolution,” *Numerical Methods for Thermal Problems*, Vol. 5, No. 1, pp. 265-275, 1987.
- [43] 遠藤 修司, “円筒シェルの熱変形基礎式について,” 航空宇宙技術研究所報告 TR-577, pp. 1-14, 1979.
- [44] Eslami, M. R., Shakerri, M., and Sedaghati, R., “Coupled Thermoelasticity of an Axially Symmetric Cylindrical Shell,” *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 17, pp. 115-135, 1994.
- [45] Steele, C. R. and Yang, J.-S. “Thermal Stresses in Thin Shells,” SUDAAR, No. 371, Stanford University, March 1969.
- [46] Surana, K. S. and Orth, N. J., “*p*-Version Hierarchical Axisymmetric Shell Element,” *Computers & Structures*, Vol. 39, No. 3/4, pp. 257-268, 1991.
- [47] Surana, K. S. and Abusaleh, G., “Curved Shell Elements for Heat Conduction with *p*-Approximation in the Shell Thickness Direction,” *Computers & Structures*, Vol. 46, No. 5, pp. 777-789, 1993.
- [48] Kamiya, N., “An Approximate Approach to Nonlinear Thermal Bending of Shallow Sandwich Shells and Flat Plates,” *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 1, pp. 87-97,

- 1978.
- [49] Fettahlioglu, O. A. and Wang, P. C., "Asymptotic Solutions for Thermal Stress and Deformation in Orthotropic Nonhomogeneous Shells of Revolution," *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 11, pp. 305-324, 1988.
- [50] Chen, L.-W. and Chen, L.-Y., "Thermal Buckling Analysis of Composite Laminated Plates by the Finite-Element Method," *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 12, pp. 41-56, 1989.
- [51] Chen, L.-W. and Chen, L.-Y., "Thermal Buckling Analysis of Laminated Cylindrical Plates by the Finite Element Method," *Computers & Structures*, Vol. 34, No. 1, pp. 71-78, 1990.
- [52] Librescu, L., Chandiramani, N. K., Nemeth, M. P., and Starnes, J., J. H., "Postbuckling of Laminated Flat and Curved Panels under Combined Thermal and Mechanical Loadings," *AIAA Journals*, Vol. 34, No. 4, pp. 2229-2239, 1993.
- [53] Liu, R.-H., "Non-Linear Thermal Stability of Bimetallic Shallow Shells of Revolution," *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 18, No. 5, pp. 409-429, 1983.
- [54] Argyris, J., Tenek, L., and Öberg, F., "A Multilayer Composite Triangular Element for Steady-State Conduction/Convection/Radiation Heat Transfer in Complex Shells," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 120, pp. 271-301, 1995.
- [55] 遠藤 修司, "多層複合円筒殻に対する熱伝導の一次近似方程式," 航空宇宙技術研究所報告 TR-1049, pp. 1-23, 1989.
- [56] Noor, A. K. and Tenek, L. H., "Steady-State Nonlinear Heat Transfer in Multilayered Composite Panel," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118, No. 8, pp. 1661-1678, 1995.

- [57] Surana, K. S. and Orth, N. J., " p -Approximation Axisymmetric Shell Elements for Heat Conduction in Laminated Composites," *Computers & Structures*, Vol. 33, No. 5, pp. 1251-1265, 1989.
- [58] Surana, K. S. and Orth, N. J., " p -Version Hierarchical Axisymmetric Shell Element for Heat Conduction," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 20, No. 5, pp. 81-103, 1991.
- [59] Surana, K. S. and Orth, N. J., "Completely Hierarchical Axisymmetric Shell Element Based on p -Version for Heat Conduction in Laminated Composites," *Computers & Structures*, Vol. 38, No. 4, pp. 429-448, 1991.
- [60] Surana, K. S. and Orth, N. J., "Three-dimensional Curved Shell Element Based on Completely Hierarchical p -Approximation for Heat Conduction in Laminated Composites," *Computers & Structures*, Vol. 43, No. 3, pp. 477-484, 1992.
- [61] Surana, K. S. and Orth, N. J., "Completely Hierarchical p -Version Axisymmetric Shell Element for Nonlinear Heat Conduction in Laminated Composites," *Computers & Structures*, Vol. 46, No. 5, pp. 777-789, 1993.
- [62] Bose, A. and Surana, K. S., " p -Version Piecewise Hierarchical Axisymmetric Shell Element for Heat Conduction in Laminated Composites," *Computers & Structures*, Vol. 48, No. 1, pp. 33-49, 1993.
- [63] Bose, A. and Surana, K. S., "Piecewise Hierarchical p -Version Curved Shell Finite Element for Heat Conduction in Laminated Composites," *Computers & Structures*, Vol. 49, No. 2, pp. 238-300, 1993.
- [64] Noor, A. K. and Burton, W. S., "Steady-State Heat Conduction in Multilayered Composite Plates and Shells," *Computers & Structures*, Vol. 39, No. 1/2, pp. 185-193, 1991.

- [65] 松本 金矢, 座古 勝, 横山 敦士, 辻上 哲也, “積層複合材料の非定常熱伝導解析に関する研究,” 日本機械学会論文集 (A 編), 第 60 卷, 第 573 号, pp. 1250-1255, 1994-5.
- [66] 松本 金矢, 座古 勝, 田中 茂, “積層複合材料の非定常熱応力解析に関する研究(ガラス転移温度を考慮した熱応力解析モデル),” 日本機械学会論文集 (A 編), 第 61 卷, 第 585 号, pp. 986-992, 1995-5.
- [67] Blandford, G. E., Tauchert, T. R., and Leigh, D. C., “Nonlinear Analysis of Axisymmetric Layered Pressure Vessels—Part 1: Theory,” *Transaction of ASME, Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 111, pp. 113-119, May 1989.
- [68] Leigh, D. C., Tauchert, T. R., and Blandford, G. E., “Nonlinear Analysis of Axisymmetric Layered Pressure Vessels—Part 2: Steady-State Applications,” *Transaction of ASME, Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 111, pp. 120-123, May 1989.
- [69] 谷川 義信, 大多尾 義弘, “クロスプライ積層無限厚板の一様表面加熱による熱曲げと非定常熱応力,” 日本機械学会論文集 (A 編), 第 55 卷, 第 513 号, pp. 1139-1144, 1989-5.
- [70] 谷川 義信, 長山 和樹, 河村 隆介, “非一様加熱を受けるアングルプライ積層長方形板の高次せん断変形理論による非定常熱応力と熱変形,” 日本機械学会論文集 (A 編), 第 61 卷, 第 592 号, pp. 2605-2613, 1995-12.
- [71] 中村 省三, 金田 愛三, 西 邦彦, 宮野 靖, “三層積層ばりの熱粘弾性解析による LSI プラスチックパッケージ内残留応力の予測,” 日本機械学会論文集 (A 編), 第 56 卷, 第 525 号, pp. 1209-1216, 1990-5.
- [72] 保川 彰夫, “半導体チップ接合構造の熱弾塑性ひずみ簡易解析解,” 日本機械学会論文集 (A 編), 第 58 卷, 第 552 号, pp. 1382-1389, 1992-8.
- [73] Ootao, Y., Fukuda, T., and Tanigawa, Y., “Transient Thermal Stress Analysis of a Multi-Layered Composite Hollow Cylinder due to Asymmetric Heating and Its

- Application to Nonhomogeneous Materials,” *Theoretical Applied Mechanics*, Vol. 38, No. 552, pp. 177-188, 1988.
- [74] Ootao, Y., Tanigawa, Y., and Fukuda, T., “Axisymmetrical transient Thermal Stress Analysis of a Multilayered Composite Hollow Cylinder,” *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 14, pp. 201-213, 1991.
- [75] 大多尾 義弘, 赤井 富一, 谷川 義信, “不均質特性を有する中空円筒の三次元非定常熱応力問題,” 日本機械学会論文集 (A 編), 第 59 卷, 第 563 号, pp. 1684-1690, 1991-7.
- [76] 大多尾 義弘, 谷川 義信, “回転熱源による不均質中空球の三次元非定常熱応力問題,” 日本機械学会論文集 (A 編), 第 60 卷, 第 578 号, pp. 2273-2279, 1994-10.
- [77] Ootao, Y., Akai, T., and Tanigawa, Y., “Three-Dimensional Transient Thermal Stress Analysis of a Nonhomogeneous Hollow Circular Cylinder due to a moving Heat Source in the Axial Direction,” *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 18, pp. 497-512, 1995.
- [78] 谷川 義信, 赤井 富一, 笹井 輝明, “不均質特性を有する平板の一次元非定常熱伝導・熱応力問題,” 日本機械学会論文集 (A 編), 第 61 卷, 第 583 号, pp. 607-613, 1995-3.
- [79] 小畑 良平, 野田 直剛, “傾斜機能平板の非定常熱応力(一次元非定常温度場の解析),” 日本機械学会論文集 (A 編), 第 59 卷, 第 560 号, pp. 1090-1096, 1993-4.
- [80] 小畑 良平, 野田 直剛, 辻 智章, “傾斜機能平板の定常熱応力(力学的境界条件の影響),” 日本機械学会論文集 (A 編), 第 58 卷, 第 553 号, pp. 1689-1695, 1992-9.
- [81] Obata, Y. and Noda, N., “Steady Thermal Stresses in a Hollow Circular Cylinder and a Hollow Sphere of a Functionally Gradient Material,” *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 17, pp. 471-487, 1994.
- [82] Tanaka, K., Tanaka, Y., Watanabe, H., Poterasu, V. F., and Sugano, Y., “Design of Thermoelastic Materials using Direct Sensitivity and Optimization method. Re-

参考文献

- duction of thermal stresses in Functionally gradient Materials," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 106, pp. 271-284, 1993.
- [83] Tanaka, K., Tanaka, Y., Watanabe, H., Poterasu, V. F., and Sugano, Y., "An Improved Solution to Thermoelastic Material Design in Functionally Gradient Materials: Scheme to Reduce Thermal Stresses," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 109, pp. 377-389, 1993.
- [84] Sumi, N., "Dynamic Thermal Stresses in a Nonhomogeneous Plate Caused by Rapid Heating of Its Plane Boundary," *JSME of International Journal*, Series A, Vol. 35, No. 3, pp. 259-264, 1992.
- [85] Sumi, N. and Ito, Y., "The Propagation and Reflection of Thermal Stress Waves in Anisotropic Nonhomogeneous Hollow Cylinders and Spheres," *Nuclear Engineering and Desig*, Vol. 140, No. 2, pp. 133-145, 1993.
- [86] Sumi, N. and Ito, Y., "Dynamic Thermal Stresses in Composite Hollow Cylinders and Spheres Caused by Sudden Heating," *JSME of International Journal*, Series I, Vol. 35, No. 3, pp. 284-289, 1993.
- [87] 須見 尚文, 菅野 良弘, "材料の温度依存性が考慮された傾斜機能平板の動的熱応力解析," 日本機械学会論文集 (A 編), 第 61 卷, 第 590 号, pp. 2296-2301, 1995-10.
- [88] 須見 尚文, 門奈 博, 菅野 良弘, "傾斜機能材料材料をインサート材とする複合円筒の動的熱応力解析," 日本機械学会論文集 (A 編), 第 21 卷, 第 597 号, pp. 1189-119, 1996-5.
- [89] 荒居 善雄, 小林 英男, 田村 充, "傾斜機能材料の熱弾塑性応力解析と最適材料設計," 日本機械学会論文集 (A 編), 第 59 卷, 第 559 号, pp. 849-855, 1993-3.
- [90] 石塚 丈洋, 若島 健司, "セラミックス-金属系傾斜機能材料平板の残留熱応力," 日本機械学会論文集 (A 編), 第 60 卷, 第 571 号, pp. 748-755, 1994-3.

参考文献

- [91] 高橋 智, 坂木 庸晃, "傾斜機能材料のクリープ変形による応力緩和の計算例," 日本機械学会材料力学講演会講演論文集 (Vol. A), No.910-71, pp. 91-93, 1991.
- [92] 竹園 茂男, 埜 克己, 青木 隆, 稲村 栄次郎, "流体加熱を受ける一般回転対称殻の熱弾粘塑性変形," 日本機械学会論文集 (A 編), 第 59 卷, 第 562 号, pp. 1443-1450, 1993-6.
- [93] 竹園 茂男, 埜 克己, 青木 隆, 稲村 栄次郎, "流体加熱を受ける厚肉回転対称殻の熱弾/粘塑性変形," 日本機械学会論文集 (A 編), 第 59 卷, 第 566 号, pp. 2412-2419, 1993-10.
- [94] 竹園 茂男, 埜 克己, 稲村 栄次郎, "流体加熱を受ける多層回転対称殻の熱弾/粘塑性変形," 日本機械学会論文集 (A 編), 第 60 卷, 第 569 号, pp. 220-228, 1994-7.
- [95] 竹園 茂男, 埜 克己, 稲村 栄次郎, "流体加熱を受ける多層厚肉回転対称殻の熱弾/粘塑性変形," 日本機械学会論文集 (A 編), 第 61 卷, 第 587 号, pp. 1553-1561, 1995-7.
- [96] 竹園 茂男, 埜 克己, 稲村 栄次郎, 井上 雅弘, "流体加熱を受ける傾斜機能回転対称殻の熱応力と変形," 日本機械学会論文集 (A 編), 第 62 卷, 第 594 号, pp. 474-481, 1996-2.
- [97] 稲村 栄次郎, 竹園 茂男, 埜 克己, 小澤 義央, "流体加熱を受ける傾斜機能厚肉回転対称殻の熱応力と変形," 日本機械学会論文集 (A 編), 第 63 卷, 第 605 号, pp. 124-131, 1997-1.
- [98] 谷川 義信, 福田 俊彦, 大多尾 義弘, 谷村 眞治, "一様加熱を受ける多層層状複合円筒の非定常熱応力問題とその不均質材料への拡張," 日本機械学会論文集 (A 編), 第 55 卷, 第 513 号, pp. 1133-1138, 1989-5.
- [99] 矢川 元基, 宮崎 則幸, 『有限要素法による熱応力・クリープ・熱伝導解析』, サイエンス社, 1987.

参考文献

- [100] Budiansky, B. and Radkowsky, P. P., "Numerical Analysis of Unsymmetrical Bending of Shells of Revolution," *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 8, pp. 1833-1842, August 1963.
- [101] Alder, J. F., "The Effect of Strain Rate and Temperature on the Resistance of Aluminium, Copper and Steel to Compression," *Journal of the Institute Metals*, Vol. 83, pp. 80-86, May 1954.
- [102] 甲藤 好郎, 『伝熱概論』, 養賢堂, 1978.
- [103] 石田 良平, 竹内 洋一郎, "有限長中空円筒の軸対称連成熱応力問題," 日本機械学会論文集(A編), 第50巻, 第456号, pp. 1494-1499, 1984-8.
- [104] 武井 明朗, "流体によって加熱されるクラッド円筒の熱応力," 日本機械学会論文集(第1部), 第41巻, 第348号, pp. 2278-2284, 1975-8.
- [105] Takeuti, Y., "General Thermoelastic Equation for Arbitrary Orthogonal Curvilinear Coordinates," *Bulletin of Faculty of Engineering, Tokushima University*, Vol. 2, No. 2, pp. 75-77, 1969.

論文目録

掲載論文

- (1) 流体加熱を受ける一般軸回転対称殻の熱弾粘塑性変形
竹園 茂男, 埜 克己, 青木 隆, 稲村 栄次郎
日本機械学会論文集(A編), 第59巻, 第562号, 1993-6, pp. 1443-1450.
- (1') Elasto/Visco-Plastic Deformation of Shells of Revolution under Thermal Loading due to Fluid
Shigeo Takezono, Katsumi Tao, Takashi Aoki and Eijiroh Inamura
JSME International Journal, Series A, Vol. 38, No. 2, 1995, pp. 185-193.
- (2) 流体加熱を受ける厚肉回転対称殻の熱弾/粘塑性変形
竹園 茂男, 埜 克己, 青木 隆, 稲村 栄次郎
日本機械学会論文集(A編), 第59巻, 第566号, 1993-10, pp. 2412-2419.
- (2') Elasto/Visco-Plastic Deformation of Moderately Thick Shells of Revolution under Thermal Loading due to Fluid
Shigeo Takezono, Katsumi Tao, Takashi Aoki and Eijiroh Inamura
Transactions of the 12th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Vol. L, August 1993, pp. 257-263.
- (3) 流体加熱を受ける多層回転対称殻の熱弾/粘塑性変形
竹園 茂男, 埜 克己, 稲村 栄次郎
日本機械学会論文集(A編), 第60巻, 第569号, 1994-7, pp. 220-228.

- (3') Elasto/Visco-Plastic Deformation of Multi-Layered Shells of Revolution under Thermal Loading due to Fluid
Shigeo Takezono, Katsumi Tao and Eijiroh Inamura
Transaction of the 1995 ASME/JSME Pressure Vessels & Piping Division Conference, Vol. 302, Composites for the Pressure Vessel Industry, July 1995, pp. 223-230.
- (4) Elasto/Visco-Plastic Deformation of Multi-Layered Moderately Thick Shells of Revolution under Thermal Loading due to Fluid
Eijiroh Inamura, Shigeo Takezono and Katsumi Tao
The Transaction of the 1996 ASME Pressure Vessels & Piping Conference and the 8th International Conference on Pressure Vessel Technology, Vol. 302, July 1996, pp. 223-230.
- (4') 流体加熱を受ける多層厚肉回転対称殻の熱弾/粘塑性変形
竹園 茂男, 埜 克己, 稲村 栄次郎
日本機械学会論文集(A編), 第61巻, 第587号, 1995-7, pp. 1553-1561.
- (5) 流体加熱を受ける傾斜機能回転対称殻の熱応力と変形
竹園 茂男, 埜 克己, 稲村 栄次郎, 井上 雅弘
日本機械学会論文集(A編), 第62巻, 第594号, 1996-2, pp. 474-481.
- (5') Thermal Stress and Deformation in Functionally Graded Material Shells of Revolution under Thermal Loading due to Fluid
Shigeo Takezono, Katsumi Tao, Eijiroh Inamura and Masahiro Inoue
JSME International Journal, Series A, Vol. 39, No. 4, 1996, pp. 573-581.
- (6) 流体加熱を受ける傾斜機能厚肉回転対称殻の熱応力と変形
稲村 栄次郎, 竹園 茂男, 埜 克己, 小澤 義央
日本機械学会論文集(A編), 第63巻, 第605号, 1997-1, pp. 124-131.

講演論文

- (1) 流体加熱を受ける殻体の熱弾粘塑性変形
竹園 茂男, 埜 克己, 青木 隆, 稲村 栄次郎
日本機械学会東海支部第41期総会講演会講演論文集, No. 923-1, 1992-3, pp. 85-86.
- (2) 流体加熱を受ける厚肉回転対称殻の熱弾粘塑性変形
竹園 茂男, 埜 克己, 青木 隆, 稲村 栄次郎
日本機械学会材料力学部門講演会講演論文集, No. 920-72, 1992-9, pp. 189-190.
- (3) 流体加熱を受ける多層回転対称殻の熱弾粘塑性変形
竹園 茂男, 埜 克己, 稲村 栄次郎
日本機械学会第70期全国大会講演論文集, Vol. A, No. 920-78, 1992-10, pp. 95-97.
- (4) 流体加熱を受ける多層厚肉回転対称殻の熱弾/粘塑性変形
竹園 茂男, 埜 克己, 稲村 栄次郎
日本機械学会第72期全国大会講演論文集, Vol. I, No. 940-30, 1994-8, pp. 163-165.
- (5) 流体加熱を受ける傾斜機能シェル熱応力と変形
竹園 茂男, 埜 克己, 稲村 栄次郎, 井上 雅弘
日本機械学会第73期全国大会講演論文集, Vol. I, No. 95-10, 1995-9, pp. 107-108.
- (6) 流体加熱を受ける傾斜機能厚肉回転対称殻の熱応力と変形
竹園 茂男, 埜 克己, 稲村 栄次郎, 小澤 義央
日本機械学会第73期通常総会講演会講演論文集, Vol. I, No. 96-1, 1996-4, pp. 293-294.
- (7) Thermal Stress and Deformation in Functionally Graded Material Shells of Revolution under Thermal Loading due to Fluid
Shigeo Takezono, Katsumi Tao and Eijiroh Inamura
Abstracts of 19th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, p. 331, 1996.

付録 A 熱伝導方程式の導出

図 A.1 に示すように、 $\xi = \text{一定}$ 、 $\theta = \text{一定}$ の面で切り出された厚さ h の殻の微小要素をとる。そして、その微小要素の中央面から ζ の距離にある厚さ $d\zeta$ の微小六面体を考える。図中、微小時間 dt の間に、 ξ, θ, ζ 座標に垂直な面 (ξ, θ, ζ 面) から微小六面体に流入する熱量をそれぞれ dQ_{ξ}^{-} , dQ_{θ}^{-} , dQ_{ζ}^{-} とし、 $\xi + d\xi, \theta + d\theta, \zeta + d\zeta$ 面を通過して微小六面体から流出する熱量をそれぞれ dQ_{ξ}^{+} , dQ_{θ}^{+} , dQ_{ζ}^{+} とする。殻体内の任意位置 (ξ, θ, ζ) の時刻 t における温度を $T(\xi, \theta, \zeta, t)$ と置くと、フーリエの法則により dQ_{ξ}^{-} は、

$$dQ_{\xi}^{-} = -\lambda_{\xi} \cdot L_{\theta} R d\theta d\zeta \cdot \frac{1}{L_{\xi} a} \frac{\partial T}{\partial \xi} \cdot dt = -\lambda_{\xi} \frac{L_{\theta} R}{L_{\xi} a} \frac{\partial T}{\partial \xi} d\theta d\zeta dt \quad (\text{A.1})$$

となる。ここで、 λ_{ξ} は ξ 方向の熱伝導率であり、 $L_{\xi} = 1 + \zeta/R_s$, $L_{\theta} = 1 + \zeta/R_{\theta}$ である。また dQ_{ξ}^{+} は、

$$dQ_{\xi}^{+} = - \left[\lambda_{\xi} \frac{L_{\theta} R}{L_{\xi} a} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda_{\xi} \frac{L_{\theta} R}{L_{\xi} a} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) d\xi \right] d\theta d\zeta dt \quad (\text{A.2})$$

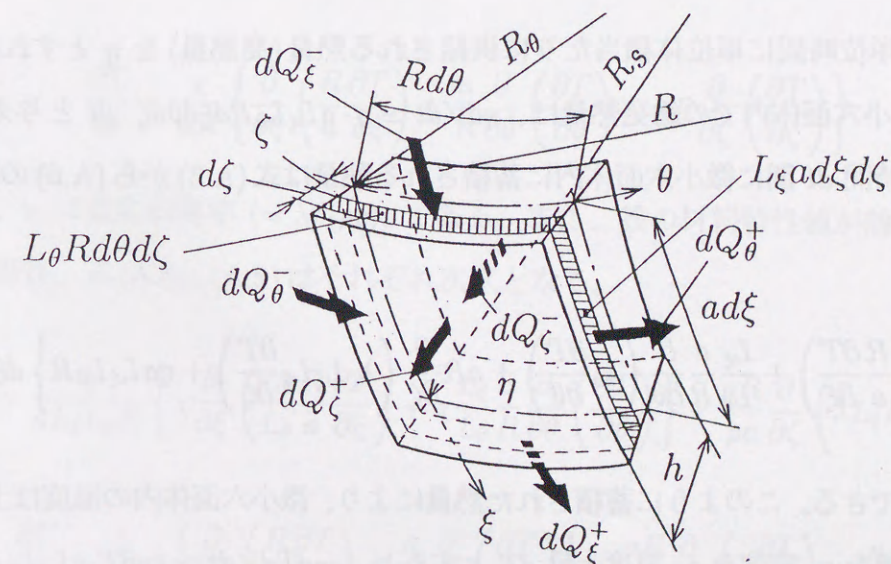


図 A.1 殻の微小要素

となるから、 ξ 方向の熱の出入りにより微小六面体に蓄積される熱量は、

$$dQ_{\xi}^{-} - dQ_{\xi}^{+} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda_{\xi} \frac{L_{\theta} R}{L_{\xi} a} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) d\xi d\theta d\zeta dt \quad (\text{A.3})$$

と書くことができる。同様に、 θ 方向 および ζ 方向の熱の出入りより微小六面体に蓄積される熱量は、それぞれ

$$dQ_{\theta}^{-} - dQ_{\theta}^{+} = \frac{L_{\xi} a}{L_{\theta} R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) d\xi d\theta d\zeta dt \quad (\text{A.4})$$

$$dQ_{\zeta}^{-} - dQ_{\zeta}^{+} = aR \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\lambda_{\zeta} L_{\xi} L_{\theta} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) d\xi d\theta d\zeta dt \quad (\text{A.5})$$

と書くことができる。ただし、 λ_{θ} および λ_{ζ} は、それぞれ θ 方向および ζ 方向の熱伝導率である。一方、微小六面体の体積 dV は、

$$\begin{aligned} dV &= aL_{\xi} d\xi \cdot \frac{1}{2} \left[L_{\theta} R d\theta + \left\{ L_{\theta} R d\theta + \frac{\partial}{\partial \xi} (L_{\theta} R) d\xi \right\} d\theta \right] \cdot d\zeta \\ &\simeq aL_{\xi} L_{\theta} R d\xi d\theta d\zeta \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

であるから、単位時間に単位体積あたりに供給される熱量(発熱量)を η とすれば、時間 dt における微小六面体内での総発熱量は、 $\eta dV dt \simeq \eta \cdot aL_{\xi} L_{\theta} R d\xi d\theta d\zeta \cdot dt$ と与えられる。したがって、時間 dt 間に微小六面体内に蓄積される熱量は式(A.3)から(A.6)の和をとることにより、

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda_{\xi} \frac{L_{\theta} R}{L_{\xi} a} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{L_{\xi} a}{L_{\theta} R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + aR \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\lambda_{\zeta} L_{\xi} L_{\theta} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) + \eta aL_{\xi} L_{\theta} R \right\} d\xi d\theta d\zeta dt \quad (\text{A.7})$$

と書くことができる。このように蓄積された熱量により、微小六面体内の温度は上昇する。いま殻体の比熱を c 、密度を ρ 、温度上昇 dT とすると、 $c\rho dT dV dt \simeq c\rho dT \cdot aL_{\xi} L_{\theta} R d\xi d\theta d\zeta \cdot dt$ は式(A.7)に等しくなければならない。したがって、次式のような殻の非常熱伝導方

程式が得られる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho a c L_{\xi} L_{\theta} R} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda_{\xi} \frac{L_{\theta} R}{L_{\xi} a} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{L_{\xi} a}{L_{\theta} R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + aR \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\lambda_{\zeta} L_{\xi} L_{\theta} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \right\} + \frac{\eta}{\rho c} \quad (\text{A.8})$$

上式において、主曲率半径 R_{ξ}, R_{θ} に対して殻厚 h が十分小さいと考え、 $L_{\xi} \simeq 1, L_{\theta} \simeq 1$ とすると次式が得られる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho a c R} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda_{\xi} \frac{R}{a} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{a}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + aR \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\lambda_{\zeta} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \right\} + \frac{\eta}{\rho c} \quad (\text{A.9})$$

式(A.8)を厚肉殻の熱伝導方程式、式(A.9)を薄肉殻の熱伝導方程式とする。熱伝導率が等方性で殻体のいたるところで一定とすれば、

$$\lambda_{\xi} = \lambda_{\theta} = \lambda_{\zeta} \equiv \lambda (\text{定数}) \quad (\text{A.10})$$

であるので、式(A.8), (A.9)はそれぞれ次式となる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\chi}{aL_{\xi} L_{\theta} R} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{L_{\theta} R}{L_{\theta} a} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{L_{\xi} a}{L_{\theta} R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + aR \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(L_{\xi} L_{\theta} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \right\} + \frac{\eta}{\rho c} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\chi}{aR} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{R}{a} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{a}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + aR \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \right\} + \frac{\eta}{\rho c} \quad (\text{A.12})$$

ここで、 χ は温度伝導率 ($= \lambda/(\rho c)$) である。また、殻の材料特性値が殻厚方向に連続的にする場合、式(A.8), (A.9)はそれぞれ次式となる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{aL_{\xi} L_{\theta} R} \left\{ \chi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{L_{\theta} R}{L_{\theta} a} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \chi \frac{L_{\xi} a}{L_{\theta} R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right\} + \frac{aR}{\rho c} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\lambda L_{\xi} L_{\theta} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) + \frac{\eta}{\rho c} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\chi}{aR} \lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{R}{a} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{a}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right\} + \frac{aR}{\rho c} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) + \frac{\eta}{\rho c} \quad (\text{A.14})$$

付録B 係数

B.1 熱伝導方程式

B.1.1 均質薄肉殻

均質薄肉殻の場合、式(3.8)より式(5.4)の係数行列 A_1, A_2, \dots, A_5 は以下のようになる。

$$A_1 = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & e_5 \\ 0 & e_9 & 0 \\ e_{13} & 0 & e_{17} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} e_2 & 0 & e_6 \\ 0 & e_{10} & 0 \\ e_{14} & 0 & e_{18} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} e_3 & e_4 & e_7 \\ e_8 & e_{11} & e_{12} \\ e_{15} & e_{16} & e_{19} \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} e_{20} & 0 & e_{21} \\ 0 & e_{22} & 0 \\ e_{23} & 0 & e_{24} \end{bmatrix}$$

また、上式に含まれる各係数 e_1, e_2, \dots, e_{24} および f_1, f_2, f_3 は、次のようになる。

$$e_1 = 1 \qquad e_2 = \gamma$$

$$e_3 = -\left(\frac{n}{r}\right)^2 - \frac{k_{in} + k_{out}}{h} \qquad e_4 = \frac{k_{in} - k_{out}}{2h}$$

$$e_5 = \frac{1}{12} \qquad e_6 = \frac{\gamma}{12}$$

$$e_7 = -\frac{1}{12}\left(\frac{n}{r}\right)^2 - \frac{k_{in} + k_{out}}{4h} \qquad e_8 = \frac{6(k_{in} - k_{out})}{h}$$

$$e_9 = 1 \qquad e_{10} = \gamma$$

$$e_{11} = -\left(\frac{n}{r}\right)^2 - \frac{3(k_{in} + k_{out})}{h} \qquad e_{12} = -\frac{3(k_{in} - k_{out})}{2h}$$

$$e_{13} = 1 \qquad e_{14} = \gamma$$

$$\begin{aligned}
 e_{15} &= -\left(\frac{n}{r}\right)^2 - \frac{(k_{in} + k_{out})}{h} & e_{16} &= \frac{(k_{in} - k_{out})}{2h} \\
 e_{17} &= \frac{3}{20} & e_{18} &= \frac{3\gamma}{20} \\
 e_{19} &= -\frac{3}{20}\left(\frac{n}{r}\right)^2 - \frac{3(k_{in} + k_{out})}{4h} - \frac{4}{h} & e_{20} &= 1 \\
 e_{21} &= \frac{1}{12} & e_{22} &= 1 \\
 e_{23} &= 1 & e_{24} &= \frac{3}{20} \\
 f_1 &= d_1 q_0 + d_2 \theta_{out} + d_3 \theta_{in} & f_2 &= d_4 q_1 + d_5 \theta_{out} + d_6 \theta_{in} \\
 f_3 &= d_7 q_2 + d_8 \theta_{out} + d_9 \theta_{in}
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 d_1 &= -\frac{a}{h} & d_2 &= -\frac{k_{out}}{h} & d_3 &= -\frac{k_{in}}{h} \\
 d_4 &= -\frac{12a}{h} & d_5 &= -\frac{6k_{out}}{h} & d_6 &= \frac{6k_{in}}{h} \\
 d_7 &= -\frac{12a}{h} & d_8 &= -\frac{3k_{out}}{h} & d_9 &= -\frac{3k_{in}}{h}
 \end{aligned}$$

B.1.2 均質厚肉殻

均質厚肉殻の場合、式(3.8)より式(5.4)の係数行列 A_1, A_2, \dots, A_5 は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} e_{11} & e_{14} & e_{17} \\ e_{21} & e_{24} & e_{27} \\ e_{31} & e_{34} & e_{37} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} e_{12} & e_{15} & e_{18} \\ e_{22} & e_{25} & e_{28} \\ e_{32} & e_{35} & e_{38} \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} e_{13} & e_{16} & e_{19} \\ e_{23} & e_{26} & e_{29} \\ e_{33} & e_{36} & e_{39} \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

また、上式に含まれる各係数 $e_{11}, e_{12}, \dots, e_{39}, d_{11}, d_{12}, \dots, d_{33}$ および f_1, f_2, f_3 は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= 1 + \frac{C_{15}}{12}, & e_{12} &= \gamma - \frac{C_3}{12} \\
 e_{13} &= h \left(-C_9 + \frac{C_2 C_{10}}{2} - \frac{C_1 C_9}{4} \right) - \frac{m^2}{r^2} \left(1 + \frac{h^2 \omega_\xi C_6}{a^2} \right) \\
 e_{14} &= \frac{C_6}{12}, & e_{15} &= -\frac{h \omega'_\xi}{12a} \left(1 + 3 \frac{C_4}{20} \right) \\
 e_{16} &= \frac{h}{2} \left(C_{10} - \frac{C_2 C_9}{2} + \frac{C_1 C_{10}}{4} \right) + \frac{m C_6}{12r} \\
 e_{17} &= \frac{1 + C_7}{12}, & e_{18} &= \frac{C_5}{12} \\
 e_{19} &= \frac{h}{4} \left(-C_9 + \frac{C_2 C_{10}}{2} - \frac{C_1 C_9}{4} \right) - \frac{m^2}{12r^2} \left(1 + 3 \frac{h \omega_\theta C_6}{20a} \right) \\
 e_{21} &= C_6, & e_{22} &= -\frac{h \omega'_\xi}{a} \left(1 + \frac{3C_4}{20} \right) \\
 e_{23} &= \frac{6a^2}{h} \left(C_{10} - \frac{C_2 C_9}{2} + \frac{C_1 C_{10}}{4} \right) + \frac{m^2 C_6}{r^2} \\
 e_{24} &= 1 + C_7, & e_{25} &= C_5 \\
 e_{26} &= 12h \left(-\frac{h C_1}{12a^2} - \frac{h C_9}{4a^2} + \frac{C_2 C_{10}}{8} - \frac{C_1 C_9}{16} \right) - \frac{m^2 C_8}{r^2} \\
 e_{27} &= \frac{3C_6}{20}, & e_{28} &= -\frac{3h \omega'_\xi}{20a} \left(1 + \frac{5C_4}{28} \right) \\
 e_{29} &= 6a \left(\frac{h C_2}{3a^2} + \frac{C_{10}}{4} - \frac{C_2 C_9}{8} + \frac{C_1 C_{10}}{16} \right) + \frac{3m^2 C_6}{20r^2} \\
 e_{31} &= 1 + C_7, & e_{32} &= C_5 \\
 e_{33} &= 3a \left(-C_9 + \frac{C_2 C_{10}}{2} - \frac{C_1 C_9}{4} \right) - \frac{m^2 C_8}{r^2} \\
 e_{34} &= 3C_6/20, & e_{35} &= -\frac{3h \omega'_\xi}{20h} \left(1 + \frac{5C_4}{28} \right)
 \end{aligned}$$

$$e_{36} = 6a \left(-\frac{hC_2}{3a^2} + \frac{C_{10}}{4} - \frac{C_2C_9}{8} + \frac{C_1C_{10}}{16} \right) + \frac{3m^2C_6}{20r^2}$$

$$e_{37} = \frac{3}{20} \left(1 + \frac{5C_{15}}{28} \right), \quad e_{38} = \frac{3}{20} \left(\gamma - \frac{5C_3}{2} 8 \right)$$

$$e_{39} = -12a \left(-\frac{h}{3a^2} + \frac{h}{20a^2} - \frac{C_9}{16} + \frac{C_2C_{10}}{32} - \frac{C_1C_9}{64} \right) - \frac{3m^2}{20a^2} \left(1 + \frac{5h\omega_0C_6}{a} \right)$$

$$d_{11} = 1 + \frac{C_1}{12}, \quad d_{12} = \frac{C_2}{12}, \quad d_{13} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{C_1}{20} \right)$$

$$d_{14} = -\frac{a}{h}, \quad d_{15} = -\frac{aC_2}{h}, \quad d_{16} = -\frac{aC_1}{h}$$

$$d_{17} = -\frac{a^2k_{out}}{h} \left(1 + \frac{C_2}{2} + \frac{C_1}{4} \right), \quad d_{18} = -\frac{a^2k_{in}}{h} \left(1 - \frac{C_2}{2} + \frac{C_1}{4} \right)$$

$$d_{21} = C_2, \quad d_{22} = 1 + \frac{3C_1}{20}, \quad d_{23} = 3C_2/20$$

$$d_{24} = -\frac{12a}{h}, \quad d_{25} = -\frac{12aC_2}{h}, \quad d_{26} = \frac{12aC_1}{h}$$

$$d_{27} = -\frac{6a^2k_{out}}{h} \left(1 + \frac{C_2}{2} + \frac{C_1}{4} \right), \quad d_{28} = -\frac{6a^2k_{in}}{h} \left(1 - \frac{C_2}{2} + \frac{C_1}{4} \right)$$

$$d_{31} = 1 + \frac{3C_1}{20}, \quad d_{32} = \frac{3C_2}{20}, \quad d_{33} = 3(1 + 5C_1/28)/20$$

$$d_{34} = -\frac{12a}{h}, \quad d_{35} = -\frac{12aC_2}{h}, \quad d_{36} = -\frac{12aC_1}{h}$$

$$d_{37} = -\frac{3a^2k_{out}}{h} \left(1 + \frac{C_2}{2} + \frac{C_1}{4} \right), \quad d_{38} = -\frac{3a^2k_{in}}{h} \left(1 - \frac{C_2}{2} + \frac{C_1}{4} \right)$$

$$f_1 = d_{14}q_0 + d_{15}q_1 + d_{16}q_2 + d_{17}\theta_{out} + d_{18}\theta_{in}$$

$$f_1 = d_{24}q_1 + d_{25}q_2 + d_{26}q_3 + d_{27}\theta_{out} + d_{28}\theta_{in}$$

$$f_1 = d_{34}q_2 + d_{35}q_3 + d_{36}q_4 + d_{37}\theta_{out} + d_{38}\theta_{in}$$

B.1.3 多層薄肉殻

多層薄肉殻の場合、式(3.14)より式(5.4)の係数行列 A_1, A_2, \dots, A_5 は以下のようになる。

$$A_1 = \begin{bmatrix} e_1 & e_4 \\ e_9 & e_{10} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} e_2 & e_5 \\ e_8 & e_{11} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} e_3 & e_6 \\ e_9 & e_{12} \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} e_{13} & e_{14} \\ e_{15} & e_{16} \end{bmatrix}$$

また、上式に含まれる各係数 e_1, e_2, \dots, e_{16} および f_1, f_2 は、次のようになる。

$$e_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i \zeta_{1,i}}{\lambda_0 a}$$

$$e_2 = \gamma e_1$$

$$e_3 = -\frac{m^2}{r^2} e_1 - \frac{a(K_{out} + K_{in})}{\lambda_0}$$

$$e_4 = \sum i = 1n \frac{\lambda_i \zeta_{1,i}}{\lambda_0 a h} \left\{ \zeta_1 + \lambda_1 \left(\sum_{l=2}^{i-1} \frac{\zeta_{1,l}}{\lambda_l} + \frac{\zeta_{1,i}}{2\lambda_i} \right) \right\}$$

$$e_5 = \gamma e_4$$

$$e_6 = \frac{m^2}{r^2} e_4 - \frac{a}{\lambda_0 h} \left\{ K_{out} \left(\zeta_1 + \lambda_1 \sum_{l=2}^n \frac{\zeta_{1,l}}{\lambda_l} \right) - \frac{K_{in}}{2} \right\}$$

$$e_7 = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i \zeta_{2,i}}{\lambda_0 a^2}$$

$$e_8 = \gamma e_7$$

$$e_9 = -\frac{m^2}{r^2} - \frac{h(K_{out} - K_{in})}{2\lambda_0}$$

$$e_{10} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_0 a^2 h} \left[\zeta_{2,i} \left\{ \zeta_1 + \lambda_1 \left(\sum_{l=2}^{i-1} \frac{\zeta_{1,l}}{\lambda_l} - \frac{\zeta_{i-1}}{\lambda_i} \right) \right\} + \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right]$$

$$e_{7,l,j} = \frac{C_{10,l,j}}{h^{k-1}}, \quad e_{8,l} = \frac{C_{8,l}}{h}, \quad e_{9,l} = \frac{C_{9,l}}{h}$$

また、式(B.1)の f_1, f_2, \dots, f_{3n} は次のようになる。

$$f_i = \begin{cases} \theta_{in} & i = 1 \\ \sum_{k=0}^2 \frac{\lambda_0 h^k}{a} C_{12,k+1,j} q_{k,j} & i = 3j - 1 \\ \theta_{out} & 3n \\ 0 & i \neq 1, 3j - 1, 3n \end{cases}$$

($i = 1, 2, \dots, 3n; j = 1, 2, \dots, n$)

B.1.5 傾斜機能薄肉殻

傾斜機能薄肉殻の場合、式(3.19)より式(5.4)の係数行列 A_1, A_2, \dots, A_5 は以下のようになる。

$$A_1(i, j) = \frac{\beta_{(i-1,j-1)}}{h^{j-1}}, \quad A_2(i, j) = \gamma A_1(i, j)$$

$$A_3(i, j) = \frac{1}{h^{j-1}} \left[a^2 \{ \gamma_{(i-1,j-1)} + \delta_{(i-1,j-1)} + \varepsilon_{(i-1,j-1)} \} - \frac{m^2}{r^2} \beta_{(i-1,j-1)} + \right]$$

$$A_4(i) = -a\chi_0 h^{i-1} q_i - a^2(\chi)_{out} \left(\frac{h}{2}\right)^{i-1} k_{out} \theta_{out} - a^2(\chi)_{in} \left(-\frac{h}{2}\right)^{i-1} k_{in} \theta_{in}$$

$$A_5(i, j) = \frac{\chi_0 \alpha_{(i-1,j-1)}}{h^{j-1}} \quad (i, j = 1, 2, \dots, p)$$

B.1.6 傾斜機能厚肉殻

傾斜機能薄肉殻の場合、式(3.22)より式(5.4)の係数行列 A_1, A_2, \dots, A_5 は以下のようになる。

$$A_1(i, j) = \gamma_{(i-1,j-1)} / h^{j-1}, \quad A_2(i, j) = \beta_{(i-1,j-1)} / h^{j-1}$$

$$A_3(i, j) = \left[-\frac{m^2}{r^2} \delta_{(i-1,j-1)} + \varepsilon_{(i-1,j-1)} \right] / h^{j-1}$$

$$A_4(i) = -\frac{\chi_0 h^{j-1}}{a} q_{i-1} - \mu_{(i-1)} \theta_{out} - \nu_{(i-1)} \theta_{in}$$

$$A_5(i, j) = \frac{\chi_0}{a^2} \alpha_{(i-1,j-1)} / h^{j-1} \quad (i, j = 1, 2, \dots, p)$$

B.2 熱変形方程式

B.2.1 薄肉殻の平衡方程式

式(5.13)の係数マトリックス B_1, B_2, \dots, B_8 を以下に示す。

$$B_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_6 & 0 \\ 0 & a_{13} & a_{16} & 0 \\ a_{20} & a_{23} & a_{26} & a_{29} \\ 0 & 0 & a_{35} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} a_2 & a_4 & a_7 & a_8 \\ a_{11} & a_{14} & a_{17} & 0 \\ a_{21} & a_{24} & a_{27} & a_{30} \\ a_{32} & 0 & a_{36} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} a_3 & a_5 & a_8 & a_{10} \\ a_{12} & a_{15} & a_{18} & a_{19} \\ a_{22} & a_{25} & a_{28} & a_{31} \\ a_{33} & a_{34} & a_{37} & a_{38} \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} c_3 & c_4 & c_5 & 0 \\ 0 & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{23} & c_{24} & 0 & c_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_6 = \begin{bmatrix} c_6 & 0 & 0 & c_7 \\ 0 & 0 & c_{17} & 0 \\ c_{26} & c_{27} & c_{28} & c_{29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_7 = \begin{bmatrix} c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} \\ c_{18} & c_{19} & c_{20} & c_{21} \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{35} & 0 & 0 & c_{36} \end{bmatrix}, \quad B_8 = \begin{bmatrix} c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

上式に含まれる各係数 a_1, a_2, \dots, a_{38} および c_1, c_2, \dots, c_{36} は、次のようになる。

$$a_1 = A_1 - \frac{a^2 B_1}{h^2 \lambda^2 C_1} \quad a_2 = \gamma \left(A_1 - \frac{a B_1}{h C_1} \right)$$

$$a_3 = (\gamma \omega'_\xi - \omega_\theta^2 \omega_\theta) B_2 - \gamma A_1 - 2\gamma^2 A_1 - 2\gamma^2 \omega_\xi B_1 + \frac{m^2 (\omega_\theta - 3\omega_\xi B_3)}{2r^2}$$

$$- \omega_\xi \omega_\theta A_2 - \frac{m^2 A_3}{2r^2} - \frac{\gamma^2 \omega_\xi^2 C_1 h^2}{a^2} \lambda^2 - \frac{h m^2 (\omega_\theta - 3\omega_\xi)^2 C_3}{8a r^2}$$

$$+ \frac{(\omega_\xi^2 \omega_\theta - \gamma \omega'_\xi) B_1 C_2}{C_1} + \frac{\omega_\xi \omega_\theta a^2 B_1 B_2}{h^2 C_1} + \frac{\gamma^2 a^2 B_2^2}{h^2 C_1} + \frac{2\gamma^2 \omega_\xi B_2 C_2}{C_1}$$

$$+ \frac{\gamma^2 \omega_\xi^2 h^2 C_2^2}{C_1}$$

$$a_4 = \frac{m}{r} \left\{ A_2 + \omega_\theta B_2 + \frac{A_3}{2} + \frac{(\omega_\theta + \omega_\xi) B_3}{2} - \frac{a B_1 B_2}{h C_1} - \frac{\omega_\theta B_1 C_2}{C_1} \right.$$

$$\left. + \frac{(3\omega_\xi - \omega_\theta)(3\omega_\theta - \omega_\xi) h^2 C_3}{8a^2} \right\}$$

$$a_5 = \frac{\gamma m}{r} \left\{ (\omega_\xi - \omega_\theta) B_2 - A_1 + \frac{A_3}{2} - \frac{(\omega_\xi + \omega_\theta) B_3}{2} + \frac{h^2 (3\omega_\xi - \omega_\theta)(\omega_\xi - 3\omega_\theta) C_3}{8a^2} \right.$$

$$- \frac{(\omega_\theta - \omega_\theta) B_1 C_2}{C_1} + \frac{a^2 B_2^2}{C_1}$$

$$\left. - (\omega_\theta + \omega_\xi) B_1 + \frac{(\omega_\theta + \omega_\xi) B_2 C_2}{C_1} - \frac{\omega_\xi \omega_\theta C h_1}{a} + \frac{\omega_\xi \omega_\theta h^2 C_2^2}{a^2 C_1} \right\}$$

$$a_6 = -\gamma \left(B_2 - \frac{B_1 C_2}{C_1} \right)$$

$$a_7 = \omega_\xi A_1 + \omega_\theta A_2 + \left\{ \frac{m^2}{r^2} + \omega_\xi \omega_\theta \right\} \left(B_2 - \frac{B_1 C_2}{C_1} \right) + \gamma B_1$$

$$+ \frac{m^2}{r^2} + \frac{\gamma^2 \omega_\xi h^2 C_1 B_2}{a^2} + \frac{h^2 m^2 (3\omega_\xi - \omega_\theta) C_3}{2a^2 r^2} - \frac{a^2 (\omega_\xi B_1^2 + \omega_\theta B_1 B_2)}{h^2 C_1}$$

$$- \gamma^2 \left(\frac{B_2 C_2}{C_1} + \frac{\omega_\xi h^2 C_2^2}{a^2 C_1} \right)$$

$$a_8 = \{ \omega'_\xi + \gamma (\omega_\xi - \omega_\theta) \} A_1 - \gamma \left(\frac{m^2}{r^2} + \omega_\xi \omega_\theta \right) B_1$$

$$- \frac{\gamma m^2}{r^2} \left\{ \frac{\omega_\xi h^2 C_1}{a^2} + B_3 + \frac{h^2 (3\lambda - \omega_\theta) C_3}{2a^2} \right\} - \frac{h^2 (\omega'_\xi + \gamma \omega_\xi) B_1^2}{a^2 C_1}$$

$$+ \frac{\gamma \omega_\theta h^2 B_2^2}{a^2 C_1} + \gamma \left(\frac{m^2}{r^2} + \omega_\xi^2 \right) \left(\frac{B_1 C_2}{C_1} - B_2 \right)$$

$$+ \frac{\gamma \omega_\xi h^2 m^2 C_2^2}{a^2 r^2 C_1} + \left(\omega_\xi \omega_\theta + \frac{m^2}{r^2} \right) \frac{\gamma B_2 C_2}{C_1}$$

$$a_9 = \frac{B_1}{C_1} + \frac{\omega_\xi h^2}{a^2} \quad a_{10} = \gamma \left(\frac{B_1}{C_1} - \frac{B_2}{C_1} + \frac{\omega_\xi h^2}{a^2} - \frac{\omega_\xi h C_2}{a C_1} \right)$$

$$a_{11} = -\frac{m}{r} \left\{ \frac{A_3}{2} + \frac{(\omega_\theta + \omega_\xi) B_3}{2} + A_2 + \omega_\theta B_2 - \frac{a^2 B_1 B_2}{h^2 C_1} \right.$$

$$\left. - \frac{h(3\omega_\theta - \omega_\xi)(\omega_\theta - 3\omega_\xi) C_3}{a} + \frac{\omega_\theta B_1 C_2}{C_1} \right\}$$

$$a_{12} = -\gamma \frac{m}{r} \left\{ \frac{A_3}{2} + A_1 + (\omega_\xi + \omega_\theta) B_1 + \frac{\omega_\xi \omega_\theta h C_1}{a} - \frac{a^2 B_2^2}{h^2 C_1} \right.$$

$$\left. - \frac{(\omega_\xi + \omega_\theta) B_2 C_2}{C_1} - \frac{\omega_\xi \omega_\theta h^2 C_2^2}{a^2 C_1} \right\} - \frac{m}{r} \left\{ \frac{2\gamma \omega_\xi + \omega'_\xi}{2} \right.$$

$$\left. + (3\gamma \omega_\theta^2 - 6\gamma \omega_\xi \omega_\theta + 7\gamma \omega_\xi^2 - 6\omega_\xi \omega'_\xi + 10\omega'_\xi \omega_\theta) C_3 \right\}$$

$$a_{13} = \frac{A_3}{2} + \frac{3\omega_\theta - \omega_\xi}{2} + \frac{h^2 (3\omega_\theta - \omega_\xi)^2 C_3}{8a^2}$$

$$a_{14} = \frac{\gamma A_3}{2} + \frac{(2\gamma \omega_\xi - \omega'_\xi) B_3}{2} + \frac{h(3\omega_\theta - \omega_\xi)(5\gamma \omega_\xi - 3\gamma \omega_\theta - 2\omega'_\xi) C_3}{8a}$$

$$a_{15} = \frac{(\omega_\xi \omega_\theta - \gamma^2) A_3}{2} + (\gamma \omega'_\xi - 2\gamma^2 \omega_\xi - \omega_\xi^2 \omega_\theta + 3\omega_\xi \omega_\theta^2) B_2$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\omega_\theta m B_1}{r} + \frac{h^2 C_3}{8a^2} (3\omega_\theta - \omega_\xi) (-\omega_\xi^2 \omega_\theta + 3\omega_\xi \omega_\theta^2 - 5\gamma^2 \omega_\xi + 3\gamma \omega_\theta) \\
 & + \gamma \omega'_\xi - \frac{m^2}{r^2} \left\{ A_1 - \frac{a^2 B_2^2}{h^2 C_1} - \frac{2\omega_\theta B_2 C_2}{C_1} + \frac{\omega_\theta^2 h^2}{a^2} \left(C_1 - \frac{C_2^2}{C_1} \right) \right\} \\
 a_{16} = & \frac{m}{r} \left\{ B_3 + \frac{h^2 (3\omega_\theta - \omega_\xi) C_3}{2a^2} \right\} \\
 a_{17} = & \frac{m}{r} \left[\frac{h^2 C_3}{a^2} \{ 3\gamma (\omega_\xi - \omega_\theta) - \omega'_\xi \} + \gamma \left\{ B_1 - \frac{B_2 C_2}{C_1} + \frac{\omega_\theta h^2}{a^2} \left(C_1 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{C_2^2}{C_1} \right) \right\} \right] \\
 a_{18} = & \frac{m}{r} \left[\omega_\xi \omega_\theta B_3 + \frac{h^2 C_3}{2a^2} \lambda^2 \{ 3\omega_\theta^2 \omega_\xi - \omega_\xi^2 \omega_\theta + 3\gamma (\omega_\theta - \gamma) + \gamma \omega'_\xi \} \right. \\
 & - \omega_\xi A_2 + \frac{\omega_\xi a^2 B_2 B_1}{h^2 C_1} - \omega_\theta A_1 + \frac{\omega_\theta a^2 B_2^2}{a^2 C_1} - \left(\frac{m^2}{r^2} + \omega_\theta^2 \right) B_1 \\
 & - \frac{\omega_\theta h^2 m^2 C_1}{a^2 r^2} + \frac{\omega_\theta h^2 C_2^2}{a^2 C_1} + \left(\frac{m^2}{r^2} + \omega_\theta^2 \right) \frac{B_2 C_2}{C_1} - \omega_\xi \omega_\theta B_2 \\
 & \left. + \frac{\omega_\xi \omega_\theta B_1 C_2}{C_1} \right] \\
 a_{19} = & -\frac{m}{r} \left(\frac{B_2}{C_1} + \frac{h^2 \omega_\theta C_2}{a^2 C_1} \right) & a_{20} = & -\gamma B_2 + \frac{\gamma B_1 C_2}{C_1} \\
 a_{21} = & \frac{m^2}{r^2} \left\{ \frac{h^2 (\omega_\theta - 3\omega_\xi) C_3}{2a^2} - B_3 \right\} - \omega_\xi A_1 - \omega_\theta A_2 + \left\{ \omega_\xi \omega_\theta \right. \\
 & \left. - \frac{m^2}{r^2} \right\} B_2 - \gamma^2 \left(B_1 + \frac{\omega_\xi h^2 C_1}{a^2} \lambda^2 + \frac{a^2 (\omega_\xi B_1^2 + \omega_\theta B_2 B_1)}{h^2 C_1} \right) \\
 & - \left(\omega_\xi \omega_\theta - \frac{m^2}{r^2} \right) \frac{B_1 C_2}{C_1} + \gamma^2 \left(\frac{B_2 C_2}{C_1} + \frac{\omega_\xi h^2 C_2^2}{C_1} \right) \\
 a_{22} = & -\frac{h^2 m^2 C_3}{2a^2 r^2} \{ \gamma (\omega_\theta - \omega_\xi) + 3\omega'_\xi \} - \gamma (\omega_\xi A_2 + \omega_\xi^2 B_2 + \omega_\theta A_1) \\
 & + \gamma \left(\omega_\xi \omega_\theta - \frac{m^2}{r^2} + \gamma^2 \right) B_1 + \frac{\gamma h C_1}{a} \left(2\omega_\xi^2 \omega_\theta - \frac{\omega_\xi m^2}{r^2} + \gamma^2 \omega_\xi \right. \\
 & \left. - \gamma \omega'_\xi \right) + \frac{\gamma}{C_1} \left\{ \frac{a^2 (\omega_\xi B_1 B_2 + \omega_\theta B_1^2)}{h^2} + \omega_\xi^2 B_1 C_2 \right\} + \left(\frac{m^2}{r^2} \right. \\
 & \left. - \gamma^2 - \omega_\xi \omega_\theta \right) \frac{\gamma B_2 C_2}{C_1} - \frac{\gamma h^2 C_2^2}{a^2 C_1} \left(2\omega_\xi^2 \omega_\theta - \frac{\omega_\xi m^2}{r^2} - \gamma \omega'_\xi \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \omega_\xi \gamma^2) \\
 a_{23} = & \frac{m}{r} \left\{ B_3 + \frac{h^2 (3\omega_\theta - \omega_\xi) C_3}{2a^2} \right\} \\
 a_{24} = & \frac{m}{r} \left[\frac{h^2 C_3}{2a^2} \{ 3\gamma (\omega_\xi - \omega_\theta) - \omega'_\xi \} - \frac{\gamma \omega_\theta h^2}{a^2} \left(C_1 - \frac{C_2^2}{C_1} \right) - \gamma \left(B_1 \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{B_2 C_2}{C_1} \right) \right] \\
 a_{25} = & \frac{m}{r} \left[\frac{h^2 C_3}{2a^2} \{ -\omega_\xi^2 \omega_\theta + 3\omega_\theta^2 \omega_\xi - 3\gamma^2 (\omega_\xi - \omega_\theta) + \gamma \omega_\xi \} + \omega_\xi \omega_\theta B_3 \right. \\
 & - \omega_\xi A_2 - \omega_\xi \omega_\theta B_2 \omega_\theta A_1 + \frac{h^2 C_1}{a^2} \left(\omega_\xi \omega_\theta^2 - \frac{\omega_\theta m^2}{r^2} - \gamma^2 \omega_\xi + 2\gamma^2 \omega_\theta \right) \\
 & + \left(-\omega_\theta^2 + \omega_\xi \omega_\theta - \frac{m^2}{r^2} + \gamma^2 \right) B_1 + \frac{a^2 (\omega_\xi B_1 B_2 + \omega_\theta B_2^2)}{h^2 C_1} \\
 & + \frac{\omega_\xi \omega_\theta B_1 C_2}{C_1} + \left(\omega_\theta^2 - \omega_\xi \omega_\theta + \frac{m^2}{r^2} - \gamma^2 \right) \frac{B_2 C_2}{C_1} \\
 & \left. + \frac{h^2 C_2^2}{a^2 C_1} \left(-\omega_\xi \omega_\theta + \frac{\omega_\theta m^2}{r^2} + \gamma^2 \omega_\xi - 2\gamma^2 \omega_\theta \right) \right] \\
 a_{26} = & \frac{h^2}{a^2} \left\{ \frac{\gamma^2 (C_1 - C_2^2)}{C_1} + \frac{m^2 C_3}{r^2} \right\} \\
 a_{27} = & -\frac{2\gamma h^2 m^2 C_3}{a^2 r^2} - \frac{\gamma h^2 (2\omega_\xi \omega_\theta + \gamma^2) C_1}{a^2} + \frac{\gamma h^2 (2\omega_\xi \omega_\theta + \gamma^2) C_2^2}{a^2 C_1} \\
 a_{28} = & \frac{2h^2 m^2 (\omega_\xi \omega_\theta + \gamma) C_3}{a^2 r^2} - (\omega_\xi^2 + \omega_\theta^2) A_1 - 2\omega_\xi \omega_\theta A_2 \\
 & + \frac{\omega_\xi^2 a^2 B_1^2}{h^2 C_1} + \left(\omega_\xi^2 \omega_\theta - \frac{2\omega_\xi m^2}{r^2} - \gamma \omega'_\xi \right) B_2 + \left(-\frac{2\omega_\theta m^2}{r^2} \right. \\
 & \left. + \omega_\xi \omega_\theta^2 - \gamma' (\omega_\xi - \omega_\theta) \right) B_1 + \frac{2\omega_\xi \omega_\theta a^2 B_1 B_2}{h^2 C_1} + \left(\frac{2\omega_\xi m^2}{r^2} \right. \\
 & \left. + \gamma \omega'_\xi - \omega_\xi^2 \omega_\theta \right) \frac{B_1 C_2}{C_1} + \frac{8h^2 m^2 C_1}{a^2 r^2} \left(\omega_\xi \omega_\theta - \frac{m^2}{r^2} + 2\gamma^2 \right) \\
 & + \left(\frac{2\omega_\theta m^2}{r^2} - \omega_\xi \omega_\theta^2 + \gamma^2 (\omega_\xi - \omega_\theta) \right) \frac{B_1 C_2}{C_1} \\
 & \left. + \frac{h^2 m^2 C_2^2}{a^2 r^2 C_1} \left(-\omega_\xi \omega_\theta + \frac{m^2}{r^2} - 2\gamma^2 \right) + \frac{\omega_\xi \omega_\theta a^2 B_2^2}{a^2 C_1} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{29} &= \frac{h^2}{a^2} & a_{30} &= \frac{\gamma h^2}{a^2} \left(2 - \frac{C_2}{C_1} \right) \\
a_{31} &= -\frac{\omega_\xi B_1}{C_1} - \frac{\omega_\theta B_2}{C_1} - \frac{\omega_\xi \omega_\theta h^2}{a^2} + \frac{h^2 C_2}{a^2 C_1} \left(\omega_\xi \omega_\theta - \frac{m^2}{r^2} \right) \\
a_{32} &= \frac{a^2 B_1}{h^2} + \omega_\xi C_1 & a_{33} &= \frac{\gamma a^2 B_2}{h^2} + \omega'_\xi C_1 + \gamma \omega_\xi C_2 \\
a_{34} &= \frac{m}{r} \left(\frac{a^2 B_2}{h^2} + \omega_\theta C_3 \right) & a_{35} &= -C_1 \\
a_{36} &= -\gamma C_2 & a_{37} &= \frac{a^2 (\omega_\xi B_1 + \omega_\theta B_2)}{h^2} + \frac{m^2 C_2}{r^2} \\
a_{38} &= -1 \\
C_1 &= 1 & C_2 &= 1 \\
C_3 &= \gamma & C_4 &= -\gamma \\
C_5 &= \frac{m}{r} & C_6 &= -\frac{B_1}{C_1} \\
C_7 &= -\frac{B_1}{C_1} & C_8 &= -\frac{\gamma}{C_1} \left(B_1 - B_2 - \frac{h^2}{a^2} \omega_\xi C_2 \right) \\
C_9 &= -\frac{h^2}{a^2} \gamma \omega_\xi & C_{10} &= \frac{h^2 m}{2a^2 r} (3\omega_\xi - \omega_\theta) \\
C_{11} &= -\frac{\gamma}{C_1} \left\{ B_1 - B_2 + \frac{h^2}{a^2} \omega_\xi (C_1 - C_2) \right\} \\
C_{12} &= -1 & C_{13} &= 1 \\
C_{14} &= -\frac{m}{r} & C_{15} &= 2\gamma \\
C_{16} &= -\frac{m}{r} & C_{17} &= \frac{h^2}{2a^2} (3\omega_\theta - \omega_\xi) \\
C_{18} &= \frac{m}{r C_1} \left(B_2 + \frac{h^2}{a^2} \omega_\theta C_2 \right) & C_{19} &= -\frac{h^2 m}{a^2 r} \omega_\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{20} &= \frac{h^2}{2a^2} \left\{ \gamma (3\omega_\theta + \omega_\xi) - \omega'_\xi \right\} & C_{21} &= \frac{m}{r C_1} \left\{ B_2 - \frac{h^2}{a^2} \omega_\theta (C_1 - C_2) \right\} \\
C_{22} &= -1 & C_{23} &= -\omega_\xi \\
C_{24} &= -\omega_\theta & C_{25} &= -(\omega_\xi + \omega_\theta) \\
C_{26} &= \frac{\gamma h^2 C_2}{a^2 C_1} & C_{27} &= -\frac{h^2}{a^2} \gamma \\
C_{28} &= \frac{2h^2 m}{a^2 r} & C_{29} &= -\frac{h^2}{a^2} \gamma \left(1 - \frac{C_2}{C_1} \right) \\
C_{30} &= \frac{1}{C_1} \left\{ \omega_\xi B_1 + \omega_\theta B_2 - \frac{h^2}{a^2} \left(\omega_\xi \omega_\theta - \frac{m^2}{r^2} \right) C_2 \right\} \\
C_{31} &= \frac{h^2}{a^2} \left(\omega_\xi \omega_\theta - \frac{m^2}{r^2} \right) & C_{32} &= \frac{2\gamma h^2 m}{a^2 r} \\
C_{33} &= \frac{1}{C_1} \left\{ \omega_\xi B_1 + \omega_\theta B_2 + \frac{h^2}{a^2} \left(\omega_\xi \omega_\theta - \frac{m^2}{r^2} \right) (C_1 - C_2) \right\} \\
C_{34} &= -1 & C_{35} &= 1 \\
C_{36} &= 1
\end{aligned}$$

B.2.2 薄肉殻の境界条件

式(5.19)の係数マトリックスに含まれる各係数 $b_1 \sim b_{19}$ および d_1, d_2, d_3 は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
b_1 &= A_1 - \frac{a^2 B_1^2}{h^2 C_1} \\
b_2 &= \gamma \left\{ A_2 - \frac{a^2 B_1 B_2}{h^2 C_1} + \omega_\xi \left(B_2 - \frac{B_1 C_2}{C_1} \right) \right\} \\
b_3 &= \frac{m}{r} \left\{ A_2 - \frac{a^2 B_1 B_2}{h^2 C_1} + \omega_\xi \left(B_2 - \frac{B_1 C_2}{C_1} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$b_4 = -\gamma \left(B_2 - \frac{B_1 C_2}{C_1} \right)$$

$$b_5 = \omega_\xi \left(A_1 - \frac{a^2 B_1^2}{h^2 C_1} \right) + \omega_\theta \left(A_2 - \frac{a^2 B_1 B_2}{h^2 C_1} \right) + \frac{m^2}{r^2} \left(B_2 - \frac{B_1 C_2}{C_1} \right)$$

$$b_6 = B_1 / C_1$$

$$b_7 = -\frac{m}{2r} \left\{ A_3 - \frac{(\omega_\xi - 3\omega_\theta) B_3}{2} \right\} - \frac{h^2 m (3\omega_\xi - \omega_\theta)}{4a^2 r} \left\{ \frac{a^2 B_3}{h^2} - \frac{(\omega_\xi - 3\omega_\theta) C_3}{2} \right\}$$

$$b_8 = \left\{ A_3 + \frac{(3\omega_\theta - \omega_\xi) B_3}{2} \right\} + \frac{h^2 (3\omega_\theta - \omega_\xi)}{a^2} \left\{ \frac{a^2 B_3}{h^2} + (3\omega_\theta - \omega_\xi) C_3 \right\}$$

$$b_9 = \frac{\gamma}{2} \left\{ A_3 + (3\omega_\theta - \omega_\xi) B_3 \right\} - \frac{\gamma h^2 (3\omega_\theta - \omega_\xi)}{4a^2} \left\{ \frac{a^2 B_3}{h^2} + \frac{(3\omega_\theta - \omega_\theta) C_3}{2} \right\}$$

$$b_{10} = \frac{m}{r} B_3 + \frac{h^2 m}{a^2 r} (3\omega_\theta - \omega_\xi) C_3$$

$$b_{11} = -\frac{m}{r} \gamma B_3 - \frac{h^2 m}{a^2 r} \gamma (3\omega_\theta - \omega_\xi) C_3$$

$$b_{12} = -\gamma \left(B_2 - \frac{B_1 C_2}{C_1} \right)$$

$$b_{13} = -\gamma \frac{h^2}{a^2} \left\{ \frac{a^2 B_1}{h^2} - \frac{a^2 B_2 C_2}{h^2 C_2} + \omega_\xi \left(C_1 - \frac{C_2^2}{C_1} \right) \right\} - \frac{h^2 m^2}{a^2 r^2} \lambda^2 \left\{ \frac{a^2 B_3}{h^2} - \frac{(\omega_\theta - 3\omega_\xi) C_3}{2} \right\}$$

$$b_{14} = \frac{hm}{ar} \left\{ \frac{a^2 B_3}{h^2} - \frac{(3\omega_\theta - \omega_\xi) C_3}{2} \right\}$$

$$b_{15} = -\frac{\gamma h^2 m}{a^2 r} \left\{ \frac{a^2 B_1}{h^2} - \frac{a^2 B_2 C_2}{h^2 C_2} + \omega_\theta \left(C_1 - \frac{C_2^2}{C_1} \right) \right\} + \frac{\gamma h^2 m}{a^2 r} \left\{ -\frac{a^2 B_3}{h^2} + \frac{(\omega_\xi - 3\omega_\theta) C_3}{2} \right\}$$

$$b_{16} = \frac{\gamma^2 h^2}{a^2} \left(\frac{a^2 B_1}{h^2} - \frac{a^2 B_2 C_2}{h^2 C_2} \right) + \frac{2hm^2}{ar^2} C_3$$

$$b_{17} = -\frac{\gamma h}{a} \left\{ \omega_\xi \left(\frac{a^2 B_2}{h^2} - \frac{a^2 B_1 C_2}{h^2 C_1} + \omega_\theta \left(\frac{a^2 B_1}{h^2} - \frac{a^2 B_2 C_2}{h^2 C_2} \right) + \frac{m^2}{r^2} \left(C_1 - \frac{C_2^2}{C_1} \right) \right\} - \frac{2\gamma h^2 m^2 C_3}{h^2 r^2}$$

$$b_{18} = \frac{h^2}{a^2}$$

$$b_{19} = \frac{\gamma h^2}{a^2} - \frac{h^2 \gamma C_2}{a^2 C_1}$$

$$d_1 = -(\dot{n}_\xi^{vp} + \dot{n}^t) + \frac{B_1}{C_1} (\dot{m}_\xi^{vp} + \dot{m}^t)$$

$$d_2 = -\dot{n}_{\xi\theta}^{vp} - \frac{h^2 (3\omega_\theta - \omega_\xi)}{2a^2} \dot{m}_{\xi\theta}^{vp}$$

$$d_3 = \frac{\gamma h^2}{a^2} \dot{m}_\theta^{vp} - \frac{\gamma h^2 C_2}{a^2 C_1} \dot{m}_\xi^{vp} - \frac{2h^2 m}{a^2 r} \dot{m}_{\xi\theta}^{vp} + \frac{\gamma h^2}{a^2} \left(1 - \frac{C_2}{C_1} \right) \dot{m}^t$$

B.2.3 厚肉殻の平衡方程式

式(5.26)の係数マトリックス B_1, B_2, \dots, B_8 を以下に示す。

$$B_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_8 & 0 \\ 0 & a_{15} & 0 & 0 & a_{21} \\ 0 & 0 & a_{27} & 0 & 0 \\ a_{33} & 0 & 0 & a_{40} & 0 \\ 0 & a_{47} & 0 & 0 & a_{53} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} a_2 & a_4 & a_6 & a_9 & a_{11} \\ a_{13} & a_{16} & 0 & a_{19} & a_{22} \\ a_{24} & 0 & a_{28} & a_{30} & 0 \\ a_{34} & a_{36} & a_{38} & a_{41} & a_{43} \\ a_{45} & a_{48} & 0 & a_{51} & a_{54} \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} a_3 & a_5 & a_7 & a_{10} & a_{12} \\ a_{14} & a_{17} & a_{18} & a_{20} & a_{23} \\ a_{25} & a_{26} & a_{29} & a_{31} & a_{32} \\ a_{35} & a_{37} & a_{39} & a_{42} & a_{44} \\ a_{46} & a_{49} & a_{50} & a_{52} & a_{55} \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} c_3 & c_4 & c_5 & 0 & c_6 & c_7 \\ 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & c_{14} \\ c_{17} & c_{18} & 0 & 0 & c_{19} & c_{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ c_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_7 = \begin{bmatrix} c_8 & 0 \\ 0 & c_{15} \\ c_{22} & c_{23} \\ c_{35} & 0 \\ c_{37} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{25} & 0 & 0 & 0 & c_{26} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{27} & c_{28} & 0 & c_{29} & c_{30} & c_{31} \\ 0 & c_{35} & c_{35} & c_{36} & 0 & c_{37} \end{bmatrix}, \quad B_{10} = \begin{bmatrix} c_9 & 0 & 0 \\ 0 & c_{16} & 0 \\ 0 & 0 & c_{24} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

上式に含まれる各係数 a_1, a_2, \dots, a_{55} および c_1, c_2, \dots, c_{38} は、次のようになる。

$$\begin{aligned} a_1 &= A_{11} & a_2 &= \gamma A_{11} \\ a_3 &= -\omega_\xi \omega_\theta D_{12} - \gamma^2 A_{22} - \frac{m^2}{2r^2} \bar{A}_{33} - \frac{\omega_\xi^2}{2} A_{44} \\ a_4 &= \frac{m}{r} \left(D_{12} + \frac{D_{33}}{2} \right) & a_5 &= -\frac{m}{r} \gamma \left(A_{22} + \frac{\bar{A}_{33}}{2} \right) \\ a_6 &= \omega_\xi A_{11} + \omega_\theta D_{12} + \frac{\omega_\xi}{2} A_{44} & a_7 &= \omega'_\xi A_{11} + \omega_\xi \gamma A_{11} - \gamma \omega_\xi A_{22} \\ a_8 &= B_{11} & a_9 &= \gamma B_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= -\omega_\xi \omega_\theta E_{12} - \gamma^2 B_{22} - \frac{m^2}{2r^2} \bar{B}_{33} + \frac{\omega_\xi}{2} A_{44} \\ a_{11} &= \frac{m}{r} (E_{12} + E_{33}) & a_{12} &= -\frac{m}{r} \gamma \left(B_{22} + \frac{\bar{B}_{33}}{2} \right) \\ a_{13} &= -\frac{m}{r} \left(\frac{D_{33}}{2} + D_{12} \right) & a_{14} &= -\frac{m}{r} \gamma \left(\frac{\bar{A}_{33}}{2} + A_{22} \right) \\ a_{15} &= \frac{A_{33}}{2} & a_{16} &= \frac{\gamma}{2} A_{33} \\ a_{17} &= \frac{\omega_\xi \omega_\theta D_{33}}{2} - \frac{\gamma^2}{2} \bar{A}_{33} - \frac{m^2}{r^2} A_{22} - \omega_\theta^2 A_{55} \\ a_{18} &= \frac{m}{r} \left(\omega_\theta A_{22} + \omega_\xi D_{12} + \frac{\omega_\theta}{2} A_{55} \right) \\ a_{19} &= -\frac{m}{r} \left(\frac{E_{33}}{2} + E_{12} \right) & a_{20} &= -\frac{m}{r} \gamma \left(\frac{\bar{B}_{33}}{2} + B_{22} \right) \\ a_{21} &= \frac{B_{33}}{2} & a_{22} &= \frac{\gamma}{2} B_{33} \\ a_{23} &= \frac{\omega_\theta A_{55} - \omega_\xi \omega_\theta E_{33} - \gamma^2 \bar{B}_{33}}{2} - \frac{m^2}{r^2} B_{22} \\ a_{24} &= -\frac{\omega_\xi}{2} A_{44} - \omega_\xi A_{11} - \omega_\theta D_{12} \\ a_{25} &= -\frac{\omega'_\xi A_{44} + \omega_\xi A'_{44} + \omega_\xi \gamma A_{44}}{2} - \omega_\xi \gamma D_{12} - \omega_\theta \gamma A_{22} \\ a_{26} &= -\frac{m}{r} \left(\frac{\omega_\theta}{2} A_{55} + \omega_\xi D_{12} + \omega_\theta A_{22} \right) \\ a_{27} &= \frac{A_{44}}{2} & a_{28} &= \frac{\gamma}{2} A_{44} \\ a_{29} &= -\frac{m^2}{2r^2} A_{55} - \omega_\xi^2 A_{11} - \omega_\theta^2 A_{22} - 2\omega_\xi \omega_\theta D_{12} \\ a_{30} &= \frac{A_{44}}{2} - \omega_\xi B_{11} - \omega_\theta E_{12} \\ a_{31} &= \gamma \left(\frac{A_{44}}{2} - \omega_\xi E_{12} - \omega_\theta B_{22} \right) & a_{32} &= \frac{m}{r} \left(\frac{A_{55}}{2} - \omega_\xi E_{12} - \omega_\theta B_{22} \right) \end{aligned}$$

付録B 係数

$$\begin{aligned}
 a_{33} &= -B_{11} & a_{34} &= -\gamma B_{11} \\
 a_{35} &= \omega_\xi \omega_\theta E_{12} - \frac{\omega_\xi}{2} A_{44} + \gamma^2 B_{22} + \frac{m^2}{2r^2} \bar{B}_{33} \\
 a_{36} &= -\frac{m}{r} \left(E_{12} + \frac{E_{33}}{2} \right) & a_{37} &= \frac{m}{r} \gamma \left(B_{22} + \frac{\bar{B}_{33}}{2} \right) \\
 a_{38} &= -\omega_\xi B_{11} - \omega_\theta E_{12} + \frac{A_{44}}{2} \\
 a_{39} &= -\omega'_\xi B_{11} - \gamma \omega_\xi B_{11} + \gamma \omega_\theta B_{22} \\
 a_{40} &= -\frac{h^2}{a^2} C_{11} & a_{41} &= -\frac{h}{a} \gamma C_{11} \\
 a_{42} &= \frac{h^2}{a^2} \left(\omega_\xi \omega_\theta F_{12} + \gamma^2 C_{22} + \frac{m^2}{2r^2} \bar{C}_{33} \right) + \frac{A_{44}}{2} \\
 a_{43} &= -\frac{h^2 m}{a^2 r} \lambda^2 \left(F_{12} - \frac{F_{33}}{2} \right) & a_{44} &= \frac{h^2 n}{a^2 r} \gamma \left(C_{22} + \frac{\bar{C}_{33}}{2} \right) \\
 a_{45} &= \frac{m}{r} \left(\frac{E_{33}}{2} + E_{12} \right) & a_{46} &= \frac{m}{r} \gamma \left(\frac{\bar{B}_{33}}{2} + B_{33} \right) \\
 a_{47} &= -\frac{B_{33}}{2} & a_{48} &= -\frac{\gamma}{2} B_{33} \\
 a_{49} &= \frac{\gamma \bar{B}_{33} - \omega_\xi \omega_\theta E_{33} - \omega_\theta A_{55}}{2} + \frac{m^2}{r^2} B_{22} \\
 a_{50} &= \frac{m}{r} \left(\frac{A_{55}}{2} - \omega_\theta B_{22} - \omega_\xi E_{12} \right) \\
 a_{51} &= \frac{h^2 m}{a^2 r} \left(\frac{F_{22}}{2} + F_{12} \right) & a_{52} &= \frac{h^2 m}{a^2 r} \gamma \left(\frac{\bar{C}_{33}}{2} + C_{22} \right) \\
 a_{53} &= -\frac{h^2}{2a^2} C_{33} & a_{54} &= \frac{h^2}{2a^2} \gamma C_{33} \\
 a_{55} &= -\frac{h^2}{2a^2} \omega_\xi \omega_\theta F_{33} + \frac{A_{55}}{2} + \frac{h^2}{2a^2} \gamma^2 \bar{C}_{33} + \frac{h^2 m^2}{a^2 r^2} C_{22} \\
 c_1 &= 1 & c_2 &= 1
 \end{aligned}$$

B.2. 熱変形方程式

$$\begin{aligned}
 c_3 &= \gamma & c_4 &= -\gamma \\
 c_5 &= \frac{m}{r} & c_6 &= \gamma \\
 c_7 &= \gamma & c_8 &= \omega_\xi \\
 c_9 &= -1 & c_{10} &= 1 \\
 c_{11} &= -\frac{m}{r} & c_{12} &= \gamma \\
 c_{13} &= \gamma & c_{14} &= -\frac{m}{r} \\
 c_{15} &= \omega_\theta & c_{16} &= -1 \\
 c_{17} &= -\omega_\xi & c_{18} &= -\omega_\theta \\
 c_{19} &= -\omega_\xi & c_{20} &= -\omega_\theta \\
 c_{21} &= 1 & c_{22} &= \gamma \\
 c_{23} &= \frac{m}{r} & c_{24} &= -1 \\
 c_{25} &= -\frac{h^2}{a^2} & c_{26} &= -\frac{h^2}{a^2} \\
 c_{27} &= -\frac{h^2}{a^2} \gamma & c_{28} &= \frac{h^2}{a^2} \gamma \\
 c_{29} &= -\frac{h^2 m}{a^2 r} & c_{30} &= -\frac{h^2}{a^2} \gamma \\
 c_{31} &= \frac{h^2}{a^2} \gamma & c_{32} &= 1 \\
 c_{33} &= -\frac{h^2}{a^2} & c_{34} &= -\frac{h^2 m}{a^2 r} \\
 c_{35} &= -\frac{h^2}{a^2} \gamma & c_{36} &= -\frac{h^2}{a^2} \gamma
 \end{aligned}$$

$$c_{37} = -\frac{h^2 m}{a^2 r}$$

$$c_{38} = 1$$

B.2.4 厚肉殻の境界条件

式(7.10)の係数マトリックスに含まれる各係数 $b_1 \sim b_{29}$ および d_1, d_2, \dots, d_5 は、次のようになる。

$$\begin{aligned} b_1 &= A_{11} & b_2 &= \gamma D_{12} & b_3 &= \frac{m}{r} D_{12} \\ b_4 &= \omega_\xi A_{11} + \omega_\theta D_{12} & b_5 &= B_{11} & b_6 &= \gamma E_{12} \\ b_7 &= \frac{m}{r} E_{12} & b_8 &= \frac{a^2}{h^2} B_{11} & b_9 &= \frac{\gamma a^2}{h^2} E_{12} \\ b_{10} &= \frac{a^2 m}{h^2 r} E_{12} & b_{11} &= \frac{a^2}{h^2} (\omega_\xi B_{11} + \omega_\theta E_{12}) & b_{12} &= C_{11} \\ b_{13} &= \gamma F_{12} & b_{14} &= \frac{m}{r} F_{12} & b_{15} &= -\frac{m}{2r} D_{33} \\ b_{16} &= \frac{1}{2} A_{33} & b_{17} &= -\frac{\gamma}{2} D_{33} & b_{18} &= -\frac{m}{2r} E_{33} \\ b_{19} &= \frac{1}{2} B_{33} & b_{20} &= -\frac{\gamma}{2} E_{33} & b_{21} &= -\frac{1}{2} \omega_\xi A_{44} \\ b_{22} &= \frac{1}{2} A_{44} & b_{22} &= \frac{1}{2} A_{44} & b_{24} &= -\frac{a^2 m}{2h^2 r} E_{33} \\ b_{25} &= \frac{a^2}{2h^2} B_{33} & b_{26} &= -\frac{m}{2r} E_{33} & b_{27} &= -\frac{m}{2r} F_{33} \\ b_{28} &= -\frac{1}{2} F_{33} & b_{29} &= -\frac{1}{2} C_{33} \\ d_1 &= \dot{n}_\xi^{vp} + \dot{n}_{\theta\xi} & d_2 &= \dot{m}_\xi^{vp} + \dot{m}_{\theta\xi} & d_3 &= \dot{n}_{\xi\theta}^{vp} \\ d_4 &= \dot{q}_\xi^{vp} d_5 = \dot{m}_{\xi\theta}^{vp} \end{aligned}$$

